

# Dreidimensionale Materialmodellierung von Stahlbeton

Andreas Heuer

Dieses Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die über die engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes hinausgeht, ist ohne schriftliche Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Speicherung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen und Handelsnamen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Bezeichnungen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und deshalb von jedermann benutzt werden dürften.

Soweit in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden ist, kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2007, ISBN 978-3-8167-7445-7

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB

Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

# Dreidimensionale Materialmodellierung von Stahlbeton

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Andreas Heuer

von der Fakultät VI  
“Planen Bauen Umwelt”  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. W. Huhnt
1. Bericht:	Prof. Dr.-Ing. habil. Y. Petryna
2. Bericht:	Prof. Dr.-Ing. habil. R. Harbord
3. Bericht:	Prof. Dr.-Ing. habil. C. Könke

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 22.Juni 2007

Berlin 2007

D83

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung dieser Arbeit . . . . .	4
1.3	Stand der Forschung . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1	Bedeutung in den Bauingenieurdisziplinen . . . . .	15
2.2	Darstellungsweisen in der Kontinuumsmechanik . . . . .	17
2.3	Zeitableitungen . . . . .	18
2.4	Verschiebung, Deformationsgradient, Geschwindigkeitsgradient . . . . .	18
2.5	Polare Zerlegung, Verzerrungstensoren . . . . .	19
2.6	Geschwindigkeitsgradient und Zeitableitung . . . . .	21
2.7	Zerlegung des Deformationsgradienten . . . . .	22
2.8	Bilanzgleichungen . . . . .	24
2.8.1	Massebilanz . . . . .	24
2.8.2	Impulsbilanz . . . . .	26
2.9	Transformationseigenschaften der mechanischen Felder . . . . .	29
2.9.1	Beispiel: rotierende Rechteckscheibe . . . . .	29
2.9.2	Objektivität von Tensoren . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Thermodynamische Grundlagen</b>	<b>35</b>
3.1	Grundlegendes . . . . .	35
3.1.1	Erster Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	36
3.1.2	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	36
3.1.3	Prinzip der inneren Variablen . . . . .	37
3.1.4	Dissipationspotentiale . . . . .	39

<b>4</b>	<b>Materialverhalten von Beton und Stahl</b>	<b>41</b>
4.1	Beton . . . . .	41
4.1.1	Algemeines . . . . .	41
4.2	Einachsige Beanspruchung . . . . .	42
4.2.1	Druckbeanspruchung . . . . .	42
4.2.2	Zugbeanspruchung . . . . .	44
4.3	Mehraxiales Verhalten . . . . .	47
4.4	Zyklisches Verhalten . . . . .	51
4.5	Geschwindigkeitsabhängiges Verhalten . . . . .	52
4.6	Stahl . . . . .	54
4.7	Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Materialtheorien</b>	<b>61</b>
5.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	61
5.2	Elastisches Materialverhalten . . . . .	63
5.3	Plastizität . . . . .	65
5.3.1	Geschichtlicher Abriss . . . . .	65
5.3.2	Grundbegriffe der Plastizität . . . . .	66
5.3.3	Ableitung der tangentialen Steifigkeitsbeziehung . . . . .	68
5.4	Viskoses Materialverhalten . . . . .	68
5.4.1	Viskoplastizität . . . . .	68
5.4.2	Viskoelastizität . . . . .	70
5.5	Schädigung . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Formulierung des Stahlbetonmodells</b>	<b>73</b>
6.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	73
6.2	Betonmodellierung im Druckbereich . . . . .	74
6.2.1	Entwicklung des Nachgiebigkeitstensors . . . . .	76
6.2.2	Einachsige Modellierung . . . . .	77
6.2.3	Mehrachsiges Modellierung . . . . .	79
6.2.4	Simulationen am Materialpunkt . . . . .	91
6.3	Betonmodellierung im Zugbereich . . . . .	95
6.3.1	Anisotropes Rissmodell . . . . .	97
6.3.2	Einachsiges Verhalten . . . . .	98

---

6.3.3	Numerische Simulationen am Materialpunkt . . . . .	101
6.4	Modellierung zeitabhängiger Effekte . . . . .	104
6.5	Betonstahl . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Numerische Umsetzung</b>	<b>109</b>
7.1	Allgemeine Anmerkungen . . . . .	109
7.2	FE-Konzept des Betonmodells . . . . .	109
7.2.1	Lokale Form der Bestimmungsgleichungen . . . . .	110
7.2.2	Schwache Form der Bestimmungsgleichungen . . . . .	111
7.2.3	Räumliche Diskretisierung . . . . .	112
7.2.4	Zeitliche Integration . . . . .	118
7.3	FE-Konzept des Bewehrungsmodells . . . . .	123
7.3.1	Lokale Elementmatrix der Bewehrungselemente . . . . .	123
7.3.2	Verbund zwischen Beton und Bewehrung . . . . .	126
<b>8</b>	<b>Beispielberechnungen</b>	<b>131</b>
8.1	Allgemeine Anmerkungen . . . . .	131
8.2	Geometrisch nichtlineare Berechnung eines Würfels . . . . .	132
8.3	Patchtest bei inelastischem Materialverhalten . . . . .	135
8.3.1	Konstante longitudinale Dehnung . . . . .	135
8.3.2	Konstante Gleitung . . . . .	137
8.4	Benchmarktest an einem Stahlbalken . . . . .	139
8.5	Unbewehrter Betonbalken . . . . .	142
8.6	Stahlbetonrahmen . . . . .	145
8.7	Durchstanzversuch . . . . .	149
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>153</b>
9.1	Zusammenfassung . . . . .	153
9.2	Ausblick . . . . .	154
<b>A</b>	<b>Integralsätze</b>	<b>157</b>
A.1	Integralsätze von Gauß, Green und Stokes . . . . .	157
A.2	Green'scher Integralsatz (Gradienten-Theoreme) . . . . .	158
A.3	Gauß'scher Integralsatz (Divergenz-Theoreme) . . . . .	158
A.4	Stokes'scher Integralsatz (Rotations-Theoreme) . . . . .	159
A.5	Reynold'sches Transporttheorem . . . . .	159

<b>B</b>	<b>Ergänzende Formeln zum Betonmodell</b>	<b>161</b>
B.1	Konstanten für $k_{ty2}(\tilde{\sigma}_m)$ . . . . .	161
<b>C</b>	<b>Schreibweise</b>	<b>165</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>171</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>183</b>