

# Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Biegebauteilen unter Berücksichtigung des Verbundverhaltens

T 3065

**T 3065**

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

Im Originalmanuskript enthaltene Farbvorlagen, wie z.B. Farbfotos, können nur in Grautönen wiedergegeben werden. Liegen dem Fraunhofer IRB Verlag die Originalabbildungen vor, können gegen Berechnung Farbkopien angefertigt werden. Richten Sie Ihre Anfrage bitte an die untenstehende Adresse.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2005, ISBN 3-8167-6731-1

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

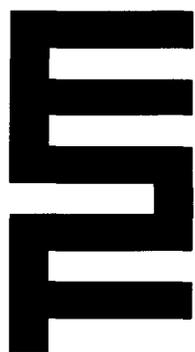
Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.IRBbuch.de](http://www.IRBbuch.de)



TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN  
INSTITUT FÜR BAUSTOFFE UND KONSTRUKTION  
LEHRSTUHL FÜR MASSIVBAU

## **Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Biegebauteilen unter Berücksichtigung des Verbundverhaltens**

Konrad Zilch  
Gerhard Zehetmaier

Forschungsbericht  
Dezember 2004

gefördert durch das  
Deutsche Institut für Bautechnik  
P 32-5-19.42-1025/02

Technische Universität München  
Institut für Baustoffe und Konstruktion  
Lehrstuhl für Massivbau  
Univ.- Prof. Dr.- Ing. K. Zilch

**Briefanschrift:**  
80290 München

**Hausanschrift:**  
Gebäude N6  
Theresienstraße 90  
80333 München

**Tel.:** +49 / 89 / 289 – 23039  
**Fax.:** +49 / 89 / 289 – 23046  
**e-mail:** [massivbau@mb.bv.tum.de](mailto:massivbau@mb.bv.tum.de)

## **Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Biegebauteilen unter Berücksichtigung des Verbundverhaltens**

Im Rahmen des Forschungsvorhabens werden Verbundbeiwerte für klebarmierte Stahlbetonbauteile entwickelt, die eine Berücksichtigung der Auswirkungen unterschiedlicher Verbundeigenschaften bei der Spannungsermittlung zulassen.

Gegenüber einer angenommenen Dehnungsverteilung auf Basis der Hypothese nach *Bernoulli* treten bei biegebeanspruchten Bauteilen zum Teil signifikante Abweichungen auf, die auf die deutlichen Unterschiede in den Verbundeigenschaften der Bewehrungsstränge zurückzuführen sind. Das spröde Verbundverhalten aufgeklebter Bewehrung erfordert zudem die durchgängige Verfolgung des Zugkraftaufbaus im querkraftbeanspruchten Bereich. Dem entsprechend wird anstelle üblicher, allerdings nicht hinreichender Zugstabmodelle ein Rechenmodell für biegebeanspruchte Bauteile zur numerisch-iterativen Ermittlung der Zugkraftaufteilung bei Verzicht auf die *Bernoulli*-Hypothese entwickelt. Als Grundlage der Abbildung des Zusammenwirkens von einbetonierter und angeklebter Bewehrung in Rechenmodellen dienen umfangreiche experimentelle Untersuchungen an Dehnkörpern und Plattenstreifen.

Aufbauend auf analytischen Lösungen der Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes für einbetonierte und angeklebte Bewehrung in Kombination mit den Ergebnissen des Rechenmodells können Verbundbeiwerte abgeleitet werden. Die als analytische Ausdrücke sowie vereinfacht in Diagrammform angegebenen Beiwerte erfassen die baupraktisch relevanten Kombinationen von Stahllaschen oder CFK-Lamellen mit geripptem oder glattem Betonstahl.

## **Distribution of cross sectional tensile forces in flexural RC members strengthened with externally bonded reinforcement with respect to bond behavior**

In this report bond coefficients for the calculation of reinforcement stresses in RC-members strengthened with externally bonded reinforcement are developed. With the bond coefficients it is possible to take into account the effects of the differences in bond behavior between embedded and externally bonded reinforcement.

Due to the bond behavior the reinforcement strains in strengthened flexural members differ significantly from the assumed values according to the *Bernoulli*-constraint that postulates even cross sections. Furthermore the brittle bond behavior requires the continuous bond-verification of the externally bonded reinforcement in regions subjected to shear forces. As a consequence the use of common models based on axially loaded strengthened RC-prisms is not sufficient. In this report the development of a numerical model for strengthened flexural members is presented that does not take into account the *Bernoulli*-constraint. Results from experimental research on the interaction of embedded and externally bonded reinforcement in axially loaded prisms as well as in flexural members form the fundamentals of the numerical simulation.

On the basis of an analytical solution of the differential equation of bond combined with results from numerical calculations bond coefficients are derived. The coefficients - given in the form of analytical expressions and diagrams - represent all relevant combinations of prefabricated CFRP-strips and steel plates with ribbed or smooth reinforcing bars.

## **Répartition de la force de traction des éléments de construction fléchis renforcés par des armatures externes collées compte tenu du comportement de l'adhérence**

Dans le cadre du projet de recherche, des coefficients d'adhérence ont été développés pour les éléments de construction renforcés par des armatures externes collées. Ceux-ci permettent une prise en compte des conséquences de différentes propriétés de l'adhérence lors de la détermination des contraintes. Comparé à une répartition de l'allongement conventionnelle sur base de l'hypothèse de *Bernoulli*, des anomalies parfois significatives apparaissent pour les éléments de construction fléchis. Ces anomalies sont dues aux nettes différences présentes au niveau des propriétés de l'adhérence des barres d'armature. Le comportement fragile de l'adhérence de l'armature collée exige en outre la poursuite constante de la structure de traction dans la zone soumise à la force transversale. C'est pourquoi, à la place du modèle des barres tendues habituel mais insuffisant, on a développé un modèle de calcul pour les éléments de construction fléchis par détermination numérique-itérative de la répartition de la force de traction en renonçant à l'hypothèse de *Bernoulli*. De nombreuses recherches expérimentales sur les corps extensibles et les lamelles servent de base à la reproduction de l'interaction de l'armature

bétonnée et collée dans le modèle de calcul. Sur base des solutions analytiques des équations différentielles de l'adhérence mobile pour une armature bétonnée et collée en combinaison avec les résultats du modèle de calcul, on peut dériver des coefficients d'adhérence. Les coefficients indiqués comme expressions analytiques et simplifiés sous forme de diagramme englobent les combinaisons de construction pertinentes d'éclisses en acier ou de lamelles de fibres de carbone avec du béton armé nervuré ou lisse.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Hintergrund .....	1
1.2	Ziele und Lösungsansatz .....	3
1.3	Inhalt - Überblick und Abgrenzung .....	3
<b>2</b>	<b>Zusammenwirken von Bewehrungssträngen - Grundlagen und Stand des Wissens</b> .....	<b>5</b>
2.1	Grundlagen .....	5
2.1.1	Beschreibung von Zugkraftaufteilung und Zugkraftumlagerung ...	5
2.1.2	Sensitivität gegenüber Verbundunterschieden .....	7
2.1.3	Grundlagen der mathematischen Beschreibung .....	8
2.2	Zugkraftaufteilung und -umlagerung bei vorgespannten Bauteilen .....	10
2.2.1	Experimentelle Untersuchungen .....	10
2.2.2	Modellierung des Zusammenwirkens von Betonstahl und Spannstahl	10
2.3	Versuche zum Zusammenwirken bei klebarmierten Bauteilen .....	11
2.3.1	Versuche an der TU Braunschweig .....	11
2.3.2	Versuche an der Hokkaido University .....	13
2.3.3	Versuche an der Universität Gent .....	15
2.3.4	Weitere Versuche .....	15
2.4	Rechenmodelle zur Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Bauteilen .....	17
2.4.1	Zugkraftaufteilung nach Holzenkämpfer .....	17
2.4.2	Zugkraftaufteilung nach Ulaga .....	18
2.5	Zugkraftaufteilung nach Richtlinien und Zulassungsbescheiden .....	21
2.6	Ausgangssituation .....	22
<b>3</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b> .....	<b>25</b>
3.1	Vorbemerkung .....	25
3.2	Versuchsprogramm .....	25
3.2.1	Parameter .....	26
3.2.2	Bezeichnungen .....	26
3.3	Überblick über die Hauptversuche .....	28
3.3.1	Versuche an gemischt bewehrten Dehnkörpern .....	28
3.3.2	Versuche an verstärkten Plattenstreifen .....	30
<b>4</b>	<b>Grundlagen der Modellbildung</b> .....	<b>33</b>
4.1	Materialmodelle .....	33
4.1.1	Beton - Druckbeanspruchung .....	33
4.1.2	Beton - Zugbeanspruchung .....	38
4.1.3	Betonstahl .....	40
4.1.4	Klebarmierung .....	41
4.2	Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung .....	42
4.2.1	Vorbemerkung .....	42
4.2.2	Verbundtragmechanismen und Versagensarten .....	42

4.2.3	Ermittlung des Verbundverhaltens in Versuchen .....	43
4.2.4	Vorliegende Verbundmodelle .....	46
4.2.5	Abbildung des Verbundverhaltens .....	49
4.3	Verbundverhalten aufgeklebter Bewehrung .....	52
4.3.1	Mechanismen, Prüfverfahren und Einflussgrößen .....	52
4.3.2	Vorliegende Verbundmodelle .....	55
4.3.3	Abbildung des Verbundverhaltens angeklebter Bewehrung .....	60
4.4	Energiebetrachtung von Verbundproblemen .....	62
4.4.1	Allgemeines zu Verbundenergiebetrachtungen .....	62
4.4.2	Konkretisierung für einbetonierten Betonstahl .....	62
4.4.3	Konkretisierung für aufgeklebte Bewehrung .....	63
4.5	Kompatibilitätsbedingungen .....	64
4.5.1	Zentrische Zugbeanspruchung .....	64
4.5.2	Reine Biegung .....	65
4.5.3	Biegung und Querkraft .....	65
4.5.4	Übertragbarkeit der Kompatibilitätsbedingungen auf reales Bauteilverhalten .....	66
4.6	Rissbildung bei klebarmierten Stahlbetonbauteilen .....	68
4.6.1	Grundlagen .....	68
4.6.2	Annahmen und Idealisierungen .....	71
4.6.3	Rissbildung bei zentrisch zugbeanspruchten Bauteilen .....	74
4.6.4	Rissbildung bei biegebeanspruchten Bauteilen .....	77
4.7	Abgrenzung .....	80
<b>5</b>	<b>Zusammenwirken der Bewehrungsstränge bei Dehnkörpern .....</b>	<b>83</b>
5.1	Vorbemerkung .....	83
5.2	Abbildung des Zusammenwirkens bei Dehnkörpern .....	84
5.2.1	Grundlagen und Rechenmodell .....	84
5.2.2	Auswirkungen lokaler Effekte auf das Zusammenwirken .....	85
5.2.3	Abbildung lokaler Effekte im Rechenmodell .....	87
5.2.4	Randbedingungen - Rissbildungsstadien .....	88
5.2.5	Kopplung einbetonierter Bewehrungsstränge mit unterschiedlichen Verbundbedingungen; Lasteinleitung .....	90
5.3	Auswertung der Dehnkörperversuche .....	94
5.3.1	Versuche mit vorgegebenem Initialriss .....	94
5.3.2	Versuche mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild .....	98
5.4	Vergleich von Versuchsergebnissen und Rechenmodell .....	100
<b>6</b>	<b>Zusammenwirken bei biegebeanspruchten Bauteilen - Rechenmodell 105</b>	
6.1	Vorbemerkung .....	105
6.2	Grundzüge der Modellierung .....	106
6.2.1	Umfang, Systemkenngrößen .....	106
6.2.2	Annahmen und Idealisierungen .....	107
6.2.3	Grenzen des Rechenmodells .....	108
6.3	Konzeption des Rechenmodells - Kompatibilitätsbedingungen .....	108
6.3.1	Elementierung .....	108
6.3.2	Kompatibilitätsbedingungen auf Systemebene .....	109
6.3.3	Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen auf Elementebene .....	110
6.3.4	Kopplung der Elemente .....	111
6.3.5	Dehnungs- und Verschiebungszustände der Bewehrungsstränge auf Elementebene .....	112
6.3.6	Einfluss der Querkraft auf die Gurtkräfte .....	114
6.4	Rechentechnische Umsetzung .....	117
6.4.1	Ablauf und Steuerung der Berechnung .....	117
6.4.2	Ablauf und Steuerung auf Elementebene .....	120
6.4.3	Iterationskonzepte und Konvergenzkriterien .....	120
6.5	Nachrechnung von Versuchen - Modellverifikation .....	123

6.5.1	Allgemeines .....	123
6.5.2	Eigene Versuche .....	123
6.5.3	Weitere Versuche .....	127
6.5.4	Berechnung von Versagenslasten.....	131
6.5.5	Zusammenfassung .....	131
<b>7</b>	<b>Numerische Untersuchungen zum Zusammenwirken bei biegebeanspruchten Bauteilen</b> .....	<b>133</b>
7.1	Umfang und Grundlagen .....	133
7.1.1	Ziele und Methodik .....	133
7.1.2	Referenzsysteme und Parameterbereich.....	134
7.1.3	Bezugs- und Vergleichsgrößen .....	136
7.2	Einfluss von Material- und Querschnittskenngrößen .....	139
7.3	Einfluss von Systemkenngrößen.....	142
7.4	Auswirkungen der Querkraftbeanspruchung .....	143
7.4.1	Auswirkungen auf Elementebene .....	143
7.4.2	Auswirkungen auf Systemebene .....	144
7.5	Zusammenfassung .....	145
<b>8</b>	<b>Spannungsermittlung bei biegebeanspruchten Bauteilen</b> .....	<b>147</b>
8.1	Vorbemerkung .....	147
8.2	Grundlagen und Konzepte für Verbundbeiwerte .....	148
8.2.1	Stadien des Zusammenwirkens .....	148
8.2.2	Konzept für Verbundbeiwerte .....	150
8.3	Lösungen für maßgebende Beanspruchungszustände .....	151
8.3.1	Einzelriss - Maximalwert $\delta_{Lk,max}$ .....	151
8.3.2	Entkopplungsbeginn - $\delta_{Lk,e}$ .....	152
8.3.3	Übergangsbereich .....	154
8.3.4	Weitere Beanspruchungsstadien - Querkraftbeanspruchter Bereich .....	154
8.4	Verbundbeiwerte - Näherungen .....	156
8.4.1	Maßgebende Verbundbeiwerte.....	156
8.4.2	Einheiten der Eingangsgrößen und Beiwerte - Bezugspunkte .....	157
8.4.3	Anrechnung des Verbundbereichs einbetonierter Bewehrung .....	157
8.5	Vergleich mit Versuchs- und Rechenergebnissen.....	160
8.5.1	Gegenüberstellung mit Rechenergebnissen .....	160
8.5.2	Vergleich mit Versuchsergebnissen .....	161
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	<b>163</b>
	<b>Bezeichnungen</b> .....	<b>167</b>
	<b>Literatur</b> .....	<b>173</b>
<b>A</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen - Materialkenngrößen</b> .....	<b>183</b>
<b>B</b>	<b>Zusammenwirken bei Dehnkörpern</b> .....	<b>187</b>
B.1	Eingangsgrößen der Versuchsauswertung .....	187
B.2	Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten .....	190
<b>C</b>	<b>Zusammenwirken der Bewehrungsstränge bei biegebeanspruchten Bauteilen</b> .....	<b>197</b>
C.1	Rechenmodell - Dehnungs- und Verschiebungszustände auf Elementebene .....	197
C.1.1	Klebearmierung .....	197
C.1.2	Betonstahl .....	202
C.2	Zusammenstellung von Eingangsdaten zur Versuchsnachrechnung .....	205
C.3	Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten .....	209

X Inhaltsverzeichnis

<b>D</b>	<b>Betonkenngrößen - Bezeichnungen, Umrechnung</b> .....	215
	D.1 Betondruckfestigkeit .....	215
	D.2 Betonzugfestigkeit .....	217

## Einleitung

Die Wiederherstellung oder Erhöhung der Biege- und Querkrafttragfähigkeit durch das Aufkleben flächiger Bewehrungselemente eröffnet in vielen Fällen eine wirtschaftliche Alternative für das Verstärken von Betonbauteilen. Mit dem ersten, am 1. Oktober 1979 vom Deutschen Institut für Bautechnik erteilten Zulassungsbescheid für das Verstärken mit aufgeklebten Stahllaschen (DIBt 1979) wurde dem damaligen Antragsteller, dem Züricher Ingenieurbüro *Tausky*, ein stark empirisch geprägtes Bemessungskonzept auf Grundlage der Forschungsergebnisse nach (L'Hermite 1967) und (Bresson 1971) an die Hand gegeben (vgl. Tausky 1993). In der Zwischenzeit wurden beachtliche Anstrengungen unternommen, um mechanisch fundierte und experimentell belegte Modellvorstellungen und Nachweisformate zu entwickeln.

Das den aufgeklebten Bewehrungselementen eigene, im Vergleich zum duktilen Verbund einbetonierter Bewehrung äußerst spröde Verbundverhalten erfordert eine gegenüber den gebräuchlichen Modellen des Stahlbetonbaus erweiterte und präziserte Beschreibung. Als wesentlicher Schritt zur rechnerischen Erfassung des Verbundverhaltens ist die bruchmechanisch begründete Formulierung eines abschnittsweise linearen Verbundansatzes in (Holzenkämpfer 1994) zu sehen. Die Verbundeigenschaften aufgeklebter Bewehrung erfordern im Unterschied zum Vorgehen bei einbetoniertem Betonstahl bei Biegeträgern die durchgängige Verfolgung des Zugkraftaufbaus in querkraftbeanspruchten Bereichen ausgehend von der Endverankerung am auflagernächsten Riss. Wesentliche Lücken in den vorliegenden Bemessungsmodellen konnten hier durch die Formulierung von Konzepten zum Zugkraftdeckungsnachweis nach (Neubauer 2000; Niedermeier 2001) geschlossen werden.

Im Zentrum der nach wie vor beachtlichen internationalen Forschungsanstrengungen steht neben der Beschreibung des Tragverhaltens verstärkter Bauteile vor allem die Quantifizierung der durch unterschiedliche Versagensmechanismen beschränkten Tragfähigkeit. Beträchtliche Wissensdefizite bestehen allerdings noch bei der sowohl qualitativen als auch quantitativen Beschreibung der Auswirkungen, die die Kombination von einbetoniertem Betonstahl und aufgeklebten Bewehrungselementen mit *per se* stark voneinander abweichenden Verbundeigenschaften nach sich zieht. Neben Aspekten der Gebrauchstauglichkeit werden dadurch insbesondere auch Fragen der Tragfähigkeit berührt.

### 1.1 Hintergrund

Nahezu allen Bemessungsmodellen für klebarmierte Bauteile - sowohl auf nationaler wie auch auf internationaler Ebene - ist die Annahme gemein, dass auch bei verstärkten balkenartigen Bauteilen von der Gültigkeit der Hypothesen nach *Bernoulli* und *Navier* ausgegangen werden kann. Die Voraussetzung einer ebenen Dehnungsverteilung zur Ermittlung der Dehnungen bzw. der Teilzugkräfte verschiedener Bewehrungsstränge gilt allerdings nur bei Vorliegen spezifischer Rahmenbedingungen - unter anderem identischer

Verbundeigenschaften, übereinstimmender Verhältniswerte von Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamem Umfang und gleicher Abstände zur neutralen Achse des Querschnittes. Sofern diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, weichen die Dehnungen der Bewehrungsstränge in gerissenen Querschnitten mehr oder minder deutlich von den nach *Bernoulli* und *Navier* ermittelten Größen ab.

Für teilweise vorgespannte Bauteile, bei denen ebenfalls Bewehrungsstränge mit unterschiedlichen Verbundeigenschaften kombiniert werden, konnten auf der Grundlage breit angelegter experimenteller und theoretischer Forschungen Modelle zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Verbundverhaltens geschaffen werden, die mittlerweile Eingang in die Normung gefunden haben.

Allerdings können die für Spannbetonbauteile entwickelten Methoden und Modelle, die unmittelbar an die Verhältnisse bei Zugstäben anknüpfen (z.B. Trost u. a. 1980; Tue 1993), nicht uneingeschränkt auf klebarmierte Bauteile übertragen werden. Hier werden im Unterschied zu vorgespannten Bauteilen verbundbedingte Zugkraftunterschiede nicht mehr nur bei Nachweisen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit bzw. bei Ermüdungsnachweisen relevant, sondern beeinflussen unmittelbar die durch Klebeverbundentkopplung dominierte Traglast. So ist etwa im Kontext eines Zugkraftdeckungs-nachweises das Zusammenwirken im gesamten querkraftbeanspruchten Bereich relevant. Die bei Spannbetonbauteilen übliche Betrachtung des höchstbeanspruchten Bereichs oder die Voraussetzung eines Einzelrisses, damit die Adaption der Zugstabanalogie unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen, die für ein Element zwischen zwei Rissen bzw. für den Einzelrissquerschnitt eines Zugstabes vorausgesetzt werden können, ist daher für klebarmierte Bauteile nicht hinreichend. Insbesondere am auflagnächsten Biegeriss - der Endverankerung des Klebarmierungsstranges - sind deutlich abweichende Verhältnisse zu erwarten. Darüber hinaus kann angesichts der Querschnitte von Tragelementen des üblichen Hochbaus - z.B. der für Verstärkungsaufgaben relevanten Deckenplatten - nicht mehr *a priori* von ähnlichen Hebelarmen ausgegangen werden.

Die derzeit vorliegenden Rechenmodelle zur Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Bauteilen basieren in Analogie zu Modellen für Spannbetonbauteile auf Zugstabbetrachtungen und sind wegen der wenigen bisher durchgeführten Versuche zur Problematik des Zusammenwirkens experimentell nur in geringem Umfang belegt. Vereinfachte, für eine baupraktische Anwendung aufbereitete Verfahren zur Anrechnung verbundbedingter Abweichungen der Zugkraftanteile werden derzeit nur in (Ulaga 2003) und (SIA 166 2004) präsentiert. Während in der erstgenannten Arbeit allerdings nur obere und untere Grenzwerte möglicher Verbundbeiwerte angegeben werden, wird normativ ein pauschaler, nicht nach Randbedingungen differenzierter und primär für den Grenzzustand der Tragfähigkeit abgeleiteter Verbundbeiwert zur Verfügung gestellt.

Der Verzicht auf eine Berücksichtigung von Interaktionen angeklebter und einbetonierter Bewehrung in aktuellen Richtlinien und Zulassungsbescheiden des Deutschen Instituts für Bautechnik (DIBt) führt zudem zu erheblichen Wirtschaftlichkeitseinbußen insbesondere bei Endverankerungsnachweisen. Da nach den in Zulassungen verankerten Modellen Zugkraftumlagerungen von der aufgeklebten zur einbetonierten Bewehrung, die durch lokal begrenzte Klebeverbundentkopplungen ausgelöst werden, ebenso wie Abweichungen von einer ebenen Dehnungsverteilung nicht abgebildet werden können, ist ein Nachweis vor allem bei Bewehrungselementen mit großer Dehnsteifigkeit, also insbesondere bei Stahllaschen, in vielen Anwendungsfällen - im Widerspruch zu experimenteller Erfahrung - nicht mehr möglich. Im Rahmen eines vom DIBt zusammen mit einem Industriepartner geförderten Forschungsvorhabens wurde aufbauend auf experimentellen und theoretischen Untersuchungen ein Konzept zum Nachweis der Zugkraftdeckung am auflagnächsten Riss biegebeanspruchter Bauteile erarbeitet, das verbundbedingte Abweichungen gegenüber der *Bernoulli*-Hypothese berücksichtigt und gleichzeitig die Anrechnung von Zugkraftumlagerungen zulässt (vgl. Zilch u. a. 2004).

## 1.2 Ziele und Lösungsansatz

Im Rahmen des Forschungsprojektes werden in Anlehnung an die gängige Praxis des Spannbetonbaus Verbundbeiwerte entwickelt, die eine einfache Berücksichtigung der Auswirkungen unterschiedlichen Verbundverhaltens der Bewehrungsstränge bei verstärkten Bauteilen - insbesondere im Rahmen eines Zugkraftdeckungsnachweises angelehnt an (Niedermeier 2001) - ermöglichen.

Zur Abbildung biegebeanspruchter, klebarmierter Stahlbetonbauteile wird ein Rechenmodell entwickelt, das basierend auf einer Systembetrachtung die explizite Verfolgung des Zusammenwirkens im querkraftbeanspruchten Bereich zulässt. Die bei Biegeträgern relevanten Auswirkungen unterschiedlicher Abstände der Bewehrungsstränge zur neutralen Achse des Querschnitts wie auch die Einflüsse aus dem Zugkraftaufbau bzw. dem lokal vorliegenden Dehnungsniveau können abgebildet werden. Als experimentelle Grundlage des Rechenmodells dienen Versuche an verstärkten Dehnkörpern, die von den Verfassern im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten, grundlagenorientierten Forschungsvorhabens durchgeführt wurden. Ergänzend werden die im Zuge des Forschungsprojekts zur Entwicklung von Zugkraftdeckungsnachweisen für den auflagnächsten Biegeriss durchgeführten Dehnkörperversuche herangezogen. Die Überprüfung der verwendeten Modelle und Verträglichkeitsbedingung erfolgt anhand von Versuchen an biegebeanspruchten Bauteilen.

Die auf experimentellem und theoretischem Weg gewonnenen Erkenntnisse dienen als Grundlage für die Entwicklung einfach handhabbarer, unmittelbar auf analytischen Lösungen der Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes aufbauender Verbundbeiwerte. Durch das in den Versuchen überprüfte breite Parameterspektrum gelingt die Ableitung von Beiwerten für die derzeit baupraktisch relevanten Kombinationen von CFK-Lamellen und Stahllaschen mit geripptem und glattem Betonstahl.

## 1.3 Inhalt - Überblick und Abgrenzung

Neben einer Zusammenfassung der mechanischen Grundlagen bietet Kapitel 2 einen Überblick über die bisher erzielten Erkenntnisse und Modelle zum Zusammenwirken bei klebarmierten Bauteilen. Kapitel 3 gibt eine kurze Zusammenfassung der zur Auswertung bzw. Verifikation herangezogenen, von den Verfassern durchgeführten Versuche wieder.

In Kapitel 4 werden die für eine rechnerische Modellierung des Tragverhaltens verstärkter Bauteile erforderlichen Grundlagen erläutert. Neben der Beschreibung von Materialmodellen nimmt angesichts der dominierenden Rolle im Hinblick auf das Zusammenwirken die Entwicklung von Verbundmodellen einbetonierter und angeklebter Bewehrung breiten Raum ein. Die notwendigen Grundlagen werden durch wesentliche Zusammenhänge für die Energiebetrachtung von Verbundproblemen, theoretisch begründete Kompatibilitätskriterien sowie Modelle zur Rissbildung klebarmierter Stahlbetonbauteile vervollständigt.

Auf Grundlage der Versuchsergebnisse an Dehnkörpern werden in Kapitel 5 in Kombination mit einer rechnerischen Abbildung zentrisch zugbeanspruchter Bauteile Verträglichkeitsbedingungen zur Kopplung der Bewehrungsstränge in Rissquerschnitten abgeleitet. In Kapitel 6 werden die grundlegenden Algorithmen eines Programmsystems zur iterativen, numerischen Systemberechnung biegebeanspruchter klebarmierter Bauteile basierend auf wirklichkeitsnahen nichtlinearen Material- und Verbundmodellen erläutert. Die Verifizierung des als *diskretes Rissmodell* konzipierten Rechenmodells, das unter Verzicht auf die Hypothesen nach *Bernoulli* und *Navier* Verträglichkeitsbedingungen explizit erfüllt, erfolgt anhand eigener sowie in der Literatur dokumentierter Bauteilversuche.

Die in Kapitel 7 wiedergegebenen, mit dem Rechenmodell durchgeführten numerischen Parameterstudien erlauben die Identifikation wesentlicher Abhängigkeiten und Einflussparameter auf das Zusammenwirken. Gleichzeitig dienen die hier gewonnenen Ergebnisse zur Verifikation der in Kapitel 8 entwickelten Verbundbeiwerte. Neben der Erläuterung des Grundgedankens zur Ableitung von Beiwerten werden Herleitung und Vergleich der

mit den Verbundbeiwerten errechneten Dehnungen mit Rechen- und Versuchsergebnissen wiedergegeben.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten experimentellen und theoretischen Untersuchungen erstrecken sich auf die gegenwärtig gebräuchlichsten Klebarmierungstypen - Stahlaschen und kohlenstofffaserverstärkte Kunststofflamellen (CFK-Lamellen) - in Kombination mit einbetonierter gerippter oder glatter Bewehrung. Dabei beschränken sich die Betrachtungen auf statisch wirkende, kurzzeitige Belastungen; Auswirkungen langandauernder und wiederholter Lasten werden generell ausgeklammert. Die Modelle spiegeln darüber hinaus durch die Annahme nicht vorbelasteter einbetonierter Bewehrung die Versuchsrandbedingungen wieder.

## Zusammenwirken von Bewehrungssträngen - Grundlagen und Stand des Wissens

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Beschreibung von Zugkraftaufteilung und Zugkraftumlagerung

Zur Darstellung und Quantifizierung der verbundbedingten Abweichungen der Rissdehnungen bzw. -spannungen von den Größen nach Zustand II wurden im Rahmen der Untersuchung teilweise vorgespannter Bauteile verschiedene bezogene Kenngrößen eingeführt. Die in der Literatur angegebenen Kennwerte - im Rahmen der vorliegenden Arbeit sinngemäß auf klebarmierte Bauteile übertragen - unterscheiden sich zum einen in ihrer Bezugsgröße, zum anderen in ihrer Abhängigkeit von den jeweils vorliegenden Dehnsteifigkeitsverhältnissen und können in drei Kategorien unterschieden werden.

- Verhältnis der tatsächlichen Dehnungen der Bewehrungsstränge im Rissquerschnitt (Index  $sr$  bzw.  $Lr$ ) unter Berücksichtigung der Verbundunterschiede:

$$\delta_L = \frac{\epsilon_{Lr}}{\epsilon_{sr}} \quad (2.1)$$

- Verhältnis der tatsächlichen Rissdehnung zur rechnerischen Dehnung nach Dehnungsebeneheit (Hochzeiger  $II$ ):

$$\eta_s = \frac{\epsilon_{sr}}{\epsilon_s^{II}} \quad \text{bzw.} \quad \eta_L = \frac{\epsilon_{Lr}}{\epsilon_L^{II}} \quad (2.2)$$

- Verhältnis der mittleren Dehnung eines Bewehrungsstranges zur tatsächlichen Rissdehnung:

$$\kappa_s = \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{sr}} \quad \text{bzw.} \quad \kappa_L = \frac{\epsilon_{Lm}}{\epsilon_{Lr}} \quad (2.3)$$

Als Grundlage der in einem Großteil aktueller Normenwerke angegebenen Verfahren zur Bestimmung der Rissdehnungen bei Spannbetonbauteilen dient die Formulierung entsprechend Gl. (2.1) bei Substitution von  $\epsilon_{Lr}$  durch  $\Delta\epsilon_{pr}$ . Ausgehend von Verbundbeiwerten  $c$ , erstmals in (Thormählen 1978) abgeleitet und später nach (Cordes u. a. 1980; Trost u. a. 1980) mit  $\xi$  bezeichnet, die als Verhältnis der in Ausziehversuchen ermittelten Verbundspannungen bei einem Ausziehweg  $s = 0,1$  mm definiert wurden, kann bei Annahme starr-plastischer Verbundcharakteristiken mit  $\tau_m = \tau_{0,1}$  das Verhältnis  $\delta_p$  als das Verhältnis der Rissdehnungen bei Erst- bzw. Einzelrissbildung unabhängig von den vorliegenden Dehnsteifigkeitsverhältnissen ermittelt werden (Gl. 2.4) (Schober 1984). Historisch bedingt wird für den Einzelrisszustand anstelle von  $\delta_p$  die Bezeichnung  $\xi_1$  gewählt (vgl. CEB-FIP MC 90 1993).

$$\delta_p = \xi_1 = \sqrt{\xi \cdot \frac{d_s}{d_p}} \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{\tau_{p,0,1}}{\tau_{s,0,1}} \quad (2.4)$$

Mit fortschreitender Rissbildung weicht der Verhältniswert der Rissdehnungen  $\delta_p$  zunehmend von  $\xi_1$  nach Gl. (2.4) ab. In den letzten 25 Jahren entstandene Normenwerke nehmen allerdings Bezug auf den nach Gl. (2.4) unabhängig von Beanspruchung, Rissbildungsstadium und im Einzelfall vorliegenden Dehnsteifigkeitsverhältnissen

festgelegten Verbundbeiwert  $\xi_1$  (vgl. DIN V ENV- 1992-2 1997; DIN 4227-1/A1 1995; DIN 1045-1 2001).

Zur Beschreibung der Zugkraftaufteilung bei gemischt bewehrten Bauteilen wird u.a. in (Schober 1984) und (Faoro 1988) ein verallgemeinerter Kennwert  $\delta_p$  verwendet, der streng nach Gl. (2.1) das i.d.R. lastabhängige Verhältnis der Rissdehnungen beschreibt.

Der mit den Kenngrößen  $\eta$  hergestellte unmittelbare Bezug auf die rechnerische Dehnung im Zustand II nach Gl. (2.2) wird u.a. in (Janovič und Kupfer 1984), (Tue 1993) und (Rudlof 1998) gewählt, um insbesondere die Abweichungen der in Versuchen gemessenen Rissdehnungen von den Rechenwerten darzustellen. Daneben werden die in (Tue 1993) als *Umlagerungsfaktoren* bezeichneten Kennwerte  $\eta_s$  und  $\eta_p$  zur Quantifizierung der Zugkraftumlagerungen vom Spannstahl zum Betonstahl infolge wiederholter Belastung herangezogen. Durch den Bezug auf rechnerische Dehnungen im Zustand II sind die Beiwerte  $\eta_s$  und  $\eta_L$  nach Gl. (2.2) an die vorliegenden Dehnsteifigkeitsverhältnisse der Bewehrungsstränge gekoppelt.

Die u.a. in der Schweiz (vgl. Bachmann 1989) für Stahlbetonquerschnitte verwendeten Verbundfaktoren  $\kappa$  nach Gl. (2.3) sind grundsätzlich unabhängig von den Dehnsteifigkeitsverhältnissen der Bewehrungsstränge. Die Verbundfaktoren enthalten neben Informationen zu verbundbedingten Abweichungen von der ebenen Dehnungsverteilung im Wesentlichen Informationen über das Maß der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Zugversteifung, *tension stiffening*) bzw. über die Völligkeit der Spannungsverteilung entlang der Bewehrungsstränge. In (Kaiser 1989) wurden die Verbundfaktoren  $\kappa$  erstmals auf klebarmierte Stahlbetonquerschnitte übertragen; allerdings wurden mangels aussagekräftiger Versuchsdaten für einbetonierte Bewehrung und Klebarmierung identische Verbundfaktoren gleichbedeutend mit einer Zugkraftaufteilung nach *Bernoulli* empfohlen.

Die Kennwerte nach den Gln. (2.1), (2.2) und (2.3) können bei bekannten Dehnsteifigkeitsverhältnissen unabhängig von Beanspruchungs- und Rissbildungszustand ineinander überführt werden. Für zentrisch beanspruchte Zugstäbe gelten die folgenden Beziehungen.

Der Zusammenhang zwischen den Umlagerungsfaktoren  $\eta_s$  und  $\eta_L$  folgt unmittelbar aus dem Gleichgewicht der Kräfte:

$$\eta_s = (1 - \eta_L) \cdot \frac{E_L A_L}{E_s A_s} + 1 \quad (2.5)$$

$$\eta_L = (1 - \eta_s) \cdot \frac{E_s A_s}{E_L A_L} + 1 \quad (2.6)$$

Aus den Gln. (2.1) und (2.2) ergibt sich die Verknüpfung zwischen  $\delta_L$  und  $\eta_s$  bzw.  $\eta_L$ :

$$\delta_L = \frac{\eta_L}{\eta_s} \quad (2.7)$$

$$= \frac{\eta_L}{(1 - \eta_L) \cdot (E_L A_L)/(E_s A_s) + 1} = \frac{(1 - \eta_s) \cdot (E_s A_s)/(E_L A_L) + 1}{\eta_s} \quad (2.8)$$

Umgekehrt gilt für den Zusammenhang zwischen  $\eta_L$  bzw.  $\eta_s$  und  $\delta_L$ :

$$\eta_s = \frac{E_s A_s + E_L A_L}{E_s A_s + E_L A_L \cdot \delta_L} \quad (2.9)$$

$$\eta_L = \frac{(E_s A_s + E_L A_L) \cdot \delta_L}{E_s A_s + E_L A_L \cdot \delta_L} \quad (2.10)$$

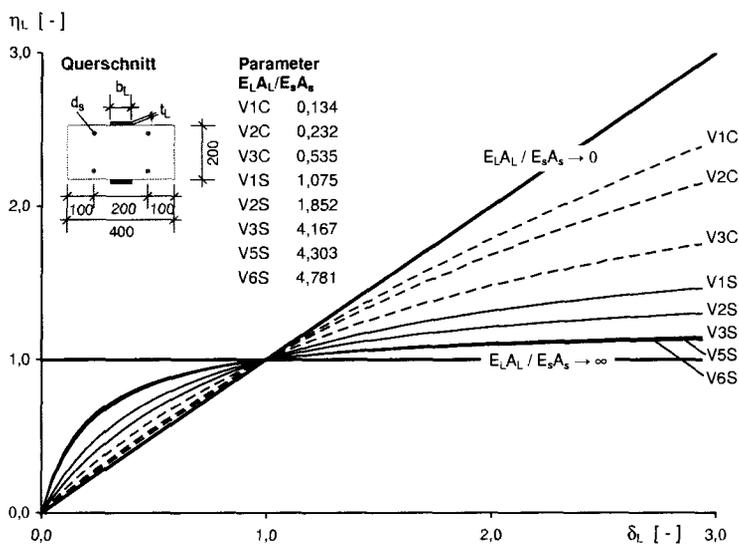
Da im Gegensatz zu den Kenngrößen  $\eta_L$  und  $\eta_s$  die Verbundbeiwerte  $\kappa_L$  und  $\kappa_s$  unabhängig von der vorhandenen Dehnsteifigkeit sind, ergibt sich unter der Voraussetzung  $\epsilon_{Lm} = \epsilon_{sm}$  (Zugstab) eine einfache Verknüpfung mit  $\delta_L$ :

$$\delta_L = \frac{\kappa_s}{\kappa_L} \quad (2.11)$$

Grundsätzlich besitzen die Kennwerte nur bei linear elastischem Verhalten der Bewehrungsstränge Gültigkeit; sofern ein Bewehrungsstrang die Streckgrenze überschreitet, sind die lokalen Dehnungen nicht mehr unmittelbar mit der Zugkraftaufteilung verknüpft.

### 2.1.2 Sensitivität gegenüber Verbundunterschieden

Als Kern der Zugkraftaufteilungsproblematik bei klebarmierten Bauteilen ist wegen des spröden Klebeverbundes zunächst die Frage nach der absoluten Größe der Laschenzugkraft zu identifizieren. Eine Sensitivitätsbetrachtung muss dem entsprechend die Auswirkungen der absoluten, vom System bzw. den Dehnsteifigkeitsverhältnissen entkoppelten Verbundunterschiede auf die Abweichungen der Laschenspannungen von den Rechenwerten nach Zustand II bei einem spezifischen System, d.h. bei definierten Dehnsteifigkeitsverhältnissen erfassen. Während die vom System entkoppelten Verbundunterschiede durch  $\delta_L$  beschrieben werden, gibt  $\eta_L$  die auf das vorliegende System, d.h. auf vorgegebene Dehnsteifigkeitsverhältnisse bezogenen verbundbedingten Unterschiede an. In Abb. 2.1 ist der Zusammenhang zwischen  $\delta_L$  und  $\eta_L$  für verschiedene Dehnsteifigkeitsverhältnisse  $E_L A_L / E_s A_s$  dargestellt. Die Verhältniswerte beziehen sich dabei auf die in Abschnitt 3 bzw. (Zilch u. a. 2004) untersuchten Dehnkörper<sup>1</sup>.

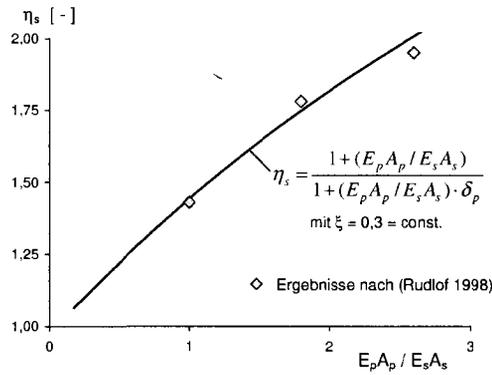


**Abbildung 2.1.** Systemsensitivität - Zusammenhang zwischen dem absoluten, systemunabhängigen Verbundunterschied  $\delta_L$  und den systemspezifischen Abweichungen von den rechnerischen Spannungen  $\eta_L$  in Abhängigkeit der Steifigkeitsverhältnisse

Abbildung 2.1 illustriert den einleuchtenden Umstand, dass bei großen Verhältniswerten der Dehnsteifigkeiten, d.h. bei großen Klebarmierungsquerschnitten in Kombination mit wenig einbetonierter Bewehrung, die Abweichungen der tatsächlichen Dehnungen von den Rechenwerten selbst bei stark unterschiedlichen Verbundeigenschaften aufgrund der geringen Kraftdifferenzen nur gering sind. Dem entsprechend reagieren Systeme mit geringen Klebarmierungsquerschnitten, d.h. insbesondere Systeme, die mit CFK-Lamellen verstärkt werden, deutlich empfindlicher auf Verbundunterschiede.

In Kenntnis der Zusammenhänge zwischen  $\eta_s$  und  $\delta$  nach Gl. (2.9) ist auch die in (Rudlof 1998; Cordes u. a. 2000) für teilweise vorgespannte Bauteile vorgestellte Erkenntnis, dass die Umlagerungsfaktoren  $\eta_s$ , d.h. die bezogenen Betonstahlspannungen umso größer werden, desto größer das Dehnsteifigkeitsverhältnis  $E_p A_p / E_s A_s$  ist, unmittelbar einsichtig. Eine Verknüpfung dieser Erkenntnis mit Aussagen über den absoluten Verbundunterschied, ausgedrückt durch  $\delta_p$ , ist allerdings wenig sinnvoll (vgl. Abb. 2.2).

<sup>1</sup> C bezeichnet Dehnkörperversuche mit aufgeklebten CFK-Lamellen, S solche mit Stahllaschen; gleiche Ziffern 1 – 6 beschreiben die einbetonierte Bewehrung



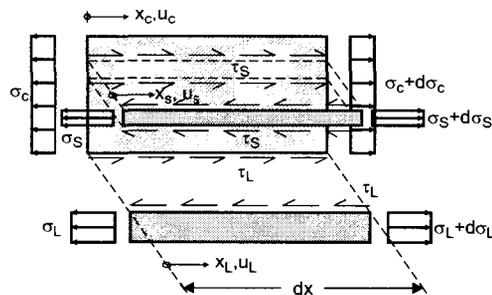
**Abbildung 2.2.** Vergleich der Versuchsergebnisse für glatten Spannstahl nach (Rudlof 1998; Cordes u. a. 2000) mit dem Zusammenhang zwischen dem Dehnsteifigkeitsverhältnis und dem Umlagerungsfaktor  $\eta_s$  nach Gl. (2.9) in Verbindung mit Gl. (2.4) für  $\xi = 0,3 = \text{const.}$  ( $d_s$  und  $d_p$  konstant)

Aus dem in Abb. 2.1 dargestellten Zusammenhang sind gleichzeitig Rückschlüsse auf die experimentelle Untersuchung der Auswirkungen von Verbundunterschieden an Dehnkörpern zu ziehen: Da Dehnungen der Klebarmierung im Rissquerschnitt im Unterschied zu Dehnungen der einbetonierten Bewehrung zuverlässiger zu messen und in Beziehung zu Rechenwerten zu setzen sind, d.h. da  $\eta_L$  gegenüber  $\eta_s$  mit größerer Genauigkeit ermittelt werden kann, sind bei Versuchen mit kleinen Verhältniswerten  $E_L A_L / E_s A_s$  genauere Aussagen zu  $\delta_L$  zu erwarten.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird vornehmlich die Formulierung des Verbundkennwertes  $\delta_L$  nach Gl. (2.1), d.h. des absoluten, um den Einfluss der Dehnsteifigkeitsverhältnisse bereinigten Verbundeinflussparameters, verwendet.

### 2.1.3 Grundlagen der mathematischen Beschreibung

Eine mathematische Beschreibung des Zusammenwirkens gemischter Bewehrung kann aus der Anwendung von grundlegenden Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen auf ein infinitesimales Element nach Abb. 2.3 gewonnen werden. Die Betrachtungsweise wurde u.a. bereits in (Rehm 1961) vorgeschlagen und resultiert in der sog. *Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes*. Im Allgemeinen wird der Herleitung ein zentrisch zugbeanspruchter Stab vorausgesetzt; Einflüsse unterschiedlicher Abstände der Bewehrungsstränge zur neutralen Achse eines biegebeanspruchten Bauteils entfallen.



**Abbildung 2.3.** Differenzielles Element eines klebarmierten Stahlbetonzugstabes

Dehnungen:

$$\epsilon_c = \frac{du_c}{dx} = u'_c \tag{2.12}$$

$$\epsilon_L = \frac{du_L}{dx} = u'_L \tag{2.13}$$

$$\epsilon_s = \frac{du_s}{dx} = u'_s \tag{2.14}$$

Mit den Gln. (2.12) bis (2.14) lässt sich der Zusammenhang zwischen Spannungen und Relativverschiebungen wie folgt darstellen:

$$\sigma_c = E_c u'_c \quad (2.15)$$

$$\sigma_L = E_L u'_L \quad (2.16)$$

$$\sigma_s = E_s u'_s \quad (2.17)$$

Unter Verwendung der Gln. (2.15) bis (2.17) sowie unter Annahme gleichförmiger Spannungsverteilungen lassen sich Zusammenhänge zwischen Normalkräften und Relativverschiebungen formulieren:

$$u'_c = \frac{N_c}{E_c A_c} \quad (2.18)$$

$$u'_L = \frac{N_L}{E_L A_L} \quad (2.19)$$

$$u'_s = \frac{N_s}{E_s A_s} \quad (2.20)$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\frac{dN_L}{dx} = \tau_L(s_L) \cdot b_L \quad (2.21)$$

$$\frac{dN_s}{dx} = \tau_s(s_s) \cdot U_s \quad (2.22)$$

$$\frac{dN_c}{dx} + \frac{dN_L}{dx} + \frac{dN_s}{dx} = 0 \quad (2.23)$$

Kinematik:

$$s_L = u_L - u_c \quad (2.24)$$

$$s_s = u_s - u_c \quad (2.25)$$

Nach einmaliger Differenzierung der Gln. (2.24) und (2.25) und Einsetzen von (2.18), (2.19) und (2.20) sowie nochmaligem Differenzieren ergibt sich:

$$s''_L = \frac{N'_L}{E_L A_L} - \frac{N'_c}{E_c A_c} \quad (2.26)$$

$$s''_s = \frac{N'_s}{E_s A_s} - \frac{N'_c}{E_c A_c} \quad (2.27)$$

Unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen (2.21) bis (2.23) ergeben sich aus den Gln. (2.26) und (2.27) zwei gekoppelte Differentialgleichungen

$$s''_L - \tau_L(s_L) \cdot b_L \left( \frac{1}{E_L A_L} + \frac{1}{E_c A_c} \right) - \frac{\tau_s(s_s) \cdot U_s}{E_c A_c} = 0 \quad (2.28)$$

$$s''_s - \tau_s(s_s) \cdot U_s \left( \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c} \right) - \frac{\tau_L(s_L) \cdot b_L}{E_c A_c} = 0 \quad (2.29)$$

Die Kopplung der beiden Differentialgleichungen (2.28) und (2.29) erfolgt über die Betonverformungen. Bedingt durch die gegenseitige Beeinflussung der Bewehrungsstränge über veränderliche Betondehnungen stellen sich bei gemischt bewehrten Bauteilen in allen Risszuständen identische Einleitungslängen der verschiedenen Bewehrungsarten ein. Der Grad der Beeinflussung ist unter anderem abhängig von der Verformbarkeit des Betons oder den Querschnittsverhältnissen der Bewehrungsstränge.

Eine geschlossene analytische Lösung des gekoppelten Differentialgleichungssystems auf Grundlage einer wirklichkeitsnahen Beschreibung des Verbundverhaltens ist nicht bekannt. Zur näherungsweise Behandlung gemischt bewehrter Bauteile kann eine Entkopplung des Differentialgleichungssystems durch die Vernachlässigung der Betondehnungen, d.h. eine getrennte Betrachtung der einzelnen Bewehrungsstränge erreicht werden. Mit  $E_c A_c \rightarrow \infty$  folgt:

$$s''_L - \frac{\tau_L(s_L)}{E_L t_L} = 0 \quad (2.30)$$

$$s''_s - \frac{4 \cdot \tau_s(s_s)}{E_s d_s} = 0 \quad (2.31)$$

Die Gleichungen (2.30) und (2.31) entsprechen den für Klebarmierung bzw. Betonstahl unabhängig voneinander herzuleitenden Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes. Als Konsequenz der Vernachlässigung von Betonverformungen können unterschiedliche Einleitungslängen der Bewehrungsstränge angenommen werden.

Die vorliegende Arbeit baut auf einer Betrachtung der entkoppelten Differentialgleichungen auf; Dehnungen des Betonquerschnitts werden durch die Annahme  $E_c A_c \rightarrow \infty$  durchgängig vernachlässigt.

## 2.2 Zugkraftaufteilung und -umlagerung bei vorgespannten Bauteilen

Zum Zusammenwirken der Bewehrungsstränge bei vorgespannten Bauteilen wurden umfangreiche experimentelle Untersuchungen durchgeführt, die zum Teil durch theoretische Modellbildungen ergänzt wurden. Hier sollen lediglich die im Rahmen der vorliegenden Arbeit wesentlichen Grundlagen der experimentellen Untersuchung von Verbundeinflüssen auf die Beanspruchungen der Bewehrungsstränge bzw. Untersuchungsmethoden sowie Lösungsstrategien zur theoretischen Betrachtung zusammengefasst werden. Einen Überblick enthält u.a. (Rudlof 1998).

### 2.2.1 Experimentelle Untersuchungen

Wegen der insbesondere im Rissquerschnitt klar definierten Randbedingungen hinsichtlich der Zugkraftaufteilung wurde der Großteil der Untersuchungen an zentrisch beanspruchten, gemischt bewehrten Dehnkörpern unter statischer bzw. zyklischer Belastung durchgeführt (u.a. Thormählen 1978; Trost u. a. 1980; Faoro 1988; Tue 1993; Rudlof 1998; Cordes u. a. 2000). Dabei werden bewehrte Betonprismen mit freien Längen zwischen den Verankerungsbereichen von 180 cm (Tue 1993; Rudlof 1998) bis 240 cm (Thormählen 1978) verwendet. Allen Körpern gemein ist die Vorgabe von Rissen (Einzelriss bzw. vorgegebenes abgeschlossenes Rissbild) durch Kerben oder Rissbleche. Die Aufteilung der Zugkräfte auf die Bewehrungsstränge im Rissquerschnitt wird in nahezu allen Versuchsreihen mittels aufgeklebter Dehnmessstreifen ermittelt. Unter anderem in (Tue 1993) werden neben den Dehnungen im Rissquerschnitt auch diskrete Dehnungen in weiteren, äquidistanten Querschnitten gemessen.

An der Technischen Universität München wurden Vierpunkt-Biegeversuche an teilweise vorgespannten Platten durchgeführt (vgl. Derflinger u. a. 1981; Janovič und Kupfer 1984). In (Janovič und Kupfer 1984) erfolgte die Vorgabe von Sollrissstellen durch die Anordnung von Querbewehrung; in jeweils einem Rissquerschnitt und in weiteren Querschnitten in Abständen von jeweils 100 mm wurden die Dehnungen der Bewehrungsstränge mit DMS ermittelt.

### 2.2.2 Modellierung des Zusammenwirkens von Betonstahl und Spannstahl

Allen Strategien zur Modellierung des Zusammenwirkens der Bewehrungsstränge in Spannbetonbauteilen ist die Voraussetzung ähnlich duktilen Verbundverhaltens gemein. Zudem werden den Betrachtungen - mit Ausnahme von (Janovič und Kupfer 1984) - zentrisch mit konstanter Normalkraft belastete Zugstäbe als Abbildung der mit  $M = \text{const}$  bzw.  $V = 0$  beanspruchten Zugzone eines Biegeträgers großer Bauhöhe zugrunde gelegt.

Neben der bereits erläuterten Beschreibung unterschiedlichen Verbundverhaltens durch konstante Verbundbeiwerte  $\xi$  (Thormählen 1978; Trost u. a. 1980) werden diverse Modellierungsstrategien verwendet. In (Janovič und Kupfer 1984) werden bezogene Spannungen  $\eta_s$  bzw.  $\eta_p$  mit Bezug auf mittlere, lastunabhängige Völligkeitswerte der Spannungsverteilung entlang der Bewehrungsstränge zwischen zwei Rissen abgeleitet. Hinsichtlich des Einflusses des Beanspruchungsniveaus bzw. des Rissbildungsstadiums weist

der Ansatz zwar starke Vereinfachungen auf; (Janovič und Kupfer 1984) stellt allerdings die bisher einzige Arbeit dar, die in Erweiterung des Zugstabmodells auch unterschiedliche statische Höhen der Bewehrungsstränge bei biegebeanspruchten Bauteilen berücksichtigt.

Für die Kombination von einbetonierten Bewehrungsstäben und Spanngliedern aus Glasfaserverbundwerkstoff im nachträglichen Verbund werden in (Faoro 1988) zwei Modellierungsmöglichkeiten vorgestellt: die numerische Lösung auf Basis der schrittweisen Integration der DGL des verschieblichen Verbundes für ein Element zwischen zwei Rissen bei Ausnutzung der Symmetriebedingungen in Elementmitte sowie die Näherungslösung mit starr-plastischen Verbundansätzen, die auf der Grundlage von Energiebetrachtungen abgeleitet wurden.

Ebenfalls mit Hilfe starr-plastischer Verbundansätze wird in (König und Fehling 1988) eine explizite analytische Lösung der entkoppelten DGL vorgestellt. Grundlage des Modells ist eine Betrachtung unterschiedlicher, idealisierter Rissbildungsstadien (Einzelriss, abgeschlossenes Rissbild).

In (Tue 1993) werden zwei Verfahren zur Abbildung des Zusammenwirkens von Betonstahl und Spannstahl für statische und zyklische Beanspruchung präsentiert. Zum einen wird die DGL durch die Umformung in ein Anfangswertproblem iterativ mit der *Runge-Kutta*-Methode gelöst, zum anderen wird der von *Tue* geprüfte Versuchskörper (gemischt bewehrter Zugstab) mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente ausschnittsweise abgebildet. Zur Beschreibung des Verbundverhaltens der Bewehrungsstränge nutzt *Tue* Verbundgesetze, die aus gemessenen Dehnungen der von ihm durchgeführten Versuche errechnet wurden. Die Allgemeingültigkeit der Modellierung wird allerdings durch das in (Tue 1993) beschriebene Vorgehen in Frage gestellt: die Modellbildung wird mit Hilfe der Versuchsergebnisse verifiziert, aus denen die Eingangswerte des Modells abgeleitet wurden.

## 2.3 Versuche zum Zusammenwirken bei klebarmierten Bauteilen

Grundsätzlich sind alle Versuche an zug- oder biegebeanspruchten Bauteilen mit Kombinationen einbetonierter und angeklebter Bewehrung zur Untersuchung verbundbedingter Auswirkungen auf das Zusammenwirken geeignet. Bei Versuchen an Biegebauteilen werden gegenüber Dehnkörpern allerdings die Einflussfaktoren vervielfacht, gleichzeitig werden die klar abzugrenzenden Randbedingungen aufgegeben. Generell stellt die experimentelle Untersuchung des Zusammenwirkens - insbesondere die Ermittlung der den Bewehrungssträngen zugewiesenen Zugkraftanteile - hohe Anforderungen an die Versuchs- und Messtechnik. Aus der mittlerweile nahezu unüberschaubaren Anzahl vorliegender Versuche an klebarmierten Bauteilen eignet sich daher nur ein geringer Teil, um Aussagen über das Zusammenwirken treffen zu können.

Im Wesentlichen wurden bisher die bei Spannbetonbauteilen angewandten Dehnkörperversuche adaptiert; dezidierte Aussagen zu verbundbedingten Auswirkungen auf die Zugkraftaufteilung bei Biegebauteilen auf Grundlage experimenteller Untersuchungen liegen nach Kenntnis des Verfassers bisher nicht vor.

### 2.3.1 Versuche an der TU Braunschweig

#### Versuche von Rostásy und Ranisch

Im Rahmen von Versuchen zum Verbundverhalten von Klebarmierung wurden an der TU Braunschweig unter anderem Versuche an zentrisch gezogenen Stahlbetonprismen, die mit 3 mm bzw. 6 mm dicken Stahllaschen verstärkt waren, durchgeführt (Rostásy u. a. 1981; Ranisch 1982). Um die Eignung geklebter Stahllaschen zur Verstärkung gerissener Koppelfugen abschnittsweise hergestellter Spannbetonbrücken experimentell zu überprüfen, wurden die Zugglieder als realitätsnahe Abbildungen eines

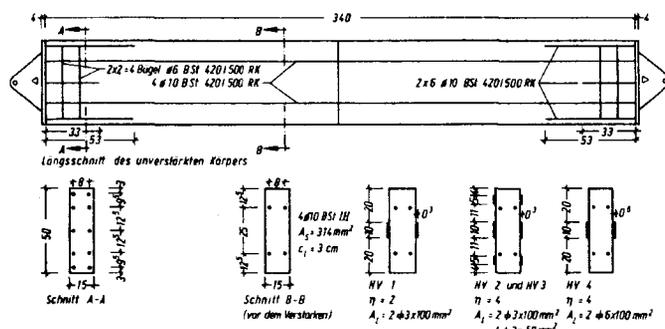


Abbildung 2.4. Dehnkörper; Abmessungen und Bewehrung (aus Rostásy u. a. 1981)

Ausschnittes der Bodenplatte von Spannbetonhohlkästen mit vorgegebenem Einzelriss (z.T. mit Hartschaumeinlage;  $f_{ct} \approx 0$ ) verwirklicht (Abb. 2.4).

Ziel der Versuche von *Rostásy* und *Ranisch* war die Untersuchung des Verformungs- und Rissverhaltens sowie der Zugkraftaufteilung. Lediglich in zwei Versuchen, *HV3* und *HV4* (vgl. Abb. 2.4), wurden die Dehnungen der Bewehrungsstränge im vorgegebenen Risquerschnitt gemessen; in (Rostásy u. a. 1981) wird allerdings von Unzulänglichkeiten bei der Ermittlung der Zugkraftanteile, die auf die einseitige Applikation der Dehnmessstreifen auf der Aussenseite der Laschen zurückzuführen sind, berichtet. Die Aufteilung der Zugkräfte wird mit Hilfe des Kennwertes  $\eta_L$ , in (Rostásy u. a. 1981) als *Wirkungsgrad* bezeichnet, dargestellt.

Als Wirkungsgrad bei Gebrauchslastniveau ( $\approx 60\%$  der Bruchlast) wird für Versuch *HV3* von den Autoren  $\eta_L = 1,0$  angegeben, bei *HV4*, einem Versuch mit identischen Bewehrungsgraden  $\rho_s$  und  $\rho_L$ , allerdings dickeren Stahllaschen, wird bei statischer Belastung auf Gebrauchslastniveau  $\eta_L = 0,95$  erreicht. Ein Vergleich der Rissbilder für das betrachtete Gebrauchslastniveau und für den Bruchzustand zeigt, dass sich die Dehnkörper *HV3* und *HV4* bereits bei Gebrauchslasten weitestgehend im Zustand abgeschlossener Rissbildung befanden. Darüber hinaus wird von den Autoren angegeben, dass sich bei weiterer Laststeigerung über Gebrauchslastniveau hinaus der Wirkungsgrad sukzessive verringerte; eine Entkopplung der Klebarmierung konnte aber erst nach Überschreiten der Streckgrenze der Stahllaschen beobachtet werden. Die Abnahme von  $\eta_L$  bei Laststeigerung, d.h. die Umlagerung von Zugkraftanteilen zur einbetonierten Bewehrung, ist zweifellos auf das spröde Verbundverhalten der Klebarmierung zurückzuführen.

In (Rostásy und Ranisch 1983) werden weitere Versuche an Dehnkörpern zur Untersuchung des Tragverhaltens von mit geklebten Stahllaschen verstärkten Bodenplatten an Koppelfugen von Spannbetonhohlkästen beschrieben. Aufgrund der speziellen Zielsetzung - der Untersuchung lediglich einseitig verstärkter Zugglieder, d.h. nur innerhalb des Hohlkastens applizierte Klebarmierung - wurden ausschließlich Dehnkörper mit nur auf einer Seite aufgeklebten Stahllaschen geprüft. Durch die vorliegende exzentrische Belastung der Zugglieder werden verbundbedingte Dehnungsunterschiede von einbetonierter und angeklebter Bewehrung durch eine über die Querschnittshöhe veränderliche Dehnungsverteilung überlagert. Fundierte Aussagen zum Einfluss des Verbundverhaltens auf die Zugkraftaufteilung sind für die in (Rostásy und Ranisch 1983) dokumentierten Versuche aufgrund der nicht exakt zu ermittelnden Exzentrizität nicht zu treffen.

### Versuche von Rostásy und Neubauer

In (Rostásy und Neubauer 1999) werden zentrische Zugversuche an zwei mit CFK-Lamellen verstärkten Dehnkörpern beschrieben. Primäres Ziel der im Rahmen von Zulassungsversuchen für CFK-Lamellen der Firma S&P durchgeführten Untersuchungen war die Ermittlung bzw. Verifizierung von Grenzwerten der Lamellendehnungen, die eine Entkopplung bei Gebrauchslastniveau vermeiden sollten (vgl. z.B. DIBt 2003, Anlage

2, Abschnitt 2.3). Parallel dazu wurde die Übertragbarkeit des in (Holzenkämpfer 1994) entwickelten Ingenieurmodells auf CFK-Lamellen-verstärkte Bauteile überprüft.

Die Abmessungen der von Neubauer und Rostásy im statischen Zugversuch geprüften Dehnkörper orientieren sich an den in (Rostásy u. a. 1981) beschriebenen Betonprismen; die einbetonierte Bewehrung bestand bei DK1 aus geripptem Betonstahl BSt500,  $d_s = 10$  mm; bei DK2 aus glattem Stabstahl St37,  $d_s = 10$  mm (Abb. 2.5), jeweils in Kombination mit CFK-Lamellen S&P 150/2000.

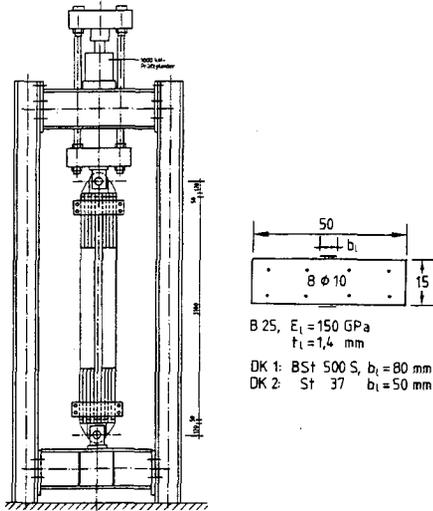


Abbildung 2.5. Dehnkörper; Versuchsaufbau, Abmessungen und Bewehrung, (aus Rostásy und Neubauer 1999)

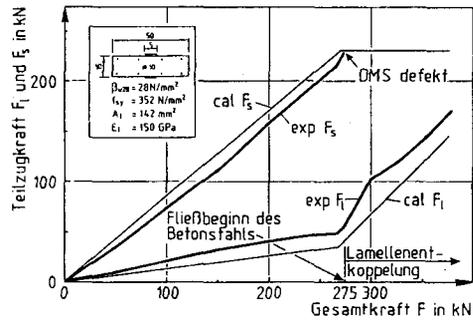


Abbildung 2.6. Rechnerische (cal) und aus Rissdehnungen ermittelte (exp) Teilzugkräfte der Bewehrungsstränge bei Versuch DK2; (aus Rostásy und Neubauer 1999)

Bei dem mit geripptem Betonstahl bewehrten Dehnkörper konnten keine signifikanten Abweichungen von den rechnerischen Dehnungen festgestellt werden, d.h.  $\eta_L = \eta_s = 1,0$  bzw.  $\delta_L = 1,0$ . Allerdings sind die in (Rostásy und Neubauer 1999) angegebenen gemessenen Teilzugkräfte der Bewehrungsstränge nicht vollständig plausibel, da das Kräftegleichgewicht  $F = F_s + F_L$  nicht für alle Beanspruchungsbereiche erfüllt ist. Abweichungen können ggf. auf Messungenauigkeiten bzw. auf die nur auf der Aussenseite der CFK-Lamellen angebrachten Dehnmessstreifen zurückgeführt werden.

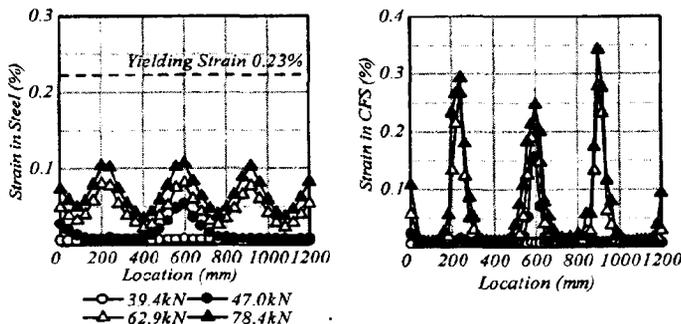
Bei dem mit glattem Stahl bewehrten Dehnkörper zeigen sich signifikante Abweichungen der Zugkräfte von den Rechenwerten nach Dehnungsebenheit. Eine eindeutige Aussage hinsichtlich der Zugkraftaufteilung ist allerdings auf Grundlage der in (Rostásy und Neubauer 1999) angegebenen Teilzugkräfte nicht möglich, da im gesamten dargestellten Beanspruchungsbereich das Gleichgewicht der Teilzugkräfte mit der Gesamtzugkraft verletzt wird. Grundsätzlich ist eine verbundbedingte Abweichung von den Dehnungen bzw. Spannungen nach Zustand II nicht mehr möglich, sofern ein Bewehrungsstrang, hier die einbetonierte Bewehrung, die Streckgrenze überschritten hat (vgl. Abb. 2.6). Abhängig davon, ob die angegebene Lamellenzugkraft oder die Betonstahlzugkraft als zutreffend angenommen wird, ergeben sich Kenngrößen  $\eta_{L,max} = 1,56$  bzw.  $\eta_{L,max} = 2,10$ .

### 2.3.2 Versuche an der Hokkaido University

In (Ueda u. a. 2002) und (Sato u. a. 2002) werden statische Zugversuche an mit CFK-Gelegen verstärkten Stahlbetonstäben, die an der Hokkaido University durchgeführt wurden, beschrieben. Vorrangig sollten die Versuche Aufschluß über die Auswirkungen angeklebter Bewehrung auf die Zugversteifung (*tension stiffening*) von zugbeanspruchten

Stäben geben. Die Versuche wurden an Betonprismen, die mit einem zentrisch angeordneten Stab sowie auflaminierten CFK-Gelegen an zwei gegenüberliegenden Seiten bewehrt waren, durchgeführt.

Aufgrund der spezifischen Zielsetzung werden in Rissquerschnitten gemessene Dehnungen bzw. Kennwerte von Zugkraftaufteilung und Umlagerung nicht explizit angegeben. Aus dem für einzelne Laststufen angegebenen Verlauf der in geringen Abständen mittels DMS entlang des Zugstabes gemessene diskreten Dehnungen kann allerdings abgelesen werden, dass die CFK-Gelege im Vergleich zur einbetonierten Bewehrung zum einen eine signifikant kleinere Einleitungslänge, zum anderen deutlich größere Rissdehnungen aufweisen. Aus Abb. 2.7 ist  $\delta_L \approx 3$  abzulesen; damit weichen die Dehnungen deutlich von der Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung ab.



**Abbildung 2.7.** Diskrete Dehnungen von einbetonierter Bewehrung (links) und auflaminiertem CFK-Gelege (rechts) für vier Laststufen; Erstrissbildung zwischen 39,4 kN und 47 kN, fortschreitende Rissbildung zwischen 47 kN und 62,9 kN; Versuch S-3-1 (aus Ueda u. a. 2002)

In (Ueda u. a. 2002) wird auf zwei im Zusammenhang mit der Auswertung von Dehnkörperversuchen wesentliche Beobachtungen hingewiesen, zum einen die Bildung von Bruchkeilen unmittelbar am Riss (sog. *diagonal cracking*), zum anderen die mögliche Umkehr der Relativverschiebungen bei fortschreitender Rissbildung, d.h. die Hysterese der Verbundspannungs-Verschiebungs-Beziehung.

Die Grundzüge einer numerischen Abbildung der Zugversuche werden in (Sato u. a. 2002) vorgestellt. Der Modellierung auf Basis der numerischen schrittweisen Integration liegen folgende Annahmen und Voraussetzungen zugrunde:

- Verwendung lokal gültiger Verbundansätze für die Bewehrungsstränge: Für die einbetonierte Bewehrung wird der von der lokalen Dehnung der Bewehrung abhängige Verbundansatz nach (Shima u. a. 1992) verwendet; zur Modellierung des Verbundverhaltens auflaminiertem CFK-Gelege wird in Anlehnung an den Verbundansatz für Betonstahl eine ebenfalls durch die lokale Dehnung der Klebarmierung beeinflusste, aus einem annähernd linear-elastischen sowie einem plastisch entfestigenden Ast bestehende  $\tau_L - s_L$ -Beziehung angenommen.
- Im Ausgangszustand gilt die Symmetrie der Relativverschiebungen, Verbundspannungen und Dehnungen zur Rissmitte.
- Die Kopplung der Bewehrungsstränge erfolgt über ein Kompatibilitätskriterium der Relativverschiebungen im Rissquerschnitt:

$$s_{sr} = s_{Lr}$$

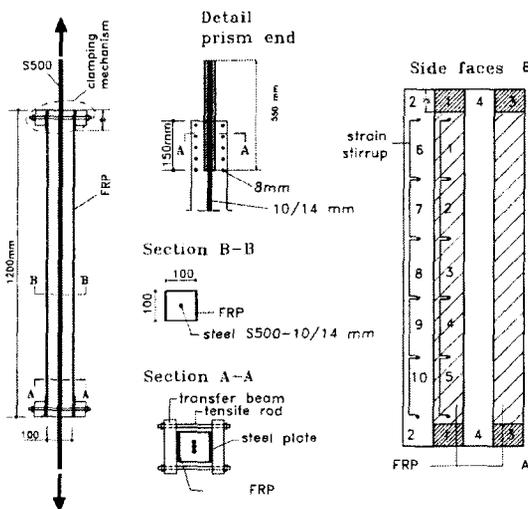
- Die Verbundtragfähigkeit des Betonstahls und der Klebarmierung werden in unmittelbarer Umgebung des Risses vermindert<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Die in (Sato u. a. 2002) vorgenommene Reduktion der Verbundtragfähigkeit des Betonstahls in Bereichen der Verbundlänge, in denen der Betonstahl die Streckgrenze überschritten hat, wird explizit bereits durch das Verbundmodell nach (Shima u. a. 1992) erfasst; die zusätzliche Abminderung unabhängig vom Beanspruchungsniveau ersetzt ggf. die Anrechnung des Betonausbruches (Ausbruchkegel) am Riss.

### 2.3.3 Versuche an der Universität Gent

Ebenfalls mit dem Ziel, die Auswirkungen aufaminierter CFK- und GFK-Gelege auf die Gebrauchstauglichkeit, insbesondere die Zugversteifung bei zentrisch beanspruchten Stahlbetonstäben zu untersuchen, wurden von *Matthys* zwei Versuchsreihen durchgeführt (Matthys 2000; Ceroni u. a. 2004).

Im Rahmen der ersten, in (Matthys 2000) beschriebenen Versuchsserie wurden die mit einem Betonstahlstab zentrisch bewehrten Zugstäbe (Abb. 2.8) ohne Vorbelastung mit aufaminieren Gelegen verstärkt und im statischen Zugversuch geprüft. Für die zweite Versuchsserie wurden die Stahlbetonstäbe vor der Applikation der Klebarmierung vorbelastet (Ceroni u. a. 2004).



**Abbildung 2.8.** Dehnkörper, Abmessungen, Bewehrung, Messtechnik (aus Matthys 2000)

Als Versuchsergebnisse sind lediglich mittlere Dehnungen der Bewehrungsstränge bzw. des Zugstabes im Vergleich mit Referenzversuchen wiedergegeben; Dehnungsunterschiede der einzelnen Bewehrungsstränge in Rissquerschnitten sind weder (Matthys 2000) noch (Ceroni u. a. 2004) zu entnehmen.

Das Zug-Dehnungs-Verhalten der verstärkten Zugstäbe wird auf Basis der Vorschläge zur Verformungsberechnung nach (DIN V ENV 1992-1-1 1992) bei Anrechnung der Klebarmierung als äquivalente Betonstahlfläche sowie unter Ansatz der Parameter für gerippten Betonstahl ( $\beta_1 = 1,0$ ) bei Kurzzeitbelastung ( $\beta_2 = 1,0$ ) nachvollzogen. Im Vergleich mit den in (Ceroni u. a. 2004) dargestellten Messergebnissen kann das Verhalten bei geringer Beanspruchung näherungsweise nachvollzogen werden. Bei steigender Beanspruchung kann das spezifische Verhalten der Klebarmierung, d.h. die fortschreitende Verbundentfestigung bis hin zur beginnenden Verbundentkopplung naturgemäß nicht dargestellt werden; in Konsequenz ergeben sich nach (DIN V ENV 1992-1-1 1992) bei höheren Beanspruchungen zu große Steifigkeiten.

Zur Nachrechnung von Rissabständen verwendet *Matthys* das in (Holzenkämpfer 1994) vorgestellte und in (Rostásy u. a. 1996) präzisiertere Ingenieurmodell bei gemischter Bewehrung (vgl. 2.4.1), allerdings unter Verwendung der Verbundparameter für CFK-Lamellen nach (Neubauer und Rostasy 1997). Nach (Ceroni u. a. 2004) werden die Versuchsergebnisse damit allenfalls nur in grober Näherung erfasst.

### 2.3.4 Weitere Versuche

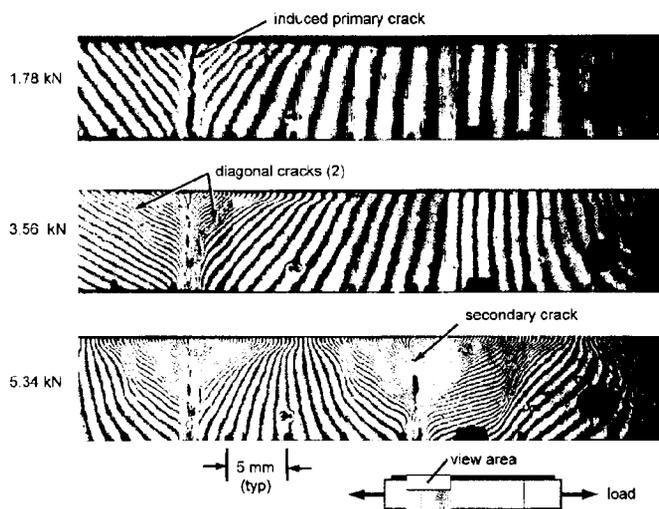
In (Lee u. a. 1999) wird über an der *Pennsylvania State University* durchgeführte Versuche an zentrisch beanspruchten, mit CFK- und GFK-Gelegen verstärkten Dehnkörpern mit zentrisch einbetoniertem Bewehrungsstab berichtet. Die kleinformatischen Dehnkörper

(100/50/700 mm<sup>3</sup>,  $d_s = 9,5$  mm) mit vorgegebenem Einzelriss werden primär zur Untersuchung des Zugversteifungseffektes im Gebrauchslastbereich bei klebarmierten Bauteilen genutzt. Diskrete Dehnungen der Klebarmierung werden zwar im Rissquerschnitt gemessen, allerdings nicht mitgeteilt. Die Verbundsteifigkeit der Klebarmierung wird in Form eines Verschiebungsmoduls  $E_b$ , d.h. als Steigung einer angenommenen linearen  $\tau$ - $s$ -Beziehung dargestellt. Den Angaben in (Lee u. a. 1999) zufolge wird in den Versuchen ein deutlich steiferes Verhalten der Klebarmierung gegenüber der einbetonierten Bewehrung beobachtet; Angaben zur Verbundsteifigkeit der Betonstahlbewehrung fehlen allerdings. Als wesentliche Ergebnisse der Versuche sehen die Autoren die Identifikation folgender Einflussgrößen auf den Zugversteifungseffekt und damit mittelbar auf die Zugkraftaufteilung an:

- Dicke der Primer-Schicht zwischen Beton und Faserverbund-Gelege (Verringerte Steifigkeit bei vergrößerter Schichtdicke)
- Rissbildungsstadium
- Bruchkeilbildung an Trennrissen

Parallel zu den Versuchen wird ein Rechenmodell zur Beschreibung des Zugversteifungseffektes entwickelt. Die analytischen Beziehungen basieren auf einer expliziten Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes für lineare Verbundansätze unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen in der Mitte zwischen zwei Rissen eines zentrisch beanspruchten Zugstabes. Die Bewehrungsstränge werden dabei allerdings nicht durch Verträglichkeitsbedingungen am Rissquerschnitt sondern - im Widerspruch zu den angedeuteten Versuchsergebnissen - über die Zugkraftanteile auf Grundlage ebenbleibender Querschnitte ( $\epsilon_{sr} = \epsilon_{Lr}$ ) gekoppelt.

In ergänzenden, in (Lee u. a. 1999) und (Tripi u. a. 2000) dokumentierten Versuchen wird mit Hilfe der Moiré-Interferometrie der Verschiebungszustand in der unmittelbaren Umgebung von Rissen an Miniatur-Dehnkörpern (27/27/228 mm<sup>3</sup>) mit auflaminierten CFK-Gelegen, allerdings ohne einbetonierte Bewehrung untersucht. Dabei konnte die Bildung von Bruchkeilen, die nach (Tripi u. a. 2000) i.d.R. mit 45°-60° gegen die Längsachse geneigt sind, beobachtet werden. In Abb. 2.9 sind die an einer Seitenfläche aufgenommenen Isotheten (Linien gleicher Verschiebung) für verschiedene Laststufen dargestellt.



**Abbildung 2.9.** Zugversuch an einem ausschließlich mit CFK-Gelegen bewehrten Miniatur-Dehnkörper; Isotheten bei drei verschiedenen Laststufen; Originalgröße des Ausschnittes: 50/9 mm<sup>2</sup> (aus Tripi u. a. 2000)

## 2.4 Rechenmodelle zur Zugkraftaufteilung bei klebarmierten Bauteilen

Bislang liegen neben dem in 2.3.2 erläuterten, alleine auf die Nachrechnung durchgeführter Dehnkörperversuche zugeschnittenen numerischen Modell nach (Ueda u. a. 2002) mit den Arbeiten von *Holzenkämpfer* und *Ulaga* zwei Rechenmodelle zur Abbildung verbundbedingter Dehnungsunterschiede bei klebarmierten Stahlbetonbauteilen vor. Im Folgenden werden die wesentlichen Grundlagen der Modelle im Überblick dargestellt.

### 2.4.1 Zugkraftaufteilung nach *Holzenkämpfer*

Das in (*Holzenkämpfer* 1994) vorgestellte und in (*Rostásy* u. a. 1996) weiterentwickelte Modell zur näherungsweise Ermittlung von Rissbreiten und Dehnungen klebarmierter Bauteile lehnt sich eng an die in (*König* und *Fehling* 1988) entwickelten Überlegungen zur Spannungsermittlung teilweise vorgespannter Bauteile an und baut in Analogie zum Vorgehen in Arbeiten zur Rissbreitenbeschränkung, z.B. (*Noakowski* 1978) oder (*Krips* 1984), auf der Betrachtung eines bewehrten Zugstabes mit konstantem Querschnitt auf. In (*Holzenkämpfer* 1994) wird zudem von folgenden Grundlagen ausgegangen:

- Das Verbundverhalten der Bewehrungsstränge kann durch starr-plastische Verbundgesetze bei Annahme mittlerer Verbundspannungen  $\tau_{sm}$  und  $\tau_{Lm}$  beschrieben werden:

$$\tau_{Lm} = \frac{\tau_{L1}}{1,8} = k_b k_c f_{ctm} \approx 1,25 \cdot f_{ctm} \quad \tau_{sm} = 1,8 \cdot f_{ctm}$$

- Betondehnungen werden vernachlässigt; in Konsequenz sind die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge  $l_{es}$  und  $l_{eL}$  entkoppelt;
- Als Verträglichkeitsbedingung wird die Kompatibilität der Relativverschiebungen im Rissquerschnitt vorausgesetzt:

$$s_{sr} = s_{Lr}$$

- Die beanspruchungsabhängigen Veränderungen der Zugkraftaufteilung werden nicht explizit verfolgt; es werden lediglich charakteristische Beanspruchungsstadien betrachtet:

$F \leq F_{cr}$	Einzelrisszustand
$F_a$	Abgeschlossenes Erstrissbild
$F_e$	Beginn der Klebeverbundentkopplung

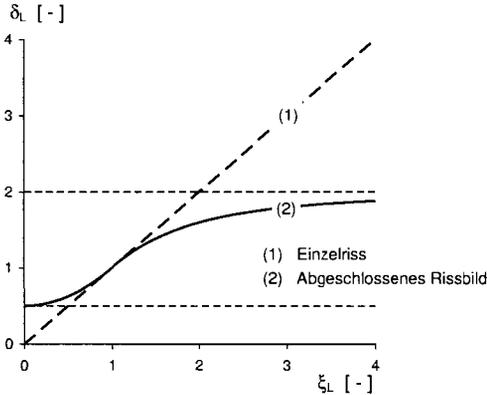
Aus dem Ansatz beanspruchungsunabhängiger Verbundspannungen resultiert für den Einzelrisszustand bei entkoppelten Einleitungslängen ein konstantes Dehnungsverhältnis  $\delta_L$ , das in Anlehnung an die übliche Praxis des Spannbetonbaus mit  $\xi_L$  (Verbundbeiwert) bezeichnet wird. Für weitere Rissbildungsstadien kann zur Bestimmung von  $\delta_L$  Bezug auf  $\xi_L$  genommen werden. Gleichzeitig beschreibt  $\xi_L$  das Verhältnis der Einleitungslängen im Einzelrisszustand (Gl. 2.32).

$$\delta_L = \xi_L = \sqrt{\frac{\tau_{Lm}}{\tau_{sm}} \cdot \frac{E_s d_s}{4E_L t_L}} = \frac{l_{es}}{l_{eL}} \quad (2.32)$$

Das abgeschlossene Rissbild wird erreicht, wenn eine weitere Erhöhung der Zugkraft des Betonquerschnittes durch eingetragene Verbundspannungen nicht mehr möglich ist. Den vorausgesetzten starr-plastischen Verbundansätzen entsprechend liegt  $F_a$  vor, wenn sich bei gleichzeitig vollständig intaktem Klebeverbund die Einleitungslängen des verbundsteiferen Bewehrungsstranges gerade berühren. Gleichzeitig entspricht die über Verbundwirkung entlang der gemeinsamen Einleitungslänge eingetragene Betonzugkraft der Risschnittgröße  $F_{cr}$ . Aufbauend auf der Forderung nach identischen mittleren Dehnungen der Bewehrungsstränge in Verbindung mit den vorgenannten Randbedingungen kann das Dehnungsverhältnis bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes angegeben werden; bei Bezug auf  $\xi_L$  folgt  $\delta_L$  den Gln. (2.34) bzw. (2.35). Der Dehnungssprung bei Übergang

zum abgeschlossenen Rissbild ist in Abb. 2.10 wiedergegeben. Bei intaktem Klebeverbund folgt das Dehnungsverhältnis für  $F > F_a$  Gl. (2.33).

$$\delta_L = \frac{F \cdot (E_s A_s + E_L A_L \xi_L^2) + 0,5 \cdot F_{cr} \cdot (E_s A_s \xi_L^2 - E_s A_s)}{F \cdot (E_s A_s + E_L A_L \xi_L^2) + 0,5 \cdot F_{cr} \cdot (E_L A_L - E_L A_L \xi_L^2)} \quad (2.33)$$



Für  $\xi_L < 1$ :

$$\delta_{La} = \frac{1 + \xi_L^2}{2} \quad (2.34)$$

Für  $\xi_L > 1$ :

$$\delta_{La} = \frac{2\xi_L^2}{1 + \xi_L^2} \quad (2.35)$$

**Abbildung 2.10.** Verhältnis der Rissdehnungen bei Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes

Mit der beginnenden Klebeverbundentkopplung setzt eine Umlagerung von Zugkraftanteilen zur einbetonierten Bewehrung ein. *Holzenkämpfer* leitet die dem Entkopplungsbeginn zugehörige Zugkraft der Klebarmierung  $F_{Le}$  aus der allgemeinen Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes unter Annahme eines linear-elastischen Verbundansatzes her. Das Verhältnis der Rissdehnungen bei Entkopplungsbeginn  $\delta_{Le}$  folgt dann Gl. (2.36).

$$\delta_{Le} = \frac{F_{Le} \cdot (E_s A_s + E_L A_L \xi_L^2)}{F_{Le} \cdot (E_s A_s + E_L A_L \xi_L^2) + 0,5 F_{cr} \cdot (E_L A_L - E_L A_L \xi_L^2)} \quad (2.36)$$

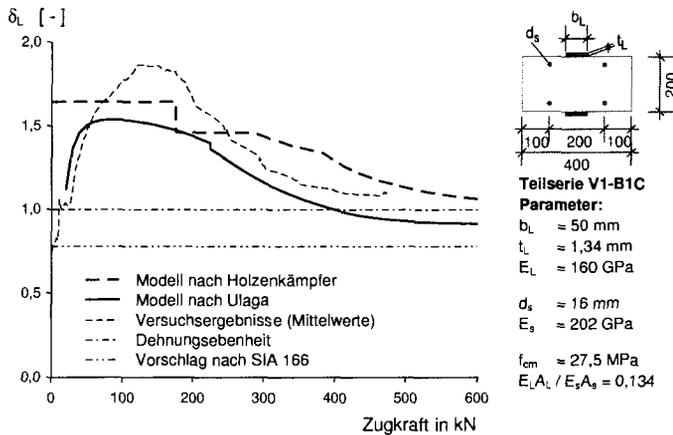
Bei Laststeigerung nach einsetzender Entkopplung entzieht sich die Klebarmierung zunehmend der Mitwirkung, d.h. das Verhältnis der Rissdehnungen  $\delta_L$  bleibt gegenüber Gl. (2.33) zurück. Die Rissdehnungen und damit  $\delta_L$  können über die Verträglichkeitsbedingung  $\epsilon_{sm} = \epsilon_{Lm}$  bei fortschreitender Klebeverbundentkopplung in Abhängigkeit der vorliegenden Spannungsdifferenz  $\Delta\sigma_L$  bzw. Rissspannung  $\sigma_{Lr}$  bestimmt werden. Die über Verbund abgebaute Zugkraft der einbetonierten Bewehrung  $\Delta F_s = \Delta F_{sa}$  bleibt weiterhin konstant.

Die in (*Holzenkämpfer* 1994) entwickelten Zusammenhänge werden in Abb. 2.11 Ergebnissen experimenteller Untersuchungen an mit CFK-Lamellen verstärkten Dehnkörpern gegenübergestellt (vgl. 3). Da von *Holzenkämpfer* primär Ingenieurmodelle für aufgeklebte Stahllaschen entwickelt wurden, wird den Beziehungen für Vergleichszwecke der auf (*Holzenkämpfer* 1994) aufsetzende Verbundansatz für aufgeklebte CFK-Lamellen nach (*Neubauer* 2000) zugrunde gelegt.

#### 2.4.2 Zugkraftaufteilung nach Ulaga

In (*Ulaga* 2003) wird ein Rechenmodell auf der Grundlage analytischer Beziehungen zur Berechnung von Dehnungen und Relativverschiebungen in einem klebarmierten Stahlbetonzugstab vorgestellt, das bei Annahme eines starr-plastischen Verbundansatzes für die einbetonierte Bewehrung das nichtlineare, spröde Verbundverhalten der Klebarmierung berücksichtigt<sup>3</sup>. Die von *Ulaga* vorgestellten Zusammenhänge basieren auf dem

<sup>3</sup> Die von *Ulaga* verwendeten Bezeichnungen wurden dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit gewählten Sprachgebrauch angepasst.



**Abbildung 2.11.** Gegenüberstellung der Rechenmodelle zur Zugkraftaufteilung nach (Holzenkämpfer 1994) und (Ulaga 2003) mit dem mittleren Dehnungsverhältnis aus Versuchen an mit CFK-Lamellen verstärkten Dehnkörpern

von *Sigrüst* begründeten *Zuggurtmodell* (Sigrüst 1995; Marti u. a. 1998), d.h. der vereinfachten Betrachtung der Zugzone von Stahlbeton- bzw. Spannbetonbauteilen als Kombination axial beanspruchter Zugglieder konstanten Querschnittes. Auf der Grundlage analytischer Beziehungen zwischen Relativverschiebungen und Dehnungen der Bewehrungsstränge werden in (Ulaga 2003) im Rahmen einer Parameterstudie für verschiedene Bewehrungsgrade und Dehnsteifigkeitsverhältnisse Verbundfaktoren  $\kappa_s$  und  $\kappa_L$  (Gl. 2.3) angegeben, mit denen eine näherungsweise Bestimmung der Zugkraftaufteilung möglich wird. Allerdings kommt *Ulaga* zur Erkenntnis, dass eine ausschließlich auf Parameterstudien aufbauende Ableitung von Verbundbeiwerten angesichts der komplexen Vernetzung einer Vielzahl von Einflussparametern nicht möglich ist.

Dem in (Ulaga 2003) entwickelten, so genannten *Modell des gemischt bewehrten Zuggliedes (MGZ)* liegen folgende Annahmen und Voraussetzungen zugrunde:

- Das Verbundverhalten des Klebarmierungsstranges wird durch einen vereinfachten, sowohl für Stahllaschen als auch für CFK-Lamellen geltenden bilinearen Verbundansatz beschrieben.
- Das Verbundverhalten der einbetonierten Bewehrung wird näherungsweise durch ein in (Sigrüst 1995) vorgestelltes und in (Alvarez 1998) erweitertes Verbundgesetz abgebildet, das schlupfunabhängig von konstanten Verbundspannungen ausgeht (Abb. 2.12).

$$\tau_{s0} = 0,6 \cdot f_{cm}^{2/3} = 2,0 \cdot f_{ctm} \quad (2.37)$$

- Die Kopplung der Bewehrungsstränge erfolgt bei Vernachlässigung der Betondehnungen ( $E_c A_c \rightarrow \infty$ ) durch eine Verträglichkeitsbedingung im Rissquerschnitt.

$$s_{Lr} = s_{sr} \quad (2.38)$$

- Streuungen der Zugfestigkeit entlang der Bauteilachse werden durch ein deterministisches Vorgehen berücksichtigt. Zur Ermittlung der Erstrissabstände wird eine konstante Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  nach Gl. (2.39) vorausgesetzt. Die Entstehung weiterer Risse, d.h. der Übergang zum abgeschlossenen Rissbild, in (Ulaga 2003) mit *Nachreißen* bezeichnet, wird an eine erhöhte Zugfestigkeit  $f_{ct,2}$  gekoppelt.

$$f_{ctm} = 0,3 f_{cm}^{2/3} \quad (2.39)$$

$$f_{ct,2} = \frac{4}{3} f_{ctm} \quad (2.40)$$

- Der Ermittlung der Verbundbeiwerte liegen explizite Rissabstände zugrunde. In (Ulaga 2003) wird für jede Parameterkombination aus Bewehrungsgrad, Stabdurchmesser, Breite und Dehnsteifigkeit der Klebarmierung der maßgebende mittlere Rissabstand ermittelt.

Das Modell des gemischt bewehrten Zuggliedes basiert auf der Verknüpfung der Relativverschiebungen von angeklebter und einbetonierter Bewehrung im Rissquerschnitt eines mit konstanter Normalkraft beanspruchten Zugstabelementes bekannter Länge  $2 \cdot l_c$  (Abb. 2.12). Da eine geschlossene Formulierung der Lamellendehnungen in Abhängigkeit der Relativverschiebung am Riss  $s_{Lr}$  auf Basis des bilinearen Verbundansatzes nicht möglich ist, dient die Länge des Verbundbereichs, in dem elastisches Verbundverhalten angenommen wird ( $a_1$ ), als Eingangsparameter. Die Dehnung der Klebarmierung im Riss  $\epsilon_{Lr}$  sowie in weiterer Folge  $s_{Lr}$  werden in Abhängigkeit von  $a_1$  angegeben. Die Beanspruchung der Betonstahlbewehrung wird rekursiv aus der Relativverschiebung des Betonstahls am Riss rückgerechnet, wobei die Verknüpfung der Beanspruchungen beider Bewehrungsstränge über das Kompatibilitätskriterium am Riss nach Gl. (2.38) erfolgt.

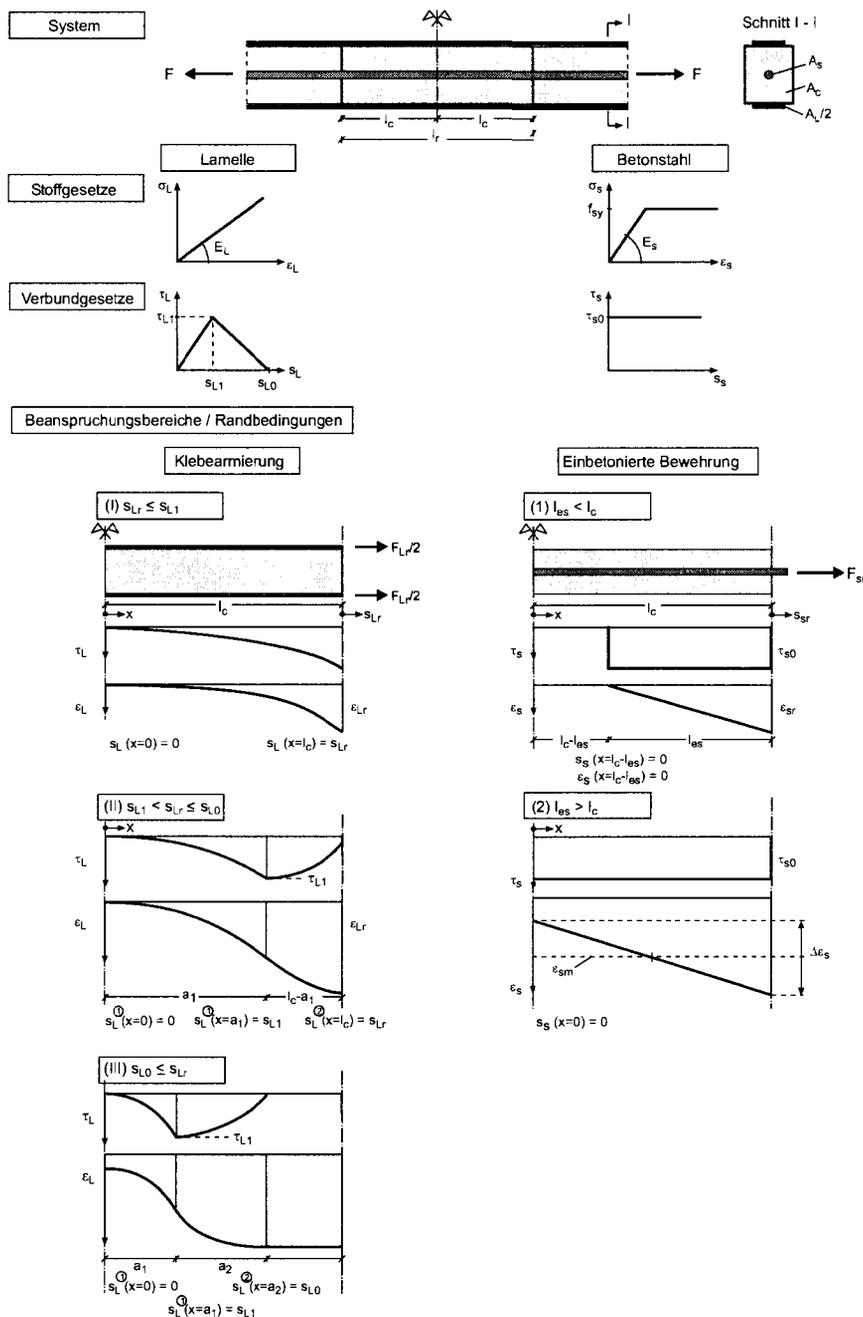


Abbildung 2.12. Grundlagen des Modells des gemischt bewehrten Zuggliedes (nach Ulaga 2003)

Aus den rechnerischen Rissdehnungen  $\epsilon_{Lr}$  und  $\epsilon_{sr}$  können in Verbindung mit den mittleren Dehnungen  $\epsilon_{Lm} = \epsilon_{sm}$  Verbundfaktoren  $\kappa_L$  und  $\kappa_s$  bzw. das Verhältnis der Rissdehnungen  $\delta_L$  in Abhängigkeit der maßgebenden Parameter ( $d_s, E_s, E_L, b_L, t_L, l_c, A_c$ ) angegeben werden. Durch die Formulierung der Verbundansätze beider Bewehrungsstränge in direkter Abhängigkeit der Betonzugfestigkeit sowie der Verknüpfung der Elementlängen mit der Risschnittgröße  $F_{cr}$  ist das Modell unabhängig von den vorliegenden mechanischen Eigenschaften des Betons.

Hinsichtlich der Modellierung des Verhaltens der einbetonierten Bewehrung, speziell im Hinblick auf mechanische Grundlagen, Verbundgesetz und Verträglichkeitsbedingungen, ist das in (Ulag 2003) vorgestellte Modell äquivalent zum Vorgehen nach (Holzenkämpfer 1994). Da allerdings für die Klebarmierung von *Ulag* eine Beschreibung auf Basis des bilinearen Verbundansatzes gewählt wurde, ist eine Substitution expliziter Einleitungslängen durch Beziehungen in Abhängigkeit der Risschnittgröße in Analogie zu (Holzenkämpfer 1994) nicht möglich.

In Abbildung 2.11 wird den Versuchsergebnissen der rechnerische Verlauf des Dehnungsverhältnisses nach *Ulag* gegenübergestellt.

### Umsetzung in SIA 166

Die Erkenntnisse aus (Ulag 2003) finden sich in pragmatisch vereinfachter Form in (SIA 166 2004) wieder. Die dort angegebenen Verbundbeiwerte orientieren sich an den Ergebnissen der von *Ulag* durchgeführten Parameterstudie und bilden vornehmlich den Zustand bei einsetzender Verbundentkopplung ab.

Nach (SIA 166 2004) basiert die Ermittlung innerer Schnittgrößen bei Betonbauteilen grundsätzlich auf der Hypothese von *Bernoulli* in Bezug auf die mittleren Dehnungen. Allerdings müssen für die Berechnung der maßgebenden Dehnungen bzw. Spannungen im Rissquerschnitt generell Verbundunterschiede der Bewehrungsstränge mit den pauschalen Verbundbeiwerten  $\kappa_s$  und  $\kappa_L$  berücksichtigt werden:

$$\kappa_s = 0,7$$

$$\kappa_L = 0,9$$

Aus den angegebenen Größen folgt mit Gl. (2.11) das nach (SIA 166 2004) ohne weitere Differenzierung nach Einflussparametern den Nachweisen zugrunde zu legende Dehnungsverhältnis  $\delta_L$  (Abb. 2.11).

## 2.5 Zugkraftaufteilung nach Richtlinien und Zulassungsbescheiden

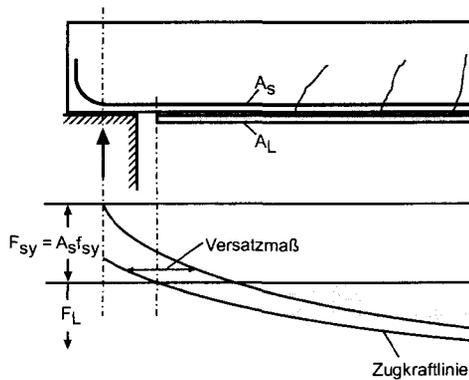
### Richtlinie zum Verstärken mit Stahllaschen (DIBt 1993)

Aufbauend auf dem Zugkraftdeckungs nachweis nach (Ranisch 1982), der in Anlehnung an (DIN 1045 1988) im Punkt *A*, d.h. in einem Querschnitt des Bauteils, in dem der Betonstahl bereits die Streckgrenze überschritten hat, zu führen ist, war die Zugkraftaufteilung nach Gl. (2.41) festgelegt (Abb. 2.13).

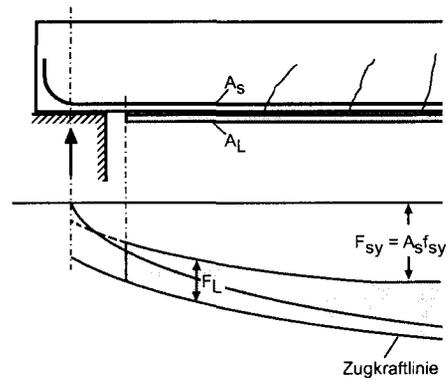
$$F_L = \frac{1}{z_L} \cdot (M_E - F_{sy} \cdot z_s) \quad (2.41)$$

Diese Regelung fand sich bisher in Zulassungsbescheiden zum Verstärken mit Stahllaschen (z.B. DIBt 1992) bzw. der zugehörigen Richtlinie (DIBt 1993) wieder. Abgesehen von der physikalisch fehlerhaften Formulierung des Verbundansatzes nach (Ranisch 1982) (vgl. Iványi und Buschmeyer 1992) unterstellt die Wahl des maßgebenden Querschnitts zusammen mit Gl. (2.41) unbegrenzte Möglichkeiten der Zugkraftumlagerung von der angeklebten Stahllasche zur einbetonierten Bewehrung bzw. eine stark eingeschränkte Mitwirkung der Stahllaschen, gleichbedeutend mit einem Kennwert  $\delta_L \ll 1$ . Die Annahme signifikanter Umlagerungsmöglichkeiten setzt für den Klebarmierungsstrang anstelle des

spröden ein äußerst duktilen Verbundverhalten voraus. Unter der Annahme duktilen Verbundverhaltens verlieren Verträglichkeitsbedingungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit an Bedeutung. In Konsequenz müssen angesichts des tatsächlich spröden Klebeverbundes Verträglichkeitsbedingungen berücksichtigt werden; eine Aufteilung nach Gl. (2.41) ist ohne Betrachtung der Verträglichkeit nicht zulässig.



**Abbildung 2.13.** Zugkraftaufteilung für den Nachweis der Verbundtragfähigkeit; Vorgehen nach (Ranisch 1982) bzw. (DIBt 1993)



**Abbildung 2.14.** Zugkraftaufteilung für den Nachweis der Verbundtragfähigkeit; Vorgehen nach (Rostásy u. a. 1996) bzw. (DIBt 1998)

### Richtlinie zum Verstärken mit CFK-Lamellen (DIBt 1998)

Im Zuge der Ausarbeitung einer Richtlinie für das Verstärken mit CFK-Lamellen wurde die Zugkraftaufteilung nach (Ranisch 1982) zugunsten eines Konzeptes in Anlehnung an (Holzenkämpfer 1994) bzw. (Rostásy u. a. 1996) aufgegeben. Die Zugkräfte der Bewehrungsstränge sind auf Basis der Hypothese von *Bernoulli* zu ermitteln (vgl. Abb. 2.14)(DIBt 1998).

Eine auf der Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung aufbauende Ermittlung der Teilzugkräfte kann abhängig von den vorliegenden Randbedingungen sowohl zu deutlich konservativen als auch zu auf der unsicheren Seite liegenden Ergebnissen führen.

### Weitere Richtlinien und Normenwerke

Derzeit findet sich in einigen internationalen Richtlinien zum Verstärken von Betonbauteilen mit Klebarmierung ein Endverankerungsnachweis in Anlehnung an die Formulierung in (Rostásy u. a. 1996) oder (DIBt 1998) bzw. ein Nachweis in ähnlicher Form. Die im Wesentlichen auf Verstärkungen mit CFK-Gelegen bzw. CFK-Lamellen zugeschnittenen Richtlinien sehen eine Zugkraftaufteilung nach der Hypothese von *Bernoulli* vor (vgl. u.a. fib 2001; ÖVBB 2002; Täljsten 2003).

Einzig die in der Schweiz entwickelte Klebarmierungs-Norm (SIA 166 2004) berücksichtigt die Abweichungen von einer ebenen Dehnungsverteilung durch pauschale Verbundfaktoren (vgl. Vogel und Ulaga 2003) (vgl. 2.4.2).

## 2.6 Ausgangssituation

Die Auswirkungen unterschiedlichen Verbundverhaltens auf die Aufteilung der Zugkräfte sind insbesondere seit den umfangreichen Forschungsarbeiten zu teilweise vorgespannten Bauteilen bekannt. Im Unterschied zur Kombination von Betonstahl und Spannstahl, die ähnlich duktilen Verbundverhalten zeigen, treten bei klebarmierten Bauteilen zusätzliche Problematiken auf.

Bei vorgespannten Bauteilen sind unterschiedliche Verbundeigenschaften ausschließlich auf Gebrauchslastniveau relevant. Dem entsprechend werden Verbundunterschiede im Wesentlichen im Rahmen der Beschränkung auftretender Rissbreiten bzw. für die Ermittlung der auftretenden Betonstahlspannungsschwingbreiten für den Ermüdungsnachweis berücksichtigt. In beiden Fällen liegen konservative Verbundkennwerte, d.h. die Annahme geringer Mitwirkung der Spannbewehrung, auf der sicheren Seite. Für die Sicherstellung der Tragfähigkeit ist unterschiedliches Verbundverhalten der Bewehrungsstränge unerheblich, da i.d.R. davon ausgegangen werden kann, dass im Verbund liegende Bewehrungsstränge im Grenzzustand der Tragfähigkeit die Streckgrenze erreichen.

Im Gegensatz zur Verbundcharakteristik von einbetoniertem Betonstahl oder Spannstahl reagiert der Klebeverbund spröde; nur in einem begrenzten Relativverschiebungsbereich können Verbundspannungen übertragen werden. Zudem können die Verbundunterschiede insbesondere am Endauflager bzw. in Tragwerksbereichen, in denen im Grenzzustand der Tragfähigkeit elastische Bewehrungsstränge vorliegen, tragfähigkeitsbestimmend werden.

Anhand der Ergebnisse bisher nur in begrenztem Umfang vorliegender experimenteller Untersuchungen zur Fragestellung des Zusammenwirkens einbetonierter und angeklebter Bewehrung sind z.T. signifikante Auswirkungen der Verbundunterschiede auf die Zugkraftaufteilung ablesbar. Allerdings beschränken sich die wenigen auswertbaren Versuche auf symmetrisch bewehrte, zentrisch zugbeanspruchte Betonprismen, die nur eingeschränkt Rückschlüsse auf das Verhalten biegebeanspruchter Bauteile zulassen.

Die bislang vorliegenden Rechenmodelle zur Zugkraftaufteilung basieren ausschließlich auf der Betrachtung von Zugstäben, die Auswirkungen unterschiedlicher Abstände zur neutralen Achse biegebeanspruchter Bauteile wie auch die Auswirkungen von Querkraftbeanspruchungen werden generell vernachlässigt. Einer der wesentlichen Kritikpunkte der Rechenmodelle ist zudem die bislang nahezu vollständig fehlende experimentelle Grundlage; das Ingenieurmodell nach (Holzenkämpfer 1994) konnte lediglich an zwei Versuchen - zum einen ein mit aufgeklebten GFK-Lamellen verstärkter Dehnkörper, zum anderen der Versuch *HV4* nach (Rostásy u. a. 1981) - verifiziert werden. Als experimentelle Basis des in (Uлага 2003) entwickelten Modells dient lediglich ein mit CFK-Gelegen verstärkter Dehnkörper nach (Ueda u. a. 2002) (vgl. 2.3.2).

Die Rechenmodelle erlauben zwar eine tendenziell richtige Abschätzung der Zugkraftaufteilung, allerdings werden - unter Vorwegnahme der Ergebnisse eigener Versuche - die tatsächlich auftretenden Zugkraftunterschiede in der Größenordnung nicht richtig wiedergegeben (vgl. Abb.2.11). Gleichzeitig ist die Anwendung der Modelle mit z.T. erheblichem Rechenaufwand verbunden. Generell fehlen - mit Ausnahme eines in (SIA 166 2004) angegebenen konstanten Faktors - bislang einfach handhabbare Werkzeuge z.B. in Form von Verbundbeiwerten, die eine pragmatische, zugleich in Hinblick auf die Beanspruchungen des Klebarmierungsstranges konservative Zugkraftermittlung ermöglichen.

## Experimentelle Untersuchungen

### 3.1 Vorbemerkung

Als Grundlage für Rechen- und Ingenieurmodelle zum Zusammenwirken einbetonierter Bewehrung mit Klebarmierung dienen experimentelle Untersuchungen an verstärkten Betonbauteilen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die in (Zilch u. a. 2004) dokumentierten Versuche an Dehnkörpern und Plattenstreifen herangezogen. An dieser Stelle werden, um den Rahmen des Berichtes nicht zu verlassen, lediglich die Eckdaten des Versuchsprogramms wiedergegeben; hinsichtlich einer eingehenden Beschreibung der verwendeten Materialien, von Versuchskörpern, Durchführung und Versuchsergebnissen wird auf (Zilch u. a. 2004) verwiesen. Zur Identifikation der Versuche bzw. für eine Anknüpfung an die Darstellung in der genannten Arbeit wird das gewählte Bezeichnungssystem erläutert.

Aufbauend auf den Versuchsergebnissen können Aussagen über die Aufteilung der Zugkraft auf die einzelnen Bewehrungsstränge über den gesamten möglichen Beanspruchungsbereich bis zur vollständigen Entkopplung der Klebarmierung bzw. dem Überschreiten der Streckgrenze eines oder ggf. beider Bewehrungspartner getroffen werden. Neben den Einflüssen einzelner Materialparameter werden Auswirkungen verschiedener Typen einbetonierter bzw. angeklebter Bewehrung untersucht. Da zudem die Bildung von Rissen das Zusammenwirken der Bewehrungsstränge i.A. wesentlich beeinflusst, werden im Rahmen der experimentellen Untersuchungen verschiedene Rissbildungsstadien vorgegeben bzw. im Versuch durchlaufen.

Die Konzeption des Versuchsprogramms orientiert sich naturgemäß an den experimentellen Untersuchungen bei teilweise vorgespannten Bauteilen; den größten Anteil stellen angesichts der eindeutigen Randbedingungen, die die Bandbreite möglicher Einflussfaktoren deutlich einengen, Versuchsserien an zentrisch zugbeanspruchten verstärkten Stahlbetonprismen. Da zum einen biegebeanspruchte, verstärkte Bauteile gegenüber Zugstäben größere baupraktische Relevanz besitzen, zum anderen die Adaption der für Zugstäbe abgeleiteten Zusammenhänge auf querkraftbeanspruchte Bereiche von Biegebauteilen nicht ohne Einschränkungen möglich ist, werden ergänzend Versuche an verstärkten Stahlbeton-Plattenstreifen bei reduzierter Parameteranzahl durchgeführt.

### 3.2 Versuchsprogramm

Die zur Auswertung herangezogenen Untersuchungen zum Zusammenwirken umfassen folgende Komplexe:

- Untersuchung des Zusammenwirkens anhand gemischt bewehrter Dehnkörper
- Versuche an realitätsnahen, biegebeanspruchten verstärkten Stahlbeton-Plattenstreifen.

Ergänzend werden in (Zilch u. a. 2004) Versuche zum Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung an Ausziehkörpern und Dehnkörpern mit zentrisch einbetoniertem Beweh-

rungsstab als Grundlage der Ableitung von Verbundmodellen dargestellt. Die aus Versuchen zur Charakterisierung der Materialeigenschaften resultierenden Kenngrößen werden für alle Versuchskörper separat in A wiedergegeben.

Eine Zusammenstellung aller Versuche einschließlich der relevanten Parameter und Bezeichnungen enthält Tab. 3.1.

### 3.2.1 Parameter

Naturgemäß kann die große Bandbreite der bei Verstärkungsaufgaben vorliegenden Randbedingungen nicht in einem Versuchsprogramm überprüft werden. Für die experimentellen Untersuchungen wurden im Wesentlichen Parameterkombinationen ausgewählt, die im Hinblick auf eine spätere Abbildung in einem numerischen Modell bzw. in einem für praktische Belange vereinfachten Ingenieurmodell baupraktische Relevanz bei gleichzeitig ausreichender Bandbreite besitzen. Folgende Parameter wurden in Versuchen geprüft:

- Durchmesser und Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung
  - gerippter Betonstahl,  $d_s = 8$  mm und 16 mm
  - glatter Betonstahl,  $d_s = 6$  mm und 12 mm
- Art und Dehnsteifigkeit der Klebarmierung
  - Stahllaschen  $St37$ ;  $t_L = 5$  mm und 10 mm
  - CFK-Lamellen,  $t_L = 1,2$  mm
- Betonfestigkeitsklasse
  - C20/25
  - C40/50
- Rissbildvorgabe bzw. Rissentwicklung
  - Vorgabe eines Initialrisses; Zustand für den gesamten Beanspruchungsbereich beibehalten;
  - Vorgabe eines Initialrisses, fortschreitende Rissbildung bei zunehmender Beanspruchung;
  - Vorgabe eines abgeschlossenen Erstrissbildes

### 3.2.2 Bezeichnungen

Zur Identifikation der einzelnen Versuche wird ein Bezeichnungssystem verwendet, das die geprüfte Parameterkombination bzw. den Versuchstyp unmittelbar ablesbar macht (vgl. Tab. 3.1). Die jeweils drei Komponenten einer Identifikationsnummer bedeuten:

- |               |   |
|---------------|---|
| 1. Komponente | Versuchstyp, versuchsspezifische Parameterkombination     |
|               | A → Betonstahl-Verbundversuch (Ausziehkörper)             |
|               | D → Betonstahl-Verbundversuch (Dehnkörper)                |
|               | V → Zugversuch an einem gemischt bewehrten Dehnkörper     |
|               | B → Versuch an einem verstärkten Plattenstreifen          |
|               | 1-6 → Kennziffer der Kombination (Betonstahl)             |
| 2. Komponente | Ordnungsnummer des Versuchs                               |
| 3. Komponente | Betonfestigkeitsklasse, Klebarmierungstyp, Verbundbereich |
|               | B1 → C20/25   |
|               | B2 → C40/50   |
|               | C → CFK-Lamellen  |
|               | S → Stahllaschen  |
|               | u → Verbundversuch: Verbundbereich I (unten)              |
|               | o → Verbundversuch: Verbundbereich II (oben)              |

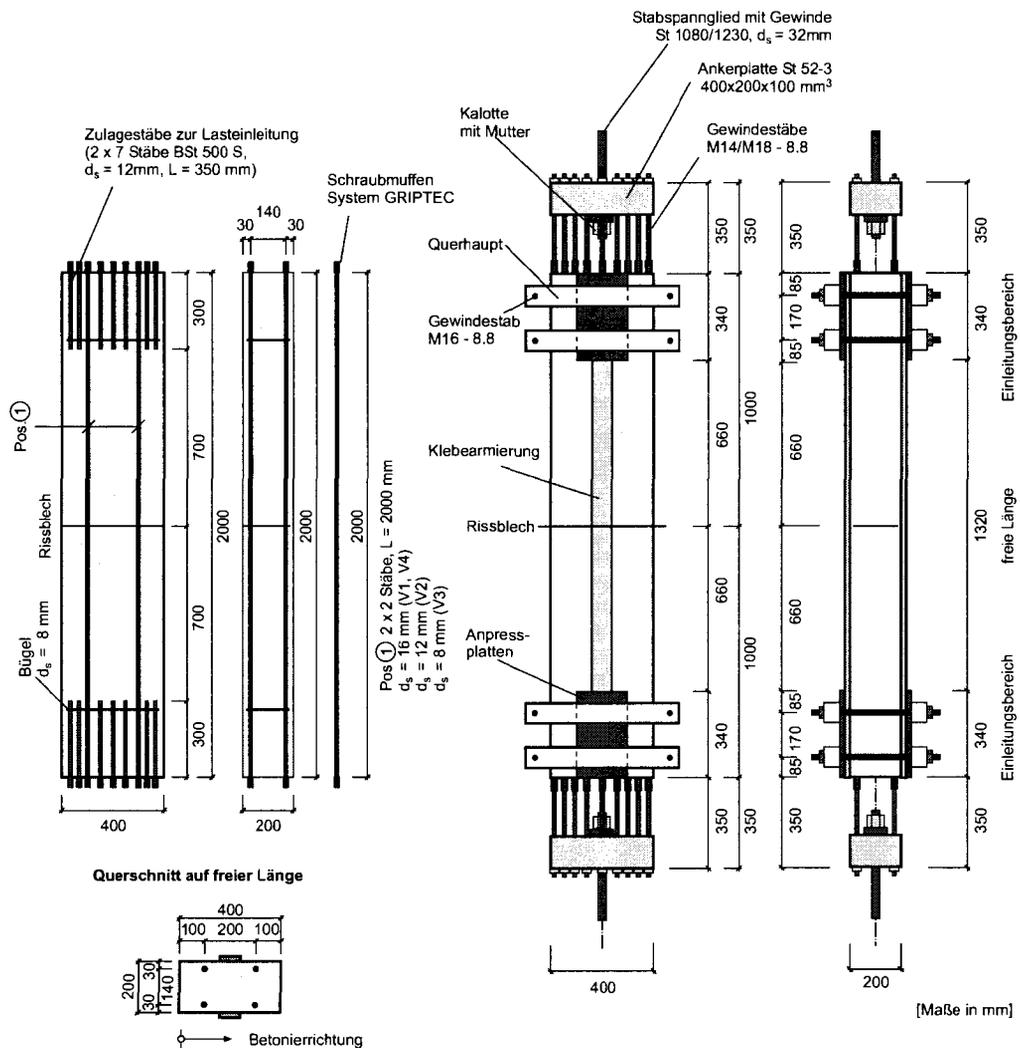
Tabelle 3.1. Versuchsübersicht, Bezeichnungen

Versuchsart	Kennziffer (Kombination)	Betonstahl	Beton	Klebbewehrung, weitere Parameter	Anzahl	Versuchsbezeichnung		
						von	bis	
<b>Verbundversuche an Konsolaustrichkörpern</b>				<b>Verbundlage</b>				
A	1	$d_s = 16$ mm gerippt	C20/25	unten	3	A1-01-B1u	A1-03-B1u	
				oben	3	A1-04-B1o	A1-06-B1o	
			C40/50	unten	3	A1-01-B2u	A1-03-B2u	
				oben	3	A1-04-B2o	A1-06-B2o	
	2	$d_s = 12$ mm glatt	C20/25	unten	3	A2-01-B1u	A2-03-B1u	
				oben	3	A2-04-B1o	A2-06-B1o	
			C40/50	unten	3	A2-01-B2u	A2-03-B2u	
				oben	3	A2-04-B2o	A2-06-B2o	
	3	$d_s = 8$ mm gerippt	C20/25	unten	3	A3-01-B1u	A3-03-B1u	
				oben	3	A3-04-B1o	A3-06-B1o	
			C40/50	unten	3	A3-01-B2u	A3-03-B2u	
				oben	3	A3-04-B2o	A3-06-B2o	
	5	$d_s = 8$ mm gerippt	C20/25	unten	3	A5-01-B1u	A5-03-B1u	
				oben	3	A5-04-B1o	A5-06-B1o	
	6	$d_s = 6$ mm glatt	C20/25	unten	3	A6-01-B1u	A6-03-B1u	
				oben	3	A6-04-B1o	A6-06-B1o	
	<b>Verbundversuche an zentrisch bewehrten Dehnkörpern</b>				<b>Verbundlage</b>			
	D	3	$d_s = 8$ mm gerippt	C20/25	unten	3	D3-01-B1u	D3-03-B1u
oben					3	D3-04-B1o	D3-06-B1o	
<b>Versuche an gemischt bewehrten Dehnkörpern</b>				<b>Klebbewehrung Rissabstand [mm]</b>				
V	1	$d_s = 16$ mm gerippt	C40/50	CFK-Lamellen	2	V1-03-B2C	V1-04-B2C	
			C20/25		4	V1-05-B1C	V1-08-B1C	
			C40/50		Stahllaschen	4	V1-09-B2S	V1-12-B2S
			C20/25			3	V1-13-B1S	V1-15-B1S
	2	$d_s = 12$ mm glatt	C40/50	CFK-Lamellen	5	V2-01-B2C	V2-04-B2C	
			C20/25		4	V2-05-B1C	V2-08-B1C	
			C40/50	Stahllaschen	3	V2-09-B2S	V2-12-B2S	
			C20/25		4	V2-13-B1S	V2-16-B1S	
	3	$d_s = 8$ mm gerippt	C40/50	CFK-Lamellen	4	V3-01-B2C	V3-04-B2C	
			C20/25		4	V3-05-B1C	V3-08-B1C	
			C40/50	Stahllaschen	4	V3-09-B2S	V3-12-B2S	
			C20/25		3	V3-13-B1S	V3-16-B1S	
	4	$d_s = 16$ mm gerippt	C40/50	CFK-Lamellen	2	V4-01-B1C	V4-02-B2C	
			C20/25	$s_{cr} = 200$ mm	2	V4-03-B1C	V4-04-B1C	
			C40/50	Stahllaschen	2	V4-05-B2S	V4-06-B2S	
			C20/25	$s_{cr} = 150$ mm	2	V4-07-B1S	V4-08-B1S	
	5	$d_s = 8$ mm, gerippt	C20/25	Stahllaschen	2	V5-01-B1S	V5-02-B1S	
	6	$d_s = 6$ mm glatt	C20/25	Stahllaschen	2	V6-01-B1S	V6-02-B1S	
<b>Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen</b>				<b>Klebbewehrung Rissabstand [mm]</b>				
B	2	$d_s = 12$ mm glatt	C40/50	CFK-Lamellen $s_{cr} = 300$ mm	3	B2-01-B2C	B2-03-B2S	
				Stahllaschen $s_{cr} = 300$ mm	3	B2-04-B2S	B2-06-B2S	
				CFK-Lamellen $s_{cr} = 150$ mm	3	B2-07-B2C	B2-09-B2C	
				Stahllaschen $s_{cr} = 150$ mm	3	B2-10-B2S	B2-12-B2S	

### 3.3 Überblick über die Hauptversuche

#### 3.3.1 Versuche an gemischt bewehrten Dehnkörpern

Zur Untersuchung der Auswirkungen wesentlicher Einflussgrößen auf das Zusammenwirken einbetonierter und angeklebter Bewehrung wird in Anlehnung an die umfangreichen Untersuchungen zu ähnlichen Problematiken bei vorgespannten Bauteilen auf zentrisch zugbeanspruchte Dehnkörper zurückgegriffen. In sechs Versuchsreihen werden alle in 3.2.1 aufgezählten Parameter geprüft. Die Dehnkörper der Reihen V1 bis V4 (Abb. 3.1, vgl. Tab.3.1) werden als idealisierte Abbildung des Zuggurtes eines biegebeanspruchten Bauteils im Bereich  $M = \text{const.}$  konzipiert; zur Wahrung der Randbedingungen werden die Klebarmierungsstränge mit mechanischen Endverankerungen versehen. Zusätzlich zu dem durch das Anrissblech vorgegebenen Initialriss können in den Reihen V1 bis V3 planmäßig weitere Trennrisse auftreten. Im Unterschied dazu waren die, in Bezug auf die Bewehrungsverhältnisse mit Reihe V1 weitestgehend identischen Prüfkörper der Reihe V4 mit zusätzlich weiteren vier Anrissblechen ausgestattet, um das Zusammenwirken bei vorliegendem abgeschlossenem Rissbild zu untersuchen. Die Abstände der Anrissbleche orientierten sich dabei an den in Reihe V1 beobachteten Rissabständen bei Höchstlast. Die Versuchskörper der Reihen V5 und V6 (Abb. 3.2) sollte im Gegensatz zu den Körpern



**Abbildung 3.1.** Dehnkörper der Versuchsreihen V1, V2, V3 und V4 - Bewehrung und Versuchsaufbau (Schraubmuffenanschluss der durchlaufenden Bewehrung exemplarisch, zusätzliche Rissbleche der Reihe V4 nicht dargestellt)



### 3.3.2 Versuche an verstärkten Plattenstreifen

Für die experimentellen Untersuchungen an biegebeanspruchten Bauteilen wurden Plattenstreifen mit geringer Querkraftbeanspruchung gewählt, um ein vorzeitiges Verbundversagen des Klebarmierungsstranges ausgelöst durch einen Schubrissversatz zu vermeiden. Zur Aufnahme diskreter Dehnungen in gerissenen Querschnitten entlang des querkraftbeanspruchten Bereichs muss das Rissbild durch Anrissbleche vorgegeben werden. Die gewählten Abstände orientieren sich an dem in (Niedermeier 2001) vorgestellten Rechenmodell zur Abschätzung des Erstrissbildes (Abb. 3.3).

Da bei Biegebauteilen die Größe der Gesamtzugkraft sowie deren Aufteilung im Unterschied zu zentrisch gezogenen Dehnkörpern neben den Verbundeigenschaften der Bewehrungsstränge und den damit verknüpften Faktoren wie Rissbild oder Dehnungsrandbedingungen auch von einer Reihe weiterer Einflüsse, u.a. der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons bzw. der Lage der resultierenden Druckkraft, den Abständen der Bewehrungsstränge zur neutralen Achse des Querschnitts oder der Querkraft (Versatzmaß) bestimmt wird, wird in den Versuchen lediglich ein reduziertes Parameterspektrum abgebildet:

- Art bzw. Dehnsteifigkeit der Klebarmierung (CFK-Lamellen; Stahllaschen,  $t_L = 5$  mm)
- Rissabstand des vorgegebenen Primärrissbildes ( $s_{cr} = 300$  mm und 150 mm)

Die Abmessungen der Plattenstreifen, die Anordnung der einbetonierten und angeklebten Bewehrung sowie die Lage der Anrissbleche sind in Abb. 3.3 wiedergegeben. Als Biegezugbewehrung wurden jeweils zwei über die gesamte Bauteillänge durchlaufende glatte

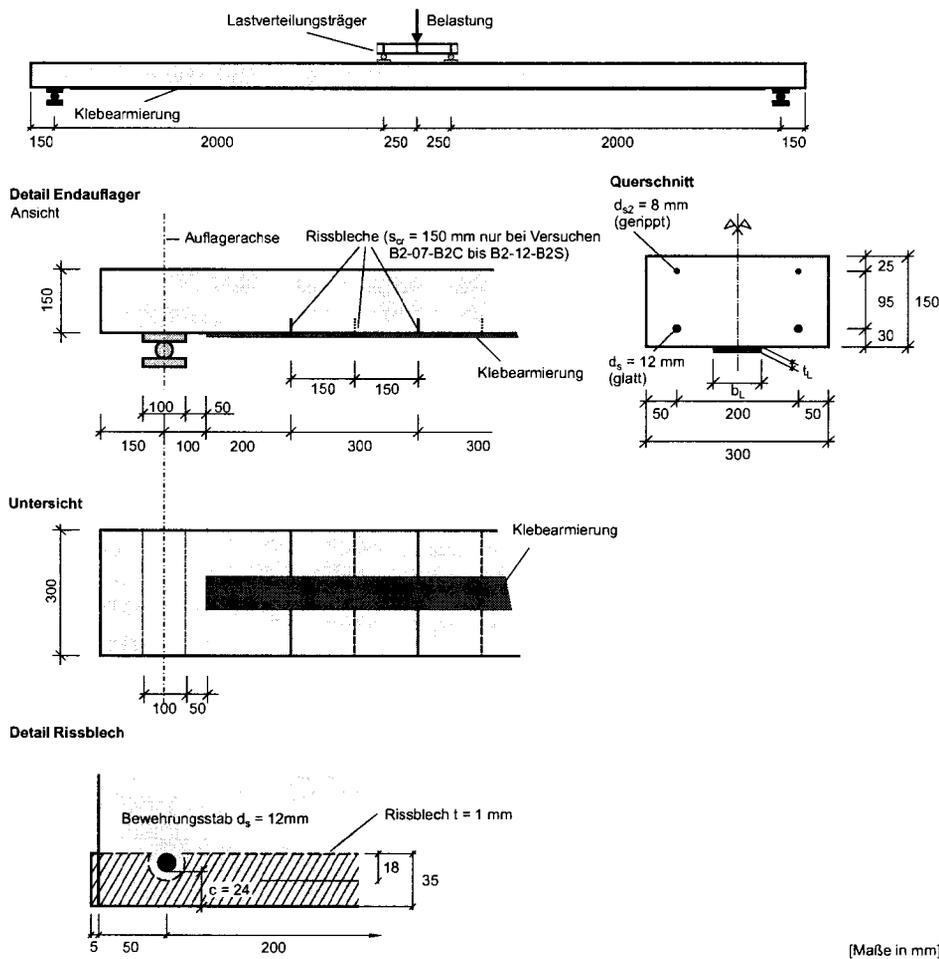
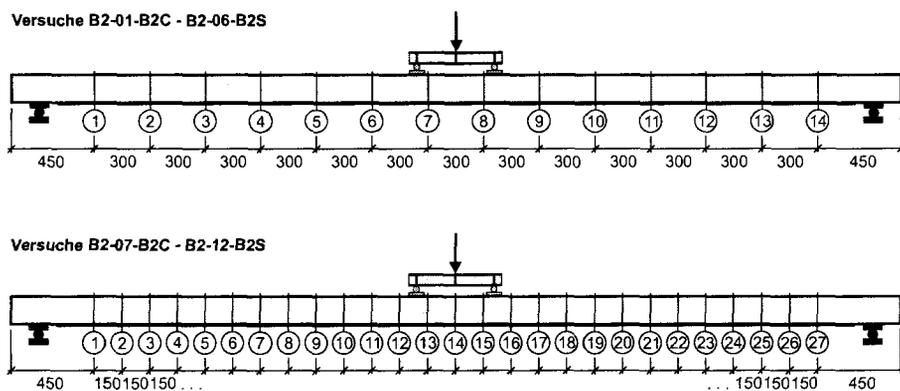


Abbildung 3.3. Plattenstreifen zur Untersuchung des Zusammenwirkens bei biegebeanspruchten Bauteilen - Querschnitt, Versuchsaufbau, Ausbildung der Auflagerbereiche und Ausprägung der Rissbleche

Betonstähle des Durchmessers 12 mm, die den im Rahmen der Verbundversuche der Reihe A2 bzw. der Dehnkörperversuche der Reihe V2 geprüften Stäben entsprachen, verwendet. Die Betondeckung der Bewehrung entspricht mit 24 mm ebenfalls dem in den Verbund- und Dehnkörperversuchen ausgeführten Wert. In Analogie zu den Dehnkörperversuchen war die einbetonierte Bewehrung zum Verstärkungszeitpunkt nicht vorbelastet. In ausgewählten Rissquerschnitten wurden zur Messung diskreter Dehnungen auf der Innen- bzw. Klebeseite sowie auf der Aussenseite der Stahllaschen bzw. CFK-Lamellen sowie ergänzend auf der einbetonierten Bewehrung DMS appliziert. Wesentliche Versuchsergebnisse in Form gemessener Dehnungen der Klebarmierung in Feldmitte, dem querkraftbeanspruchten Bereich sowie dem auflagnächsten Rissquerschnitt werden in Zusammenhang mit einer Gegenüberstellung mit Rechenwerten in Anhang C wiedergegeben.

Zur Identifikation der Messquerschnitte im Rahmen der Nachrechnung der Biegeversuche werden die vorgegebenen Rissquerschnitte fortlaufend nummeriert (Abb. 3.4).



**Abbildung 3.4.** Bezeichnung der Rissquerschnitte des vorgegebenen Rissbildes

### Versagensursachen

Die Höchstlast war in allen Versuchen an mit CFK-Lamellen verstärkten Plattenstreifen an ein schlagartiges Verbundversagen der Klebarmierung gekoppelt. Dabei war in den Bereichen, in denen die Betonstahlbewehrung die Streckgrenze überschritten hatte, ein Verbundversagen in der oberflächennahen Betonschicht erkennbar. Zu jeweils einem Lamellenende hin war ein Wechsel des Bruchhorizontes in die äußerste Faserlage der CFK-Lamellen an der Grenzfläche zur Klebstoffschicht, einem sog. Zwischenfaserbruch (vgl. Neubauer 2000) zu beobachten.

In den Versuchen an Plattenstreifen mit aufgeklebten Stahllaschen waren keine großflächigen Klebeverbundentkopplungen zu beobachten. Die Traglast wurde durch das Erreichen der Streckgrenzen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung bestimmt.

---

## Grundlagen der Modellbildung

In den folgenden Abschnitten werden die für eine Abbildung des Zusammenwirkens einbetonierter Bewehrung mit Klebarmierung erforderlichen Material- und Verbundmodelle sowie ergänzend allgemeine Kompatibilitätsbedingungen und Rissbildungsmodelle vorgestellt und diskutiert.

### 4.1 Materialmodelle

#### 4.1.1 Beton - Druckbeanspruchung

Als grundlegende Voraussetzung einer wirklichkeitsnahen Ermittlung der Zugkraftanteile der Bewehrungsstränge in biegebeanspruchten Bauteilen ist die realistische Quantifizierung von Lage und Größe der Druckspannungserzeugenden bzw. der Druckzonenhöhe anzusehen. Im Unterschied zu den im Rahmen einer Bemessung verwendeten idealisierten Beschreibungen, etwa dem Parabel-Rechteck-Diagramm nach (DIN 1045-1 2001), muss das Spannungs-Dehnungs-Verhalten in allen Beanspruchungsbereichen zutreffend erfasst werden.

Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachteten biegebeanspruchten Bauteile kann ausserhalb der *St. Venant'schen* Störbereiche in guter Näherung von einachsialer Druckbeanspruchung ausgegangen werden. In Störbereichen, z.B. Lasteinleitungspunkten, können aufgrund der zwei-, ggf. dreiachsialen Druckspannungszustände erhöhte Tragfähigkeiten und Steifigkeiten realisiert werden (vgl. Kupfer 1973). Auswirkungen mehrachsialer Druckspannungszustände werden für die vorliegende Problematik allerdings als wenig relevant erachtet und entsprechend vernachlässigt.

Da Verstärkungsmaßnahmen i.d.R. an bestehenden Bauwerken erforderlich werden bzw. der weitaus größte Teil experimenteller Untersuchungen zum Tragverhalten verstärkter biegebeanspruchter Balken und Platten an Bauteilen aus Normalbeton durchgeführt wurden, wird ausschließlich das Last-Verformungsverhalten sowie dessen funktionale Beschreibung von Normalbeton diskutiert.

#### Verhalten von Normalbeton unter einachsialer Druckbeanspruchung

Normalbeton weist im Druckversuch unter zentrischer, einachsialer Druckbeanspruchung verschiedene charakteristische Bereiche des Last-Verformungs-Verhaltens ausgehend von der annähernd elastischen Reaktion bis 40% der Druckfestigkeit über den zunehmenden Steifigkeitsverlust bis zum Erreichen der Bruchspannung und dem anschließenden - im verformungsgesteuerten Versuch zu beobachtenden - entfestigenden Verhalten auf. Das Formänderungsverhalten der Biegedruckzone biegebeanspruchter Bauteile wird im Wesentlichen von folgenden Faktoren dominiert:

- Zusammensetzung des Betons
  - Eigenschaften des Zementsteins
  - Art und Eigenschaften der Gesteinskörnung

- Verbund zwischen Zementstein und Gesteinskörnung
- Verarbeitung des Betons (Verdichtung, Orientierung bei der Betonage)
- Belastungsgeschwindigkeit
- Belastungsdauer
- Bewehrung der Biegedruckzone
  - Längs- bzw. Druckbewehrung
  - Bügel bzw. Umschnürungsbewehrung

Der Einfluss der Betonzusammensetzung auf das Last-Verformungs-Verhalten kann in guter Näherung durch Versuche an Probekörpern nach (DIN 1048-5 1996) quantifiziert werden. Belastungs- bzw. Dehngeschwindigkeit sowie Belastungsdauer haben für das Trag- und Verformungsverhalten der Biegedruckzone wesentliche Bedeutung, eine Übertragung der Ergebnisse aus Normversuchen auf die Verhältnisse der Druckzone biegebeanspruchter Bauteile ist allerdings nicht ohne Weiteres möglich. Während allerdings die bei Druckfestigkeits- bzw. Elastizitätsmodul-Prüfungen nach (DIN 1048-5 1996) erforderlichen Dehngeschwindigkeiten i.d.R. mit realen Beanspruchungsgeschwindigkeiten im Fall von Verkehrslasten übereinstimmen (vgl. DAfStb 2003), müssen bei Versuchsnachrechnungen - bedingt durch langsame Lastaufbringung ggf. in Laststufen - verminderte Dehngeschwindigkeiten bzw. Zeitstandsbeanspruchungen berücksichtigt werden.

In der Biegedruckzone sind für alle Ebenen parallel zur Nulllinie unterschiedliche Dehngeschwindigkeiten anzunehmen (vgl. Rüschi 1960; Rasch 1962; König u. a. 1999). Die Annahme eines global gültigen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Dehnungen stellt daher eine Näherung dar, ermöglicht allerdings die unmittelbare Verknüpfung der Beton-Arbeitslinie mit der Spannungsverteilung der Biegedruckzone (Grasser 1968).

### Last-Verformungs-Gesetze

Zur funktionalen Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Druckspannung und Betonstauchung liegt eine Vielzahl von Ansätzen vor (vgl. u.a. Eibl und Ivanyi 1976; Graubner 1989). Eine Anknüpfung an Versuchsergebnisse erfolgt i.d.R. über die Bedingungen (4.1) bis (4.3).

$$\sigma_c = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c} = E_{c0} \quad (4.1)$$

$$\sigma_c = f_c \quad \rightarrow \quad \epsilon_c = \epsilon_{c1} \quad (4.2)$$

$$\sigma_c = f_c \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma_c}{d\epsilon_c} = 0 \quad (4.3)$$

Die Ansätze liegen in Form 2-, 3- oder 4-parametriger<sup>1</sup> Funktionen, z.B. als Polynome 2., 3. oder 4. Grades bzw. gebrochen rationaler Funktionen vor. Zur numerischen Modellierung biegebeanspruchter Bauteile wurden in der Vergangenheit unterschiedlichste Beschreibungen gewählt. Unter anderem liegt den Untersuchungen zur Rotationsfähigkeit von biegebeanspruchten Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen nach (Langer 1987; Kreller 1989; Li 1995) eine modifizierte Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach (Kent und Park 1971) bzw. (Sheikh und Uzumeri 1980) zugrunde, die explizit die Auswirkungen der die Druckzone umschließenden Bügelbewehrung auf die Trag- und Verformungsfähigkeit berücksichtigt. Im Rechenmodell nach (Graubner 1989), ebenfalls zur Untersuchung der Rotationsfähigkeit entwickelt, wird der Ansatz nach (CEB-FIP MC 90 1993), erweitert um die Einflüsse der Bügelbewehrung verwendet. Zur numerischen Untersuchung des Durchstanztragverhaltens punktgestützter Stahlbetonplatten wird in (Staller 2001) ebenfalls auf ein Betonmodell auf Basis der Formulierung des einachsialen Verhaltens nach (DIN 1045-1 2001) zurückgegriffen.

Für die Untersuchung des Zusammenwirkens einbetonierter und angeklebter Bewehrung ist eine Vernachlässigung der Umschnürungswirkung durch Bügel vertretbar; die höhere Duktilität der Druckzone bleibt wegen der lediglich geringen zu realisierenden Dehnungen der Klebarmierung ohne Auswirkung, während die Tragfähigkeitssteigerung bei

<sup>1</sup> Zur Bestimmung des vierten Parameters wird i.d.R. ein Punkt des entfestigenden Astes der Spannungs-Dehnungs-Beziehung verwendet.

baupraktisch üblichen Bügelabständen von untergeordneter Bedeutung ist. Vor diesem Hintergrund wird zur Abbildung einachsial druckbeanspruchten Betons die Formulierung nach (DIN 1045-1 2001) gewählt.

### Spannungs-Dehnungs-Linie nach DIN 1045-1

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendete, im Wesentlichen von *Rüsch* und *Grasser* anhand der Auswertung von Kurzzeitversuchen angegebene Beschreibung stellt sich als gebrochen rationale Funktion mit 3 Parametern dar, die durch (4.1) bis (4.3) an Versuchsergebnisse angebunden werden kann (Gl. 4.4) (Abb. 4.1).

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = -\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \quad \text{für } \epsilon_c \leq \epsilon_{c1u} \quad (4.4)$$

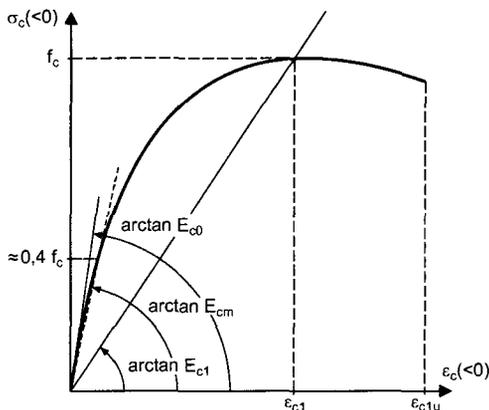
$$\eta = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}$$

$$k = E_{c0} \cdot \frac{f_c}{\epsilon_{c1}} = \frac{E_{c0}}{E_{c1}}$$

mit

$f_c$	Höchstwert der ertragenen Betondruckspannung
$\epsilon_{c1}$	Dehnung bei Erreichen von $f_c$
$\epsilon_{c1u}$	Bruchdehnung bei Erreichen der Festigkeitsgrenze
$E_{c0}$	Tangentenmodul im Ursprung
$E_{c1}$	Sekantenmodul durch den Ursprung und $(f_c/\epsilon_{c1})$

Die in (CEB-FIP MC 90 1993) vorgeschlagene Erweiterung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung um eine über  $\epsilon_{c1u}$  hinausgehende Beschreibung wird nicht verwendet.



**Abbildung 4.1.** Spannungs-Dehnungs-Linie für Beton unter einachsialer Druckbeanspruchung nach (DIN 1045-1 2001) (schematisch)

### Kennwerte der Spannungs-Dehnungs-Linien für Kurzzeitbeanspruchungen

Zur Beschreibung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens unter kurzzeitiger Beanspruchung werden die im Folgenden beschriebenen Eingangswerte der Formulierung nach Gl. (4.4) verwendet. Den Kennwerten liegt die Annahme einer konstanten Dehngeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} \approx -2\text{‰}/\text{min}$  zu Grunde; die Höchstlast wird im Versuch in ca. 1 bis 2 Minuten erreicht (vgl. Reinhardt und Hilsdorf 2001):

$f_c$	Mittelwert der einachsialen zentrischen Zylinderdruckfestigkeit $f_{cm}$ ; die Umrechnung aus Kennwerten, die an anderen Probekörpern gewonnen wurden, erfolgt nach Anhang D.1.
-------	---

$E_{c0}$  Der Tangentenmodul im Ursprung entspricht aufgrund der nahezu ausschließlich elastischen Verformungsanteile nach dreimaliger vorausgehender Be- und Entlastung in guter Näherung dem Sekantenmodul nach (DIN 1048-5 1996) (vgl. Reinhardt und Hilsdorf 2001). Sofern für Versuchsnachrechnungen oder Parameterstudien experimentell ermittelte Kennwerte des E-Moduls nicht vorliegen, wird die Beziehung nach (DIN 1045-1 2001) Gl. (4.5) verwendet.

$$E_{c0} = 9500 \cdot f_{cm}^{1/3} \quad (4.5)$$

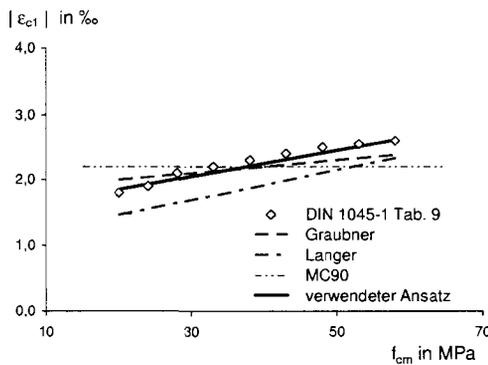
Dabei wird von Gesteinskörnungen aus kalzitischem bzw. quarzitischem Material ausgegangen (vgl. DAfStb 2003).

$\epsilon_{c1}$  Die Stauchung bei Erreichen der Höchstlast wächst nach (Rüsch 1955) mit steigender Druckfestigkeit geringfügig an. Während in (Grasser 1968) bzw. in der Folge in (CEB-FIP MC 90 1993) von einem konstanten Wert  $\epsilon_{c1} = -2,2\text{‰}$  ausgegangen wurde, wird in (DIN 1045-1 2001) eine veränderliche Stauchung bei Höchstlast berücksichtigt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein Zusammenhang zwischen  $\epsilon_{c1}$  und  $f_{cm}$  nach Gl. (4.6) verwendet. Damit werden, z.B. im Vergleich mit der in (Graubner 1989) angegebenen Beziehung, die Kennwerte nach (DIN 1045-1 2001) gut wiedergegeben (Abb. 4.2).

$$|\epsilon_{c1}| = -1,45 - 0,02 \cdot f_{cm} \quad \text{für } 20 \leq f_{cm} \leq 60 \text{ MPa} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} f_{cm} & \text{ in MPa} \\ |\epsilon_{c1}| & \text{ in ‰} \end{aligned}$$

$\epsilon_{c1u}$  In Analogie zu (DIN 1045-1 2001) wird für die Stauchung bei Versagen ein auf (Rüsch 1955; Rüsch und Stöckl 1963; Rasch 1962) zurückgehender konstanter Wert  $\epsilon_{c1u} = -3,5\text{‰}$  angesetzt. Der im Vergleich mit Ergebnissen anderer experimenteller Untersuchungen (vgl. Langer 1987) konservative Wert stellt angesichts des zu realisierenden Dehnungsniveaus der Klebarmierung keine Einschränkung des Rechenmodells dar.



**Abbildung 4.2.** Betonstauchung bei Erreichen der Höchstlast; Ansätze nach (DIN 1045-1 2001; Graubner 1989; Langer 1987; CEB-FIP MC 90 1993) und gewählte Beziehung

### Berücksichtigung von Auswirkungen verminderter Dehngeschwindigkeiten

In Versuchen an biegebeanspruchten Bauteilen wird im Allgemeinen die Belastung in einzelnen Laststufen aufgebracht. Zur Aufnahme von Messgrößen wird die Belastung bzw. die Verformung im Fall weggesteuerter Versuche anschließend bis zur weiteren Belastung konstant gehalten. Im Unterschied zur Dehngeschwindigkeit bei der Ermittlung der Betonkennwerte nach (DIN 1048-5 1996) bzw. der i.A. zu erwartenden Belastungsgeschwindigkeit bei Verkehrslasten sind in Versuchen zusätzlich Auswirkungen der verminderten Dehngeschwindigkeiten bzw. der Zeitstandbelastungen und den dadurch initiierten Kriechprozessen in der Druckzone zu berücksichtigen.

Reduzierte Dehngeschwindigkeiten führen nach (Rüsch 1960; Rasch 1962) zu völligeren Spannungs-Dehnungs-Linien mit reduzierten Maximalwerten der Druckspannung bei vergrößerten zugehörigen Stauchungen, während Zeitstandbeanspruchungen, d.h. über definierte Zeitintervalle konstant gehaltene Spannungen nach (Grasser 1968) eine Zunahme der Dehnungen und ggf. ein vorzeitiges Versagen bei verminderten Druckfestigkeiten nach sich ziehen. Eine Auswertung der in (Rasch 1962) dokumentierten Versuchsreihen C5 bis C7 an Betonen mit Würfeldruckfestigkeiten  $\beta_{W200,28d}$  zwischen 35 und 50 MPa erlaubt die Modifikationen der maßgebenden Kennwerte der Spannungs-Dehnungs-Linien nach den Gl. (4.7) bis (4.10) für eine Versuchsdauer im Bereich von 50 bis 100 Minuten. Die Ansätze sind als Näherungen zu betrachten.

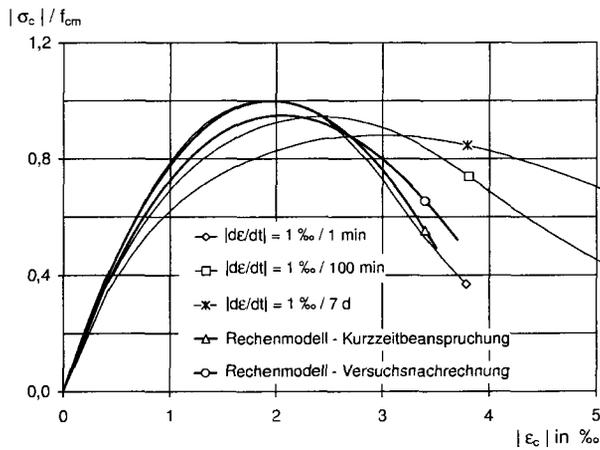
$$f_{cm,t} = 0,95 \cdot f_{cm} \tag{4.7}$$

$$\epsilon_{c1,t} = 1,05 \cdot \epsilon_{c1} \tag{4.8}$$

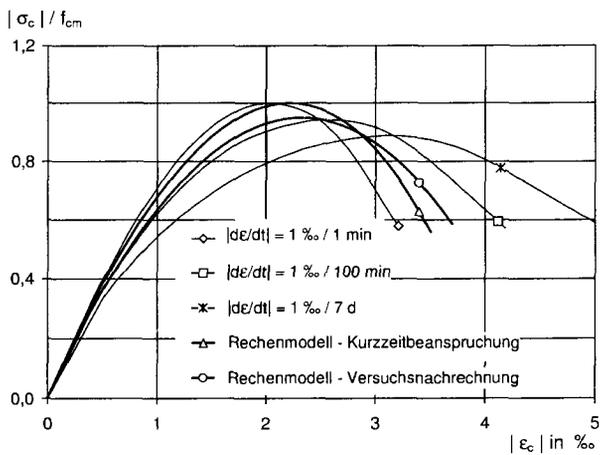
$$E_{c0,t} = 0,95 \cdot E_{c0} \tag{4.9}$$

$$\epsilon_{c1u,t} = 1,05 \cdot \epsilon_{c1u} \tag{4.10}$$

In den Abbildungen 4.3 und 4.4 werden die Spannungs-Dehnungs-Linien nach Gl. (4.4) in Verbindung mit Ansätzen nach den Gl. (4.7) bis (4.10) den in (Rasch 1962) angegebenen Spannungs-Dehnungs-Linien gegenübergestellt.



**Abbildung 4.3.** Vergleich der rechnerischen Spannungs-Dehnungs-Linie mit Ergebnissen nach (Rasch 1962, Bild 107, B300);  $f_{cm} = 25 \text{ MPa}$



**Abbildung 4.4.** Vergleich der rechnerischen Spannungs-Dehnungs-Linie mit Ergebnissen nach (Rasch 1962, Bild 107, B450);  $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$

#### 4.1.2 Beton - Zugbeanspruchung

Im Rahmen des entwickelten Rechenmodells wird auf die Verwendung expliziter Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zugbeanspruchten Betons verzichtet. Risse in zentrisch zugbeanspruchten bzw. biegebeanspruchten Bauteilen werden diskret abgebildet. Zur Ableitung von Rissbildungsmodellen werden Beziehungen zwischen den Kenngrößen der Zugfestigkeit

$$\begin{aligned} f_{ct} & \text{ zentrische Zugfestigkeit} \\ f_{ct,fl} & \text{ Biegezugfestigkeit} \\ f_{ct,sur} & \text{ Oberflächenzugfestigkeit}^2 \end{aligned}$$

sowie die Verknüpfung der Kenngrößen mit der Druckfestigkeit  $f_{cm}$  des Bauteilbetons angegeben.

#### Verhalten von Normalbeton unter Zugbeanspruchung

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen einachsial zugbeanspruchten Normalbetons im verformungsgesteuerten Versuch ist durch weitgehend elastisches Verhalten bis annähernd zur Maximalspannung mit anschließendem kontinuierlichen Spannungsabfall bei überproportionaler Zunahme der Dehnungen im Bereich des Risses zu charakterisieren. Die ablaufenden Phänomene - ausgehend von der Bildung von Mikrorissen bis zur Vereinigung zu Makrorissen - werden durch verschiedene Modellvorstellungen erfasst, u.a. durch die Annahme einer Rissprozesszone an der Risspitze, die eine begrenzte Übertragung von Zugspannungen ermöglicht. Insbesondere im Zusammenhang mit der numerischen Abbildung von Rissbildungsprozessen werden bruchmechanische Betrachtungen, z.B. die Formulierung von modifizierten Spannungs-Dehnungs- oder Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen relevant (vgl. Hillerborg u. a. 1976; Bazant und Oh 1983).

Die Betonzugfestigkeit wird i.A. von den Faktoren beeinflusst, die ebenfalls für die Druckfestigkeit bestimmend sind (vgl. 4.1.1). Darüber hinaus können Eigenspannungen, z.B. aus abfließender Hydratationswärme, Schwinden, etc. die Zugfestigkeit wesentlich beeinträchtigen. Die experimentelle Ermittlung der Kenngrößen, insbesondere der zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ct}$  gestaltet sich schwierig; i.d.R. wird  $f_{ct}$  mittelbar über die Spaltzugfestigkeit oder die Biegezugfestigkeit nach (DIN 1048-5 1996) bestimmt. Eine allgemeine Verknüpfung der Zugfestigkeitskenngrößen mit der Druckfestigkeit wird in (Heilmann 1969; Rüschi 1975) mit Gl. (4.11) angegeben.

$$f_{ct} = c \cdot f_{c,cube}^{2/3} \quad (4.11)$$

#### Zentrische Zugfestigkeit

Ein Zusammenhang des Mittelwerts der zentrischen Zugfestigkeit mit der Würfeldruckfestigkeit wird in (Heilmann 1969) auf Grundlage der Auswertung umfangreicher Versuche angegeben (Gl. 4.12).

$$f_{ctm} = 0,24 \cdot f_{cm,cube,200}^{2/3} \quad (4.12)$$

In (DIN 1045-1 2001) werden in Anlehnung an (CEB-FIP MC 90 1993) mittlere und charakteristische zentrische Zugfestigkeiten in Abhängigkeit des charakteristischen Wertes der Zylinderdruckfestigkeit formuliert. Unter Verwendung des in (DIN 1045-1 2001) angegebenen Zusammenhangs zwischen  $f_{cm}$  und  $f_{ck}$  folgt:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{cm} - 8)^{2/3} \quad (4.13)$$

$$f_{ctk,0.05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (4.14)$$

$$f_{ctk,0.95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (4.15)$$

<sup>2</sup> Die Oberflächenzugfestigkeit wird im Folgenden angesichts der unterstellten Gleichwertigkeit mit der zentrischen Zugfestigkeit mit  $f_{ctm}$  bezeichnet.

Aus Gl. (4.12) ergibt sich in Verbindung mit den Umrechnungsbeziehungen der Druckfestigkeit nach Anhang D.1 der im Weiteren verwendete Zusammenhang zwischen den Mittelwerten der Druck- und Zugfestigkeit.

$$f_{ctm} = 0,26 \cdot f_{cm}^{2/3} \quad (4.16)$$

Der Rechenwert der Zugfestigkeit nach Gl. (4.16) weicht im Bereich zwischen 30 MPa  $\leq f_{cm} \leq 60$  MPa um maximal 6% vom Wert nach Gl. (4.13) ab.

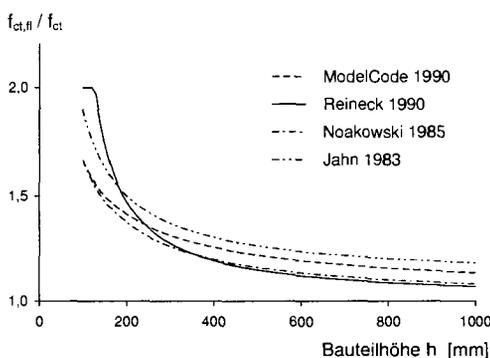
### Biegezugfestigkeit

Die Biegezugfestigkeit wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit als Kenngröße für die Rissbildung an biegebeanspruchten Bauteilen herangezogen. Die Biegezugfestigkeit weist aufgrund des von der Bauteilhöhe  $h$  und dem Dehnungsgradienten, d.h. der Kombination aus  $M$  und  $N$  abhängigen Größenverhältnisses der Rissprozesszone zu  $h$  einen signifikanten Maßstabseinfluss auf (vgl. Bažant u. a. 1994). In (Eibl und Ivanyi 1976; Jahn 1983) und (Reineck 1990) wird der Größeneinfluss mit Hilfe der Hypothese der *Repräsentativen Volumeneinheit RVE* - der kleinsten, an den Größtkorndurchmesser  $D_{k,max}$  gekoppelten, repräsentativen Volumeneinheit des heterogenen Betongefüges - beschrieben und quantifiziert. Demnach ist anstelle der Randspannung der Mittelwert der Zugspannung im *RVE* für ein Zugversagen maßgebend. Voneinander Abweichende Verhältniswerte  $f_{ct,fl}/f_{ctm}$  ergeben sich vor allem aufgrund der unterschiedlichen Festlegung der Kantenlänge des *RVE* (Jahn:  $d_{RVE} = 2,3 \cdot D_{k,max}$ , Reineck:  $d_{RVE} = 4 \cdot D_{k,max} \leq 64$  mm).

In Abb. 4.5 werden Relationen zwischen der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  und der zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  nach

- (CEB-FIP MC 90 1993), Gl. (4.17),
- (Reineck 1990) Gl. (4.18),
- (Noakowski 1985) bzw. (Mayer 1967) Gl. (4.19) und
- (Jahn 1983) Gl. (4.20)

für den baupraktisch relevanten Größtkorndurchmesserbereich  $16 \text{ mm} \leq D_{k,max} \leq 32$  mm einander gegenübergestellt. Den weiteren Betrachtungen wird der Zusammenhang nach *Noakowski* zugrunde gelegt.



$$\frac{f_{ct,fl}}{f_{ctm}} = \frac{1 + 1,5 \cdot (h/100)^{0,7}}{1,5 \cdot (h/100)^{0,7}} \quad (4.17)$$

$$= \frac{h}{h - d_{RVE}} \leq 2,0 \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{0,6} \cdot \frac{2,6 + 0,024 \cdot h}{1 + 0,040 \cdot h} \quad (4.19)$$

$$= 1,1 + \frac{1,45 \cdot d_{RVE}}{h} \quad (4.20)$$

(Bauteilhöhe  $h$  in mm)

**Abbildung 4.5.** Verhältnis zwischen Biegezugfestigkeit und zentrischer Zugfestigkeit in Abhängigkeit der Bauteilhöhe

### Oberflächenzugfestigkeit

Für den Nachweis der Zugkraftdeckung bzw. der Verbundtragfähigkeit bei klebarmierten Bauteilen ist der Mittelwert der Oberflächenzugfestigkeit nach (DIN 1048-2 1991) eine wesentliche Eingangsgröße. Neben den Eigenschaften von Zementstein und Zuschlag

dominiert die Vorbereitung der Bauteiloberfläche - Strahlen mit festen Strahlmitteln, Schleifen, Stocken, etc. - den Kennwert. Derzeit liegen allerdings keine Vorhersagemodelle zur Quantifizierung der Oberflächenzugfestigkeit in Abhängigkeit der Einflussparameter vor.

Zur Ableitung von Ingenieurmodellen in (Holzenkämpfer 1994) wurde die Oberflächenzugfestigkeit mangels experimentell belegter Werte der zentrischen Zugfestigkeit auf Basis der Relation nach *Heilmann*, Gl. (4.12) gleichgesetzt. In (Niedermeier 2001) wird diese Hypothese anhand des Zusammenhangs zwischen Oberflächenzugfestigkeit und Druckfestigkeit nach (Krenchel und Bickley 1984) und (Budnik und Dornauer 1993) für den baupraktisch relevanten Bereich der Druckfestigkeiten bis  $f_{cm} \leq 50$  MPa bestätigt. Sofern experimentell belegte Werte der Oberflächenzugfestigkeit nicht zur Verfügung stehen, wird für die weiteren Betrachtungen von einer Relation nach Gl. (4.21) ausgegangen.

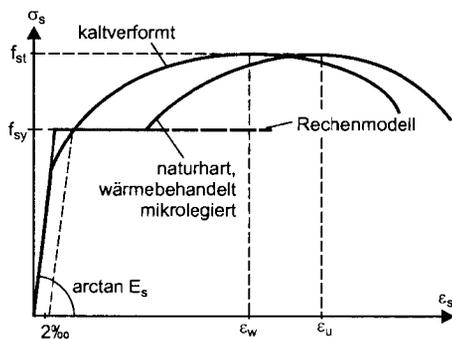
$$f_{ct,sur} = 0,26 \cdot f_{cm}^{2/3} \quad (4.21)$$

#### 4.1.3 Betonstahl

Zur Herstellung von Betonstahl in Form von Stäben und Matten sind im Hinblick auf die mechanischen Eigenschaften zwei Verfahrensgruppen zu unterscheiden:

- warmgewalzte (naturharte), wärmebehandelte oder mikrolegierte Betonstähle,
- kaltverformte Betonstähle.

Betonstahl verhält sich bis zum Erreichen der Streckgrenze annähernd ideal elastisch. Während die erste Gruppe der Betonstähle allerdings ein ausgeprägtes Fließplateau mit anschließender Verfestigung aufweist, zeigen kaltverformte Stähle einen stetigen Übergang zwischen elastischem und plastischem Bereich (Abb. 4.6).



**Abbildung 4.6.** Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Betonstählen; idealisierter Ansatz (schematisch)

#### Spannungs-Dehnungs-Linie

Die Form der Stahlkennlinie übt nach (Langer 1987; Graubner 1989, u.a.) einen wesentlichen Einfluss auf die Rotationsfähigkeit plastischer Gelenke in Stahlbetonbauteilen aus. Zur funktionalen Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen liegen daher zahlreiche Ansätze vor (vgl. Eibl und Ivanyi 1976; Li 1995).

Im Rahmen der Untersuchung klebarmierter Bauteile, spezielle bei Versuchsnachrechnungen wird allerdings auf die Berücksichtigung der Verfestigung nach Überschreiten der Streckgrenze verzichtet, zumal insbesondere bei warmgewalzten Stählen bis zur Verfestigung signifikante Dehnungen realisiert werden müssten (Abb. 4.6). Die Annahme einer elastisch-ideal plastischen Arbeitslinie bedeutet zudem den für die Dehnungsdifferenz der Klebarmierung zwischen zwei Rissen im querkraftbeanspruchten Bereich ungünstigsten Fall. Zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Linie des Betonstahls sind folgende Kenngrößen ausreichend:

$f_{sy}$  Streckgrenze des Betonstahls  
 $E_s$  Elastizitätsmodul

Für die Nachrechnungen experimenteller Untersuchungen wird auf die im Versuch ermittelten Kenngrößen für  $f_{sy}$  und  $E_s$  Bezug genommen. Im Rahmen von Parameterstudien wird dem Betonstahl ideal elastisches Materialverhalten mit  $E_s = 200$  GPa unterstellt.

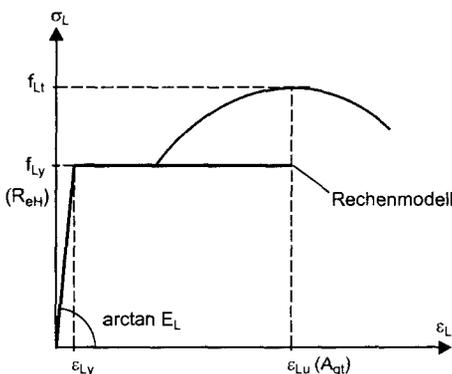
#### 4.1.4 Klebarmierung

Im Rahmen der Versuchsauswertung wie auch der numerische Untersuchungen werden ausschließlich Bauteile, die mit Stahllaschen oder vorgefertigten CFK-Lamellen nach den derzeit gültigen allgemeinen bauaufsichtlichen Zulassungen verstärkt sind, betrachtet. Andere Typen von Klebarmierung, etwa Glasfaserlamellen oder CFK-Gelege und -Matten, denen in der baupraktischen Anwendung derzeit eine untergeordnete Rolle zukommt, bleiben unberücksichtigt.

#### Stahllaschen

Den vorliegenden Richtlinien (DIBt 1993) bzw. Richtlinienentwürfen (DIBt 1997) zufolge dürfen ausschließlich Laschen der Stahlgüten S235 nach (prEN 10025-2 2000) (frühere nationale Bezeichnung: St 37-2 bzw. St 37-3) verwendet werden. Im Allgemeinen handelt es sich um waringewalzte bzw. wärmebehandelte Flachstähle, die ein ausgeprägtes Fließplateau mit anschließender Verfestigung aufweisen.

In Analogie zur Abbildung des Betonstahls wird für Stahllaschen eine idealisierte Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Abb. 4.7 mit elastisch-ideal plastischem Verhalten verwendet. Für Versuchsnachrechnungen werden Streckgrenze  $f_{Ly}$  und Elastizitätsmodul  $E_L$  der zugehörigen Versuchsdokumentation entnommen. Parameterstudien bauen ebenfalls auf der Annahme elastischer Bewehrungsstränge mit  $E_L = 200$  GPa auf.



**Abbildung 4.7.** Spannungs-Dehnungs-Beziehungen von Flachstahl für Stahllaschen; idealisierter Ansatz

#### CFK-Lamellen

Unidirektionale CFK-Lamellen weisen aufgrund ihres Aufbaus ausgeprägt anisotrope Eigenschaften auf. In Faserrichtung dominieren die Eigenschaften der Kohlenstofffasern die mechanischen Kenngrößen der Lamellen, während in Querrichtung die Eigenschaften des Matrixharzes - im Allgemeinen ein heiß gehärtetes EP-Harz - bestimmend werden.

Die im Zugversuch in Faserrichtung ermittelte Spannungs-Dehnungs-Linie von CFK-Lamellen weist i.d.R. einen konkaven, verfestigenden Verlauf auf, der vornehmlich auf die Ausrichtung von Faserbündeln zurückzuführen ist. Für die in den eigenen Versuchen verwendeten CFK-Lamellen wurde die Abweichung der tatsächlichen von der unterstellten linear-elastischen Kennlinie quantifiziert und bleiben im relevanten Dehnungsbereich unter 5% (vgl. Zilch u. a. 2004). In den derzeit geltenden bauaufsichtlichen Zulassungen wird als Bemessungsgrundlage von mit CFK-Lamellen verstärkten Bauteilen der auf

den Nennquerschnitt bezogene Sekantenmodul zwischen 10% und 50% der Bruchspannung nach (DIN EN 2561 1995) angegeben. Für Versuchsnachrechnungen wird von einer durch die jeweils zutreffende Größe  $E_L$  beschriebenen linearen Spannungs-Dehnungs-Linie ausgegangen. Parameterstudien bauen ebenfalls auf linearen Beziehungen auf; im Allgemeinen wird mit  $E_L = 167 \text{ GPa}$  eine für die derzeit gebräuchlichen CFK-Lamellen repräsentative Größe angenommen. (vgl. 7.1).

## 4.2 Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung

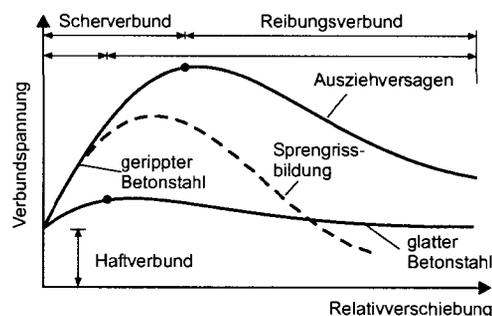
### 4.2.1 Vorbemerkung

Die Verbundwirkung zwischen Bewehrung und Beton - eine der wesentlichen Voraussetzungen der Stahlbetonbauweise - ist seit Jahrzehnten Arbeitsschwerpunkt vieler Forscher. Im Zuge der Einführung gerippter oder profilierter Betonstähle wurden eine Vielzahl von Verfahren der experimentellen Untersuchung sowie theoretische Beschreibungen des Verbundverhaltens entwickelt. Wegen der entscheidenden Bedeutung des Verbundverhaltens der Bewehrungsstränge für das Zusammenwirken in einem Bauteil werden im Folgenden wesentliche Grundlagen des Verbundes sowie Möglichkeiten zur experimentellen Untersuchung erläutert. Ein zentraler Aspekt der Ableitung von Verbundmodellen ist die Übertragbarkeit an Prüfkörpern gewonnener Zusammenhänge auf das Verhalten in realen Bauteilen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden wesentliche, das Verbundverhalten beeinflussende Parameter aus Versuchen mit kurzen Verbundlängen abgeleitet und zur Erweiterung eines für Dehnkörper bzw. Zuggurte von biegebeanspruchten Bauteilen als zutreffend allgemein anerkannten Verbundmodells herangezogen. Ausführliche Erläuterungen zum Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung bzw. zu Verbundmodellen sind darüber hinaus u.a. (Alvarez 1998; fib 2000; Mayer 2001) zu entnehmen.

### 4.2.2 Verbundtragmechanismen und Versagensarten

Die Verbundwirkung einbetonierter Bewehrung, d.h. die Übertragung von Kräften an der Kontaktfläche zwischen Beton und Bewehrungsstab, wird grundlegend durch drei Mechanismen bewirkt:

- *Haftverbund*  
adhäsive Bindung zwischen Zementstein und Stahloberfläche;
- *Scherverbund*  
im Fall gerippter / profilierter Betonstähle mechanische Verzahnung des Stabprofils (Rippen) mit den davor liegenden Betonkonsolen; bei glatterm Betonstahl in geringerem Umfang als mechanische Verzahnung der walzrauen Staboberfläche mit der Zementmatrix;
- *Reibungsverbund*  
Reibung nach Versagen der mechanischen Verzahnung



**Abbildung 4.8.** Idealisierte Darstellung des Zusammenhangs von Verbundspannung und Relativverschiebung zwischen Betonstahl und umgebendem Beton - Verbundmechanismen gerippter und glatter Betonstähle (nach Rehm 1961)

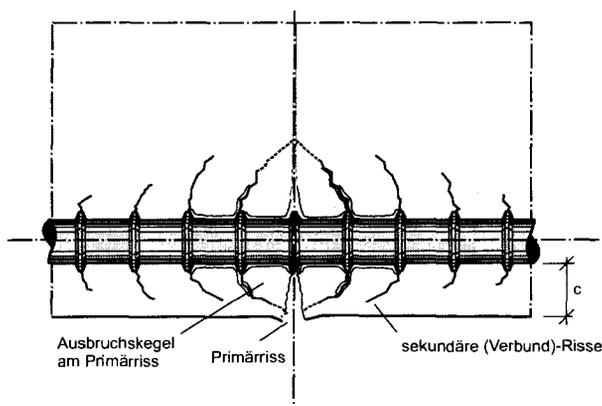
Die Verbundwirkungen sind unmittelbar mit der Verformung der Verbundzone bzw. der Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung in der Kontaktfläche verknüpft. Daher basiert der Großteil der vorliegenden Verbundmodelle auf einer - zuerst in (Rehm 1961) vorgeschlagenen - Beziehung zwischen Verbundspannung  $\tau_s$  und idealisierter Relativverschiebung  $s_s$  (Abb.4.8).

Bei geripptem Betonstahl entstehen durch den Eintrag von Verbundspannungen - im Wesentlichen durch die von den Rippen ausgeübten lokal hohen Pressungen auf die Betonkonsolen - Mikrorisse bzw. in der Folge sog. sekundäre Verbundrisse; der Tragmechanismus wurde u.a. in (Goto 1971) durch Versuche an zentrisch bewehrten, zugbeanspruchten Betonprismen untersucht (Abb. 4.9). Der im Idealfall rotationssymmetrische Spannungszustand ist u.a. nach (Tepfers 1979) durch einen Druckkegel, der sich auf einem Zugring abstützt, abzubilden.

Unmittelbar an einem Querriss ist der Gleichgewichtszustand von Druckkegel und Zugring gestört; eine Abstützung des Druckkegels ist nicht mehr in vollem Umfang möglich. Bei steigender Verbundbeanspruchung sind zunächst verformungsbedingte Ablösungen des Betons von der Bewehrung zu beobachten. In der Folge bildet sich ausgehend von geneigten sekundären Verbundrissen ein Ausbruchkegel, der die Übertragung von Verbundspannungen in einer begrenzten Störzone unmittelbar am Riss stark einschränkt (vgl. Goto 1971).

Ein Verbundversagen, d.h. der Ausfall der Verbundwirkung, kann zwei unterschiedlichen Mechanismen zugeordnet werden:

- *Versagen durch Ausziehen des Stabes*  
Ein Ausziehversagen wird durch das vollständige Abscheren der Betonkonsolen verursacht. Die Lage der Bruchebene wird dabei vom Verhältnis zwischen Rippenhöhe und Rippenabstand bestimmt (Rehm 1961).
- *Versagen durch Sprengrissbildung*  
Der erläuterten Modellvorstellung entsprechend entstehen Spreng- oder Längsrisse parallel zum Bewehrungsstab, sofern die Zugringspannungen die Betonzugfestigkeit überschreiten.



**Abbildung 4.9.** Sekundäre Verbundrisse; Ausbruchkegel an einem Querriss (nach Goto 1971)

### 4.2.3 Ermittlung des Verbundverhaltens in Versuchen

In bewehrten Betonbauteilen treten Verbundbeanspruchungen unter verschiedenen Randbedingungen, z.B. bei der Endverankerung von Stäben, in Bereichen mit Biege- und Schubbeanspruchungen, etc. auf. In Versuchen ist i.A. nur eine ausschnittshafte Simulation der Verbundbeanspruchungen unter der Voraussetzung einer möglichst realitätsnahen Abbildung der Randbedingungen zielführend. Daraus resultiert eine Vielzahl unterschiedlicher Prüfkörper bzw. Versuchsconfigurationen, deren Ergebnisse nicht ohne Weiteres miteinander vergleichbar sind und deren Übertragbarkeit auf reales Bauteilverhalten u.U. eingeschränkt ist.

### Versuchskonfigurationen

Die große Bandbreite unterschiedlicher Versuchskonfigurationen zur experimentellen Untersuchung des Verbundverhaltens kann anhand der grundlegenden Prinzipien in zwei Gruppen unterschieden werden:

#### *Versuche mit kurzen Verbundlängen*

Die unmittelbare Ableitung der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung erfolgt im Rahmen von Ausziehversuchen an einbetonierten Stäben mit kurzen Verbundlängen. Bei Annahme konstanter Verbundspannungen entlang der Einbettungslänge entspricht der Verbundansatz dem Zusammenhang zwischen Verbundspannung  $\tau_s = F_s / (U_s \cdot l_v)$  und der i.d.R. am spannungslosen Stabende gemessenen Relativverschiebung zwischen Stab und Prüfkörper. U.a. werden folgende Versuchskonfigurationen vorgeschlagen:

- Ausziehversuche an mittig einbetonierten Stäben bei Verbundlängen entsprechend dem einfachen Rippenabstand bzw.  $1d_s$  nach (Rehm 1961)
- Ausziehversuche an mittig oder exzentrisch einbetonierten Stäben mit Verbundlängen von  $5d_s$  bis  $10d_s$ , z.T. bis  $20d_s$  nach (Martin und Noakowski 1981)
- Pull-out-Versuche nach RC6 in (RILEM 1994) an mittig einbetonierten Stäben mit  $l_v = 5d_s$
- Versuche an randnah angeordneten Stäben mit konsolförmigen Ausziehkörpern nach (Janovič 1979) bzw. nach (Schmidt-Thrö u. a. 1986; Eligehausen u. a. 1989) in modifizierter Form

Einen Überblick über weitere vorliegende Versuchskonzepte speziell für Bewehrungsstäbe mit praxisüblichen Betondeckungen ist (Eligehausen u. a. 1989) zu entnehmen.

#### *Versuche mit großen Verbundlängen*

Die Ableitung von Verbundansätzen bei Bauteilversuchen mit großen Verbundlängen unter Annahme veränderlicher Verbundspannungen erfordert i.d.R. die Auswertung diskreter, entlang der Einbettungslänge gemessener Stabdehnungen. Entsprechende experimentelle Untersuchungen liegen u.a. vor:

- Versuche an Dehnkörpern mit zentrisch einbetoniertem Bewehrungsstab nach (Goto 1971; Dörr und Mehlhorn 1979; Günther 1989; Fehling 1990; Kurz 1997)
- Versuche an exzentrisch bewehrten Dehnkörpern nach (Günther 1989)

Darüber hinaus existieren an Dehnkörpern mit Hilfe diskreter Stahldehnungsmessungen ermittelte Verbundansätze nach (Faoro 1988) und (Tue 1993).

Abhängig von der Versuchskonzeption und dem gewählten Versuchskörper können für identische Randbedingungen bezüglich Betonzusammensetzung und Oberflächengestalt des Betonstahls z.T. stark voneinander abweichende  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehungen ermittelt werden (vgl. Eibl und Ivanyi 1976; fib 2000) (Abb. 4.10).

### Einflussgrößen auf das Verbundverhalten

Als Einflussgrößen auf das Verbundverhalten wurden unabhängig von der Versuchskonfiguration identifiziert:

- Eigenschaften des Betons (Druck- und Zugfestigkeit, Frischbetonkonsistenz, Sieblinie des Zuschlags)
- Eigenschaften des Betonstahls (Oberflächengestaltung, Durchmesser, Spannungs-Dehnung-Beziehung insbes. nach Überschreiten der Streckgrenze)
- Lage und Orientierung bei der Betonage
- Betondeckung
- Querbewehrung, Umschnürung
- Belastungsgeschwindigkeit und -dauer

- Äußerer Querdruck

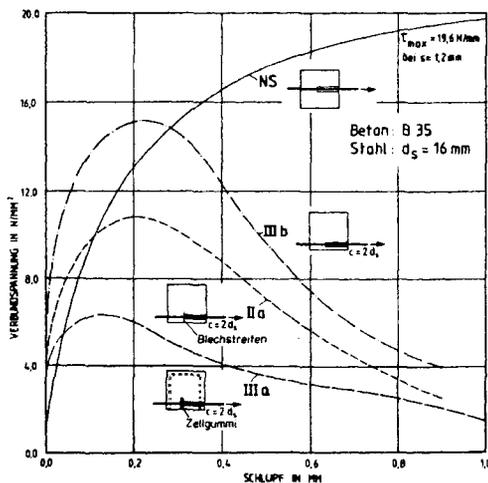
Die Abhängigkeit des experimentell ermittelten Verbundansatzes vom Versuchskörpertyp resultiert u.a. aus folgenden Aspekten:

- Spannungszustand des Betonkörpers (Längszug- bzw. Längsdruckspannungen, Schubspannungen)
- Verformungsverhalten der Betondeckung (induzierte Druck- bzw. Zugspannungen radial zum Stab)
- Simulation des Querrisses (Versuche mit bzw. ohne verbundfreie Vorlänge)

Durch Versuche an Dehnkörpern mit großen Einbettungslängen wurde insbesondere in (Nilson 1972; Dörr und Mehlhorn 1979; Günther 1989) über die Verbundlänge variable  $\tau$ - $s$ -Beziehungen ermittelt. Demnach nehmen Verbundtragfähigkeit und Verbundsteifigkeit mit zunehmendem Abstand von einem - ggf. vorgegebenen - Querriss signifikant zu. Die Abhängigkeit des Verbundansatzes vom betrachteten Ort der Verbundlänge ist u.a. nach (Eibl und Kobarg 1984; Kobarg 1986) auf die letztgenannten drei Einflussfaktoren zurückzuführen, die im Fall großer Verbundlängen entlang der Einbettungslänge prinzipiell variabel sind. Eine explizite Ortsabhängigkeit, d.h. ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Koordinate des betrachteten Orts entlang der Einbettungslänge und dem Verbundansatz existiert dagegen nicht; die in (Kobarg 1986) gewählte Formulierung der *scheinbaren Ortsabhängigkeit* ist daher vorzuziehen.

Die Abhängigkeit des Verbundverhaltens vom gewählten Versuchskörper bzw. den Randbedingungen findet seinen unmittelbaren Ausdruck in den z.T stark voneinander abweichenden Charakteristiken der i.d.R. aus Versuchsergebnissen abgeleiteten bzw. an Versuchsergebnissen kalibrierten Verbundmodelle (s. 4.2.4).

Dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Verbundmodell liegen Versuche an konsolförmigen Ausziehkörpern nach (Janovič 1979) sowie Versuche an Dehnkörpern mit zentrisch einbetoniertem Stab zugrunde. Eine ausführliche Darstellung der Untersuchungen zum Verbundverhalten gerippter und glatter einbetonierter Bewehrung wie auch eine detaillierte Erläuterung zur Wahl der Versuchskörper enthält (Zilch u. a. 2004).



**Abbildung 4.10.** An unterschiedlichen Ausziehversuchskörpern experimentell ermittelte Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen im Vergleich (nach Eligehausen u. a. 1989)

#### 4.2.4 Vorliegende Verbundmodelle

##### Allgemeines

Modelle zur Beschreibung des Verbundverhaltens einbetonierter Bewehrung liegen derzeit in verschiedenen Abstraktionsstufen vor:

- Diskrete (finite) Verbundmodelle auf der Grundlage einer bereits in (Rehm 1961) vorgeschlagenen Beziehung zwischen Verbundspannung  $\tau_s$  und zugehöriger Relativverschiebung  $s_s$  (u.a. Martin 1973; Martin und Noakowski 1981; Eligehausen u. a. 1983; Kreller 1989; Alvarez 1998)
- Inkrementelle Verbundmodelle auf Basis einer differentiellen Formulierung als  $\delta\tau_s$ - $\delta s_s$ -Beziehung (Kobarg 1986)
- Mechanisch-physikalische Verbundmodelle, z.B. auf der Grundlage von Stabwerkmodellen (u.a. Schober 1984; Fehling 1990; Kurz 1997)

Im Großteil der vorliegenden Arbeiten werden die erstgenannten Verbundmodelle, im engeren Sinne als *Pseudo-Stoffgesetze* ohne explizite Berücksichtigung der tatsächlichen Vorgänge anzusehen, verwendet. Die von Stoffgesetzen geforderte Invarianz gegenüber Randbedingungen und Belastungsgeschichte wird von diskreten Verbundmodellen i.A. nicht erfüllt (Kobarg 1986). Dessen ungeachtet kann durch die Anpassung an spezifische Randbedingungen eine hohe Aussagekraft der Ergebnisse erreicht werden.

Da Verbundmodelle zunächst ausschließlich für Gebrauchstauglichkeitsbetrachtungen mit geringen Relativverschiebungen  $s_{s,max} \approx 0,25$  mm abgeleitet wurden, ist in einer Vielzahl von Arbeiten der Geltungsbereich des vorgeschlagenen Modells nicht explizit genannt (vgl. Martin 1973; Martin und Noakowski 1981). Erst in Zusammenhang mit Traglastanalysen z.B. für Rahmenknoten bei Erdbebenbeanspruchung (vgl. Ciampi u. a. 1982; Eligehausen u. a. 1983) sowie bei der Untersuchung der plastischen Systemreserven statisch unbestimmter Systeme (vgl. Langer 1987; Kreller 1989; Li 1995) wurde der gesamte Bereich der Relativverschiebungen bis hin zum Ausziehen des Stabs in Modellen abgebildet.

Verbundmodelle stellen grundsätzlich nur eine angenäherte Beschreibung der komplexen physikalischen Zusammenhänge in der Verbundzone dar. Selbst weiterentwickelte Modelle unter Einbeziehung lokaler Ansätze - das Modell nach *Eligehausen, Kreller* und *Langer* - können das i.d.R. großen Streuungen unterliegende Verbundverhalten nur näherungsweise richtig beschreiben und gelten i.e.S. nur für die in den zugrunde liegenden Versuchen geprüften Materialien (Betonzusammensetzung, Oberflächengestaltung der Bewehrung, etc.); u.a. in (Kreller 1989) wird auf diesen Umstand deutlich hingewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird anstelle eines an lokale Ansätze gekoppelten Verbundmodells eine angenäherte globale Beschreibung mit mittleren Verbundansätzen verfolgt.

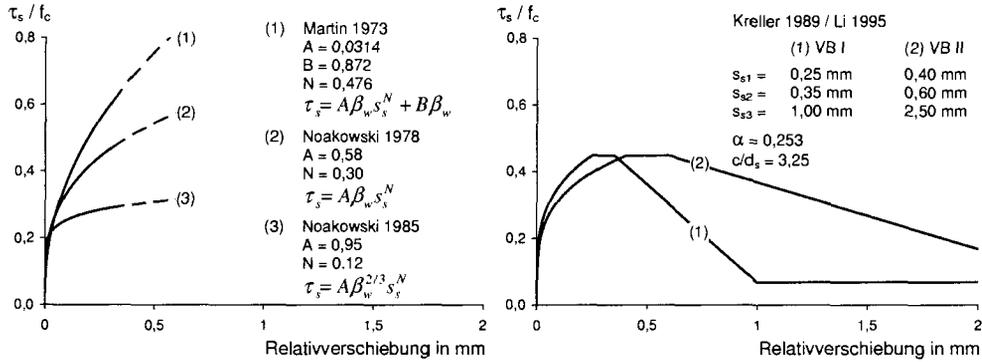
##### Verbundmodell nach *Rehm, Martin, Noakowski*

Die v.a. an der TU München entwickelten Verbundmodelle nach (Martin 1973) entsprechend Gl. (4.22) und (Noakowski 1978), Gl. (4.23), gehen auf die in (Rehm 1961) angegebene Formulierung des *Verbund-Grundgesetzes* zurück und basieren im Wesentlichen auf den in (Martin und Noakowski 1981) zusammengestellten Ergebnissen aus Ausziehversuchen an zentrisch einbetonierten Stäben. In Gl. (4.22) wird mit  $B \cdot f_c$  explizit ein konstanter Verbundanteil, der im Mittel dem eines glatten Betonstahls entspricht, berücksichtigt (Abb. 4.11). In beiden Fällen wird lediglich der ansteigende Ast der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung ohne Angabe einer Grenzverschiebung wiedergegeben<sup>3</sup>.

$$\tau_s = A \cdot f_c \cdot s_s^N + B \cdot f_c \quad (4.22)$$

$$\tau_s = A \cdot f_c \cdot s_s^N \quad (4.23)$$

<sup>3</sup> Die Bezeichnungen nach (Martin 1973) und (Noakowski 1978) wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit an den derzeitigen Sprachgebrauch angepasst.



**Abbildung 4.11.** Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen nach *Martin* (mittig stehend), *Noakowski* (mittig liegend bzw. exzentrisch liegend) und *Eligehausen, Kreller, Langer* im Vergleich ( $f_c = 30 \text{ MPa}$ , Umrechnung  $\beta_w \cdot f_c$  nach Anhang).

In (Noakowski 1985) und (Noakowski 1988) wird mit Gl. (4.24) eine weiterentwickelte Form des Verbundmodells unter Berücksichtigung eines Sprenggrissversagens vorgestellt.

$$\tau_s = A \cdot f_c^{2/3} \cdot s_s^N \quad (4.24)$$

Die Ansätze beschreiben dabei mittlere Verbundverhältnisse ohne Berücksichtigung lokaler Effekte wie z.B. der Bildung eines Ausbruchkegels am Querriss und wurden in der Form nach Gl. (4.23) u.a. in (Krips 1984) zur Untersuchung der Rissbreitenbeschränkung sowie in leicht angepasster Form in (Eligehausen 1979; Tue 1993) zur Auswertung bzw. Nachrechnung von Bauteilversuchen verwendet. In (König und Tue 1996) werden gegenüber den genannten Arbeiten modifizierte, aus Versuchsergebnissen abgeleitete Koeffizienten  $A$  und  $N$  angegeben.

### Verbundmodell nach *Eligehausen, Kreller, Langer*

Das Verbundmodell basiert auf der aus Ergebnissen an Ausziehversuchen abgeleiteten abschnittswisen Formulierung der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung nach (Eligehausen u. a. 1983) und erfasst den gesamten Verschiebungsbereich einschließlich eines Reibungsplateaus nach Abschieren der Betonkonsolen. Der Bereich gestörter Verbundwirkung am Riss wurde bereits von *Eligehausen* zu  $5d_s$  festgelegt. Eine verfeinerte Formulierung des Verbundverhaltens der Störzone enthält (Langer 1987), während das Modell in (Kreller 1989) anhand der in (Eligehausen u. a. 1989) vorgestellten Ergebnisse aus konsolförmigen Ausziehkörpern auf Versagen durch Sprenggrissbildung erweitert wurde. Generell wird von deutlich reduzierten Verbundeigenschaften bis zu einem Abstand von  $2d_s$  zum Querriss ausgegangen, anschließend steigt die Verbundtragfähigkeit bis  $5d_s$  linear an und bleibt im Weiteren konstant. Die Abminderung am Querriss lehnt sich an Ergebnisse aus (Ciampi u. a. 1982) und (Eligehausen u. a. 1989) an, ist aber in (Kreller 1989) empirisch festgelegt. Allerdings korrespondiert die angenommene Länge des Ausbruchkegels von  $\approx 2d_s$  mit den eigenen Versuchen an *Janovic*-Probekörpern. Die allgemeine Formulierung des Verbundmodells folgt Gl. (4.25) (Abb. 4.11).

$$\begin{aligned}
 0 \leq s_s \leq s_{s1} & \quad \tau_s = \tau_{s,max} \cdot \left( \frac{s_s}{s_{s1}} \right)^\alpha & (4.25) \\
 s_{s1} < s_s \leq s_{s2} & \quad \tau_s = \tau_{s,max} \\
 s_{s2} < s_s \leq s_{s3} & \quad \tau_s = \tau_{s,max} - \frac{\tau_{s,max} - \tau_{sR}}{s_{s3} - s_{s2}} \cdot (s_s - s_{s2}) \\
 s_s > s_{s3} & \quad \tau_s = \tau_{sR}
 \end{aligned}$$

Die Abbildung des ansteigenden Astes der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung entspricht dabei dem Verbundmodell nach (Noakowski 1978), Gl. (4.23) mit

$$N \equiv \alpha \quad (4.26)$$

$$A \equiv \frac{\tau_{s,max}}{s_{s1}^\alpha \cdot f_c} \quad (4.27)$$

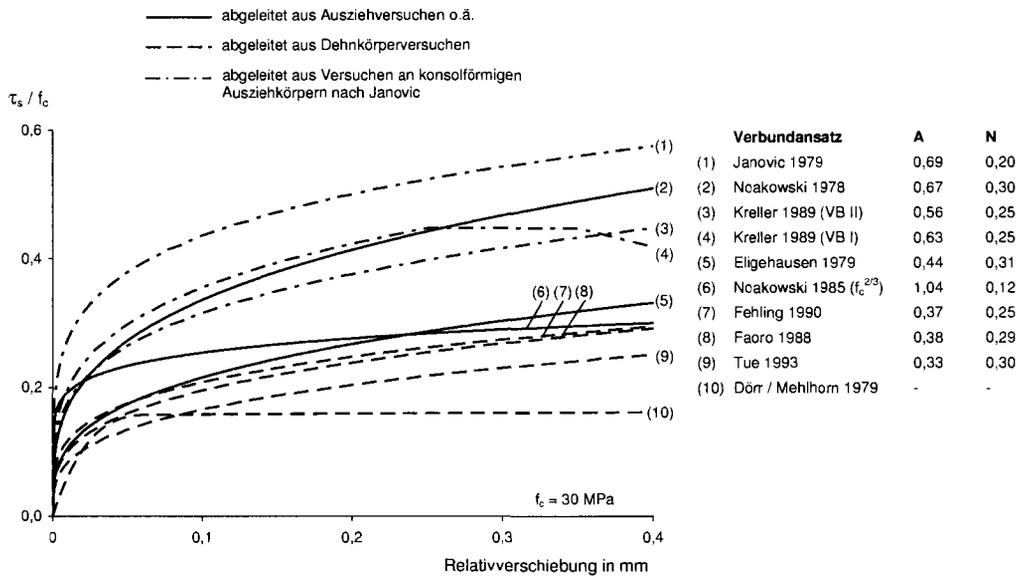


Abbildung 4.12. Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen nach verschiedenen Autoren (Bezug der Parameter A auf  $f_c = 30 \text{ MPa}$ )

Die maßgebenden Parameter werden in Abhängigkeit von Betondruckfestigkeit, bezogener Betondeckung und Verbundbereich festgelegt. Augenfällig ist die in Verbundbereich II (mäßiger Verbund) unveränderte Bruchverbundspannung  $\tau_{s,max}$ . Dies widerspricht den Ergebnissen einer Vielzahl von Ausziehversuchen, ist aber unmittelbar aus den Ergebnissen in (Eligehausen u. a. 1989) abgeleitet - wiewohl dort eine Nachverdichtung des Betons bei oben liegenden Stäben angedeutet wird. Bei möglichem Sprenggrissversagen sind die Parameter  $\tau_{s,max}$ ,  $\tau_{sR}$  und  $\alpha$  nach den Gln. (4.28) bis (4.31) festgelegt (vgl. Li 1995).

$$\tau_{s,max} = a \cdot \sqrt{f_c} \tag{4.28}$$

mit

$$a = 0,36 \cdot \frac{c}{d_s} + 1,28 \leq 2,4 \tag{4.29}$$

$$\tau_{sR} = 0,15 \cdot \tau_{s,max} \tag{4.30}$$

$$\alpha = 0,003 \cdot f_c + 0,1625 \tag{4.31}$$

Das Verbundmodell wurde u.a. in numerischen Untersuchungen zur Rotationsfähigkeit von Stahl- und Spannbetonbauteilen verwendet (vgl. Li 1995). In vereinfachter Form wurde das Modell darüber hinaus in (CEB-FIP MC 90 1993) aufgenommen.

### Weitere Verbundmodelle

Neben den beiden genannten Verbundmodellen existiert eine Vielzahl weiterer, mehr oder minder komplexer Ansätze. Für Dehnkörper wird in (Dörr und Mehlhorn 1979) ein Polynom 3. Grades mit linearer Ergänzung als aus den lokalen  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehungen gemittelter Ansatz vorgestellt. Daneben wurden u.a. in (Shima u. a. 1992) und (Bigaj 1999) sowie (Mayer 2001) Modelle entwickelt, die eine Anrechnung elastischer und plastischer Stahldehnungen auf das Verbundverhalten erlauben.

Erwähnenswert erscheint darüber hinaus das in Zusammenhang mit dem *Tension Chord Model* in (Sigrist 1995) vorgestellte und in (Alvarez 1998) weiterentwickelte Verbundmodell. Entkoppelt von der Relativverschiebung zwischen Beton und Bewehrung werden unter Berücksichtigung der reduzierten Verbundtragwirkung bei plastischen Stahldehnungen mittlere Verbundspannungen angegeben (vgl. 2.4.2).

## Zusammenfassung

In Abb. 4.12 sind Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen verschiedener Autoren dargestellt. Zu beachten sind die u.a. nach (Noakowski 1978; Noakowski 1985; Eligehausen 1979) fehlenden Angaben zum Geltungsbereich der Ansätze; allerdings kann z.B. aus den Versuchen in (Janovič 1979) für Ansatz (1) in Abb. 4.12 ein Verbundversagen durch Sprenggrissbildung bei etwa 0,1 mm abgelesen werden - eine Fortführung des Ansatzes darüber hinaus widerspricht daher den realen Zusammenhängen.

Mit Ausnahme der Beziehung nach (Dörr und Mehlhorn 1979) kann der ansteigende Ast der dargestellten Verbundansätze durch eine Exponentialfunktion nach Gl. (4.23) bzw. Gl. (4.24) beschrieben werden. Die auf die Zylinderdruckfestigkeit umgerechneten Parameter  $A$  und  $N$  sind in Abb. 4.12 angegeben. Aus der Darstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass die aus Bauteilversuchen an Dehnkörpern abgeleiteten Verbundansätze - die *per se* das mittlere Verbundverhalten entlang der Einbettungslänge beschreiben - wesentlich geringere Verbundtragfähigkeiten aufweisen als Ansätze, die an Ergebnissen aus Konsolauziehkörpern kalibriert wurden.

Angesichts der großen Bandbreite vorgeschlagener Verbundmodelle sowie der Unsicherheiten im Ansatz lokaler Effekte auf das Verbundtragverhalten wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein globales mittleres Verbundmodell - allerdings aufgrund der Anwendung in Traglastanalysen, d.h. u.a. bei großen Relativverschiebungen, in Anlehnung an die Formulierung nach (Kreller 1989) - gewählt und an eigenen Versuchsergebnissen kalibriert. Das skizzierte Vorgehen korrespondiert u.a. mit (Eligehausen 1979; Graubner 1989; Tue 1993; König und Tue 1996), bietet den Vorteil expliziter analytischer Lösungen für Verbundfragen einbetonierter Bewehrung und entspricht der Forderung nach konsistenten Ansätzen für Versuchsauswertung und abgeleitete Ingenieurmodelle.

### 4.2.5 Abbildung des Verbundverhaltens

#### Einflussgrößen

Anhand der experimentellen Untersuchungen können die Einflüsse wesentlicher Parameter auf das Verbundverhalten quantitativ bestimmt werden. In (Zilch u. a. 2004) werden insbesondere die Einflüsse der

- Druckfestigkeit des Betons,
- Lage bzw. Orientierung während der Betonage,
- Betondeckung,

erläutert und durch die Formulierung von Abhängigkeiten zwischen  $\tau_{s,\max}$  und  $f_c$ ,  $c/d_s$  und dem Verbundbereich abgebildet. Unmittelbar aus den Ergebnissen der Ausziehversuche wurden darüber hinaus der Exponent  $N$  sowie die Abminderung des Koeffizienten  $A$  des Verbundansatzes im ansteigenden Bereich infolge verminderter Verbundgüte (Verbundbereich II) bestimmt. Im Folgenden wird das resultierende Verbundmodell wiedergegeben; eine detaillierte Beschreibung und Diskussion des Vorgehens ist (Zilch u. a. 2004) zu entnehmen.

#### Gerippter Betonstahl

Als Grundlegende Formulierung für den Bereich kleiner Relativverschiebungen wird in Anlehnung an Ansätze von *Rehm*, *Martin* und *Noakowski* sowie unter Berücksichtigung der Abhängigkeit gegenüber  $f_c$  die Beziehung nach Gl. (4.32) gewählt. Wegen der Betrachtung von Traglastzuständen wird eine Erweiterung des Relativverschiebungsbereiches in Anlehnung an (Eligehausen u. a. 1983) bzw. (Kreller 1989) über das Verbundspannungsmaximum hinaus vorgenommen.

$$\begin{aligned}
0 \leq s_s \leq s_{s1} & \quad \tau_s = A \cdot \sqrt{f_c} \cdot s_s^N & (4.32) \\
s_{s1} < s_s \leq s_{s2} & \quad \tau_s = \tau_{s,max} \\
s_{s2} < s_s \leq s_{s3} & \quad \tau_s = \tau_{s,max} - \frac{\tau_{s,max} - \tau_{sR}}{s_{s3} - s_{s2}} \cdot (s_s - s_{s2}) \\
s_s > s_{s3} & \quad \tau_s = \tau_{sR} \\
\tau_{s,max} & = C \cdot f_c \quad \text{mit} \quad C = 0,5 \cdot \frac{c}{d_s} + 0,7
\end{aligned}$$

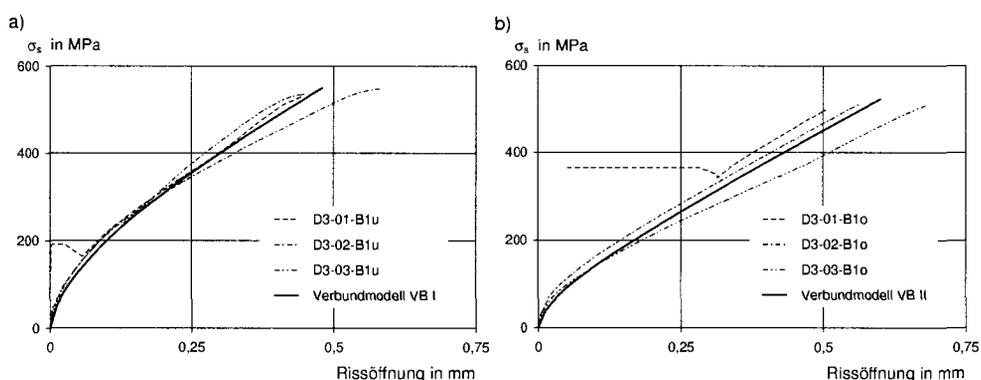
Die Grenzverschiebung  $s_{s1}$  wird dabei rekursiv durch  $\tau_s = \tau_{s,max}$  festgelegt. Es wird näherungsweise davon ausgegangen, dass das Auftreten eines Längs- bzw. Sprengnisses an die Verbundspannung  $\tau_{s,max}$  und nicht an definierte Relativverschiebungen geknüpft ist. Die Entkopplung der Bruchverbundspannung von einer fixen Relativverschiebung ermöglicht die Angabe unabhängig von  $f_c$  bzw.  $c/d_s$  formulierter Koeffizienten  $A$  und korrespondiert damit im Vergleich zum Modell nach (Kreller 1989) besser mit Versuchsergebnissen. Der Exponent wird aus den Versuchsergebnissen unabhängig von Verbundbereich und Betondeckung zu  $N = 0,25$  bestimmt. Für den Koeffizienten  $A$  wird ein Vorschlag in (König und Tue 1996) adaptiert. Wegen der veränderten Abhängigkeit von der Betondruckfestigkeit erfolgt die Verknüpfung des Verbundansatzes nach (König und Tue 1996) mit dem vorgeschlagenen Modell anhand der Versuche der Betonfestigkeitsklasse C20/25 mit  $f_{cm} = 30,4$  MPa; damit ergibt sich  $A = 1,98 \approx 2,0$ . Die Anpassung an den Verbundbereich II erfolgt unabhängig von der Betondruckfestigkeit durch eine Abminderung auf 50% des für VB I angenommenen Wertes.

Die Ergänzung des Verbundansatzes über die Bruchverbundspannung hinaus wird in Anlehnung an das Verbundmodell nach *Eligehausen, Kreller* und *Langer* formuliert. Die kennzeichnenden Relativverschiebungsdifferenzen

$$\begin{aligned}
\Delta s_{s,1-2} & = s_{s2} - s_{s1} \\
\Delta s_{s,2-3} & = s_{s3} - s_{s2}
\end{aligned}$$

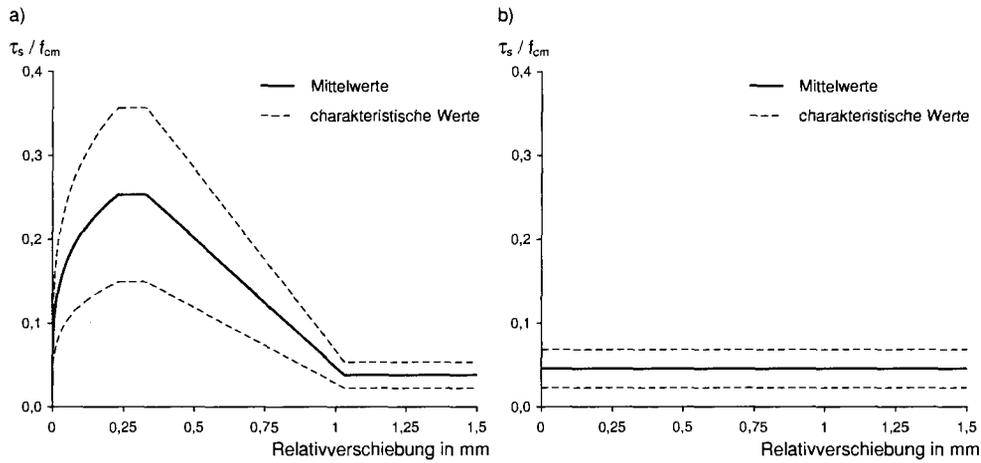
werden (Kreller 1989) entnommen. Unabhängig vom Auftreten von Sprengnissen wird der ansteigende Ast entsprechend (Eligehausen u. a. 1983) bzw. (CEB-FIP MC 90 1993) auf  $s_{s1,max} = 1$  mm beschränkt.

In Abb. 4.13 werden die in den Verbundversuchen an Dehnkörpern ermittelten Betonstahlspannungs-Rissöffnungs-Beziehungen der rechnerischen, mit schrittweiser Integration ermittelten Beziehungen gegenübergestellt. Der gewählte Ansatz gibt das Verbundverhalten in zugbeanspruchten Bauteilen augenscheinlich für beide Verbundbereiche gut wieder. In Tab. 4.1 sind die Kenngrößen des Verbundansatzes für verschiedene Randbedingungen zusammengestellt. Exemplarisch ist der resultierende Verbundansatz in Abb. 4.14 a) für die einbetonierte Bewehrung der Versuchsreihen A1 bzw. V1 für Verbundbereich I und  $f_c = 30$  MPa dargestellt.



**Abbildung 4.13.** An zentrisch bewehrten Dehnkörpern gemessene Stahlspannungs-Rissöffnungs-Beziehung im Vergleich mit Rechenwerten auf Basis des Verbundansatzes; a) Verbundbereich I, b) Verbundbereich II

Der Verbundansatz für Verbundbereich I lehnt sich dabei eng an die mittleren Verbundansätze nach (Faoro 1988), (Fehling 1990) und (Tue 1993) an, die auf die Auswertung von Dehnkörperversuchen zurückgehen, welche hinsichtlich der Randbedingungen  $d_s$  und  $f_R$  bzw. hinsichtlich des Verhältnisses  $c/d_s$  mit den hier betrachteten Versuchen gut vergleichbar sind. Darüber hinaus entspricht der gewählte Ansatz in guter Näherung dem in (König und Tue 1996) vorgeschlagenen, aus der Auswertung einer Vielzahl von Versuchen ermittelten Ansatz.



**Abbildung 4.14.** Verbundmodelle für einbetonierte Bewehrung - Mittelwerte und charakteristische Werte exemplarisch für  $f_{cm} = 30$  MPa, Verbundbereich I; a) gerippter Betonstahl ( $d_s = 16$  mm,  $c = 22$  mm); b) glatter Betonstahl (charakteristische Verbundansätze nach Zilch u. a. 2004)

### Glatter Betonstahl

Das Verbundverhalten glatten Betonstahls kann nach (Rehm 1961) für nur schwach verarbeitete Stäbe in guter Näherung durch konstante, von der Relativverschiebung entkoppelte Verbundspannungen beschrieben werden. Die geringfügig höhere Verbundtragfähigkeit bei sehr geringen Relativverschiebungen (vgl. Abb. 4.8) kann angesichts der in den Verbundversuchen auftretenden Streuungen genügend genau vernachlässigt werden. Der Verbundansatz kann ebenfalls durch Gl. (4.32), allerdings ohne Begrenzung der Relativ-

**Tabelle 4.1.** Maßgebende Parameter des Verbundmodells

Kenngröße	Einheit	gerippter Betonstahl		glatter Betonstahl	
		Verbundbereich I	Verbundbereich II	Verbundbereich I	Verbundbereich II
$\tau_{s,max}$	MPa	$C \cdot (f_c)^{0,5}$	$0,7 \cdot C \cdot (f_c)^{0,5}$	$C \cdot (f_c)^{0,5}$	
C	MPa <sup>0,5</sup>	$0,5 \cdot c/d_s + 0,7 \leq 2,4$		0,25	0,13
A	MPa <sup>0,5</sup> / mm <sup>0,25</sup>	2,00	1,00	C	C
N	-	0,25	0,25	0	0
$s_{s1}$	mm	$(C/A)^{(1/N)} \leq 1,0$	$(0,7 \cdot C/A)^{(1/N)} \leq 1,0$	-	
$s_{s3}$	mm	$\leq c_s - b_s$ (= lichter Rippenabstand)		-	
$\Delta s_{s1-2}$	mm	0,1	0,2	-	-
$\Delta s_{s2-3}$	mm	0,7	1,9	-	-
$\tau_{sR}$	MPa	$0,15 \cdot \tau_{s,max}$		$1,0 \cdot \tau_{s,max}$	

verschiebungen, abgebildet werden. Die maßgebenden Parameter des Ansatzes sind ebenfalls in Tab. 4.1 zusammengefasst. Ein Vergleich der Versuchsergebnisse an glattem Betonstahl mit den in (Martin und Noakowski 1981) dokumentierten Ergebnissen umfangreicher Ausziehversuche an Rundstahl zeigt, dass die Ergebnisse der eigenen Versuche, charakterisiert durch die Kenngröße  $\tau_{s,0.1}$ , am oberen Rand des von *Martin* und *Noakowski* angegebenen Streubereichs liegen. Dies ist ggf. auf unterschiedliche Vernarbung der Stäbe zurückzuführen. Aufgrund der Überprüfung des in (Martin und Noakowski 1981) angegebenen konstanten Verbundansatzes für mittig liegende Rundstäbe auf breiter Versuchsdatenbasis und der prinzipiellen Übereinstimmung mit den eigenen Versuchsergebnissen wird der von *Martin* und *Noakowski* angegebene Zusammenhang adaptiert. Der Ansatz nach (CEB-FIP MC 90 1993) erscheint im Vergleich zu den eigenen Versuchsergebnissen im Bereich geringer Betondruckfestigkeiten bis 30 MPa zu konservativ, bei darüber hinaus gehenden Druckfestigkeiten insbesondere im Vergleich mit den Versuchsergebnissen aus (Martin und Noakowski 1981) zu progressiv. Der in (Noakowski 1988) angegebene Verbundansatz für glatten Betonstahl auf Grundlage einer Exponentialfunktion liefert deutlich zu große Verbundspannungswerte und zeigt im Gegensatz zu Versuchsergebnissen im gesamten Relativverschiebungsbereich mit ansteigenden Verschiebungen anwachsende Verbundspannungen.

### 4.3 Verbundverhalten aufgeklebter Bewehrung

Die derzeit weltweit intensive Forschungstätigkeit in Zusammenhang mit aufgeklebter Bewehrung wurde durch erste experimentelle und theoretische Untersuchungen in Frankreich (vgl. L'Hermite 1967; Bresson 1971) bzw. in der Schweiz (Ladner und Weder 1981) eingeleitet. Wie an anderer Stelle bereits erläutert, werden verschiedene Arten der Klebearmierung eingesetzt; im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich Stahllaschen und CFK-Lamellen betrachtet. Im Folgenden werden angesichts der mittlerweile umfangreichen Literatur zur Thematik lediglich die Mechanismen des Klebeverbundes einschließlich der maßgebenden Einflussgrößen umrissen sowie die wesentlichen Verbundmodelle für aufgeklebte Bewehrung im Überblick dargestellt, bevor das für Versuchsauswertungen und numerische Studien verwendete Verbundmodell vorgestellt wird.

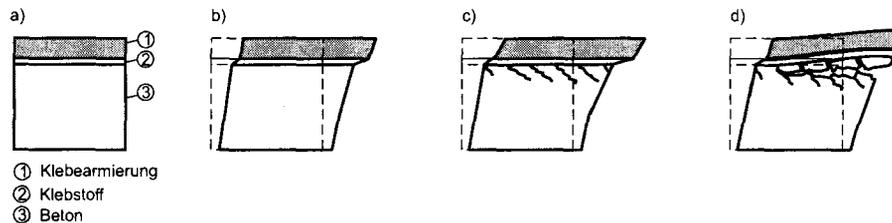
#### 4.3.1 Mechanismen, Prüfverfahren und Einflussgrößen

##### Trag- und Versagensmechanismen des Verbundes aufgeklebter Bewehrung

In Entsprechung zu Verbundbetrachtungen einbetonierter Bewehrung können die zu beobachtenden Mechanismen des Verbundes aufgeklebter Bewehrung an die Relativverschiebungen zwischen Bewehrungselement und Beton gekoppelt werden. Abhängig von Beanspruchungsgrad bzw. Relativverschiebung können folgende Stadien unterschieden werden:

- *Elastisches Verhalten*  
Bei geringen Beanspruchungen verhält sich das System aus Bewehrungselement, Klebstoffschicht und Betonuntergrund annähernd elastisch (Abb. 4.15 b);
- *Verbundrissbildung, entfestigendes Verhalten*  
Bei sukzessiv zunehmender Relativverschiebung treten in der oberflächennahen Betonschicht in Krafrichtung geneigte Schubrisse auf, die zu einer Verminderung der Verbundsteifigkeit führen (Abb. 4.15 c);
- *Verbundbruch*  
Ein Verbundversagen ist i.A. mit der Ausbildung eines Bruchhorizontes parallel zur Ebene des Bewehrungselements verknüpft. Der Verbundriss schreitet dabei i.A. vom höher beanspruchten Ende des Verbundbereichs zum geringer beanspruchten Ende fort. Hinsichtlich der Bruchebene ist zu unterscheiden:
  - Bruchhorizont im oberflächennahen Beton wenige Millimeter unterhalb des Bewehrungselementes (Abb. 4.15 d)

- Bruchhorizont in der Klebstoffschicht; Kohäsionsversagen des Klebstoffes, u.a. bei hohen Anpressdrücken (vgl. Pichler 1993) oder allg. behinderter Rissbildung im Beton (vgl. Blaschko 2001);
- Bruchhorizont in der äußersten Faserlage von CFK-Lamellen, *Zwischenfaserbruch* nach (Neubauer 2000);



**Abbildung 4.15.** Verbundmechanismen aufgeklebter Bewehrung

Bei oberflächlich aufgeklebter Bewehrung ist ein Verbundbruch ausgelöst durch ein Kohäsionsversagen der Klebstoffschicht bei üblichen Verhältnissen der Materialfestigkeiten lediglich bei Vorliegen eines Anpressdrucks signifikanter Größe zu erwarten. Bei aufgeklebten CFK-Lamellen kann insbesondere bei hoher Scherfestigkeit des Betonuntergrundes während des Fortschreitens des Verbundrisses eine Verlagerung des Bruchhorizontes vom oberflächennahen Beton in die Randschicht der CFK-Lamellen auftreten. Der Wechsel zum *Zwischenfaserbruch* tritt nach (Neubauer 2000) allerdings erst bei Vorliegen größerer entkoppelter Bereiche auf und ist *per se* nicht versagensauslösend.

Der oberflächenparallele Bruchhorizont im Beton ist auf die Vereinigung der geneigten Schubrisse zurückzuführen (vgl. Niedermeier 2001); nach der vollständigen Ausbildung des Verbundrisses können wegen der rauhen Rissufer weiterhin Reibverbund- d.h. Rissverzahnungsspannungen übertragen werden. Eine Quantifizierung der Reibverbundspannungen ist allerdings nur bei Klebarmierung, die zusätzlich an das Bauteil angepresst wird, näherungsweise möglich (vgl. Zilch und Zehetmaier 2003). Eine Interpretation der Verbundentfestigung nach Überschreiten des Verbundspannungsmaximums durch Rissverzahnung (vgl. Holzenkämpfer 1994) bzw. die Modellierung der Verbundentfestigung als Rissuferverzahnungsphänomen nach der Modellvorstellung *Walravens* entspricht allerdings nicht konsequent der experimentellen Erfahrung, da voraussetzungsgemäß bereits bei Erreichen des Verbundspannungsmaximums ein horizontaler Riss unterhalb des Bewehrungselements vorhanden sein müsste.

Ein mit steigender Beanspruchung zu beobachtendes Fortschreiten des Verbundrisses ist mit dem Aufgleiten der Klebarmierung z.B. an Zuschlagkörnern in den bereits getrennten Bereichen verbunden. Im Bewehrungselement entstehen dadurch lokal Biegeverformungen, die an der Wurzel des Verbundrisses Zugspannungen normal zur Verbundebene - sog. *Abschälspannungen* - induzieren. Dem bruchmechanisch als Modus-II zu charakterisierenden Rissfortschritt infolge der Längsschubbeanspruchung wird bedingt durch die auftretenden Normalspannungen ein Modus-I-Rissfortschritt überlagert. Ein kausaler Zusammenhang zwischen den durch die Biegesteifigkeit des Bewehrungselements gesteuerten Abschälspannungen und der Verbundtragfähigkeit wurde bisher nicht nachgewiesen, erscheint allerdings sinnvoll und liefert eine mögliche Erklärung für die bei CFK-Lamellen mit geringer Biegesteifigkeit gegenüber Stahllaschen tendenziell höhere Verbundtragfähigkeit.

### Verfahren zur experimentellen Ermittlung des Verbundverhaltens

Im Unterschied zu Verbundversuchen an einbetonierter Bewehrung ist es bei Klebarmierung nicht möglich, anhand von Verbundversuchen mit finiten Verbundelementen den Zusammenhang zwischen Verbundspannungen und Relativverschiebungen unmittelbar zu bestimmen. Die Voraussetzung repräsentativer Verbundlängen, die i.A. ein Vielfaches des

Größtkorndurchmessers betragen sollte, steht im Widerspruch zu den insbesondere bei Bewehrungselementen mit geringer Dehnsteifigkeit - z.B. CFK-Lamellen - auftretenden kurzen Verankerungslängen und damit einhergehend signifikanten Verbundspannungsgradienten entlang geringer Längen. Konstante Verbundspannungen können daher nicht vorausgesetzt werden.

Im Vergleich der verschiedenen Versuchskonfigurationen dominieren die Versuche an idealisierten Abbildungen der Endverankerung bei biegebeanspruchten Bauteilen in Gestalt von Einfach- oder Doppellaschenkörpern. Versuche mit aufgeklebten Stahllaschen werden u.a. in (Bresson 1971; Ladner und Weder 1981; Ranisch 1982; Pichler 1993; Holzenkämpfer 1994; Täljsten 1994) und (Niedermeier 2001) dokumentiert.

Neben anderen wird in (Chajes u. a. 1996; Maeda u. a. 1997; Bizindavyi und Neale 1999; Neubauer 2000; Dai und Ueda 2003) und (Zilch u. a. 2002) über Verbundversuche an aufgeklebten CFK-Lamellen und CFK-Gelegen berichtet.

Zur Ermittlung von  $\tau$ - $s$ -Beziehungen aus Ergebnissen von Verbundversuchen können zwei verschiedene Methoden verwendet werden:

- Bestimmung lokaler  $\tau$ - $s$ -Beziehungen  
Aus der Differenz bzw. dem Integral diskreter gemessener Dehnungen entlang der Verbundlänge können lokale Verbundansätze berechnet werden (vgl. Kaiser 1989; Chajes u. a. 1996). Dazu sind allerdings insbesondere bei CFK-Lamellen sehr kurze Abstände zwischen den einzelnen DMS erforderlich. Zudem wird - wie bei den eigenen Versuchen nachgewiesen - wegen unvermeidlicher Fügeiteilbiegung u.a. infolge des Modus-I Anteils des Verbundrissfortschrittes eine Aufnahme der Dehnungen zu beiden Seiten des Bewehrungselements unumgänglich (vgl. auch Sebastian 2001).
- Bestimmung globaler  $\tau$ - $s$ -Beziehungen  
Aus integralen, gemessenen Größen - z.B. dem Zusammenhang zwischen  $\epsilon_L$  und  $s_L$  am belasteten Ende des Verbundbereichs bzw.  $\epsilon_L$  und  $x$  - können bei vorgegebener Form des Verbundansatzes mittels Regressionsrechnung bzw. *curve fitting* die maßgebenden Parameter bestimmt werden (vgl. Niedermeier 2001; Savoia u. a. 2003; Dai und Ueda 2003)

Wie bei einbetonierter Bewehrung sind die Ergebnisse von Verbundversuchen aufgrund der unvermeidlichen Einflüsse jeweils herrschender, z.T. von den Verhältnissen in biegebeanspruchten Bauteilen abweichender Randbedingungen nur bedingt auf reale Bauteile übertragbar. Neben dem Einfluss des Spannungszustandes in Versuchskörpern - Zug-Druck- bzw. Zug-Zug-Versuche (vgl. Holzenkämpfer 1994; Niedermeier 2001) - wurde u.a. bereits in (Ranisch 1982) darauf hingewiesen, dass durch die Vorgabe einer verbundfreien Vorlänge die z.B. bei Versuchen an biegebeanspruchten Bauteilen zu beobachtenden Ausbruchkeile am belasteten Verbundbereichsende vermieden werden.

### **Einflussgrößen auf das Verbundverhalten**

Als wesentliche Einflussgrößen auf das Verbundverhalten aufgeklebter Bewehrung konnte u.a. in den bisher aufgezählten Arbeiten identifiziert werden:

- Eigenschaften des Betonuntergrundes (mechanische Eigenschaften: Scher- bzw. Druck- und Zugfestigkeit; E-Modul; Oberflächenvorbereitung bzw. Rautiefe)
- Eigenschaften der Klebstoffschicht (mechanische Eigenschaften, Schichtdicke)
- Eigenschaften des Bewehrungselements (mechanische Eigenschaften, Abmessungen bzw. Biegesteifigkeit)
- Geometrische Verhältnisse (u.a. Abmessungen des Bewehrungselements im Vergleich zu den Abmessungen des Betonuntergrundes)
- Randbedingungen (Spannungen normal zur Verbundebene, Umbügelung der Klebbearmierung, Oberflächenunebenheiten, Lage zum Querriss bzw. verbundfreie Vorlänge)

Die genannten Parameter werden derzeit nur in begrenztem Umfang in den Verbundmodellen berücksichtigt. Im Unterschied zu einbetonierter Bewehrung sind Auswirkungen lokaler Effekte weitgehend unerforscht (vgl. 4.3.2).

### 4.3.2 Vorliegende Verbundmodelle

#### Vorbemerkung

Der Betrachtung einbetonierter Bewehrung auf Grundlage der DGL des verschieblichen Verbundes entsprechend, basiert der Großteil der vorliegenden Modelle auf dem Zusammenhang zwischen Verbundspannung  $\tau_L$  und Relativverschiebung  $s_L$ ; dem gegenüber stehen kontinuumsmechanische Betrachtungsweisen unter Verwendung konstituiver Stoffmodelle.

Grundsätzlich ist zwischen *Verbundmodellen* und *Traglastmodellen* zu unterscheiden. Während erstere das Trag- und Verformungsverhalten über den gesamten Beanspruchungsbereich mehr oder minder zutreffend wiedergeben, dienen letztere v.a. der Quantifizierung der Verbundbruchlast. Die Verbundtragkraft wird i.W. durch die Verbundbruchenergie  $G_F$  bestimmt, die Form des Verbundansatzes fließt erst bei Verknüpfung mit vorhandenen Verbundlängen ein. Dem entsprechend wurden zwar in (Holzenkämpfer 1994; Neubauer 2000; Niedermeier 2001) wirklichkeitsnahe Verbundmodelle abgeleitet, zur Berechnung der Verbundtraglast dienten allerdings linearisierte Ansätze. Im Unterschied dazu wird insbesondere für die Betrachtung des Zusammenwirkens angeklebter mit einbetonierter Bewehrung die Form des Verbundansatzes relevant.

#### Überblick

Ein Überblick über bis zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Theorien zur Berechnung von allgemeinen Klebeverbindungen sowie Verbindungen zwischen Stahllaschen und Beton ist z.B. (Holzenkämpfer 1994) zu entnehmen; Traglastmodelle zur Berechnung von Endverankerungen werden in (Chen und Teng 2001) zusammengefasst und gewertet. Im Folgenden werden Grundprinzipien der Abbildung - unterschieden nach der Charakteristik des Zusammenhangs zwischen Verbundspannungen und Verformungen - dargestellt.

#### *Linear elastische Verbundmodelle*

Linear elastische Modelle wurden in kontinuumsmechanischen Formulierungen bereits für die Berechnungen von Verklebungen zwischen Fügeteilen aus Stahl verwendet (vgl. Goland und Reissner 1944) und für die Abbildung von auf Beton aufgeklebter Bewehrung übernommen (vgl. Saadatmanesh und Malek 1997; Rabinovich und Frostig 2000). Auf Grundlage der DGL des verschieblichen Verbundes wird in (Bresson 1971) ebenfalls linear elastisches Verbundverhalten angenommen (Abb. 4.16-a). Die erstgenannten Modelle berücksichtigen zudem Spannungen normal zur Verbundebene. Linear elastische Modelle sind in der Lage, Spannungen und Verformungen bei geringen Beanspruchungen zutreffend vorherzusagen. Traglastbetrachtungen sind wegen des nicht berücksichtigten entfestigenden Verbundverhaltens nicht sinnvoll (vgl. Holzenkämpfer 1994).

#### *Ansätze auf Basis der Plastizitätstheorie*

In Anlehnung an plastizitätstheoretische Formulierungen bzw. vereinfachte Regelungen für einbetonierte Bewehrung in Normenwerken wurden v.a. für Traglastbetrachtungen, d.h. insbesondere für vereinfachte Verankerungsnachweise konstante, von der Relativverschiebung unabhängige Verbundspannungen angenommen (vgl. Chajes u. a. 1996; Seim u. a. 1999; Seim u. a. 2003).

#### *Abschnittweise lineare Ansätze*

Abschnittsweise lineare Ansätze werden u.a. in (Kaiser 1989) und (Ranisch 1982) vorgestellt. Kaiser wählt dabei eine zur Formulierung des Verhaltens zugbeanspruchten Betons nach (Hillerborg u. a. 1976) ähnliche Beziehung und gibt für elastisches und entfestigendes Verhalten getrennte Ansätze an (Abb. 4.16-b). Demgegenüber besitzt insbesondere der sog. *bilineare Verbundansatz* nach Ranisch wesentliche praktische Bedeutung

(Abb. 4.16-c); er ist in der Lage, trotz einfacher Formulierung das Verbundverhalten unter Einschluß von Verbundentfestigung und Verbundbruch zutreffend wiederzugeben. Da ein bilinearer Ansatz ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird, folgt eine separate Erläuterung.

#### Nichtlineare Ansätze

In (Pichler 1993) wird der ansteigende Ast der  $\tau$ - $s$ -Beziehung für einbetonierten Betonstahl nach (CEB-FIP MC 90 1993) mit modifizierten Parametern als Verbundansatz verwendet (Abb. 4.16-d). Wie bei linear elastischen Ansätzen ist damit lediglich eine eingeschränkte Beschreibung des Verbundverhaltens möglich.

Der ansteigenden Ast wird in (Dai und Ueda 2003) um eine Exponentialfunktion, die entfestigendes Verbundverhalten beschreibt, ergänzt (Abb. 4.16-e). Die dem Charakter nach dem bilinearen Ansatz ähnliche Beschreibung ermöglicht eine zutreffende Beschreibung des Verbundverhaltens im gesamten Beanspruchungsbereich. Ein ähnlicher, allerdings nicht allgemein gültiger Ansatz wird in (Savoia u. a. 2003) angegeben. Erwähnenswert erscheint das in (Sato u. a. 2002) angegebene Verbundmodell (Abb. 4.16-f), das bei abschnittsweiser Formulierung in Anlehnung an den bilinearen Ansatz zusätzlich zur Anknüpfung der Verbundspannungen an Relativverschiebungen und Dehnungsniveau der Klebarmierung eine empirische Abminderung der Verbundtragfähigkeit im Bereich von Querissen berücksichtigt.

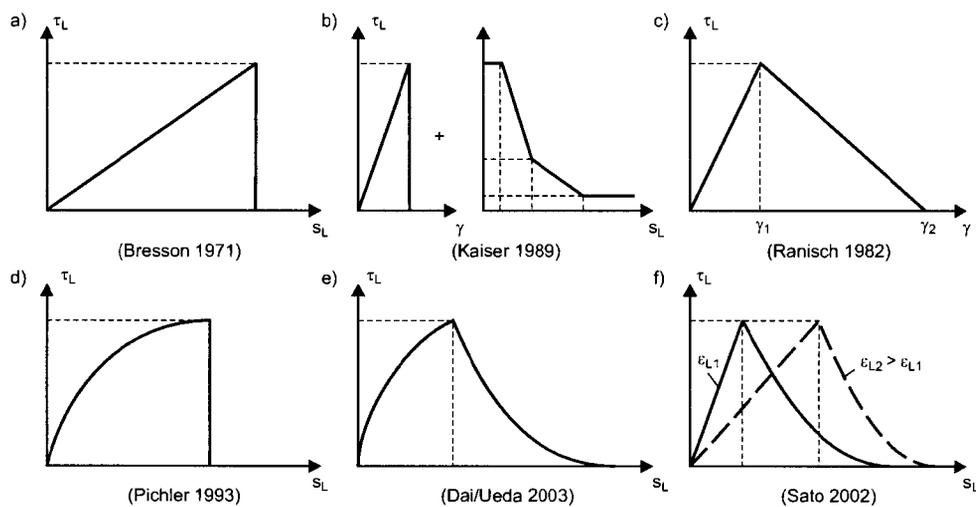


Abbildung 4.16. Verbundansätze für aufgeklebte Bewehrung (schematisch)

#### Bilinearer Verbundansatz

Der abschnittsweise lineare, sog. *bilineare* Verbundansatz folgt den funktionalen Beziehungen (4.33), (4.34) und (4.35) und wird allgemein durch die Parameter  $\tau_{L1}$ ,  $s_{L1}$  und  $s_{L0}$  beschrieben (Abb. 4.17).

$$\tau_L = \frac{\tau_{L1}}{s_{L1}} \cdot s_L \quad \text{für } s_L \leq s_{L1} \quad (4.33)$$

$$\tau_L = \tau_{L1} - \frac{\tau_{L1}}{s_{L0} - s_{L1}} \cdot (s_L - s_{L1}) \quad \text{für } s_{L1} < s_L \leq s_{L0} \quad (4.34)$$

$$\tau_L = 0 \quad \text{für } s_L > s_{L0} \quad (4.35)$$

Der bruchmechanischen Betrachtungsweise der Verbundproblematik aufgeklebter Bewehrung entsprechend, kann die über die Relativverschiebung aufintegrierte Verbundspannung als Verbundenergie gedeutet werden (vgl. Holzenkämpfer 1994). Zur Beschreibung

der verschiedenen Verbundbereiche werden die Energiegrößen nach den Gln. (4.36) bis (4.38) verwendet (Abb. 4.17).

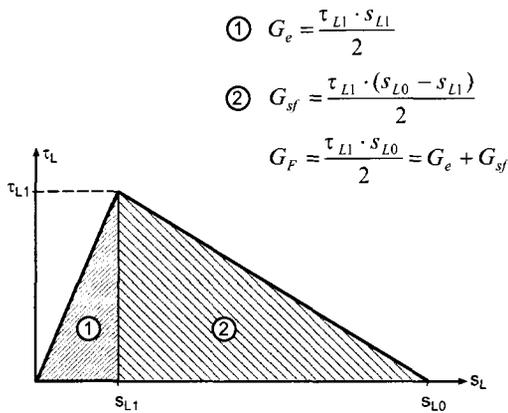
$$G_e = \frac{\tau_{L1} \cdot s_{L1}}{2} \tag{4.36}$$

$$G_{sf} = \frac{\tau_{L1} \cdot (s_{L0} - s_{L1})}{2} \tag{4.37}$$

$$G_F = \frac{\tau_{L1} \cdot s_{L0}}{2} \tag{4.38}$$

$$= G_e + G_{sf}$$

Die Verbundbruchenergie  $G_F$  kann als derjenige Energiebetrag angesehen werden, der zur vollständigen Ablösung eines Einheitsverbundelementes aufgebracht werden muss.



**Abbildung 4.17.** Abschnittweise linearer, sog. *bilinear*er Verbundansatz; maßgebende Parameter, Verbundenergien

Die grundlegende Formulierung des bilinearen Verbundansatzes nach den vorgestellten Beziehungen ist z.B. in (Holzenkämpfer 1994; Neubauer 2000; Niedermeier 2001) oder (Ulag 2003) übereinstimmend aufgenommen worden. Die wesentlichen Unterschiede z.B. hinsichtlich der Verbundbruchkräfte ist in der differierenden Festlegung der maßgebenden Parameter zu sehen.

Da die Verbundparameter  $\tau_{L1}$  und  $s_{L1}$  in (Holzenkämpfer 1994; Neubauer 2000) sowie in (Ulag 2003) ausschließlich durch theoretische Überlegungen anhand einfacher mechanischer Modelle deterministisch festgelegt und lediglich  $s_{L0}$  anhand der experimentell ermittelten Verbundbruchenergie  $G_F$  über Gl. (4.38) ermittelt wurden, liegen mit den Beziehungen in (Niedermeier 2001) die einzigen, aus Versuchsergebnissen abgeleiteten Kenngrößen vor (Gln. 4.39 - 4.41).

$$\tau_{L1} = c_\tau \cdot \sqrt{f_{cm,cube} f_{ctm}} \tag{4.39}$$

$$G_e = c_e \cdot \sqrt{f_{cm,cube} f_{ctm}} \tag{4.40}$$

$$G_F = c_F \cdot \sqrt{f_{cm,cube} f_{ctm}} \tag{4.41}$$

Die Verschiebungskenngrößen des Verbundansatzes ergeben sich zu

$$s_{L1} = \frac{2 \cdot c_e}{c_\tau} \tag{4.42}$$

$$s_{L0} = \frac{2 \cdot c_F}{c_\tau} \tag{4.43}$$

In den Gleichungen (4.39) bis (4.41) bedeuten:

- $f_{cm,cube}$  Mittelwert der Betondruckfestigkeit, bezogen auf einen Würfel der Kantenlänge 200 mm (vgl. Niedermeier und Zilch 2001)
- $f_{ctm}$  Mittelwert der Oberflächenzugfestigkeit

Wir unterstellt, dass durch die in (Niedermeier 2001) angegebene Abhängigkeit der maßgebenden Parameter nach den Gln. (4.39) - (4.41) alle Einflussgrößen, die mit  $f_{cm,cube}$

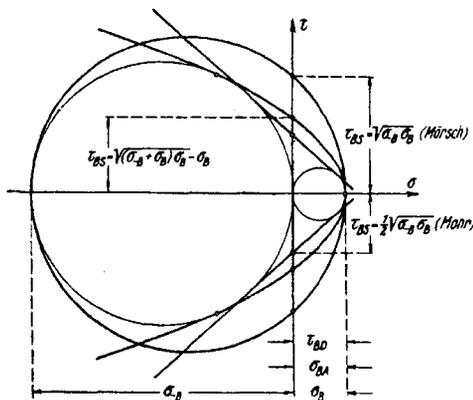
bzw.  $f_{ctm}$  korreliert sind, erfasst werden, dienen die Koeffizienten  $c_\tau$  bis  $c_F$  zur Anpassung des Verbundansatzes an die übrigen Randbedingungen wie etwa Art der Bewehrung, Einflüsse der Klebschicht, etc.. Entsprechend (Niedermeier 2001) können die als konstant anzunehmenden Koeffizienten anhand von Regressionsrechnungen aus Versuchsergebnissen ermittelt werden. Für aufgeklebte Stahllaschen werden von *Niedermeier* sowohl Mittelwerte als auch charakteristische Werte der Koeffizienten angegeben.

Im Verbundansatz sind als Folge der gewählten Strategie zur Ableitung aus Versuchsergebnissen folgende Einflussparameter bzw. Auswirkungen nicht explizit berücksichtigt:

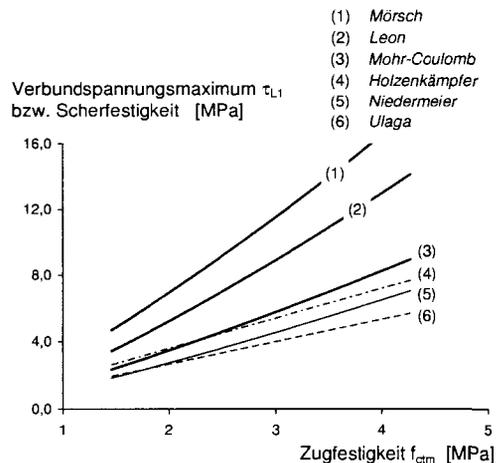
- Abweichungen der Klebschichtdicke von  $t_g = 1 \text{ mm}$
- Art bzw. Biegesteifigkeit der Klebarmierung
- Bildung von Bruchkeilen an Querrissen
- zusätzliche Tragmechanismen infolge
  - Reibverbundspannungen nach Ausbildung des Verbundrisses
  - Umbügelung des Klebarmierungsstranges
  - Umlenkräften aus der Querschnittsverkrümmung bei biegebeanspruchten Bauteilen

In (Niedermeier 2001) wird anhand der Auswertung einer Vielzahl von Verbundversuchen an Stahllaschen und CFK-Lamellen - im Widerspruch zu (Holzenkämpfer 1994; Chen und Teng 2001) - nachgewiesen, dass das Verhältnis von Laschenbreite zu Bauteilbreite bzw. Laschenabstand keine signifikanten Auswirkungen auf die Verbundtragfähigkeit hat. Diese These steht im Einklang mit Überlegungen auf Basis der Bruchmechanik: Eine wesentliche Voraussetzung des Auftretens von Größeneinflüssen wie z.B. dem Verhältnis  $b_L/b$  ist die geometrische Ähnlichkeit der Rissprozesszone im Vergleich zu den übrigen Abmessungen (vgl. Bažant u. a. 1994), d.h. hier speziell der Bauteilbreite. Da sich allerdings die Längenausdehnung der Rissprozesszone und insbesondere deren Breite aufgrund der Lage der Bruchebene unmittelbar unterhalb des Bewehrungselements mit zunehmender Bauteilbreite  $b$  kaum ändert, ist die Anrechnung des Breitenverhältnisses bruchmechanisch nicht begründbar.

*Vergleich verschiedener bilinearer Verbundansätze*



**Abbildung 4.18.** Definition der Scherfestigkeit bei reiner Schubbeanspruchung nach *Mohr*, *Mörsch* und *Leon*, aus (Leon 1935)



**Abbildung 4.19.** Verbundspannungsmaximum nach vorliegenden Ansätzen im Vergleich mit der rechnerischen Scherfestigkeit nach den Bruchkriterien in Abb. 4.18

Zum Vergleich der Verbundansätze nach (Holzenkämpfer 1994; Neubauer 2000) und (Ulaga 2003) mit dem Ansatz für aufgeklebte Stahllaschen nach (Niedermeier 2001), insbesondere hinsichtlich der Verbundspannungsmaxima  $\tau_{L1}$ , sind in Abb. 4.18 zunächst

drei theoretisch begründete Bruchkriterien für zweiachsiale Beanspruchung von Beton dargestellt, die für  $\sigma_y = 0$  die Scherfestigkeit unter reiner Schubbeanspruchung angeben. Dabei geben die Hypothesen nach *Mohr-Coulomb* und *Mörsch* (Hypothese der maximalen Hauptspannung) die Grenzwerte vor, zwischen denen sich in der Literatur angegebene Festigkeiten bei reiner Schubbeanspruchung bewegen (vgl. Kupfer 1973; Eibl und Ivanyi 1976). Ergänzend ist die *Mohr'sche* Bruchhypothese in der Formulierung der Hüllparabel nach *Leon* eingetragen. In Abb. 4.19 werden die für Klebarmierung angegebenen Verbundspannungsmaxima den Bruchkriterien aus Abb. 4.18 gegenübergestellt<sup>4</sup>.

Der Verbundansatz nach (Neubauer 2000) bezieht sich auf CFK-Lamellen während der in (Uлага 2003) abgeleitete Ansatz sowohl CFK-Lamellen als auch Stahllaschen ohne Berücksichtigung der tendenziell bei Lamellen höheren Verbundtragfähigkeiten erfasst. Abbildung. 4.19 belegt das insbesondere nach (Niedermeier 2001) und (Uлага 2003) gegenüber der Hypothese nach *Mohr-Coulomb* geringere Verbundspannungsmaximum, das ggf. auf Effekte wie die implizit in den Ansätzen enthaltenen, bereits erläuterten Abschälspannungen, sowie die im Vergleich zur Scherfestigkeit ungestörten Betongefüges reduzierte Tragfähigkeit oberflächennaher Betonschichten zurückzuführen ist.

Insbesondere aus Abb. 4.21 ist die große Bandbreite der an Versuchsergebnissen kalibrierten Beziehungen für die Verbundbruchenergie  $G_F$ , die z.B. über  $(G_F)^{0.5}$  mit der Verbundbruchkraft am Einzelriss verknüpft ist, ersichtlich. Die - aufgrund identischer Faktoren zur Berücksichtigung des Breitereinflusses - unmittelbar vergleichbaren Ansätze nach (Holzenkämpfer 1994) und (Neubauer 2000) unterscheiden sich bezüglich  $G_F$  um den Faktor 2,2.

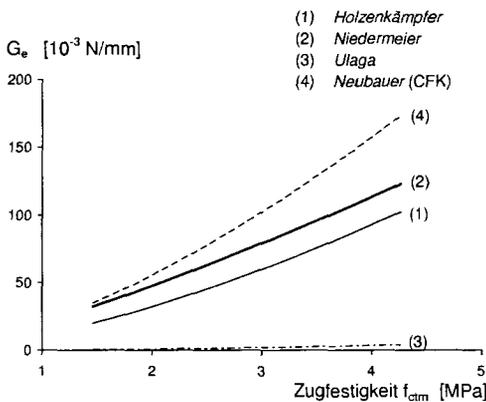


Abbildung 4.20. Elastische Verbundenergie nach vorliegenden Verbundansätzen

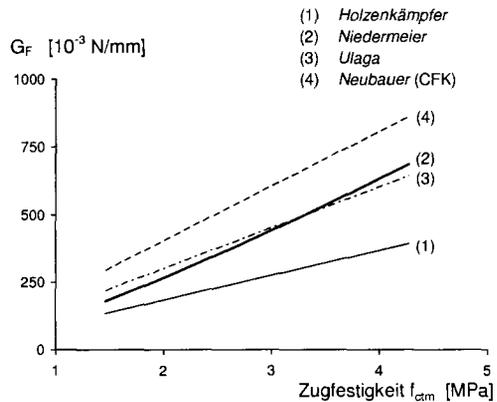


Abbildung 4.21. Verbundbruchenergie nach vorliegenden Verbundansätzen

<sup>4</sup> Zur Darstellung der Verbundspannungsmaxima bzw. Scherfestigkeiten sowie der Energiekenngrößen in den Abbildungen 4.19 bis 4.21 wurden folgenden Annahmen getroffen:

- Die Betondruckfestigkeit  $f_{cm,cube}$  wird mit den im Anhang angegebenen Beziehungen sowie unter Verwendung von Gl. (4.21) mit der Oberflächenzugfestigkeit  $f_{ctm}$  verknüpft.
- Die in Abb. 4.18 angegebenen Kennwerte  $\sigma_{-B}$  und  $\sigma_B$  nach (Leon 1935) werden mit  $f_{cm,cube}$  bzw.  $f_{ctm}$  gleichgesetzt.
- Zur Berechnung des Verbundspannungsmaximums und der Energiekenngrößen nach den Ansätzen von *Holzenkämpfer* und *Neubauer* wurde der Korrekturfaktor  $k_b$  zur Berücksichtigung von Breitereinflüssen zu 1,0 gesetzt; dem entsprechend repräsentieren die resultierenden Größen den Minimalwert des der jeweiligen Zugfestigkeit zugeordneten Kennwertes.

Das von *Neubauer* für aufgeklebte CFK-Lamellen abgeleitete Verbundmodell nimmt Bezug auf den von *Holzenkämpfer* entwickelten Verbundansatz; entsprechend sind die Kenngrößen  $\tau_{L1}$  unabhängig vom Typ der aufgeklebten Bewehrung identisch (Abb. 4.19).

### 4.3.3 Abbildung des Verbundverhaltens angeklebter Bewehrung

Zur Auswertung durchgeführter Versuche sowie für numerische Studien wird auf den bilinearen Verbundansatz in der Formulierung nach (Niedermeier 2001) mit jeweils dem Typ der Klebarmierung angepassten Koeffizienten  $c_\tau$ ,  $c_e$  und  $c_F$  zurückgegriffen.

#### Stahllaschen

Für die Beschreibung des Verbundverhaltens aufgeklebter Stahllaschen werden die in (Zilch und Niedermeier 1999) bzw. (Niedermeier 2001) anhand umfangreicher Verbundversuche abgeleiteten Koeffizienten  $c_\tau$ ,  $c_e$  und  $c_F$  nach Tab. 4.2 verwendet.

Da bei den Dehnkörperversuchen der Reihen V5 und V6 durch die Aufzeichnung des Zusammenhanges zwischen Laschendehnung im vorgegebenen Rissquerschnitt  $\epsilon_{Lr}$  und der zugehörigen Relativverschiebung  $s_{Lr}$  am belasteten Verbundbereichsende eine unmittelbare Ableitung der Koeffizienten analog zum Vorgehen nach *Niedermeier* möglich war, werden der Auswertung und Nachrechnung der betreffenden Versuche die Parameter der gesonderten Regressionsanalyse zugrunde gelegt (vgl. Kapitel 5).

#### CFK-Lamellen

Im Vorlauf zu den Versuchen an gemischt bewehrten Dehnkörpern und Plattenstreifen wurden Verbundversuche an Doppellaskenkörpern durchgeführt. Sowohl CFK-Lamellen als auch Epoxidharzklebstoff waren mit den in weiteren Versuchen verwendeten Materialien identisch. Versuchsaufbau und -durchführung sowie die Auswertung der Ergebnisse bzw. die Ableitung der für CFK-Lamellen zutreffenden Koeffizienten  $c_\tau$ ,  $c_e$  und  $c_F$  sind in (Zilch u. a. 2002) dargestellt. Angesichts des geringen Umfangs experimenteller Ergebnisse aus Verbundversuchen werden zur Bestimmung der Verbundbruchenergie zusätzliche Ergebnisse aus Dehnkörperversuchen beigezogen. Zur Ableitung der Verbundbruchenergie  $G_F$  werden ausschließlich Versuche verwendet, die bis zur einsetzenden Entkopplung der Klebarmierung nur den vorgegebenen Riss in Körpermitte aufweisen<sup>5</sup>. Die Verbundbruchenergie wird auf Grundlage von Energiebetrachtungen abgeleitet (vgl. 4.4). Die Lamellendehnung im Rissquerschnitt bei einsetzender Entkopplung am Einzelriss folgt wegen der durch die mechanische Verankerung vorgegebenen Randbedingung  $s_L(x=0) = 0$  streng Gl. (4.44). Die Lamellendehnung  $\epsilon_{L0}$  am Ende der Einleitungslänge wird angesichts der bei CFK-Lamellen vorliegenden, gegenüber der freien Länge der Dehnkörper von 660 mm deutlich kleineren Verankerungslängen näherungsweise mit der zur Entkopplungskraft  $F_E$  zugehörigen Betondehnung nach Gl. (4.45) gleichgesetzt. Der Entkopplungsbeginn wird nach (Niedermeier 2001) mit der einsetzenden Entkopplung am Rissquerschnitt, d.h. dem ersten zu beobachtenden Plateau der Last-Dehnungs-Beziehung gleichgesetzt und enthält damit keine Anteile aus Reibungsverbund. Aufgrund des Bezugs auf die gemessene Dehnung im vorgegebenen Riss in Körpermitte wird je Seite des Dehnkörpers A bzw. B der kleinere Wert der Verbundbruchenergien der Körperhälften beidseits des Risses ermittelt.

$$\epsilon_{Le} = \sqrt{\frac{2 \cdot G_F}{E_L t_L} + \epsilon_{L0}^2} \quad (4.44)$$

$$\text{mit } \epsilon_{L0} \approx \frac{F_e}{E_c A_c} \quad (4.45)$$

<sup>5</sup> Die Voraussetzung einsetzender Entkopplung bei vorliegendem Einzelriss wird in den Versuchen V2-01-B2C bis V2-08-B1C, V2-11-B2C und V3-01-B2C bis V3-08-B1C erfüllt (vgl. Zilch u. a. 2004). Damit stehen der Auswertung 34 experimentell bestimmte Werte der Bruchenergie aus 17 Versuchen zur Verfügung.

**Tabelle 4.2.** Koeffizienten des bilinearen Verbundansatzes für aufgeklebte Bewehrung (charakteristische Werte nach Zilch u. a. 2004)

Koeffizient	Stahllaschen		CFK-Lamellen	
	Mittelwert	charakteristischer Wert	Mittelwert	charakteristischer Wert
$c_{\tau}$	$3,94 \cdot 10^{-1}$	$2,73 \cdot 10^{-1}$	$4,80 \cdot 10^{-1}$	$1,93 \cdot 10^{-1}$
$c_e$	$6,88 \cdot 10^{-3}$	$2,65 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$2,79 \cdot 10^{-5}$
$c_F$	$3,84 \cdot 10^{-2}$	$2,52 \cdot 10^{-2}$	$5,11 \cdot 10^{-2}$	$2,96 \cdot 10^{-2}$

## 4.4 Energiebetrachtung von Verbundproblemen

Unabhängig von der Art des betrachteten Bewehrungsstranges können Verbundprobleme unter Voraussetzung spezifischer Randbedingungen durch Energiebetrachtungen erfasst werden. Überlegungen zur Ableitung mittlerer Verbundspannungen anhand von Verbundenergiebetrachtungen sind in (Faoro 1988) und (Niedermeier 2001) enthalten. Der wesentliche Vorteil von Energiebetrachtungen ist darüber hinaus allerdings in der unmittelbaren Ableitung von Zusammenhängen zwischen Dehnungen und Relativverschiebungen in Rissquerschnitten bei beliebigen Bewehrungselementen und Verbundansätzen zu sehen. Eingeschränkt wird die Anwendbarkeit von Energiebetrachtungen durch die fehlende Verknüpfung mit zugehörigen Einleitungs- bzw. Entwicklungslängen.

### 4.4.1 Allgemeines zu Verbundenergiebetrachtungen

Aus der Bilanzierung der Energien folgt bei Vernachlässigung thermischer Energie unmittelbar, dass die über eine begrenzte Länge über Verbundwirkung in ein Bewehrungselement eingetragene Energie - Verbundenergie  $G_b$  - dem Zuwachs an elastischer Energie  $G_e$  des Bewehrungselementes entsprechen muss.

Ein linienförmiges Bewehrungselement mit über den Querschnitt gleichförmiger Dehnungsverteilung vorausgesetzt, kann anhand dieser Überlegung unmittelbar ein Zusammenhang zwischen Dehnung und verschiebungsabhängiger Verbundenergie nach Gl. (4.47) hergestellt werden. Die Verbundenergie ist dabei durch Gl. (4.46) festgelegt.

$$G_b(s) = \int_{s=s_0}^s \tau(s) ds \quad (4.46)$$

$$\epsilon(x) = \sqrt{2G_b(s)c_s + \epsilon_0^2} \quad (4.47)$$

In Gl. (4.47) ist  $c_s$  ein Formfaktor, der den charakteristischen Zusammenhang zwischen dem verbundwirksamen Umfang des Bewehrungselementes und seiner Dehnsteifigkeit beschreibt;  $\epsilon_0$  ist die Ausgangsdehnung am Beginn des Verbundbereichs.

### 4.4.2 Konkretisierung für einbetonierten Betonstahl

Für einbetonierten Betonstahl beschreibt  $c_s$  den „hydrostatischen Radius“ der Bewehrung nach Gl. (4.48). Für beliebige  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehungen kann die Dehnung im Riss bei bekanntem  $\epsilon_0$  angegeben werden, sofern die Integrationsgrenzen in Gl. (4.46) bekannt sind. Bei Ansatz eines Verschiebungsruhepunktes als Integrationsgrenze, d.h.  $s_s(x=0) = 0$ , kann eine strenge Lösung angegeben werden. Wird ein starr-plastischer Verbundansatz mit  $\tau_{sm}$  vorausgesetzt, folgt bei bekannten Rissrelativverschiebungen Gl. (4.50).

$$c_{s,s} = \frac{4}{E_s d_s} \quad (4.48)$$

$$G_{b,s} = \int_0^{s_{sr}} \tau_{sm} ds = \tau_{sm} s_{sr} \quad (4.49)$$

$$\epsilon_{sr} = \sqrt{\frac{8\tau_{sm}s_{sr}}{E_s d_s} + \epsilon_{s0}^2} \quad (4.50)$$

Die Rissdehnung nach Gl. (4.50) kann ebenfalls auf Grundlage der DGL des verschieblichen Verbundes abgeleitet werden (vgl. u.a. Alvarez 1998).

Für den ansteigenden Ast des Verbundansatzes nach 4.2 ist eine analoge Ableitung möglich:

$$G_{b,s} = \int_0^{s_{sr}} A \sqrt{f_{cm} s_s^N} ds = \frac{A \sqrt{f_{cm} s_{sr}^{(N+1)}}}{N+1} \quad (4.51)$$

$$\epsilon_{sr} = \sqrt{\frac{8A \sqrt{f_{cm} s_{sr}^{(N+1)}}}{(N+1)E_s d_s} + \epsilon_{s0}^2} \quad (4.52)$$

Für  $\epsilon_{s0} \rightarrow 0$  folgt aus Gl. (4.52) der u.a. in (Noakowski 1978; Krips 1984) abgeleitete, für den Einzelrisszustand zutreffende Ausdruck der Betonstahldehnung in Abhängigkeit der Rissrelativverschiebung. In den genannten Arbeiten erfolgt die Herleitung ebenfalls auf Grundlage der DGL des verschieblichen Verbundes bei Verknüpfung der analytischen Ausdrücke für Dehnung und Relativverschiebung mit der zugeordneten Verbundlänge. Für  $N \rightarrow 0$  geht Gl. (4.52) über in die Beziehung für glatten Betonstahl.

#### 4.4.3 Konkretisierung für aufgeklebte Bewehrung

Für Klebarmierung lassen sich Zusammenhänge zwischen Dehnung und Relativverschiebung ebenfalls auf Grundlage von Energiebetrachtungen angeben. Der Formfaktor  $c_s$  folgt in diesem Fall Gl. (4.53). Den im Folgenden dargestellten Beziehungen ist analog ein Verschiebungsruehpunkt zur Festlegung der Integrationsgrenzen vorauszusetzen. Der in 4.3 erläuterte bilineare Verbundansatz bedingt eine abschnittsweise Definition der Beziehungen.

$$c_{s,L} = \frac{1}{E_L t_L} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} G_{b,L} &= \frac{\tau_{L1}}{2s_{L1}} s_{Lr}^2 && \text{für } 0 < s_{Lr} \leq s_{L1} \\ &= \frac{\tau_{L1}}{2} \left[ 2s_{Lr} - s_{L1} - \frac{(s_{Lr} - s_{L1})^2}{s_{L0} - s_{L1}} \right] && \text{für } s_{L1} < s_{Lr} \leq s_{L0} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\epsilon_{Lr} = \sqrt{\frac{2G_b}{E_L t_L} + \epsilon_{L0}^2} \quad (4.55)$$

Für  $\epsilon_{L0} = 0$  (Einzelrisszustand) folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{Lr} &= \omega s_{Lr} && \text{für } 0 < s_{Lr} \leq s_{L1} \\ &= \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L} \left[ 2s_{Lr} - s_{L1} - \frac{(s_{Lr} - s_{L1})^2}{s_{L0} - s_{L1}} \right]} && \text{für } s_{L1} < s_{Lr} \leq s_{L0} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Für Relativverschiebungen  $s_{Lr} > s_{L0}$  bleibt die Verbundenergie auf dem Niveau von  $G_F$  konstant. Für  $\epsilon_{Lr}$  gilt dann Gl. (4.57); ist gleichzeitig  $\epsilon_{L0} = 0$ , folgt die bekannte Beziehung zur Ermittlung der Verbundbruchdehnung am Einzelriss (Gl. 4.58).

$$\epsilon_{Lr} = \sqrt{\frac{2G_F}{E_L t_L} + \epsilon_{L0}^2} \quad (4.57)$$

$$\epsilon_{Lr} = \epsilon_{LR,max}^a = \sqrt{\frac{2G_F}{E_L t_L}} \quad (4.58)$$

Mit Kenntnis der auf Energiebetrachtungen basierenden Zusammenhänge ist z.B. die in (Niedermeier 2001) angegebene, aus der allgemeinen Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes für Klebarmierung abgeleitete Bestimmungsgleichung zur Ermittlung des aufnehmbaren Dehnungszuwachses eines Elementes zwischen zwei Rissen im Fall hoher Beanspruchungen, d.h. bei Verschiebungsruehpunkt am geringer beanspruchten Rissufer ( $s_L(x=0) = 0$ ), unmittelbar anzugeben. Mit bekanntem  $\epsilon_L(x=0) = \epsilon_{L0}$  gilt:

$$\Delta\epsilon_L = \sqrt{\frac{2G_F}{E_L t_L} + \epsilon_{L0}^2} - \epsilon_{L0} \quad (4.59)$$

Aus Gl. (4.59) ist ersichtlich, dass der aufnehmbare Dehnungszuwachs zwischen zwei Rissen neben dem über  $G_F$  definierten Verbundverhalten ebenfalls von der am geringer beanspruchten Rissufer vorliegenden Dehnung bestimmt wird und mit zunehmender Dehnung  $\epsilon_{L0}$  abnimmt.

## 4.5 Kompatibilitätsbedingungen

Zur Auswertung der Versuchsergebnisse einerseits und für die Abbildung des Zusammenwirkens gemischt bewehrter Bauteile in einem Rechenmodell andererseits ist die Formulierung von Kompatibilitätsbedingungen erforderlich. Im Folgenden werden für Grundelemente von Stahlbetonbauteilen Bedingungen auf Modellebene dargestellt und Überlegungen zur Übertragbarkeit auf reales Bauteilverhalten erläutert.

### Grundlagen

Die Kompatibilitätsbedingungen bauen in Analogie zur Modellbildung auf folgenden Annahmen und Idealisierungen auf:

- Durch die Annahme unendlicher Dehnsteifigkeit des Betons in zugbeanspruchten Bauteilen bzw. Zuggurten biegebeanspruchter Bauteile ist eine Entkopplung der Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes der unterschiedlichen Bewehrungsstränge möglich.
- Das Verbundverhalten der Bewehrungsstränge wird über globale, mittlere Verbundansätze beschrieben. Lokale Effekte und verbundhysteretisches Verhalten werden durch die Ansätze nicht wiedergegeben.
- Nach auftreten eines Risses, d.h. nach Überschreiten der Betonzugfestigkeit, können im rechnerisch gerissenen Bereich keine Betonzugspannungen mehr übertragen werden. Die in einer idealisierten Rissprozesszone auftretenden Mechanismen werden vernachlässigt.
- Sammelrissphänomene (vgl. Alvarez 1998) werden angesichts der i.d.R. geringen Differenzen der statischen Nutzhöhen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung vernachlässigt. Auftretende Risse kreuzen stets beide Bewehrungsstränge; Elementlängen zwischen zwei Rissen sind für beide Bewehrungsstränge identisch.

#### 4.5.1 Zentrische Zugbeanspruchung

Für einen gemischt bewehrten Zugstab unendlicher Länge gilt für  $E_c A_c \rightarrow \infty$  - d.h. starrer Betonscheiben zwischen den Rissen - die globale Kompatibilitätsbedingung nach (4.60) sowie auf Rissquerschnittsebene die Verträglichkeit der den Bewehrungssträngen zugeordneten Rissbreiten (Gl. 4.61).

$$\int_{x=0}^l \epsilon_L dx = \sum_i w_L \quad \int_{x=0}^l \epsilon_s dx = \sum_i w_s \quad (4.60)$$

$$w_L = w_s \quad (4.61)$$

Bei zentrischer Zugbeanspruchung muss in Konsequenz für ein Element zwischen zwei Rissen stets eine Symmetrieebene in Elementmitte existieren; daraus folgend gilt die Kompatibilitätsbedingung der Relativverschiebungen Gl. (4.62).

$$s_{Lr} = s_{sr} \quad (4.62)$$

Aus der Symmetrieforderung ist - sofern sich die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge berühren bzw. überschneiden (abgeschlossenes Erstrissbild, vgl. 4.6) - gleichzeitig die Existenz eines Verschiebungsruhepunktes in Elementmitte abzuleiten. Mit dem Verschiebungsruhepunkt als Koordinatenursprung gilt:

$$\int_{x=0}^{l_{eL}} \epsilon_L dx = s_{Lr} \quad \int_{x=0}^{l_{es}} \epsilon_s dx = s_{sr} \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{l_{eL}} \int_{x=0}^{l_{eL}} \epsilon_L dx = \epsilon_{Lm} \quad \frac{1}{l_{es}} \int_{x=0}^{l_{es}} \epsilon_s dx = \epsilon_{sm} \quad (4.64)$$

Befindet sich der Zugstab im Einzelrissstadium, d.h. die Einleitungslängen überschneiden sich nicht, liegen die - jetzt nicht mehr zusammenfallenden - Koordinatenursprünge jeweils am Ende der Einleitungslänge symmetrisch zur Elementmitte; (4.63) und (4.64)

gelten weiterhin. Aus den Bedingungen (4.63) und (4.64) folgt für die charakteristischen Rissbildungsstadien unmittelbar:

$$\text{Einzelriss} \quad l_{eL} \neq l_{es} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{Lm} \neq \epsilon_{sm} \quad (4.65)$$

$$\text{Abgeschlossenes Erstrissbild:} \quad l_{eL} = l_{es} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{Lm} = \epsilon_{sm} \quad (4.66)$$

Sofern der Zugstab ein abgeschlossenes Erstrissbild aufweist, kann Dehnungsebenheit im Mittel vorausgesetzt werden. Mit abnehmendem Rissabstand nähern sich die Rissdehnungen der Verteilung nach Dehnungsebenheit an; für den Grenzfall  $s_{cr} \rightarrow 0$  ebenso wie für den Grenzfall  $\tau_{Lm} = \tau_{sm} \rightarrow 0$  gilt die Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung für die Dehnungen der Bewehrungsstränge in den Rissquerschnitten streng.

#### 4.5.2 Reine Biegung

In Analogie zu den Kompatibilitätsbedingungen des zentrisch zugbeanspruchten Stabes gelten für die Bewehrungsstränge des Zuggurtes eines gemischt bewehrten Bauteils unter konstanter Momentenbeanspruchung globale Verträglichkeitsbedingungen nach (4.67).

$$\int_{x=0}^l \epsilon_L dx = \sum_i w_L \quad \int_{x=0}^l \epsilon_s dx = \sum_i w_s \quad (4.67)$$

Unter Voraussetzung unveränderlicher statischer Höhen der Bewehrungsstränge können die für den Zugstab angenommenen Symmetriebedingungen für jedes Element zwischen zwei Rissen übertragen werden. Damit folgen für die Relativverschiebungen  $s_{Lr}$  und  $s_{sr}$  an den Rissquerschnitten sowie für die mittleren Dehnungen  $\epsilon_{Lm}$  und  $\epsilon_{sm}$  der Bewehrungsstränge die für den Zugstab abgeleiteten Zusammenhänge (4.63) und (4.64). Lediglich die unmittelbare Kopplung der Rissrelativverschiebungen nach Gl. (4.62) ist ausschließlich bei identischen statischen Nutzhöhen der Bewehrungsstränge zutreffend. Bei Betrachtung eines Beanspruchungszustandes, in dem sich die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge überschneiden (abgeschlossenes Erstrissbild), ist die Hypothese nach *Bernoulli* im Mittel über das Bauteil erfüllt; in Konsequenz folgen die mittleren Dehnungen der Bewehrungsstränge einer ebenen Dehnungsverteilung mit Bezug auf eine mittlere Nulllinienlage  $x^*$  (Gl. 4.68).

$$\frac{\epsilon_{Lm}}{\epsilon_{sm}} = \frac{d_L - x^*}{d - x^*} \quad (4.68)$$

Bei Verwendung der Zusammenhänge nach den Gln. (4.63) und (4.64) folgt aus Gl. (4.68) unmittelbar die Verknüpfung der rechnerischen Rissbreiten bzw. Relativverschiebungen in den Rissquerschnitten nach den Gln. (4.69) und (4.70).

$$\frac{w_L}{w_s} = \frac{d_L - x^*}{d - x^*} \quad (4.69)$$

$$\frac{s_{Lr}}{s_{sr}} = \frac{d_L - x^*}{d - x^*} \quad (4.70)$$

Damit widerspricht Gl. (4.70) für  $x^* \neq x^{II}$  der Annahme ausgehend von der Nulllinie des gerissenen Querschnittes linear zunehmender rechnerischer Rissbreiten (vgl. z.B. Li 1995). Im Grenzfall  $s_{cr} \rightarrow 0$  geht  $x^*$  in  $x^{II}$  über, die Hypothese nach *Bernoulli* gilt streng. Unter dieser Voraussetzung ist eine linear zunehmende rechnerische Rissbreite zutreffend.

Sofern das Bauteil lediglich Einzelrisse aufweist, deren Einleitungslängen sich nicht überschneiden, kann ein Ebenbleiben der Querschnitte im Mittel nicht mehr vorausgesetzt werden.

#### 4.5.3 Biegung und Querkraft

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Auswirkungen der Schubverzerrungen auf Kompatibilitätskriterien bzw. resultierende Relativverschiebungen und rechnerische

Rissbreiten vernachlässigt. Für den querkraftbeanspruchten Bereich von Biegeträgern  $0 < x < l_V$  gelten bei Annahme einer Systemsymmetrieebene bei  $x = l_V$  grundsätzlich die globalen Verträglichkeitsbedingungen nach Gl. (4.71).

$$\int_{x=0}^{l_V} \epsilon_L dx = \sum_i w_L \quad \int_{x=0}^{l_V} \epsilon_s dx = \sum_i w_s \quad (4.71)$$

Darüber hinaus sind die lokal für einen Bewehrungsstang zwischen zwei Rissen abgeleiteten Bedingungen (4.63) und (4.64) ebenfalls übertragbar. Allerdings gelingt z.B. für das abgeschlossene Erstrissbild (alle Einleitungslängen überschneiden sich) eine allgemeine Verknüpfung der Einleitungslängen nicht, da in den Elementen zwischen Rissen keine für beide Bewehrungsstränge geltenden Symmetrieebenen mehr vorausgesetzt werden können. Das Verhältnis der Einleitungslängen  $l_{es}/l_{eL}$  ist aufgrund des nicht ähnlichen Verbundverhaltens beanspruchungsabhängig. In Konsequenz können auf die Rissrelativverschiebungen  $s_{sr}$  bzw.  $s_{Lr}$  bezogene Kompatibilitätsbedingungen nicht mehr angegeben werden.

Für eine rechnerische Untersuchung des querkraftbeanspruchten Bereichs folgt als Kompatibilitätskriterium aus Bedingung (4.71) lediglich die Verträglichkeit der rechnerischen Rissbreiten eines gerissenen Querschnittes bezüglich einer fiktiven Druckzonenhöhe  $\tilde{x}$  nach (4.72).

$$\frac{w_L}{w_s} = \frac{d_L - \tilde{x}}{d - \tilde{x}} \quad (4.72)$$

Sofern  $s_{cr} \rightarrow 0$  angenommen wird, gilt  $\tilde{x} \rightarrow x^{II}$ . Damit kann wieder eine linear zunehmende rechnerische Rissbreite ausgehend von der Nulllinie des Zustandes II vorausgesetzt werden. Unter diesen Bedingungen kann wegen  $l_{eL} \rightarrow l_{es} (\rightarrow 0)$  auch eine - allerdings wenig sinnvolle - Verknüpfung der Relativverschiebungen nach Gl. (4.70) angegeben werden.

#### 4.5.4 Übertragbarkeit der Kompatibilitätsbedingungen auf reales Bauteilverhalten

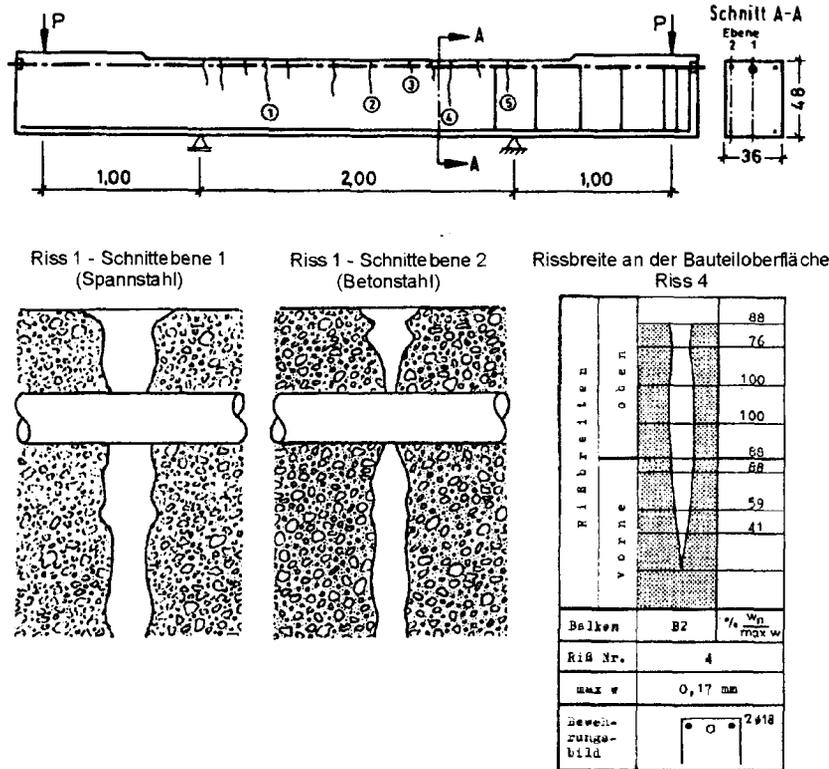
Die unter vereinfachenden Annahmen abgeleiteten Kompatibilitätsbedingungen erlauben eine rechnerische Behandlung des Zusammenwirkens von Bewehrungssträngen mit unterschiedlichen Verbundeigenschaften über eine Kopplung der Relativverschiebung in den Rissquerschnitten. Im Hinblick auf eine Übertragung auf reales Bauteilverhalten werden im Folgenden Versuchsergebnisse betrachtet.

##### *Zentrisch beanspruchter Zugstab*

Die Bedingungen (4.61) und (4.62) unterstellen eine konstante Rissöffnung in allen Bereichen eines Rissquerschnittes. Tatsächlich wird die lokale Rissöffnung durch die Bewehrung gesteuert; in der Umgebung von z.B. einbetonierten Bewehrungsstäben nimmt die Rissöffnung ab (vgl. 4.2). Die Größe der Rissöffnungsreduktion wird im Wesentlichen durch das Verbundverhalten des Bewehrungsstranges bestimmt und durch lokale Effekte (Betonausbruch etc.) beeinflusst. Damit kann bei gemischt bewehrten Bauteilen von einer komplexen Interaktion zwischen der über Verbund eingeleiteten Zugkraft, der lokalen Verformung des Rissufers bzw. der lokalen Relativverschiebung und der auf den Bewehrungsstrang entfallenden Zugkraft ausgegangen werden.

Eine näherungsweise Überprüfung von Kompatibilitätskriterien bei Zugstäben erfolgt z.B. durch die Betrachtung gemessener Rissbreiten. In Versuchen an Dehnkörpern mit Betonstahl- und Spannstahlbewehrung nach (Thormählen 1978; Trost u. a. 1980) sind zwischen den in jeweils fünf Messachsen auf zwei gegenüberliegenden Körperoberflächen aufgenommenen Öffnungen eines Risses z.T. deutliche Unterschiede festzustellen. Bei den in (Zilch u. a. 2004) dokumentierten Versuchen an klebarmierten Stahlbetondehnkörpern weisen die an den Schmalseiten (Messachsen ⑤ und ⑥) gemessenen Rissöffnungen in einigen Fällen deutlich größere Werte als die in unmittelbarer Nähe der Klebarmierung (Messachsen ① bis ④) ermittelten Rissöffnung auf. Die Messwerte erfassen

lediglich Differenzen der an der Körperoberfläche auftretenden Rissöffnungen; eine generelle Aussage über die unmittelbar an den Bewehrungssträngen auftretenden Rissöffnungen ist i.A. damit nicht möglich.



**Abbildung 4.22.** Versuche an teilweise vorgespannten Plattenstreifen nach (Derflinger u. a. 1981): Rissprofil in der Ebene des gerippten Betonstahls bzw. in der Ebene des glatten Spannstahls; Verlauf der an der Oberfläche des Plattenstreifens ermittelten Rissöffnung

*Reine Biegebeanspruchung*

Zur Überprüfung der Kompatibilitätsbedingungen bei rein biegebeanspruchten, gemischt bewehrten Bauteilen auf der Grundlage eines Vergleichs gemessener Rissöffnungen liegen derzeit nur wenige Ergebnisse vor. In (Derflinger u. a. 1981) werden Versuche an teilweise vorgespannten Plattenstreifen, die mit geripptem Betonstahl in Kombination mit glattem Spannstahl bewehrt waren, beschrieben. Einige der bei Gebrauchslast vorliegenden Risse im Bereich  $M = \text{const.}$  wurden mit EP-Harz konserviert; die Rissöffnung in verschiedenen Ebenen wurde an entnommenen Bohrkernen vermessen. In Abb. 4.22 ist das in der Ebene des Betonstahls (Ebene 1) bzw. des Spannstahls (Ebene 2) aufgenommene Rissprofil dargestellt. Die realen Rissöffnungen weichen augenscheinlich von der durch Bedingung (4.69) bei gleicher statischer Nutzhöhe unterstellten identischen Rissöffnung ab. Abbildung 4.22 zeigt darüber hinaus den an der Oberfläche des Plattenstreifens gemessenen Verlauf der Rissöffnung. Ausgehend von der Risswurzel nimmt die Öffnung bis zur Bauteilkante mehr oder minder linear zu.

*Fazit*

Die auf Basis mechanischer Überlegungen in 4.5.1 und 4.5.2 abgeleiteten Kompatibilitätskriterien stellen allenfalls eine summarische Näherung zur Beschreibung der Verträglichkeit in den Rissquerschnitten dar. Lokale Einflüsse aus der Verformung der Rissufer wie auch aus lokalen Verbunddefekten führen zu mehr oder minder starken Abweichungen

von den Kompatibilitätsbedingungen. Es ist allerdings grundsätzlich davon auszugehen, dass ein Teil der am Rissufer auftretenden Verformungen und ggf. Auswirkungen lokaler Defekte in den auf experimenteller Basis abgeleiteten Verbundmodellen der Bewehrungsstränge enthalten sind. Verträglichkeitsbedingungen für Bauteile mit Kombination aus Betonstahl und Spannstahl im Verbund, die die dargestellten Mechanismen berücksichtigen bzw. eine Kopplung der Bewehrungsstränge in Abhängigkeit der Randbedingungen (Anzahl und Anordnung der Bewehrungsstränge, unterschiedliche statische Nutzhöhen, etc.) erlauben, existieren derzeit nicht.

Für klebarmierte Bauteile erscheint eine Ableitung von Korrekturfaktoren zur näherungsweise Anrechnung lokaler Effekte in den relevanten Beanspruchungsbereichen sowie eine explizite Anrechnung unterschiedlicher Höhenlagen sinnvoll.

## 4.6 Rissbildung bei klebarmierten Stahlbetonbauteilen

Als Konsequenz des Verbundverhaltens der Klebarmierung und im Unterschied zur Betrachtung konventioneller Stahlbetonbauteile kommt dem Rissbild - insbesondere den Abständen der Risse untereinander sowie dem Abstand des auflagnächsten Biegerisses vom Ende des Klebarmierungsstranges - wesentliche Bedeutung hinsichtlich des möglichen Zugkraftaufbaus bzw. der Grenztragfähigkeit von Bauteilen zu. Zudem beeinflusst der Rissabstand sowohl in zentrisch zugbeanspruchten als auch in biegebeanspruchten Bauteilen die Aufteilung der Zugkraft auf die Bewehrungsstränge. Die Untersuchung des Zusammenwirkens einbetonierter und angeklebter Bewehrung setzt dem entsprechend eine Abgrenzung der auftretenden Rissabstände voraus.

Werden bestehende, in Teilbereichen bereits gerissene Bauteile verstärkt, wird die weitere Rissentwicklung bzw. das Endrissbild insbesondere durch das vor der Verstärkung vorliegende - durch die einbetonierte Bewehrung bestimmte - Rissbild gesteuert. Da allerdings keine zuverlässigen Daten über vor der Verstärkung gerissene Bauteile zur Verfügung stehen, werden im Folgenden Tragelemente - Zugstäbe und biegebeanspruchte Bauteile - betrachtet, für die in allen Rissstadien vom Zusammenwirken einbetonierter und angeklebter Bewehrung ausgegangen werden kann.

### 4.6.1 Grundlagen

#### Vorbemerkung

Die rechnerische Erfassung der Rissbildung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen zielt zum einen auf die Gewährleistung von Gebrauchstauglichkeit und Dauerhaftigkeit durch Beschränkung der auftretenden Rissbreiten, zum anderen auf die Beschreibung des Verformungsverhaltens unter Berücksichtigung der zugversteifenden Wirkung bewehrten Betons gegenüber der alleinigen Dehnsteifigkeit der Bewehrungsstränge.

Der Großteil der vorliegenden Modelle dient der Ermittlung auftretender Rissbreiten bei Last- oder Zwangeinwirkungen. Nach zugrunde liegender Betrachtungsweise wird u.a. in (Eligehausen und Kreller 1988) eine Einordnung in „klassische“ und „kontinuierliche“ Rissbildungsmodelle vorgenommen. Im Rahmen der klassischen, im wesentlichen auf empirischer Grundlage basierenden Betrachtungsweise wird ohne Berücksichtigung des Rissbildungsprozess ein unveränderlicher Risszustand - bei Lasteinwirkung das abgeschlossene Rissbild bzw. bei Zwang Einzelrisse - vorausgesetzt. Rissformeln nach „klassischer“ Betrachtung für Lastbeanspruchung wurden u.a. in (Rehm und Martin 1968; Martin u. a. 1979; Janovič 1986) vorgelegt; Ableitungen für Zwangbeanspruchung finden sich u.a. in (Falkner 1969; Schießl 1976; Leonhardt 1978) und (Noakowski 1978). Für gemischt bewehrte, teilweise vorgespannte Bauteile wurde die Rissformel nach (Rehm und Martin 1968) um die vereinfachte Anrechnung der mit dem Verhältniss der Verbundfestigkeiten  $\tau_{p,0.1}/\tau_{s,0.1}$  skalierten Spannstahlfläche erweitert (Trost u. a. 1980) (vgl. 2.1.1). Der empirischen, an Versuchsergebnissen kalibrierten Modellen eigenen, i.d.R. guten Abbildung der in Versuchen beobachteten Rissabstände und Rissbreiten

entsprechend, fand die klassische Betrachtung der Rissbildung insbesondere in der Formulierung nach (Martin u. a. 1979) Eingang in die mittlerweile abgelöste Normengeneration des Stahlbetonbaus (z.B. DIN 1045 1988) (vgl. Schießl 1989).

Im Unterschied zur „klassischen“ Betrachtungsweise verfolgen „kontinuierliche“ Modelle aufbauend auf Verbundbetrachtungen den Rissbildungsprozess vom Einzelrisszustand bis zum abgeschlossenen Rissbild. Neben dem von *Noakowski* u.a. in (Noakowski 1985) und (Noakowski 1988) veröffentlichten Rissbildungsmodell sind i.w.S. auch die Ableitungen von (Krips 1984) und (Schober 1984) zur „kontinuierlichen“ Betrachtungsweise zu zählen.

Die gegenwärtig normativ geregelten Verfahren zur Rissbreitenbeschränkung bei Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen (vgl. DIN 1045-1 2001) basieren auf einer verbundorientierten Betrachtungsweise; Rissabstände und -breiten werden anhand zweier Szenarien - Einzelrisszustand und abgeschlossenes Rissbild - ermittelt. Das Verbundverhalten der Bewehrungsstränge wird über Völligkeitsbeiwerte angerechnet; zusätzliche Spannbewehrung mit sofortigem bzw. nachträglichem Verbund wird - auf den zugehörigen Wirkungsbereich bezogen - über das Verhältnis der Rissdehnungen im Einzelrisszustand  $\xi$  bei Annahme konstanter mittlerer Verbundspannungen berücksichtigt (vgl. König und Tue 1996; Curbach u. a. 2003).

Den Modellen zur Berechnung von Rissabständen und Rissbreiten ist angesichts der notwendigen Ermittlung ungünstigster Werte die alleinige Betrachtung des höchstbeanspruchten Querschnittes gemein. Zudem basieren alle aktuellen Modelle mit Ausnahme der Arbeiten von *Noakowski* auf der konsequenten Anwendung der Zugstabanalogie, d.h. der Betrachtung eines zentrisch gezogenen, bewehrten Betonprismas, dem die wirksame Zugfläche  $A_{c,eff}$  als Querschnittsfläche zugeordnet ist (s.u.).

### Rissbildungsstadien

In Anlehnung an (König und Fehling 1988; Holzenkämpfer 1994) können anhand einer verbundorientierten Betrachtung der Rissbildung an einem zentrisch zugbeanspruchten verstärkten Stahlbetonstab grundlegende Rissbildungsstadien abgeleitet werden<sup>6</sup>. Vorausgesetzt wird die Bildung eines Risses bei Erreichen der entlang des Stabes nicht streuenden Risschnittgröße  $F_{cr}$ .

- Initialriss ( $F < F_{cr}$ ) (Abb.4.23 a)  
Solange die Risschnittgröße nicht erreicht wird, liegen ausschließlich vereinzelte, ggf. eingeprägte Initialrisse vor; die Einleitungslängen der in den Initialrissen anliegenden Bewehrungszugkräfte beeinflussen sich gegenseitig nicht.
- Erst- bzw. Einzelriss ( $F = F_{cr}$ ) (Abb. 4.23 b)  
Die Einleitungslängen der Einzelrisse überschneiden sich nicht; für den Rissabstand ist die Einleitungslänge  $l_{ee}$  des verbundweichereren Bewehrungsstranges maßgebend. Im Allgemeinen gilt für den Einzelrissabstand:

$$1 \cdot l_{ee} \leq s_{crm} \leq 2 \cdot l_{ee}$$

- Abgeschlossenes Erstrissbild ( $F = F_a \geq F_{cr}$ ) (Abb. 4.23 c)  
Bei zunehmender Beanspruchung überschneiden sich die Einleitungslängen des verbundweichereren Bewehrungsstranges; das abgeschlossene Erstrissbild bzw. das sog. Primärrissbild ist erreicht, wenn sich die Einleitungslängen  $l_{ea}$  des verbundsteiferen Stranges berühren. Der Rissabstand gehorcht i.A. folgender Bedingung:

$$1 \cdot l_{ea} \leq s_{crm} \leq 2 \cdot l_{ea}$$

- Sukzessive Risstheilung ( $F > F_a$ )  
Steigt die Beanspruchung über die dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordnete Belastung hinaus an, liegen an keiner Stelle der Verbundstrecke mehr identische Dehnungen von Beton und Bewehrung vor. Sofern die Bewehrungsstränge in der Lage

<sup>6</sup> Die dem Einzelrisszustand zugeordneten Größen werden mit „e“, die zum abgeschlossenen Erstrissbild zugehörigen Größen mit „a“ indiziert.

sind, über die vorgegebene Einleitungslänge ansteigende Verbundkräfte an den Betonquerschnitt zu übertragen, ist eine weitere, sukzessive Risssteilung bzw. sog. Sekundärrissbildung möglich.

Werden der Betrachtung wie in (König und Fehling 1988) und (Holzenkämpfer 1994) beanspruchungsunabhängige, starr-plastische Verbundmodelle zugrunde gelegt, ist mit dem abgeschlossenen Erstrissbild bzw. Primärrissbild auch das abgeschlossene Rissbild erreicht; eine weitere Risssteilung findet nicht statt. Im Unterschied dazu erlaubt insbesondere das reale Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung mit steigender Beanspruchung die Einleitung größerer Verbundkräfte; eine sukzessive Sekundärrissbildung ist möglich.

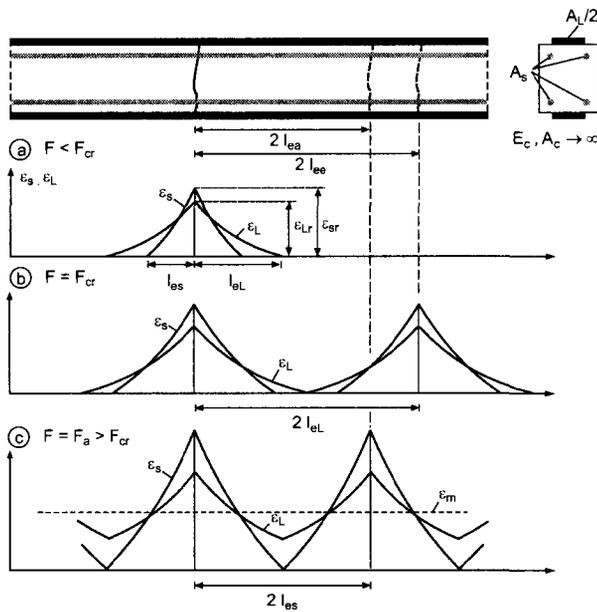
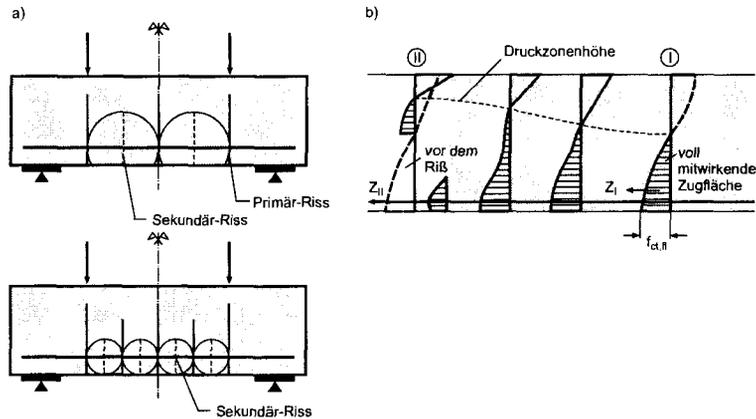


Abbildung 4.23. Rissbildungsstadien eines verstärkten Stahlbeton-Zugstabes (schematisch)

Für das Auftreten von Primärrissen ist bei zentrisch zugbeanspruchten Betonprismen aufbauend auf der Vorstellung gleichmäßig verteilter Zugspannungen in einem homogenen Baustoff die gesamte Betonquerschnittsfläche näherungsweise als mitwirkend zu betrachten. Für die in der Folge zusätzlich entstehenden Sekundärrisse ist diese Annahme nicht mehr aufrecht zu erhalten; die Einleitung der Zugkraft erfolgt räumlich konzentriert über die Bewehrung und führt zu einer Spannungsverteilung mit Spannungsspitzen im Bereich der Bewehrungsstränge. Die der Rissentstehung zugrunde liegende wirksame Betonzugfläche ist gegenüber der vollen Querschnittsfläche auf  $A_{c,eff}$  vermindert. Bei Betrachtung biegebeanspruchter Bauteile wird der lokalen Zugkräfteinleitung eine aus der Einleitung von Druckspannungen in der Druckzone resultierende Biegebeanspruchung überlagert; die Entstehung eines Sekundärrisses zwischen zwei vorhandenen Rissen stellt sich dem entsprechend als komplexes Scheibenproblem dar. In Abb. 4.24 a) ist die aus Versuchsbeobachtungen in (Broms 1965) entwickelte Modellvorstellung der Primär- und Sekundärrissbildung bei Biegebeanspruchung schematisch dargestellt; kennzeichnend ist die über die gesamte Zugzone reichende Ausdehnung der Primärrisse im Unterschied zu den nur mehr über die wirksame Zugzone  $A_{c,eff}$  ausgedehnten Sekundärrisse. In (Broms 1965) wird der Sekundärrissbildung in Anlehnung an *de St'Venant* eine unter  $45^\circ$  erfolgende Einleitung der Zugspannungen vorausgesetzt. In Abb. 4.24 b) ist die entsprechende qualitative Darstellung des Scheibenproblems nach (Rehm 1961) wiedergegeben. Grundlegende Ansätze zur Abschätzung der wirksamen Betonzugfläche sind u.a. auch in (Beeby 1973; Leonhardt 1978) enthalten. Generell wird  $A_{c,eff}$  neben der Bauteilgeometrie von Rissabstand und Beanspruchungshöhe beeinflusst; angesichts der komplexen Zusammenhänge ist eine eindeutige Festlegung nahezu unmöglich. Dem entsprechend unterscheiden sich die einzelnen Ansätze z.T. deutlich und besitzen nur in Kombination mit dem zugrunde liegenden Rissmodell Gültigkeit (vgl. Eligehausen und Kreller 1988).

Die in den aktuellen Normenwerken verankerte Bestimmungsgleichung für  $A_{c,eff}$  geht auf umfangreiche Scheibenberechnungen mit Hilfe der FEM nach (Fischer 1993) zurück; in der ursprünglichen Formulierung wurde die wirksame Zugfläche mit dem vorhandenen Rissabstand verknüpft.

Es bleibt abschließend festzustellen, dass für klebarmierte Bauteile eine Abschätzung der effektiven Betonzugfläche nicht vorliegt. Das im Folgenden abgeleitete Rissbildungsmodell nimmt daher unter Verwendung der gesamten zugbeanspruchten Fläche des ungerissenen Querschnittes Bezug auf das Primärrissbild bzw. das abgeschlossene Erstrissbild.



**Abbildung 4.24.** Primär- und Sekundärrissbildung bei biegebeanspruchten Bauteilen  
a) Modellvorstellung nach (Broms 1965); b) Einleitung der Zugkraft am Primärriss - Scheibenspannungszustände nach (Rehm 1961)

### Vorliegende Modelle

Derzeit liegen mit den Arbeiten von *Neubauer* und *Niedermeier* zwei Modelle vor, mit denen der Rissabstand bei klebarmierten biegebeanspruchten Bauteilen abgeschätzt werden kann. Beide Konzepte sehen allerdings eine gemeinsame Einleitungslänge beider Bewehrungsstränge vor; die Rissbildungsstadien nach Abb. 4.23 werden entsprechend auf das Erstrissbild reduziert. Darüber hinaus basiert das von *Niedermeier* vorgeschlagene Modell auf einer Kopplung der Bewehrungsstränge über die nach der *Bernoulli*-Hypothese bestimmten Rissdehnungen bei Vernachlässigung von Kompatibilitätsbedingungen. Im Rahmen des in (Neubauer 2000) vorgestellten Rissmodelles werden die Bewehrungsstränge in einem weiteren Abstraktionsschritt auf eine äquivalente Betonstahlbewehrung reduziert; das Verbundverhalten der Klebarmierung wird unter der Annahme vollständig elastischen Verhaltens beanspruchungsunabhängig mit der Verbundwirkung der Betonstahlbewehrung gekoppelt. Im Vergleich mit den in Dehnkörperversuchen ermittelten Primärrissabständen (vgl. 4.6.3) ergeben sich für die Modelle sog. Risseinflussfaktoren  $s_{crm,exp}/l_{e,cal}$  von 1,41 für die rechnerische Eintragungslänge nach (Niedermeier 2001) und 1,57 für das Modell nach (Neubauer 2000).

Im Rahmen von Zugkraftdeckungsmaßnahmen sind die vorliegenden Modelle als pragmatische Näherungen i.A. hinreichend, allerdings wird für die Untersuchung des Zusammenwirkens der Bewehrungsstränge insbesondere in Zusammenhang mit der Versuchsauswertung bei Dehnkörpern eine verfeinerte Modellierung erforderlich, die eine Verfolgung der Rissbildungsstadien mit ansteigender Zugkraft bei einer Kopplung der Bewehrungsstränge über Verträglichkeitsbedingungen erlaubt.

#### 4.6.2 Annahmen und Idealisierungen

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Rissmodell wird zunächst aufbauend auf dem Zugstabmodell für ein zentrisch zugbeanspruchtes verstärktes Stahlbetonprisma abgeleitet; die Ergebnisse eigener und in der Literatur dokumentierter Dehnkörperversuche

werden zur Verifikation herangezogen. Auf Grundlage von Kompatibilitätsbedingungen erfolgt die Übertragung auf Bereiche konstanter Momente biegebeanspruchter Bauteile.

Die Modellierung der Rissbildung klebarmierter Stahlbetonbauteile baut auf folgenden Annahmen und Idealisierungen auf:

- Die auftretenden Rissabstände werden auf Grundlage der Einleitungslängen des abgeschlossenen Erstrissbildes (Primärrissbild) abgeleitet. Gleichzeitig wird damit auf die Ermittlung effektiver Betonzugflächen zugunsten einer Ganzstabbetrachtung verzichtet.
- Streuungen der Zugfestigkeit entlang des Bauteils werden lediglich für die Ermittlung des auflagernächsten Risses biegebeanspruchter Bauteile berücksichtigt. Für zentrisch beanspruchte Zugstäbe sowie die Bereiche von Biegeträgern zwischen den auflagernächsten Rissen wird ein deterministisches Risskonzept verfolgt: Rissbildung tritt bei Erreichen der Betonzugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  ( $= f_{ctm}$  bzw.  $f_{ct,fl}$ ) in der maßgebenden Querschnittsfaser ein.
- Zur Beschreibung des Verbundverhaltens der Bewehrungsstränge werden die globalen Verbundmodelle nach 4.2 und 4.3 herangezogen. Einbetonierte Bewehrung wird lediglich mit dem ansteigenden Ast der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung berücksichtigt. Die Zulässigkeit dieser Annahme für den Zustand der abgeschlossenen Erstrissbildung wird durch Versuchsnachrechnungen an Dehnkörpern und biegebeanspruchten Bauteilen verifiziert. Allerdings sind Szenarien denkbar, die bei äußerst geringer Betondeckung und niedrigem Bewehrungsgrad eine vorzeitige Längsrissbildung bei geringen Relativverschiebungen erwarten lassen. In diesen Fällen sind die vorgestellten Ableitungen zu modifizieren.
- Die Kopplung der Bewehrungsstränge erfolgt für Zugstäbe unter Annahme der Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (4.62) mit  $s_r = s_{Lr} = s_{sr}$ . Korrekturfaktoren zur Berücksichtigung lokaler Effekte (vgl. 5.2.2) werden nicht berücksichtigt. Für biegebeanspruchte Bauteile wird die Kopplungsbedingung um die Berücksichtigung der Bauteilkrümmung nach Gl. (4.70) erweitert.
- Wird die Streckgrenzdehnung eines Bewehrungsstranges überschritten, ist, dem gewählten Materialmodell folgend, ein weiterer Anstieg der übertragenen Verbundkräfte nicht mehr möglich. Allerdings wird im Rahmen der abgeleiteten Beziehungen auf die explizite Berücksichtigung der dadurch begrenzten Eintragung von Zugkräften verzichtet.

#### Abbildung der Klebarmierung

Für Klebarmierung kann auf der Grundlage des bilinearen Verbundansatzes keine endliche Einleitungslänge angegeben werden. In Anlehnung an das in (Niedermeier 2001) vorgestellte Risskonzept wird zur Abschätzung der Einleitungslängen anstelle des bilinearen Verbundmodells eine auf Energieüberlegungen beruhende Näherung mittels beanspruchungsabhängig konstanter, abschnittsweise definierter Verbundspannungen gewählt, die den Zusammenhang zwischen Rissdehnung  $\epsilon_{Lr}$  und Rissrelativverschiebung  $s_{Lr}$  bei Existenz eines Verschiebungsruhepunktes exakt abbildet. Aus Bedingung (4.73) folgt mit Gl. (4.54) die mittlere Verbundspannung  $\tau_{Lm}$  (Gl. 4.74). Damit kann die Einleitungslänge der Klebarmierung nach Gl. (4.75) angegeben werden.

$$G_{b,L} = \tau_{Lm} s_{Lr} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \tau_{Lm} &= \frac{\tau_{L1}}{2s_{L1}} s_{Lr} && \text{für } 0 \leq s_{Lr} \leq s_{L1} \\ &= \frac{\tau_{L1}(s_{Lr}^2 - 2s_{Lr}s_{L0} + s_{L1}s_{L0})}{2s_{Lr}(s_{L1} - s_{L0})} && \text{für } s_{L1} < s_{Lr} \leq s_{L0} \end{aligned} \quad (4.74)$$

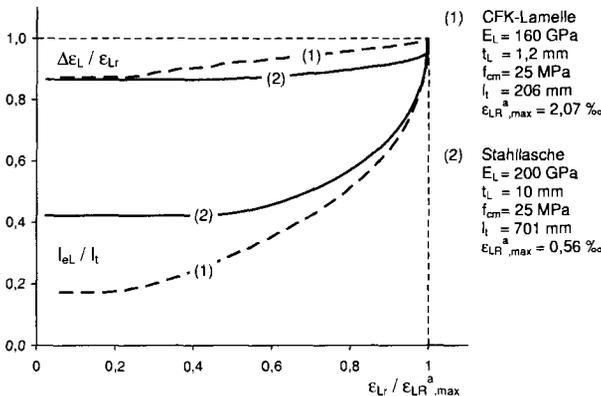
$$\begin{aligned} l_{eL} &= \frac{\epsilon_{Lr} E_L t_L}{\tau_{Lm}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{E_L t_L s_{L1}}{\tau_{L1}}} && \text{für } 0 \leq s_{Lr} \leq s_{L1} \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{\frac{E_L t_L (s_{L1} - s_{L0}) s_{Lr}^2}{\tau_{L1} (s_{Lr}^2 - 2s_{Lr} s_{L0} + s_{L1} s_{L0})}} \quad \text{für } s_{L1} < s_{Lr} \leq s_{L0} \quad (4.75)$$

Bei elastischem Klebeverbund ist die Einleitungslänge konstant. Für den Grenzfall der Verbundbruchverschiebung geht die Einleitungslänge in die nach (Holzenkämpfer 1994) für den Endverankerungsbereich angegebene erforderliche Verbundlänge über (Gl. 4.76).

$$l_{eL}(s_{Lr} \rightarrow s_{L0}) = l_t = 2\sqrt{\frac{E_L t_L s_{L0}}{\tau_{L1}}} \quad (4.76)$$

Die ideale Einleitungslänge nach Gl. (4.76) ist unabhängig vom zugrunde gelegten Verbundansatz. Die Formulierung endlicher Einleitungslängen des Klebarmierungsstranges hat zur Folge, dass am Ende der Einleitungslänge die Rissdehnung nicht der Betondehnung angeglichen bzw. vor dem Hintergrund der in dieser Arbeit getroffenen Annahmen nicht vollständig abgebaut ist (vgl. u.a. die Ausführungen zur „Restspannungsproblematik“ in Niedermeier 2001). Generell ist die nach (4.75) ermittelte Einleitungslänge umso wirklichkeitsnäher, je geringer der Anteil der elastischen Verbundenergie an der für den Aufbau von  $\epsilon_{Lr}$  aufgewendeten Energie ist. Den Verbundmodellen nach 4.3 entsprechend ist daher die Qualität der Näherung bei CFK-Lamellen gegenüber Stahlflaschen erheblich verbessert. In Abb. 4.25 ist für zwei verschiedene Bewehrungselemente zum einen die rechnerische Einleitungslänge  $l_{eL}$  bezogen auf  $l_t$  nach Gl. (4.76), zum anderen die auf Grundlage des bilinearen Verbundansatzes errechnete abgebaute Dehnung am Ende der Einleitungslänge  $l_{eL}$ , bezogen auf den Ausgangswert  $\epsilon_{Lr}$  am Riss dargestellt. Die abgebaute Dehnung beträgt - weitgehend unabhängig von den zugrunde gelegten mechanischen Betonkennwerten - für Stahlflaschen zwischen 85% und 95% und für CFK-Lamellen 86% bis 99,5%. Angesichts der signifikanten Streuungen der elastischen Verbundenergie erscheint der Ansatz ausreichend realitätsnah.



**Abbildung 4.25.** Bezogene Einleitungslängen bei Annahme beanspruchungsabhängiger, konstanter Verbundspannungen für Klebarmierung; am Ende der Einleitungslänge abgebaute Dehnung

*Abbildung der einbetonierten Bewehrung*

Für den Einzelrisszustand kann ein analytischer Ausdruck zur Bestimmung der mittleren Verbundspannung in Abhängigkeit der Rissrelativverschiebung über die Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes abgeleitet werden (Gl. 4.77). Auf gleichem Weg gelingt eine analytische Lösung für die zugehörige Einleitungslänge  $l_{es}$  nach Gl. (4.78) in Abhängigkeit der Rissdehnung  $\epsilon_{sr}$  (vgl. Noakowski 1978). Die Verknüpfung der Dehnung  $\epsilon_{sr}$  mit der Rissrelativverschiebung erfolgt über Energiebetrachtungen nach Gl. (4.55).

$$\tau_{sm} = \frac{A\sqrt{f_{cm}}}{N+1} s^N \cdot (1-N) \quad (4.77)$$

$$l_{es} = \frac{2}{1-N} \left[ \frac{\epsilon_{sr}^{(1-N)} (1+N) E_s d_s}{8A\sqrt{f_{cm}}} \right]^{\frac{1}{1-N}} \quad (4.78)$$

### 4.6.3 Rissbildung bei zentrisch zugbeanspruchten Bauteilen

#### Systematik

Die Bestimmung mittlerer Rissabstände zugbeanspruchter verstärkter Betonprismen basiert auf der rechnerischen Ermittlung der Eintragungslänge der Risschnittgröße  $F_{cr}$  anhand der vorgestellten Risstadien. Dazu ist - im Unterschied zu den Modellen nach (Neubauer 2000) und (Niedermeier 2001) - ein Verzicht auf die Annahme gemeinsamer Einleitungslängen erforderlich. Da eine ebene Dehnungsverteilung nicht vorausgesetzt werden kann, ist zudem eine Verknüpfung der Bewehrungsstränge nur auf der Grundlage der Kompatibilitätsbedingung  $s_{sr} = s_{Lr}$  möglich; zentrale Eingangsgröße ist dem entsprechend die gemeinsame Rissrelativverschiebung  $s_r$ . Damit wird prinzipiell ein iteratives Vorgehen zur Ermittlung der Rissabstände durch Variation von  $s_r$  erforderlich. Ein Einzelriss entsteht bei Erreichen der Risschnittgröße  $F_{cr}$  des ideellen Querschnitts nach Gl. (4.79), während das abgeschlossene Erstrissbild an die Übertragung der Risschnittgröße des reinen Betonquerschnittes nach Gl. (4.80) über Verbund gekoppelt ist.

$$F_{cr} = A_c \cdot f_{ct,eff} \cdot (1 + (n_s - 1)\rho_s + n_L\rho_L) \quad (4.79)$$

$$F_{cr,a} = A_c \cdot f_{ct,eff} \cdot (1 - \rho_s) \quad (4.80)$$

#### Einzelriss

Für den Abstand der auftretenden Risse bei Erst- bzw. Einzelrissbildung ist die Einleitungslänge des verbundweichereren Bewehrungsstranges maßgebend; für beide Bewehrungsstränge können wegen  $\epsilon_{L0} = \epsilon_{s0} = 0$  Zusammenhänge auf Grundlage der Einzelrisstheorie verwendet werden. Da die Bewehrungsstränge über die Verschiebungskompatibilität im Rissquerschnitt gekoppelt werden, kann die für das Erreichen der Risschnittgröße erforderliche Rissrelativverschiebung  $s_r$  über Gl. (4.81) mit den Verbundenergien  $G_{b,s}$  nach Gl. (4.51) und  $G_{b,L}$  nach (4.54) iterativ bestimmt werden.

$$\sqrt{\frac{8G_{b,s}(s_{sr})}{d_s}} \cdot \rho_s + \sqrt{\frac{2G_{b,L}(s_{Lr})}{t_L}} \cdot \rho_L = f_{ct,eff}(1 + (n_s - 1)\rho_s + n_L\rho_L) \quad (4.81)$$

$$l_{ee} = \max \begin{cases} l_{es} \\ l_{eL} \end{cases} \quad (4.82)$$

Mit bekannter Relativverschiebung  $s_r = s_{Lr} = s_{sr}$  wird die Einleitungslänge einbetonierten Betonstahls in Abhängigkeit der Rissdehnung  $\epsilon_{sr}(s_{sr})$  nach Gl. (4.52) mit Gl. (4.78) bestimmt. Die Einleitungslänge des Klebarmierungsstranges errechnet sich nach Gl. (4.75).

#### Abgeschlossenes Erstrissbild

Nach Abb. 4.23 ist das abgeschlossene Erstrissbild erreicht, wenn sich die Einleitungslängen des verbundsteiferen Bewehrungsstranges berühren; die an den Betonquerschnitt übertragene Verbundkraft entspricht der Risschnittgröße  $F_{cr}$ . Damit ist die zentrale Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der zugehörigen Einleitungslängen durch Gl. (4.83) anzuschreiben.

$$\Delta\epsilon_s E_s \rho_s + \Delta\epsilon_L E_L \rho_L = f_{ct,eff}(1 - \rho_s) \quad (4.83)$$

Der für die Einleitungslänge maßgebende Bewehrungsstrang ist über das dem Einzelrisszustand zugeordnete Verhältnis  $l_{es}/l_{eL}$  mit den Gln. (4.75) und (4.78) zu bestimmen. Die zugeordnete Zugkraft  $F_a$  errechnet sich für die beiden möglichen Fälle wie folgt:

Fall 1:  $l_{es}/l_{eL} < 1$ :

$$F_a = f_{ct,eff}(A_c + (n_s - 1)A_s) + \epsilon_{L0} E_L A_L \quad (4.84)$$

Fall 2:  $l_{es}/l_{eL} > 1$ :

$$F_a = f_{ct,eff}(A_c + n_L A_L) + \epsilon_{s0} E_s A_s \quad (4.85)$$

Mit den vorgestellten Beziehungen ist eine Ermittlung der dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordneten Einleitungslängen und Kräfte nur über ein numerisches Modell möglich. Die Schwierigkeit besteht in der zutreffenden Bestimmung der am Ende der Einleitungslängen vorliegenden Dehnungen  $\epsilon_{L0}$  oder  $\epsilon_{s0}$  bzw. der über Verbundwirkung entlang der Einleitungslängen übertragenen Zugkraftanteile. Im Rahmen der Abbildung bzw. Nachrechnung zugbeanspruchter Dehnkörper in Kapitel 5 werden entsprechende numerische Verfahren verwendet. Im Folgenden werden Beziehungen angegeben, die eine näherungsweise Ermittlung der Einleitungslängen ermöglichen. Wegen der Kopplung über die Rissrelativverschiebungen ist allerdings weiterhin ein iteratives Vorgehen erforderlich; eine geschlossene analytische Lösung ist nicht möglich.

### Näherungsbeziehungen für das abgeschlossene Erstrissbild

#### Klebearmierung

Die Definition von  $\tau_{Lm}$  nach Gl. (4.74) in Abhängigkeit der Rissrelativverschiebung trifft bei Existenz eines Verschiebungsruhepunktes unabhängig vom Rissbildungsstadium zu und beschreibt damit ebenfalls die mittlere Verbundspannung bei überschneidenden Einleitungslängen der Klebearmierung. Wird  $\tau_{Lm}$  in starker Vereinfachung in Bezug zur Einleitungslänge  $l_{ea}$  - nach Abb. 4.23 entweder  $l_{eL}$  oder  $l_{es}$  - gesetzt, kann damit als Näherungslösung  $\Delta\epsilon_L$  mit Gl. (4.86) angegeben werden.

$$\Delta\epsilon_L = \frac{l_{ea}\tau_{Lm}}{E_L t_L} \quad (4.86)$$

Sofern ein abgeschlossenes Erstrissbild mit  $\epsilon_{L0} \neq 0$  vorliegt, kann  $\Delta\epsilon_L$  über die Annahme eines angenäherten Völligkeitsbeiwertes  $\beta_L = 0,5$  der Dehnungsverteilung entlang der Einleitungslänge bei bekanntem  $\epsilon_{Lm}$  zur groben Abschätzung der Größen  $\epsilon_{Lr}$  und  $\epsilon_{L0}$  genutzt werden (vgl. Holzenkämpfer 1994).

$$\epsilon_{Lr} = \frac{\epsilon_{Lm}}{\beta_L} \quad \epsilon_{L0} = \frac{\epsilon_{Lm}}{\beta_L} - \Delta\epsilon_L \quad (4.87)$$

Es sei angemerkt, dass für die Bestimmung des Rissabstandes lediglich  $\Delta\epsilon_L$  relevant wird; die absoluten Größen  $\epsilon_{Lr}$  bzw.  $\epsilon_{L0}$  dienen zur Abschätzung des zugehörigen Lastniveaus.

#### Betonstahl

Für die Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon_s$  gilt bei allgemeinem Bezug auf  $l_{ea}$  Gl. (4.88).

$$\Delta\epsilon_s = \frac{4l_{ea}\tau_{sm}}{E_s d_s} \quad (4.88)$$

Für  $l_{ea} = l_{es}$ , d.h.  $\epsilon_{s0} = 0$  gibt Gl. (4.88) in Kombination mit  $\tau_{sm}$  nach Gl. (4.77) die Rissdehnung in Abhängigkeit der Relativverschiebung  $s_{sr}$  exakt wieder. Für diesen Fall kann der Völligkeitsbeiwert  $\beta_s$  zur Beschreibung der Dehnungsverteilung entlang der Einleitungslänge dem gewählten Verbundansatz entsprechend durch Gl. (4.89) angegeben werden.

$$\beta_s = \frac{\epsilon_{sm}}{\epsilon_{sr}} = \frac{1 - N}{2} \quad (4.89)$$

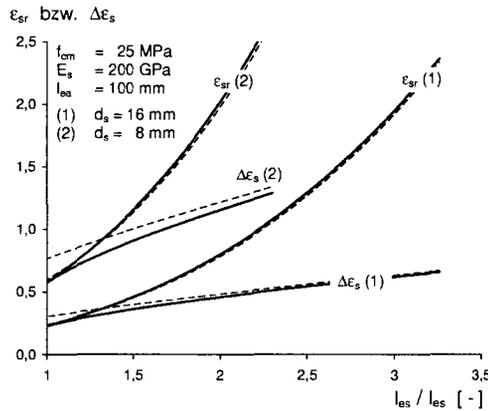
Sofern sich die Einleitungslängen der einbetonierten Bewehrung überschneiden, d.h. zur Übertragung von Verbundkräften nur  $l_e$  zur Verfügung steht, ist die Angabe eines analytisch exakten Ausdrucks nicht mehr ohne einschränkende Randbedingungen möglich (vgl. Krips 1984). Eine Näherungslösung des Zusammenhanges zwischen  $\epsilon_{sr}$  und  $s_{sr}$  mit zufrieden stellender Vorhersagequalität ist durch die Modifikation des Ausdrucks für die mittleren Verbundspannungen  $\tau_{sm}$  zu erreichen. Mit Gl. (4.90) folgt für  $\epsilon_{sr}$  Gl. (4.91).

$$\tau_{sm} = \frac{A\sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{sr}^N \quad (4.90)$$

$$\epsilon_{sr} = \frac{s_{sr}}{l_{ea}} + \frac{2l_{ea}}{E_s d_s} \cdot \frac{A\sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{sr}^N \quad (4.91)$$

$$\Delta\epsilon_s = \frac{4l_{ea}}{E_s d_s} \cdot \frac{A\sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{sr}^N \quad (4.92)$$

Die Qualität der Näherungslösung nach Gl. (4.91) ist an das Verhältnis  $l_{es}/l_{ea}$  gekoppelt; mit ansteigendem Verhältniswert strebt der Fehler asymptotisch gegen 0 (vgl. Abb. 4.26). Generell ist die Vorhersagequalität für  $\epsilon_{sr}$  gegenüber  $\Delta\epsilon_s$  deutlich besser. Maximale Abweichungen ergeben sich für  $\Delta\epsilon_s$  bei Annäherung von  $\epsilon_{s0}$  an 0, d.h.  $l_{es} \rightarrow l_{ea}$ .



**Abbildung 4.26.** Näherungslösung für die Betonstahldehnung im Riss für den Fall überschneidender Einleitungslängen im Vergleich mit der numerischen Lösung (Näherung mit dünnen, unterbrochenen Linien dargestellt)

### Vergleich mit Versuchsergebnissen

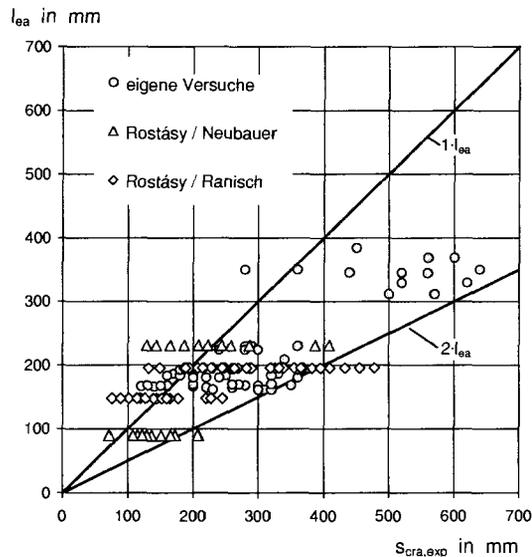
Das für zentrisch zugbeanspruchte verstärkte Stahlbetonprismen abgeleitete Rissmodell soll anhand von Ergebnissen aus Dehnkörperversuchen überprüft werden. Zur Übertragung des Modells auf Versuche werden folgende Annahmen und Voraussetzungen getroffen:

- Die effektive Zugfestigkeit  $f_{ct,eff}$  wird der Oberflächenzugfestigkeit gleichgesetzt. Die mit  $f_{ct,eff}$  bestimmte Risschnittgröße  $F_{cr}$  liegt im Mittel 6% über der in den Dehnkörperversuchen beobachteten Erstrisslast. Da i.A. mit dem ersten zusätzlichen Riss in einem Querschnitt mit verminderter Zugfestigkeit zu rechnen ist, erscheint die getroffene Festlegung sinnvoll; sie korrespondiert zudem mit den Angaben in (Niedermeier 2001) zur Korrelation von zentrischer Zugfestigkeit und Oberflächenzugfestigkeit (vgl. 4.1.2).
- Da bei den eigenen Dehnkörperversuchen Betonstahlstränge mit unterschiedlichen zugeordneten Verbundbedingungen in einem Versuchskörper kombiniert werden, wird der resultierende, auf einen fiktiven zentrischen Betonstahlstrang bezogene Verbundansatz über einen Beiwert  $k_{VB}$ , dessen Ableitung auf der Grundlage einer kinematischen Kopplung in 5.2.4 ausführlich erläutert wird, auf den Verbundansatz des Verbundbereichs I (gute Verbundbedingungen) bezogen. Für die in der Literatur angegebenen Dehnkörperversuche ist dieses Vorgehen aufgrund der um 90° gedrehten Ausrichtung bei der Betonage nicht erforderlich.
- Als Primärrissbild wird bei den eigenen Versuchen das bei der Zugkraft  $F_a$  vorliegende Rissbild angesehen<sup>7</sup>. Wie in 4.6.1 erläutert, ist nach Ausbildung des Primärrissbildes eine weitere Risssteilung möglich. Die in der Literatur angegebenen Rissbilder spiegeln

<sup>7</sup> Die Rissbilder der eigenen Versuche, in (Zilch u. a. 2002) zusammengestellt, wurden für die Laststufe, bei der rechnerisch das abgeschlossene Erstrissbild erreicht wird, ausgewertet. Gegenüber den  $F_a$  zugehörigen Rissabständen konnten in einigen Versuchen insbesondere mit Stahllaschen deutlich geringere Endrissabstände erzielt werden.

i.d.R. den Zustand nach Versuchsende wieder; im Fall der in (Rostásy u. a. 1981) angegebenen Versuche wurden die für den Zustand nach Abschluss der Schwellversuche angegebenen Rissbilder neu ausgewertet<sup>8</sup>.

In Abb. 4.27 werden die in den Dehnkörperversuchen nach (Rostásy u. a. 1981) und (Rostásy und Neubauer 1999) bzw. (Neubauer 2000) sowie in den eigenen Dehnkörperversuchen (Versuchsreihen V1, V2S und V3S) beobachteten Rissabstände der rechnerischen Einleitungslänge der Risschnittgröße nach dem vorgestellten Näherungsmodell gegenübergestellt.



**Abbildung 4.27.** Vergleich der in Versuchen an zentrisch zugbeanspruchten verstärkten Betonprismen beobachteten Einzelwerte der Rissabstände mit der rechnerischen Einleitungslänge der Risschnittgröße des abgeschlossenen Erstrissbildes

Offensichtlich ist das Modell in der Lage, den maximalen Rissabstand mit  $2l_{ea}$  zutreffend abzugrenzen. Angesichts der dem abgeschlossenen Erstrissbild folgenden, in der Literatur entnommenen Ergebnissen enthaltenen sukzessiven Risteilung treten gegenüber der einfachen Einleitungslänge z.T. deutlich geringere Rissabstände auf. Das Verhältnis des mittleren Rissabstandes zur einfachen Einleitungslänge  $s_{cra,exp}/l_{ea}$  errechnet sich für die Versuche der Reihe V1 zu 1,40 und entspricht damit den in der Literatur angegebenen Rissbildungsfaktoren von 1,31 nach (Kreller 1989) bzw. 1,44 nach (Krips 1984).

#### 4.6.4 Rissbildung bei biegebeanspruchten Bauteilen

Aufgrund der in verschiedenen Abschnitten biegebeanspruchter Bauteile vorliegenden unterschiedlichen Rissbildungsstadien sind drei charakteristische Bereiche zu unterscheiden:

- Bereich konstanter Biegemomente
- Querkraftbeanspruchter Bereich
- Auflagernächster Biegeriss (Endverankerungsbereich des Klebarmierungsstranges)

#### Übertragung des Konzepts auf reine Biegebeanspruchung

Das für zentrische Zugbeanspruchung entwickelte Rissmodell kann angesichts der in Bereichen mit  $M = \text{const.}$  vorauszusetzenden Symmetriebedingungen der Dehnungen und Relativverschiebungen in einem Element zwischen zwei Biegerissen mit den folgenden Komponenten auf biegebeanspruchte Bauteile übertragen werden:

- Modifikation der Risschnittgröße:  $F_{cr} \rightarrow M_{cr}$ ;

<sup>8</sup> Die in den Schwellversuchen nach (Rostásy u. a. 1981) aufgebrachte Oberlast liegt in allen Fällen über der rechnerisch dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordneten Zugkraft  $F_a$ .

- Festlegung von Druckzonenhöhe  $x$  und Hebelarmen  $z_s$  und  $z_L$  der Bewehrungsstränge;
- Kopplung der Relativverschiebungen  $s_{sr}$  und  $s_{Lr}$  in den Rissquerschnitten.

Der gewählten Modellierungsstrategie der Ganzstabbetrachtung entsprechend, tritt ein Riss auf, wenn die nach elementarer Biegetheorie ermittelte Randzugspannung die Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  nach Gl. (4.19) überschreitet. Für das dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordnete Beanspruchungsniveau kann i.d.R. von annähernd ideal elastischem Verhalten der Betondruckzone im Zustand II ausgegangen werden. Wenn ggf. vorhandene Druckbewehrung vernachlässigt wird, kann aufbauend auf Gleichgewichtsbetrachtungen bei vereinfachender Voraussetzung der Hypothese nach *Bernoulli* die auf die Bauteilhöhe bezogene Druckzonenhöhe klebarmierter Biegebauteile mit Rechteckquerschnitt mit Gl. (4.93) angegeben werden. Die zugehörigen Hebelarme der Bewehrungsstränge sind mit den Gln. (4.94) und (4.95) bestimmt.

$$\frac{x}{h} = -(n_L \rho_L + n_s \rho_s) + \sqrt{(n_L \rho_L + n_s \rho_s)^2 + 2(n_L \rho_L \frac{d_L}{h} + n_s \rho_s \frac{d}{h})} \quad (4.93)$$

$$\frac{z_s}{h} = \frac{d}{h} - \frac{x}{3h} \quad (4.94)$$

$$\frac{z_L}{h} = \frac{d_L}{h} - \frac{x}{3h} \quad (4.95)$$

Für die ausgewerteten Versuche an Plattenbalken mit gedrunenem Querschnitt aus (Zilch u. a. 2000) gilt Gl. (4.93) bei modifizierten Bewehrungsgraden. Näherungsweise kann für Platten  $x/h \approx 0,2$  und für Balken  $x/h \approx 0,35$  angenommen werden. Die Verknüpfung der Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge erfolgt aufbauend auf der für  $M = \text{const.}$  abgeleiteten Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (4.70). Näherungsweise wird anstelle der mittleren Druckzonenhöhe  $x^*$  die Größe des Zustands II nach Gl. (4.93) verwendet (Gl. 4.96).

$$\frac{s_{Lr}}{s_{sr}} = \frac{d_L - x}{d - x} \quad (4.96)$$

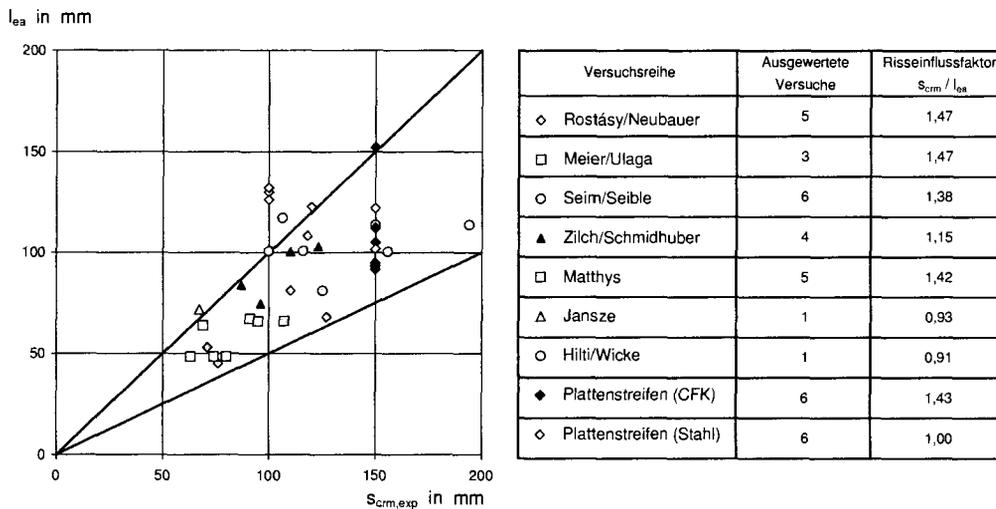
In Kombination mit den in 4.6.3 abgeleiteten Näherungsbeziehungen ist eine Bestimmung der rechnerischen Einleitungslängen des Einzelrisszustandes wie auch des abgeschlossenen Erstrissbildes möglich.

### Vergleich mit Versuchsergebnissen

Zur Überprüfung der Qualität des entwickelten Rissbildungsmodells für den Bereich konstanter Momente biegebeanspruchte Bauteile werden Rissbilder von Versuchen an stahllaschenverstärkten Biegeträgern aus (HILTI 1991; Jansze 1997; Zilch u. a. 2000) sowie von Versuchen an Biegeträgern mit Verstärkung aus CFK-Lamellen nach (Seim u. a. 1999; Seim u. a. 2000; Seim u. a. 2003; Neubauer 2000; Matthys 2000; Ulaga und Meier 2002) herangezogen. Die Eingangsdaten der Versuchsauswertung sind in Anhang C.2 zusammengestellt. Die Auswertung folgt hinsichtlich der rechnerischen zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  der für Dehnkörperversuche vorgestellten Annahme. Der Mittelwert der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  wird nach der von *Noakowski* vorgeschlagenen Beziehung aus  $f_{ctm}$  ermittelt (Gl. 4.19). Ergänzend ist anzumerken, dass die in den genannten Beiträgen bzw. Berichten angegebenen Rissabstände dem Endrissabstand nach Abschluss der Versuche entsprechen; die weitere Risstheilung nach Erreichen des abgeschlossenen Primärrissbildes ist in den experimentell ermittelten Rissabständen in nicht nachvollziehbarem Maß enthalten.

In Abb. 4.28 werden die Mittelwerte der im Versuch beobachteten Rissabstände der zugehörigen rechnerischen Einleitungslänge gegenübergestellt. Das Modell ist augenscheinlich in der Lage, die zu erwartenden mittleren Rissabstände auf Grundlage der Mittelwerte der Eingangsgrößen einzugrenzen; insbesondere der obere Grenzwert  $2l_{ea}$  wird in keinem Fall überschritten.

Ergänzend sind in Abb. 4.28 die rechnerisch zu erwartenden Rissabstände der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Versuchen an verstärkten Plattenstreifen den beobachteten,



**Abbildung 4.28.** Vergleich der in Versuchen an Biegeträgern im Bereich  $M = \text{const.}$  beobachteten mittleren Rissabstände  $s_{cr,m}$  mit den rechnerischen Einleitungslängen der Risschnittgröße; Risseinflussfaktor  $s_{cr,m}/l_{ea}$

allerdings durch die eingelegten Rissbleche nach oben begrenzten Rissabständen im Bereich  $M = \text{const.}$  gegenübergestellt.

**Einfluss der Querkraft auf die Rissbildung**

In querkraftbeanspruchten Bereichen ist eine Beeinflussung des Rissabstandes infolge der *Gradiente des Biegemomentes* möglich. Bei der zugrunde gelegten Modellvorstellung des Rissbildungsvorganges in aufeinander folgenden Stadien ist die Koexistenz verschiedener Rissbildungsstadien in Abhängigkeit des im betrachteten Querschnitt vorliegenden Beanspruchungsniveaus möglich; während in Bereichen hoher Beanspruchung bereits das abgeschlossene Erstrissbild erreicht wird, ist in Auflagernähe ggf. noch von Einzelrissbildung auszugehen. Darüber hinaus ist ein unmittelbarer Einfluss der Momentengradiente auf die erforderliche Eintragungslänge zum Aufbau der Risschnittgröße abzuleiten (vgl. Niedermeier 2001), wenn vorausgesetzt wird, dass die ausgehend von einem Riss über Verbund in den Betonquerschnitt eingetragenen Kräfte am Ende der Einleitungslänge der Risschnittgröße  $M_{cr}$  entsprechen.

Da die beiden genannten Auswirkungen der Querkraft auf die Rissabstände anhand experimenteller Beobachtungen nicht separierbar sind und zudem die realen Rissabstände in signifikanten Streubändern auftreten, erscheint eine explizite Berücksichtigung des Querkrafteinflusses vor dem Hintergrund der Unschärfe der Eingangsgrößen nicht zielführend. In Konzepten zum Nachweis der Zugkraftdeckung ist die Annahme konstanter bzw. linear zwischen den ungünstigsten Grenzwerten veränderlicher Rissabstände ohne Anrechnung des Querkrafteinflusses als ausreichend genau zu betrachten. Für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Rechenmodell bzw. Programmsystem ist eine Berücksichtigung entlang des querkraftbeanspruchten Bereiches veränderlicher Rissabstände nicht vorgesehen (vgl. Kapitel 6), die Rissabstände werden entlang der Trägerlänge zwischen den auflagernächsten Rissen gegenüber dem Bereich  $M = \text{const.}$  als unveränderlich angenommen.

**Auflagernächster Riss biegebeanspruchter Bauteile**

Der Zugkraftdeckungsnachweis ist bei aufgeklebten Bewehrungselementen aufgrund der bruchmechanischen Begrenzung der Verbundbruchkraft nicht auf einen diskreten Querschnitt, der z.B. dem unteren Fraktilwert der Zugfestigkeit zugeordnet ist, zu beschränken, sondern muss den gesamten Bereich erfassen, in dem das Auftreten des auflagernächsten Biegerisses möglich ist (vgl. Neubauer 2000; Niedermeier 2001).

In (Zilch u. a. 2004) wird aufbauend auf einem Vorschlag von *Niedermeier* ein Konzept zur Bestimmung des möglichen Bereichs des auflagnächsten Biegerisses entwickelt und anhand von Versuchsbeobachtungen verifiziert. Im Rahmen von Parameterstudien wird zur Abgrenzung der Lage des äußersten Biegerisses auf die dort wiedergegebenen Zusammenhänge zurückgegriffen.

### Zusammenfassung - Vereinfachtes Rissbildungsmodell

Das vorgestellte Rissbildungsmodell für zentrisch zugbeanspruchte und biegebeanspruchte Bauteile baut in Anlehnung an (König und Fehling 1988) und (Holzenkämpfer 1994) auf der Betrachtung von charakteristischen Rissbildungsstadien auf. Als einfache Verträglichkeitsbedingung wurde die Kopplung der Relativverschiebungen in den Rissquerschnitten vorausgesetzt. Durch einen Vergleich mit Ergebnissen aus Versuchen an Dehnkörpern und Biegebauteilen konnte gezeigt werden, dass mit dem Modell eine Abgrenzung auftretender Rissabstände möglich ist. Den Folgenden Auswertungen der Dehnkörperversuche sowie den Berechnungen mit einem für biegebeanspruchte Bauteile entwickelten Rechenmodell wird das vorgestellte Rissbildungsmodell zugrunde gelegt.

Für eines praxisgerechtes Konzept zur Spannungsermittlung bzw. zum Nachweis der Verbundtragfähigkeit in Rahmen eines Zugkraftdeckungsnaehweises ist allerdings angesichts der signifikanten Streuungen der Rissabstände im Bereich konstanter Biegemomente wie insbesondere auch im querkraftbeanspruchten Bereich ein einfach handhabbares Rissbildungskonzept erforderlich. Im Vergleich mit dem eigenen Modell ist die Vorhersagequalität des in (Niedermeier 2001) vorgeschlagenen Konzeptes vor allem angesichts der expliziten Berücksichtigung grundlegender mechanischer Zusammenhänge als zufriedenstellend zu bewerten. Durch die Trennung der Ermittlung von Rissabständen von der expliziten Berechnung der Zugkraftaufteilung z.B. auf Basis von Verbundbeiwerten wird zudem ein aufwändiges iteratives Vorgehen vermieden.

## 4.7 Abgrenzung

In den vorliegenden experimentellen Untersuchungen wird eine zum Verstärkungszeitpunkt unbelastete einbetonierte Bewehrung vorausgesetzt. Bei realen Verstärkungsmaßnahmen trifft diese Voraussetzung nur eingeschränkt zu; im Allgemeinen weisen zu verstärkende Stahlbetonbauteile bereits Risse auf. In Abb. 4.29 werden für einen zentrisch beanspruchten Stab schematisch die Auswirkungen vorbelasteter Betonstahlbewehrung dargestellt. Durch die Überlagerung gegeneinander versetzter  $\epsilon_r$ - $s_r$ -Beziehungen ist eine veränderte Aufteilung der Zugkräfte möglich. Allerdings sind hier einschränkende Randbedingungen zu beachten:

- Für den Verstärkungszeitpunkt kann bei den i.d.R. betrachteten Maßnahmen nicht davon ausgegangen werden, dass das abgeschlossene Erstrissbild bereits vollständig ausgeprägt ist. Bei zusätzlicher Belastung können sich u.a. angesichts der durch die aufgeklebte Bewehrung zusätzlich eingetragenen Verbundkräfte neue Risse bilden. Bei Maßnahmen, die eine Nutzlasterrhöhung zum Ziel haben, ist insbesondere davon auszugehen, dass der maßgebende auflagnächste Biegeriss im verstärkten Zustand auftritt.
- Die Vorbelastung einbetonierter Bewehrung zum Verstärkungszeitpunkt resultiert i.A. aus dauerhaft vorhandenen Lasten (Eigengewicht, Ausbaulasten, etc.). Die daraus entstehenden, dauerhaft anliegenden Verbundbeanspruchungen führen u.a. nach (Franke 1976) zu Kriechverformungen der Verbundzone. Verbundkriecheffekte spiegeln sich z.B. in einem annähernd horizontalen Ast einer aus Ausziehversuchen gewonnenen Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehung wieder. Steigen die Verbundbeanspruchungen von diesem Plateau aus weiter an, ist ein zunächst äußerst steifes Verbundverhalten zu beobachten. Die z.B. in (Balázs und Koch 1992) wiedergegebenen, experimentell ermittelten Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehungen nähern sich nach geringer Zusatzrelativverschiebung der Beziehung für Kurzzeitbelastungen an (Abb. 4.30).

Die vorgestellten Mechanismen - zusätzliche Rissbildung im verstärkten Zustand und eine veränderte  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung bei weiter ansteigender Belastung - heben die Auswirkungen, die durch gegeneinander versetzte  $\epsilon_r$ - $s_r$ -Beziehungen entstehen, zum Teil auf. Allerdings liegen zur Quantifizierung keine fundierten experimentellen Aussagen vor, zumal allgemein gültige Angaben über die Höhe der Vorbelastung einbetonierter Bewehrung nicht möglich sind.

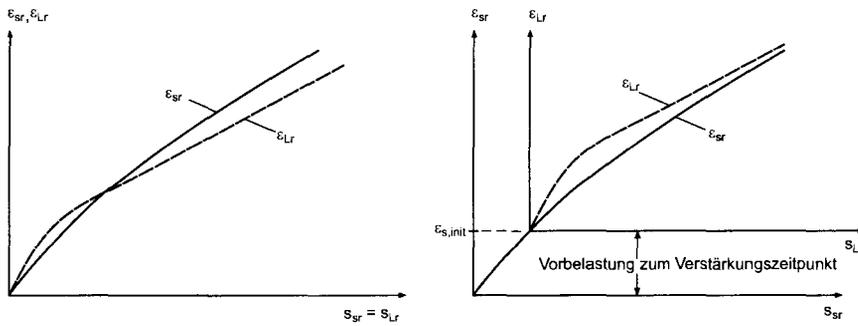


Abbildung 4.29. Auswirkungen vorbelasteter einbetonierter Bewehrung auf das Zusammenwirken

Vor dem Hintergrund der aufgezählten Phänomene sowie der fehlenden experimentellen Grundlagen wird davon ausgegangen, dass die im Rahmen der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Beziehungen auch für den allgemeinen Fall vorbelasteter Betonstahlbewehrung gelten.

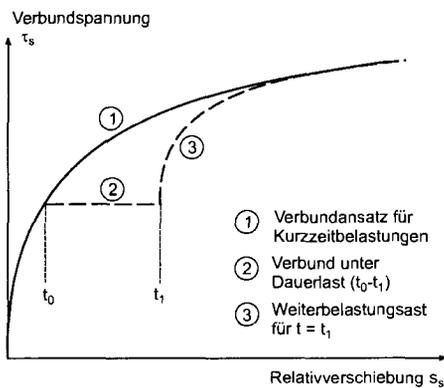


Abbildung 4.30. Auswirkungen langandauernder Beanspruchungen auf das Verbundverhalten einbetonierter Bewehrung (schematisch, nach Balázs und Koch 1992)

---

## Zusammenwirken der Bewehrungsstränge bei Dehnkörpern

### 5.1 Vorbemerkung

Das Zusammenwirken einbetonierter Bewehrung mit Klebarmierung bei zentrisch zugbeanspruchten verstärkten Stahlbetonprismen ist durch die vier Komponenten

- Verbundmodell
- Rissbildungsmodell
- idealisierte Kompatibilitätsbedingung im Rissquerschnitt
- Randbedingungen der Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge

in Verbindung mit den Materialmodellen dem Grunde nach eindeutig bestimmt. Einige wesentliche Arbeiten zur Frage des Zusammenwirkens von Betonstahl und Spannstahl, die ebenfalls auf globalen Verbundmodellen aufsetzen, gehen von der ausschließlichen Gültigkeit der getroffenen Annahmen in Verbindung mit der idealisierten Kompatibilitätsbedingung für Zugstäbe aus und sehen keine weiteren Modifikationen vor (vgl. Faoro 1988; Tue 1993). Die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen zur Ableitung der genannten Elemente schränken allerdings grundsätzlich die Allgemeingültigkeit ein; einige Effekte, die in Versuchen an Dehnkörpern zu beobachten waren, können durch die gewählten Modelle nicht wiedergegeben werden:

- Lokale Verbundstörungen der Bewehrungsstränge insbesondere am Rissquerschnitt
- Einflüsse auf die Relativverschiebungen durch Betonverformungen bzw. Verwölbungen der Rissufer
- Abweichungen des realen Verbundverhaltens von den idealisierten Verbundmodellen

Für die Beschreibung des Zusammenwirkens der Bewehrungsstränge ist daher eine zumindest summarische Anrechnung der genannten Effekte durch Einführung zusätzlicher Elemente verbunden mit einem Abgleich mit Versuchsergebnissen erforderlich. Zur expliziten Anrechnung aller Einflussfaktoren liegen derzeit keine allgemeingültigen Modelle vor; allein für eine Abminderung des Verbundes einbetonierter Bewehrung am Riss existiert ein Vorschlag nach (Eligehausen u. a. 1983) bzw. in modifizierter Form nach (Kreller 1989) (vgl. 4.2.4), der allerdings ebenfalls als pragmatische Näherung zu betrachten ist.

Die Ableitung näherungsweise allgemeingültiger Einflussfaktoren auf die Verträglichkeitsbedingung im Rissquerschnitt aus Versuchsergebnissen mit Hilfe eines Rechenmodelles setzt voraus, dass spezifische Randbedingungen und Einflüsse in den Versuchen weitestgehend wirklichkeitsnah im Rechenmodell abgebildet werden.

### Ziele und Methodik

Die Untersuchung des Zusammenwirkens an Dehnkörpern dient primär der Anpassung der auf Grundlage idealisierter Zusammenhänge abgeleiteten Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (4.62) an reales Verhalten auf der Ebene eines Einzelrisses bzw. eines Elementes zwischen zwei Rissen. Da biegebeanspruchte Bauteile gegenüber Zugstäben allerdings

deutlich gesteigerte baupraktische Relevanz besitzen, müssen die aus Ergebnissen an Dehnkörperversuchen entwickelten Verträglichkeitsbedingungen eine Umsetzung in ein in Kapitel 6 vorgestelltes Rechenmodell erlauben.

Das Zusammenwirken einbetonierter und angeklebter Bewehrung wird zunächst auf Grundlage eines numerischen Rechenmodells unter Verwendung der in 4 vorgestellten Material- und Verbundmodelle, erweitert um die Beschreibung der bei den Dehnkörperversuchen vorliegenden spezifischen Randbedingungen - etwa der Kombination von einbetonierter Bewehrung mit unterschiedlichen Verbundbedingungen in einem Versuchskörper - abgebildet. Rissbildungsstadien werden durch variable Randbedingungen in Abhängigkeit der den einzelnen Stadien zugeordneten Zugkräfte eingeführt.

Einflüsse, die nicht explizit im Modell abgebildet sind, werden mit Hilfe von Korrekturwerten, die den aus Versuchsbeobachtungen abgeleiteten maßgebenden Parametern zugeordnet werden, über die Verträglichkeitsbedingung der Relativverschiebungen in den Rissquerschnitten angerechnet. Zur Ableitung von Gesetzmäßigkeiten der Verträglichkeitsbedingungen werden ergänzend theoretische Überlegungen berücksichtigt.

## 5.2 Abbildung des Zusammenwirkens bei Dehnkörpern

### 5.2.1 Grundlagen und Rechenmodell

Die Anwendung grundlegender Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen auf ein infinitesimales Element eines mit einbetonierter und angeklebter Bewehrung versehenen zugbeanspruchten Betonprismas führt auf das in 2.1.3 abgeleitete System von Differentialgleichungen, die über einen - die Betonverformungen berücksichtigenden - Term gekoppelt sind. Das DGL-System ist im allgemeinen Fall als nichtlineares Randwertproblem zu betrachten; eine geschlossene analytische Lösung des DGL-Systems auf Grundlage wirklichkeitsnaher Verbundmodelle ist nicht bekannt.

Bisher wurden zwei grundlegende Methoden zur Lösung des gekoppelten DGL-Systems bei gemischt bewehrten Bauteilen angewandt:

- Weitestgehende Vereinfachung durch die Annahme konstanter mittlerer Verbundspannungen bei gleichzeitiger Entkopplung des DGL-Systems durch  $E_c A_c \rightarrow \infty$  (vgl. König und Fehling 1988; Holzenkämpfer 1994);
- Transformation des Randwertproblems in ein Anfangswertproblem und anschließende numerischer Lösung der Differentialgleichungen (vgl. Faoro 1988; Tue 1993).

In (Faoro 1988) wurde zur Lösung des gekoppelten DGL-Systems Methoden zur numerischen schrittweisen Integration verwendet, während in (Tue 1993) zur Nachrechnung von Versuchen an Dehnkörpern mit Betonstahl- und Spannstahlbewehrung eine Lösung mit Hilfe eines Verfahrens nach *Runge-Kutta* erfolgte. Beide Autoren verwenden zur Transformation des Randwertproblems in ein Anfangswertproblem Einschießverfahren. Daneben wird in (Tue 1993) eine näherungsweise Lösung der Problematik mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente vorgestellt; die Ergebnisse sind allerdings aufgrund der Verwendung diskreter Verbundansätze in Verbindung mit einer Abbildung des Verbundverhaltens durch nichtlineare Koppelfedern mit den Resultaten der numerischen Integration annähernd gleichwertig.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird für die Abbildung von Dehnkörpern folgende Strategie gewählt:

- Entkopplung des Differentialgleichungssystems durch die Voraussetzung unendlicher Dehnsteifigkeit des Betons ( $E_c A_c \rightarrow \infty$ );
- Wahl der Vektoren der Dehnungs- und Relativverschiebungsgrößen im Rissquerschnitt  $\epsilon_r$  und  $s_r$  als Ausgangs- bzw. Zielgrößen und Rückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem durch die Anwendung von Einschießverfahren;

$$\epsilon_r = \begin{Bmatrix} \epsilon_{Lr} \\ \epsilon_{sr} \end{Bmatrix} \quad s_r = \begin{Bmatrix} s_{Lr} \\ s_{sr} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

- Lösung der entkoppelten DGL durch numerische, schrittweise Integration entlang des Verbundbereichs;
- Abbildung von Rissbildungsstadien durch Vorgabe entsprechender Randbedingungen und Rissabstände.

Das in der vorliegenden Arbeit verwendete Konzept zur Lösung der entkoppelten Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes mit schrittweiser Integration wurde in den Grundzügen bereits in (Rehm 1961) beschrieben. Es lehnt sich an das in (Ciampi u. a. 1982) für das Programm „BOND“ skizzierte Vorgehen an; eine detaillierte Darstellung der Algorithmen erscheint daher entbehrlich.

Im Unterschied zu dem von Ciampi u.a. verwendeten *Illinois*-Iterationsalgorithmus werden in Abhängigkeit des Charakters des jeweils betrachteten Problems modifizierte Quasi-Newton-Verfahren bzw. die zwar deutlich schlechter konvergente, allerdings robuste Intervallhalbierungsmethode verwendet (vgl. 6). Das Programm bietet angesichts der Wahl von  $\epsilon_r$  oder  $s_r$  als Vektor der Anfangswerte folgende Möglichkeiten:

- Vorgabe der Dehnungen der Bewehrungsstränge im Rissquerschnitt und iterative Ermittlung der zugehörigen Relativverschiebungen;
- Vorgabe der Relativverschiebungen im Rissquerschnitt und iterative Ermittlung der zugeordneten Dehnungen der Bewehrungsstränge.

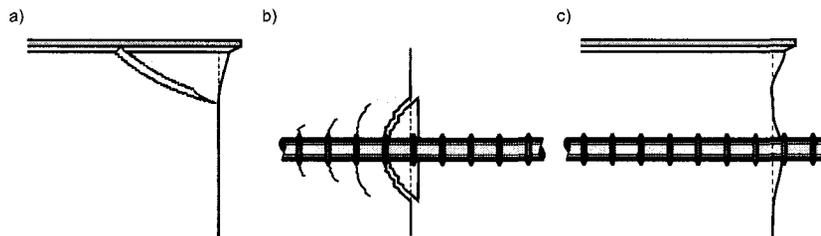
Die mit Hilfe der numerischen schrittweisen Integration ermittelte Näherungslösung ist durch die Wahl der Schrittweite beliebig an die exakte Lösung anzunähern. Nach Testrechnungen im Vergleich mit analytischen Lösungen für Dehnungs- und Relativverschiebungsverläufe der Bewehrungsstränge werden Elementgrößen bzw. Intervalle von 0,5 - 1,5 mm als ausreichend angesehen.

### 5.2.2 Auswirkungen lokaler Effekte auf das Zusammenwirken

In den Material- und Verbundmodellen bzw. der gewählten Abbildung in einem Rechenmodell nach 5.2.1 sind die folgenden, das Zusammenwirken beeinflussende Mechanismen nicht explizit wiedergegeben:

- Lokale Verbundstörung der Klebarmierung am Riss:  
Unmittelbar am Rissquerschnitt ist eine Übertragung von Verbundspannungen nur eingeschränkt möglich. Selbst bei geringen Relativverschiebungen ist mit lokalen Schädigungen am Riss, die einer begrenzten freien Dehnlänge gleichkommen, zu rechnen. Mit zunehmender Beanspruchung bilden sich Bruchkeile am Rissquerschnitt aus. Unabhängig von den über den Bruchkeilriss zu übertragenden Zugkraftanteilen der Klebarmierung stellt dessen Ausbildung zunächst eine Verminderung der Verbundsteifigkeit analog einer freien Dehnlänge dar (Abb. 5.1 a).
- Lokale Verbundstörung der Betonstahlbewehrung am Riss:  
In Analogie zur Klebarmierung ist unmittelbar am Rissquerschnitt eine Verbundspannungsübertragung nur bedingt möglich. Zudem bildet sich bei steigender Beanspruchung ein Ausbruchkegel (vgl. 4.2) (Abb. 5.1 b).
- Betonverformungen und Verwölbung der Rissufer:  
Abweichend von der Annahme starrer Betonscheiben zwischen den Rissen werden durch lokal unterschiedliche Betonverformungen bzw. daraus resultierenden Verwölbungen der Rissufer die tatsächlich auftretenden Rissbreiten und damit verknüpft die Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge am Riss beeinflusst (Abb. 5.1 c). Darüber hinaus bewirken Betonverformungen eine gegenseitige Beeinflussung der Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge. Die Voraussetzung unterschiedlicher Einleitungslängen für den Einzelrisszustand ist wegen der Kopplung durch Betonverformungen nicht zutreffend; es wird sich eine gemeinsame Einleitungslänge einstellen, an deren Ende definitionsgemäß starrer Verbund, d.h. identische Dehnungen von Beton und Bewehrungssträngen, vorliegt.

- Differenzen zwischen dem realen Verbundverhalten und den Verbundmodellen: Streuungen bzw. Abweichungen des globalen Verbundverhaltens von den Verbundmodellen resultieren ebenfalls in Differenzen zwischen experimentell bestimmten und rechnerisch ermittelten Dehnungen.



**Abbildung 5.1.** Lokale Mechanismen, die das Zusammenwirken der Bewehrungsstränge beeinflussen (schematisch)

- Klebearmierung - Bruchkeil
- Betonstahl - Ausbruchkegel
- Betonverformung - Verwölbung der Rissufer

Für den idealisierten Einzelrisszustand - d.h. sofern sich die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge aus angrenzenden Rissen noch nicht überschneiden - sind folgende Auswirkungen der aufgezählten Mechanismen zu erwarten:

- Die am Rissufer lokalisierten Verbundstörungen, die sich mit steigender Beanspruchung hin zu einem Ausbruchkegel bzw. einem Bruchkeil entwickeln, führen zu einer verminderten Verbundsteifigkeit der Bewehrungsstränge. Die reale Dehnung bleibt damit jeweils hinter der rechnerisch der Relativverschiebung zugeordneten Dehnung zurück.
- Mit steigender Beanspruchung nimmt die aktivierte Verbundlänge der Bewehrungsstränge zu, die Auswirkungen der lokal am Riss konzentrierten Verbundstörungen werden vermindert.
- Auswirkungen unterschiedlicher Betonverformungen sind mit der jeweils durch den Bewehrungsstrang eingeleiteten Zugkraft sowie der örtlichen Konzentration der Kräfteinleitung verknüpft. Eine allgemeine Aussage zu Auswirkungen der Betonverformungen und dadurch ggf. hervorgerufener Verwölbungen des Rissquerschnittes ist nicht möglich. Allerdings kann die über Verbund in den Beton eingetragene Kraft grundsätzlich nicht über die Risschnittgröße ansteigen und nimmt mit einsetzender Klebeverbundentkopplung ab.

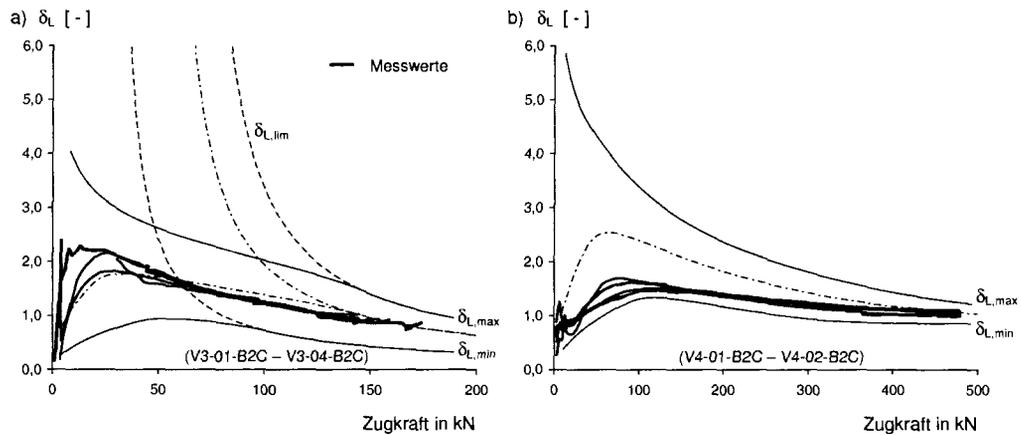
Zusammenfassend können die bei steigender Beanspruchung zunehmenden Verbundstörungen und die ansteigende Verbundlänge als gegenläufige Effekte in Bezug auf die Bewehrungsdehnungen identifiziert werden.

Nach Überschreiten der dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordneten Zugkraft  $F_a$  wirken sich lokale Einflüsse nur mehr auf die Differenzdehnungen zwischen Riss und Rissmitte aus. Mit weiter ansteigender Beanspruchung bzw. Dehnung über das Niveau von  $F_a$  hinaus nimmt damit der Verbundeinfluss auf die Dehnungen der Bewehrungsstränge sukzessive ab.

### Auswirkungen von Streuungen des Verbundverhaltens

Abweichungen der Verbundeigenschaften vom angenommenen Mittelwert bewirken z.T. deutliche Differenzen zwischen der tatsächlichen Aufteilung der Zugkräfte und Rechenwerten. In Abb. 5.2 sind Versuchsergebnisse in Form des Zusammenhangs zwischen Zugkraft  $F$  und Dehnungsverhältnis  $\delta_L$  den Rechenwerten unter Verwendung der in (Zilch u. a. 2004) abgeleiteten 5%- und 95%-Quantilen der maßgebenden Parameter der Verbundansätze gegenübergestellt. Die rechnerischen  $F$ - $\delta_L$ -Beziehungen wurden dabei

unter der konservativen Annahme, dass die Verbundeigenschaften von einbetonierter und angeklebter Bewehrung nicht korreliert sind, auf Basis des Kompatibilitätskriteriums nach Gl. (4.62) ermittelt. Ergänzend ist der den Mittelwerten der Verbundansätze zugeordnete  $F$ - $\delta_L$ -Zusammenhang eingetragen.



**Abbildung 5.2.** Auswirkungen von Abweichungen im Verbundverhalten auf den Zusammenhang zwischen  $F$  und  $\delta_L$ ; Ergebnisse der Versuche im Vergleich mit Rechenwerten; a) Versuchsreihe V3-B2C (Entkopplung im Initialrisszustand); b) Versuchsreihe V4-B2C (vorgegebenes abgeschlossenes Rissbild)

Den Versuchsergebnissen in Abb. 5.2 a) sind die lediglich mit der Verbundbruchenergie der Klebarmierung verknüpften Grenzlinien der Entkopplung am Einzelriss nach Gl. (5.2) gegenübergestellt.

$$\delta_{L,\text{lim}} = \frac{\epsilon_{LR,\text{max}}^\alpha \cdot E_s A_s}{F - \epsilon_{LR,\text{max}}^\alpha \cdot E_L A_L} \quad (5.2)$$

Aus den in Abb. 5.2 exemplarisch wiedergegebenen Ergebnissen sind folgende Erkenntnisse abzuleiten:

- Mit zunehmender Beanspruchung nehmen die Auswirkungen von Streuungen der Verbundeigenschaften sowohl im Initialrisszustand als auch bei vorgegebenem Rissabstand sukzessive ab.
- Die experimentell ermittelten Werte nähern sich mit ansteigender Beanspruchung dem aus den Mittelwerten der Verbundansätze unter Annahme einer Verknüpfung der Relativverschiebungen mit  $s_{Lr} = s_{sr}$  errechneten Zusammenhang an.

Abweichungen des realen Verbundverhaltens von den vorausgesetzten Verbundmodellen werden im Rahmen der weiteren Auswertung von Versuchsergebnissen nicht betrachtet.

### 5.2.3 Abbildung lokaler Effekte im Rechenmodell

Eine Separierung der aufgezählten Mechanismen und Zuordnung zu diskreten Einflussgrößen ist alleine anhand der Ergebnisse experimenteller Untersuchungen nicht möglich und zudem angesichts der signifikanten Streuungen nicht sinnvoll. Demgegenüber ist eine summarische Anrechnung über eine Anpassung der Verträglichkeitsbedingung der Relativverschiebungen im Hinblick auf eine Übertragung in ein Rechenmodell zur Abbildung biegebeanspruchter Bauteile als praktikable Näherung anzusehen.

Die Verknüpfung der Relativverschiebungen im Rissquerschnitt basiert auf der für Dehnkörper abgeleiteten Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (4.62). Eine Berücksichtigung lokaler Effekte kann über eine Verallgemeinerung der Verträglichkeitsbedingung durch ein Korrekturglied  $k_s$  nach Gl. (5.3) erfolgen.

$$s_{Lr} = k_s \cdot s_{sr} \quad (5.3)$$

Nach den vorstehenden Ausführungen sind die Auswirkungen lokaler Effekte beanspruchungsabhängig und treten bei Überschneiden aller Einleitungslängen sukzessive in den Hintergrund; der Beiwert  $k_s$  ist daher zum einen mit der Beanspruchungshöhe, zum anderen mit dem Rissbildungsfortschritt verknüpft. Zur Implementierung in ein Rechenmodell biegebeanspruchter Bauteile wird eine Verknüpfung des Korrekturgliedes mit dem Verhältnis der verbundbedingten Dehnungsdifferenzen der Bewehrungsstränge  $\Delta\epsilon_L$  bzw.  $\Delta\epsilon_s$  zu den zugehörigen Rissdehnungen  $\epsilon_{Lr}$  bzw.  $\epsilon_{sr}$  über die Parameter  $c_s$  bzw.  $c_L$  nach (5.4) gewählt; gleichzeitig wird damit eine Verknüpfung mit dem Rissbildungsfortschritt erreicht.

$$c_s = \frac{\Delta\epsilon_s}{\epsilon_{sr}} \quad c_L = \frac{\Delta\epsilon_L}{\epsilon_{Lr}} \quad (5.4)$$

Hinsichtlich der Umsetzung muss zwischen zwei Szenarien des vorliegenden Rissbildes unterschieden werden:

- Einzelriss / Initialriss:  
An einem Einzelriss - korrespondierend mit dem äußersten Biegeriss im Bereich von Endauflagern biegebeanspruchter Bauteile - stehen i.A. begrenzte Verbundlängen der Bewehrungsstränge zur Verfügung. Die Rissdehnungen der Bewehrungsstränge werden alleine durch das Verbundverhalten dominiert; Einflüsse aus sich überschneidenden Einleitungslängen, Rissabständen, etc. werden nicht realisiert. Die Auswirkungen lokaler Effekte werden durch einen beanspruchungsunabhängigen Korrekturwert nach Gl. (5.5) angerechnet. Zur Bestimmung des Korrekturwertes  $k_{si}$  werden die experimentell ermittelten  $F$ - $\delta_L$ -Beziehungen des Initialzustandes bis zur ggf. einsetzenden Zusatzrissbildung herangezogen.

$$k_s = k_{si} = \text{const.} \quad (5.5)$$

- Rissbildung - Element zwischen zwei Rissen:  
Sofern Rissbildung eintritt, ist eine beanspruchungsabhängige Verminderung der Einflüsse lokaler Effekte zu erwarten. Für eine Implementierung in ein Rechenprogramm bietet sich eine einfache lineare Verknüpfung zwischen  $k_s$  und dem geometrischen Mittel der Verhältniswerte  $c_s$  und  $c_L$  nach Gl. (5.6) an. Die Größe  $c_{lim}$  kennzeichnet den mittleren Verhältniswert, bei dessen Unterschreitung lokale Effekte nicht mehr angerechnet werden (vgl. Abb. 5.3).

$$k_s = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{c_s \cdot c_L} - c_{lim}}{1 - c_{lim}} \cdot (1 - k_{si}) & \text{für } \sqrt{c_s \cdot c_L} \geq c_{lim} \\ 1 & \text{für } \sqrt{c_s \cdot c_L} < c_{lim} \end{cases} \quad (5.6)$$

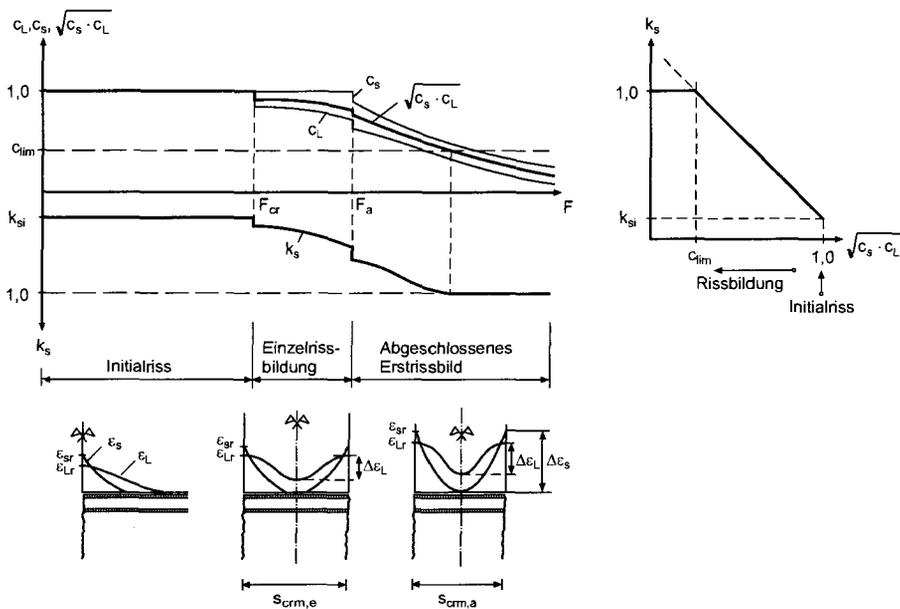
$$c_{lim} = (\sqrt{c_s \cdot c_L})_{lim} \quad (5.7)$$

Für den Initialzustand ist Gl. (5.6) wegen  $c_s = 1,0 \wedge c_L = 1,0$  d.h.  $k_s = k_{si}$  ebenfalls zutreffend. Der Grenzwert  $c_{lim}$  kann wegen der vorgegebenen Randbedingungen, insbesondere aufgrund des definierten Rissabstandes, aus den Versuchsergebnissen der Reihe V4 abgeleitet werden.

Sofern  $\sqrt{c_s \cdot c_L} \leq c_{lim}$  zutrifft, gilt  $k_s = 1,0$ ; damit wird gleichzeitig die Forderung nach Dehnungsebenheit im Mittel nach Gl. (4.66) erfüllt. Aufgrund des allgemein nichtlinearen Zusammenhanges zwischen  $\epsilon_{sr}$  und  $c_s$  bzw.  $\epsilon_{Lr}$  und  $c_L$  stellt Gl. (5.6) ebenfalls eine nichtlineare Verknüpfung des Faktors  $k_s$  mit der anliegenden Zugkraft dar; die Ermittlung von  $k_s$  für vorgegebene Beanspruchungen wird damit zu einem iterativen Prozess.

#### 5.2.4 Randbedingungen - Rissbildungsstadien

Zur numerischen Lösung des entkoppelten DGL-Systems müssen Randbedingungen in Bezug auf die Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge sowie auf die zur Verfügung stehende Verbundlänge vorausgesetzt werden. Dem in 4.6 entwickelten Rissbildungsmodell entsprechend werden drei idealisierte Rissbildungsstadien betrachtet:



**Abbildung 5.3.** Abhängigkeit des Korrekturgliedes  $k_s$  der Verträglichkeitsbedingung im Rissquerschnitt von Beanspruchungshöhe und Rissfortschritt ( $l_{es}/l_{eL} < 1$ ; schematisch)

- Einzelriss / Initialriss ( $F < F_{cr}$ ):  
Für den Einzelriss - korrespondierend mit dem Initialzustand der Versuchsreihen V1 bis V3, V5 und V6 bzw. generell zutreffend für die Endverankerung des Klebearmierungsstranges am äußersten Biegeriss - gelten bei mechanischer Verankerung (Versuchsreihen V1 bis V3) die Bedingungen nach (5.8), bei freiem Ende (Versuchsreihen V5 und V6) die Bedingungen nach (5.9) (Abb. 5.4 a).

mechanische Endverankerung:

$$s_L(x_L = 0) = 0 \quad \epsilon_L(x_L = 0) \neq 0 \quad (5.8)$$

freies Ende:

$$s_L(x_L = 0) \neq 0 \quad \epsilon_L(x_L = 0) = 0 \quad (5.9)$$

Die zur Verfügung stehenden Einleitungslängen sind mit den Abmessungen der Versuchskörper verknüpft. Für Klebearmierung ist auf Grundlage des bilinearen Verbundansatzes bei strenger Lösung der DGL eine Angabe endlicher Einleitungslängen nicht möglich (vgl. 4.6); der zur Verfügung stehende Verbundbereich - sofern mechanische Endverankerungen verwendet werden, identisch mit der freien Länge zwischen den Verankerungen (vgl. 5.2.5) - wird unabhängig vom Beanspruchungsniveau vollständig durch Verbundspannungen beansprucht. Für einbetonierte Bewehrung können mit dem gewählten Verbundmodell explizite Einleitungslängen angegeben werden; die Randbedingungen am Ende der diskreten Einleitungslängen folgen (5.10).

$$s_s(x_s = 0) = 0 \quad \epsilon_s(x_s = 0) = 0 \quad (5.10)$$

- Einzelrissbildung ( $F_{cr} \leq F < F_a$ ):  
Für die Betrachtung von Elementen zwischen zwei Rissen gelten - wie in 4.5 erläutert - Symmetriebedingungen in und in der Mitte zwischen den Rissquerschnitten. Im Zustand der Einzelrissbildung gelten für den verbundsteiferen Bewehrungsstrang die Randbedingungen des Initialzustandes; für den verbundweicheren Strang sind die Bedingungen des abgeschlossenen Erstrissbildes vorauszusetzen (Abb. 5.4 b).  
Als mittlerer Rissabstand  $s_{crm,e}$  wird die mit einem Rissbildungsfaktor  $k_{cr}$  multiplizierte Einleitungslänge des verbundweicheren Bewehrungsstranges angenommen. Im Rahmen der Nachrechnung von Versuchen an Dehnkörpern insbesondere der Reihe V1 wird für den Einzelrisszustand der für das abgeschlossene Erstrissbild aus den

Versuchen abgeleitete Rissbildungsfaktor  $k_{cr} = 1,4$  angenommen.

$$s_{crm,e} = k_{cr} \cdot l_{ee} = 1,4 \cdot \max \left\{ \begin{array}{l} l_{es} \\ l_{eL} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

- Abgeschlossenes Erstrissbild ( $F_a \leq F$ ):

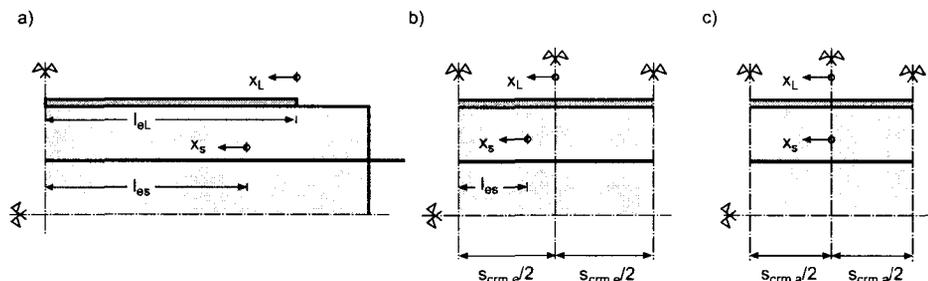
Die Randbedingungen der Bewehrungsstränge in der Symmetrieebene des Elementes zwischen zwei Rissen (Abb. 5.4 c) - gleichbedeutend mit dem Koordinatenursprung - folgen (5.12) und (5.13).

$$s_L(x_L = 0) = 0 \quad \epsilon_L(x_L = 0) \neq 0 \quad (5.12)$$

$$s_s(x_s = 0) = 0 \quad \epsilon_s(x_s = 0) \neq 0 \quad (5.13)$$

Der dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordnete mittlere Rissabstand entspricht der mit dem aus der Versuchsreihe V1 abgeleiteten Rissbildungsfaktor  $k_{cr} = 1,4$  skalierten Einleitungslänge des abgeschlossenen Erstrissbildes.

$$s_{crm,a} = k_{cr} \cdot l_{ea} = 1,4 \cdot \min \left\{ \begin{array}{l} l_{es} \\ l_{eL} \end{array} \right. \quad (5.14)$$



**Abbildung 5.4.** Randbedingungen zur Ermittlung der Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge: a) Initialzustand; b) Einzelrissbildung; c) Abgeschlossenes Erstrissbild

### 5.2.5 Kopplung einbetonierter Bewehrungsstränge mit unterschiedlichen Verbundbedingungen; Lasteinleitung

Die in 5.2.4 angegebenen Randbedingungen gelten unter folgenden Voraussetzungen:

- Die Bewehrungselemente sind durch jeweils einen fiktiven, zentrisch angeordneten Strang zu idealisieren.
- Die konstruktive Ausbildung der Zugkrafteinleitung an den Körperenden beeinflusst die am vorgegebenen Einzelriss bzw. den weiteren betrachteten Rissquerschnitten (Reihe V4) beobachteten Dehnungen und Relativverschiebungen im relevanten Beanspruchungsbereich nicht.

Die beiden genannten Bedingungen werden im Folgenden betrachtet.

#### Kopplung der einbetonierten Bewehrungsstränge

Bedingt durch die Orientierung der Dehnkörper während der Betonage müssen die einbetonierten Betonstahlstäbe unterschiedlichen Verbundbereichen zugeordnet werden (vgl. 3.3.1). Zur rechnerischen Abbildung der einbetonierten Bewehrung sind die Auswirkungen unterschiedlicher Verbundlagen in einem modifizierten Verbundmodell des fiktiven, zentrischen Betonstahlstranges zu berücksichtigen. Vorausgesetzt wird, dass jeweils die Hälfte der einbetonierten Bewehrungsmenge einem Verbundbereich zugeordnet werden kann. Durch zwei Szenarien können die Grenzwerte der modifizierten Verbundparameter erfasst werden:

- Starre Kopplung der beiden Bewehrungsstränge in Analogie zur Parallelschaltung von Federelementen (Abb. 5.5 a);
- Kinematische Kopplung der Bewehrungsstränge bei Nutzung von Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen (Abb. 5.5 b).

Die Ableitungen basieren auf der Betrachtung des Einzelrisszustandes in Verbindung mit dem ansteigenden Ast der Verbundspannungs-Relativverschiebungs-Beziehung nach 4.2.5 und sind wegen der Gültigkeit der Beziehungen für  $N \rightarrow 0$  ohne Einschränkungen auf glatten Betonstahl übertragbar. Mit fortschreitender Rissbildung bzw. überschneidenden Einleitungslängen werden verbundbedingte Einflüsse auf die Betonstahldehnungen vermindert.

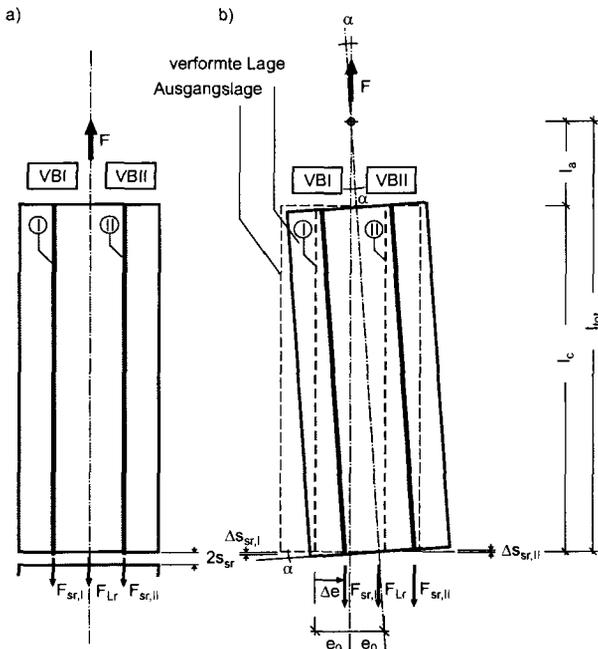
*Starre Kopplung*

Der Zusammenhang zwischen der Betonstahldehnung im Riss und der zugehörigen Relativverschiebung ist in Abhängigkeit der durch *I* und *II* bezeichneten Verbundbedingungen, die nach 4.2.5 ausschließlich über den Parameter *A* einfließen, durch Gl. (4.52) gegeben. Da bei starrer Kopplung der Bewehrungsstränge identische Relativverschiebungen  $s_{sr,I}$  und  $s_{sr,II}$  vorausgesetzt werden, folgt aus dem Zusammenhang zwischen  $A_I$  und  $A_{II}$  nach 4.2.5 unmittelbar der auf den Beiwert  $A_I$  bezogene Korrekturfaktor  $k_{VB}$  des Verbundansatzes für den fiktiven Bewehrungsstrang nach Gl. (5.15).

$$A^* = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{0,5} \right) \right]^2 \cdot A_I = 0,729 \cdot A_I \rightarrow k_{VB} = 0,729 \tag{5.15}$$

*Kinematische Kopplung*

In Realität wird - im Unterschied zur starren Kopplung - das Momentengleichgewicht im Rissquerschnitt durch Verschwenken der Achse der Dehnkörperhälfte um den Winkel  $\alpha$  um die Kalotte nach Abb. 5.5 hergestellt; der verbundstefere Betonstahlbewehrungsstrang entzieht sich der Mitwirkung durch Annäherung an die Wirkungslinie der aufgebracht Zugkraft. Gleichzeitig wird die Öffnung des Risses auf der Seite des verbundweicherer Bewehrungsstranges vergrößert. Dieses, in den Dehnkörperversuchen zu beobachtende Verhalten (vgl. Zilch u. a. 2004), kann bei Annahme starrer Betonscheiben sowie kleiner Verformungen durch die Bedingungen (5.16) bis (5.22) beschrieben werden.



**Abbildung 5.5.** Kopplung der Betonstahlbewehrungsstränge mit unterschiedlichen Verbundbedingungen; a) starre Kopplung; b) kinematische Kopplung (schematisch)

Kinematik:

$$\Delta e = l_{ot} \tan \alpha \quad (5.16)$$

$$\Delta s_{sr,I} = -e_0 \tan \alpha \quad s_{sr,I} = s_{sr} + \Delta s_{sr,I} \quad (5.17)$$

$$\Delta s_{sr,II} = e_0 \tan \alpha \quad s_{sr,II} = s_{sr} + \Delta s_{sr,II} \quad (5.18)$$

Zugkraftanteile:

$$F_{sr,I} = f(A_I, s_{sr}, \Delta s_{sr,I}) \quad (5.19)$$

$$F_{sr,II} = f(A_{II}, s_{sr}, \Delta s_{sr,II}) \quad (5.20)$$

Gleichgewicht:

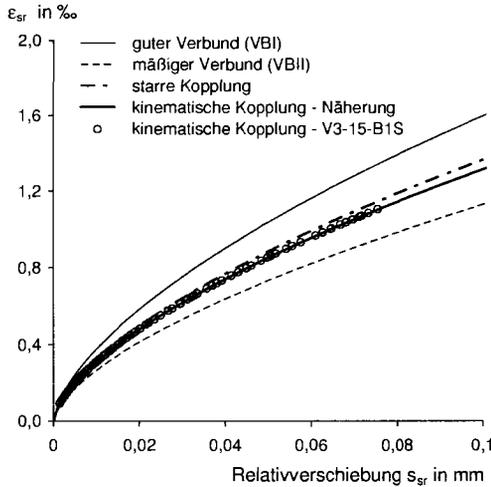
$$\sum N = 0 : F_{sr,I} + F_{sr,II} + F_{Lr} - F = 0 \quad (5.21)$$

$$\sum M = 0 : F_{sr,I}(e_0 - \Delta e) + F_{sr,II}(e_0 + \Delta e) + F_{Lr}\Delta e = 0 \quad (5.22)$$

Die Aufteilung der Zugkraftanteile der einbetonierten Bewehrung auf die, den unterschiedlichen Verbundbedingungen zugeordneten Stränge wird durch die Verdrehung  $\alpha$  des Körpers in Abhängigkeit der Zugkraft bzw. des zugeordneten Mittelwertes der Rissrelativverschiebung  $s_{sr}$  bestimmt. Mit bekannten, gemessenen Zugkraftanteilen des Einzelrisszustandes wurden mit dem in 5.2.1 beschriebenen Rechenmodell Versuche mit unterschiedlichen Dehnsteifigkeitsverhältnissen  $E_s A_s / E_L A_L$  unter Wahrung der Gleichgewichtsbedingungen (5.21) und (5.22) ausgewertet. Anhand der numerischen Auswertung kann über den Vergleich von  $s_{sr}$  mit dem - einer mittleren Dehnung beider Betonstahllagen zugeordneten - Zugkraftanteil des Betonstahls ein Korrekturfaktor zur Anpassung des Verbundansatzes bestimmt werden. Im Mittel folgt  $k_{VB}$  Bedingung (5.23).

$$A^* = k_{VB} \cdot A_I \quad \rightarrow \quad k_{VB} = 0,676 \quad (5.23)$$

In Abb. 5.6 sind die resultierenden  $\epsilon_{sr}$ - $s_{sr}$ -Beziehungen für guten und mäßigen Verbund nach 4.2.5 sowie die Zusammenhänge bei starrer Kopplung mit  $k_{VB}$  nach (5.15) und näherungsweise kinematischer Kopplung mit  $k_{VB}$  nach (5.23) im Vergleich mit dem für einige diskrete Bewehrungszugkraftanteile numerisch ausgewerteten  $\epsilon_{sr}$ - $s_{sr}$ -Zusammenhang für Versuch V3-15-B1S dargestellt. Aufgrund des ungünstigen Dehnsteifigkeitsverhältnisses der Reihe V3S ist der Momentenanteil der Klebarmierung gegenüber dem der einbetonierten Bewehrung am größten; allerdings zeigt die - hier nicht dargestellte - Auswertung den angesichts des kleinen Hebelarmes vernachlässigbaren Einfluss der aufgeklebten Bewehrung.



**Abbildung 5.6.** Kopplung von Bewehrungssträngen mit unterschiedlichen Verbundbedingungen - resultierender Zusammenhang zwischen Dehnung  $\epsilon_{sr}$  und Relativverschiebung  $s_{sr}$  (Einzelriss)

Die weiteren Auswertungen basieren auf der Korrektur des ansteigenden Astes des Verbundmodells nach (5.23), da die Kopplung über Verträglichkeitsbedingungen zum

Einen mit Versuchsbeobachtungen übereinstimmt und zum anderen auf der konsequenten Erfüllung von Gleichgewichtsbedingungen basiert.

Im Übrigen wird davon ausgegangen, dass angesichts der geringen Winkeländerungen  $\alpha$  für die Klebarmierung keine Beeinträchtigungen des Verbundverhaltens durch Beanspruchungen in der Verbundebene senkrecht zur Längsachse des Bewehrungsstranges entstehen.

### **Lasteinleitung**

Die Lasteinleitungs konstruktion der geprüften Dehnkörper soll eine Beeinflussung der betrachteten Dehnungen in den vorgegebenen Rissen ausschließen. Neben der Einleitung der Zugkräfte in die einbetonierte Bewehrung ist die Endverankerung des Klebarmierungsstranges zu betrachten.

#### *Betonstahl*

Zur Untersuchung des Einflusses der Lasteinleitungs konstruktion auf die Entwicklung der Dehnungen und Relativverschiebungen wurde das Rechenmodell nach 5.2.1 um die Abbildung der Lasteinleitung am Körperende erweitert. Für die Zulagestäbe wurden ebenfalls die Verbundmodelle nach 4.2.5 mit starrer Kopplung zur Berücksichtigung verschiedener Verbundbereiche verwendet. Mit dem erweiterten Modell wurden Versuche unterschiedlicher Versuchsreihen nachgerechnet; alleine in den Versuchen der Reihe V2-C mit einbetoniertem glatten Betonstahl überschneidet sich die Einleitungslänge ausgehend vom vorgegebenen Riss in Körpermitte mit den am Körperende eingetragenen Verbundspannungen. Allerdings setzt die Beeinflussung der Rissdehnungen bzw. -relativverschiebungen erst nach der Entkopplung der Klebarmierung, bedingt durch die in diesem Stadium progressiv ansteigende Rissöffnung ein. Die in den Versuchen beobachtete Tendenz, dass die gemessenen Betonstahldehnungen hinter der auf die freie Länge des Dehnkörpers bezogenen mittleren Bauteildehnung zurückbleiben, ist damit rechnerisch nachzuvollziehen. In den relevanten Beanspruchungsbereichen bis zur fortschreitenden Verbundentkopplung ist für die Versuche der Reihe V2-C allerdings eine Beeinflussung durch die Lasteinleitungs konstruktion nicht zu erwarten. In allen anderen Versuchsreihen ist ein Einfluss auf die Dehnungen und Verschiebungen in Bauteilmitte auszuschließen.

#### *Klebarmierung*

Für den Initialrisszustand liegen bei intaktem Klebeverbund am Beginn der durch Anpressdruck realisierten Endverankerung in allen Versuchen lediglich geringe Dehnungen vor; die rechnerischen Einleitungslängen sind sowohl für CFK-Lamellen als auch für die verwendeten Stahllaschen deutlich geringer als die freie Länge zwischen vorgegebenem Rissquerschnitt und Endverankerung. Eine Überprüfung der zu erwartenden Relativverschiebungen nach (Zilch und Zehetmaier 2003) für  $\sigma_n = 4$  MPa ergab vernachlässigbare Werte. Nach einsetzender Klebeverbundentkopplung besitzen die Relativverschiebungen am Beginn der Endverankerung keine Relevanz mehr.

Der Ansatz der dargestellten Randbedingungen für den Initialrisszustand ist dem entsprechend zulässig; für die weiteren betrachteten Rissbildungsstadien wird davon ausgegangen, dass die Endverankerung des Klebarmierungsstranges keine Auswirkungen auf die gemessenen Dehnungen und Verschiebungen zeigt. Zudem war bei keinem der Versuche ein Verbundversagen der Endverankerung bzw. visuell sichtbare Verbundentkopplungen zu verzeichnen.

### 5.3 Auswertung der Dehnkörperversuche

Die Ergebnisse der in (Zilch u. a. 2004) beschriebenen experimentellen Untersuchungen an Dehnkörpern werden zur Ableitung der Parameter  $k_{si}$  und  $c_{lim}$  des Korrekturwertes  $k_s$  nach Gl. (5.6) für die Verträglichkeitsbedingung herangezogen. Dem Bezug von  $k_{si}$  auf den Initialzustand mit einem vorgegebenen Einzelriss folgend, werden die Versuche der Reihen V1 bis V3, V5 und V6 zur Ermittlung der Einflussfunktionen für  $k_{si}$  verwendet. Der zur Eingrenzung der Auswirkungen lokaler Effekte dienende Parameter  $c_{lim}$  wird aus den Versuchen mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild der Reihe V4 abgeleitet.

#### 5.3.1 Versuche mit vorgegebenem Initialriss

##### Ableitung der Korrekturfaktoren $k_{si}$

Die Korrekturfaktoren  $k_{si}$  werden auf Grundlage des Zusammenhanges zwischen Zugkraft und Dehnungsverhältnis  $\delta_L$  über eine Anpassung des rechnerischen Verlaufes an die Versuchsergebnisse im dem Initialrisszustand zugeordneten Beanspruchungsbereich  $0 < F \leq F_{cr,exp}$  ermittelt. Die mit Hilfe des in 5.2.1 beschriebenen Rechenmodells durchgeführte iterative Bestimmung von  $k_{si,exp}$  basiert auf einer Minimierung der Fehlerquadratsumme nach Bedingung (5.24) für vorgegebene Stützstellen<sup>1</sup>.

$$k_{si} \longleftrightarrow \min \left\{ \sum_i (\delta_{L,exp,i}(F_i) - \delta_{L,cal,i}(F_i))^2 \right\} \quad (5.24)$$

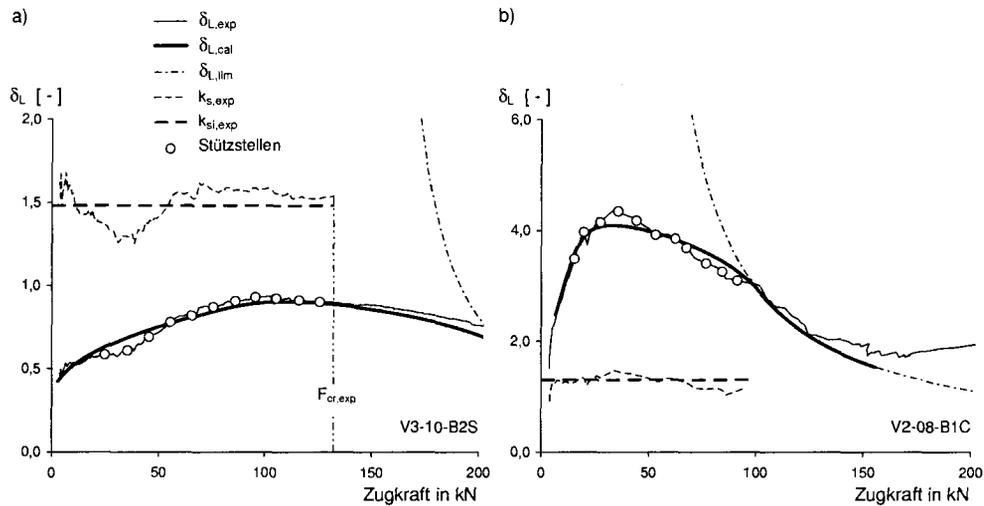
In den Abbildungen 5.7 a) und b) werden exemplarisch Versuchsergebnisse und daraus abgeleitete Rechenwerte gegenübergestellt. Im Einzelnen sind wiedergegeben:

$\delta_{L,exp}(F)$	Verhältnis der gemessenen Dehnungen der Bewehrungsstränge in Abhängigkeit der Zugkraft; Stützstellen für die Ermittlung von $k_{si}$ ;
$k_{s,exp}(F)$	Aus den gemessenen Dehnungen mit Hilfe des Rechenmodells unter Verwendung der Verbundansätze nach Kapitel 4 rückgerechnetes Verhältnis der Rissrelativverschiebungen $s_{Lr}/s_{sr}$ ;
$k_{si,exp}$	Korrekturbeiwert der Verträglichkeitsbedingung; dem Minimum der auf die Stützstellen bezogenen Fehlerquadratsumme zugeordnet;
$\delta_{L,cal}(F)$	Auf Grundlage des Rechenmodells unter Verwendung von $k_{si,exp}$ ermitteltes Verhältnis der Dehnungen der Bewehrungsstränge;
$\delta_{L,lim}(F)$	Grenzlinie der Klebarmierungsentkopplung am Einzelriss nach Gl. (5.2).

Die in den Abbildungen 5.7 a) und b) exemplarisch dargestellten Zusammenhänge werden im Folgenden erläutert:

- Versuch V3-10-B2S (Abb. 5.7 a):  
An dem mit geripptem Betonstahl ( $d_s = 8$  mm) und aufgeklebten Stahllaschen bewehrten Dehnkörper treten im Initialrisszustand keine Verbundentkopplungen auf; die Grenzlinie  $\delta_{L,lim}(F)$  schneidet  $\delta_{F,exp}(F)$  bzw.  $\delta_{L,cal}(F)$  im Beanspruchungsbereich  $F < F_{cr,exp}$  nicht. Für  $k_{si,exp} \approx 1,48$  weisen  $\delta_{L,exp}(F)$  und  $\delta_{L,cal}(F)$  die geringsten Abweichungen - ausgedrückt durch ein Minimum der auf die Stützstellen bezogenen Summe der Fehlerquadrate - auf. Die Schwankungen von  $k_{s,exp}$  um den Wert  $k_{si,exp}$  sind neben Ungenauigkeiten der Messung, die vor allem im Bereich kleiner Dehnungen große Auswirkungen auf  $\delta_{L,exp}$  zeigen, insbesondere auf die aufgezählten lokalen Effekte zurückzuführen.

<sup>1</sup> Im Folgenden werden die aus Versuchsergebnissen über eine iterative Anpassung ermittelten Faktoren  $k_{si}$  zur Abgrenzung von Beiwerten, die mit einem zu entwickelnden Ansatz bestimmt werden, mit  $k_{si,exp}$  bezeichnet; die Rechenwerte werden durch die Bezeichnung  $k_{si,cal}$  identifiziert.



**Abbildung 5.7.** Ableitung der Beiwerte  $k_{si}$  - Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten: a) V3-10-B2S; b) V2-08-B1C (Entkopplung im Initialrisszustand)

- Versuch V2-08-B2C (Abb. 5.7 b):

Für den mit glatten Betonstahl ( $d_s = 12$  mm) und CFK-Lamellen bewehrten Dehnkörper lag über den gesamten Beanspruchungsbereich der Initialrisszustand vor; mit zunehmender Beanspruchung trat eine Entkopplung des Klebeverbundes ausgehend vom vorgegebenen Riss ein. Die experimentell und rechnerisch ermittelten  $F$ - $\delta_L$ -Beziehungen folgen ab ca. 100 kN der Grenzlinie  $\delta_{L,lim}$  bis zur einsetzenden Zugbandwirkung zwischen den mechanischen Endverankerungen der CFK-Lamellen. Da  $\delta_{L,lim}$  nach Gl. (5.2) nicht an Verträglichkeitsbedingungen gekoppelt ist, wird der Verlauf von  $\delta_{L,cal}$  nach einsetzender Klebeverbundentkopplung unabhängig von  $k_{si}$  von der Verbundtragfähigkeit der aufgeklebten CFK-Lamellen dominiert. Die weitgehende Übereinstimmung von  $\delta_{L,lim}$  und  $\delta_{L,exp}$  nach Entkopplungsbeginn ist auf die zutreffende Beschreibung der Verbundtragfähigkeit durch den gewählten Verbundansatz für den betrachteten Versuch zurückzuführen.

Eine Auswertung der Versuchsergebnisse ist angesichts der fehlenden eindeutigen Zuordnung zwischen Lamellendehnung und Relativverschiebung nach Entkopplungsbeginn nur für den Beanspruchungsbereich mit intaktem Klebeverbund sinnvoll. Für  $k_{si,exp} = 1,30$  ergibt sich ein Minimum der Fehlerquadratsumme.

Insgesamt lässt sich für den Initialrisszustand eine befriedigende Abbildung des an den Versuchskörpern beobachteten Verhaltens durch konstante Korrekturwerte  $k_{si}$  feststellen.

### Einflussgrößen auf die Verträglichkeitsbedingung

Den in 5.2.2 erläuterten Mechanismen und lokalen Effekten folgend sowie vor dem Hintergrund der in den Versuchsreihen untersuchten Parameter ist von folgenden Einflussgrößen auf die Verträglichkeitsbedingung im Rissquerschnitt auszugehen:

- Festigkeits- und insbesondere Verformungseigenschaften des Betons  $\rightarrow f_{cm}$
- Verhältnis von Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamem Umfang der einbetonierten Bewehrung  $\rightarrow E_s d_s$
- Verhältnis von Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamem Umfang der aufgeklebten Bewehrung  $\rightarrow E_L t_L$

Für die genannten Parameter wird als einfache Näherung jeweils eine lineare Abhängigkeit zum Korrekturbeiwert der Verträglichkeitsbedingung vorausgesetzt; die Einflussfunktionen nach (5.26), (5.27) und (5.28) werden durch einen Produktansatz nach Gl. (5.25) verknüpft. Die Bezugsgrößen  $(f_{cm})_0$ ,  $(E_L t_L)_0$  und  $(E_s d_s)_0$  dienen zur Skalierung der Ansatzfunktionen auf annähernd identische Abszissen-Intervalle.

$$k_{si} = k_{si,cal} = k_{si,c} \cdot k_{si,L} \cdot k_{si,s} \quad (5.25)$$

mit:

$$k_{si,c} = C_{c1} + C_{c2} \cdot \frac{f_{cm}}{(f_{cm})_0} \quad (5.26)$$

$$k_{si,L} = C_{L1} + C_{L2} \cdot \frac{E_L t_L}{(E_L t_L)_0} \quad (5.27)$$

$$k_{si,s} = C_{s1} + C_{s2} \cdot \frac{E_s d_s}{(E_s d_s)_0} \quad (5.28)$$

$$(f_{cm})_0 = 30 \text{ MPa}$$

$$(E_L t_L)_0 = 1 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

$$(E_s d_s)_0 = 2 \cdot 10^6 \text{ N/mm}$$

Der Versuchsauswertung, d.h. der Ermittlung der Koeffizienten der linearen Ansatzfunktionen, werden die iterativ aus den  $F$ - $\delta_L$ -Beziehungen des Initialrisszustandes der einzelnen Dehnkörperversuche ermittelten Korrekturwerte der Verträglichkeitsbedingungen - mit  $k_{si,exp}$  bezeichnet - zugrunde gelegt. Die Bestimmung der Koeffizienten folgt einem in (Chang und Kesler 1958) vorgestellten schrittweisen Optimierungsalgorithmus; als Optimierungsbedingung wird die Minimierung der Summe der relativen Abweichungen zwischen Rechenwerten  $k_{si,cal}$  und aus Versuchen abgeleiteten Werten  $k_{si,exp}$  nach (5.29) eingeführt.

$$k_{si,cal}(C_{c1}, C_{c2}, C_{L1}, C_{L2}, C_{s1}, C_{s2}) \leftrightarrow \min \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \frac{k_{si,exp,i} - k_{si,cal,i}}{k_{si,exp,i}} \right| \right\} \quad (5.29)$$

Die Ableitung der Koeffizienten muss für gerippten ( $n = 30$ ) und glatten ( $n = 18$ ) Betonstahl getrennt erfolgen, da unterschiedliche Zusammenhänge zwischen den Einflussgrößen und den Beiwerten der Verträglichkeitsbedingungen zu erwarten sind. Insbesondere kann davon ausgegangen werden, dass bei glattem Betonstahl der Parameter  $E_s d_s$  keinen wesentlichen Einfluss auf  $k_{si}$  besitzt, da abgesehen von lokal am Rissufer konzentrierten Verbundstörungen nicht mit weitergehenden Defekten, z.B. einem Betonausbruchkegel am Rissquerschnitt, zu rechnen ist; dem entsprechend gilt für glatten Betonstahl  $C_{s1} = 1,0$  und  $C_{s2} = 0$ .

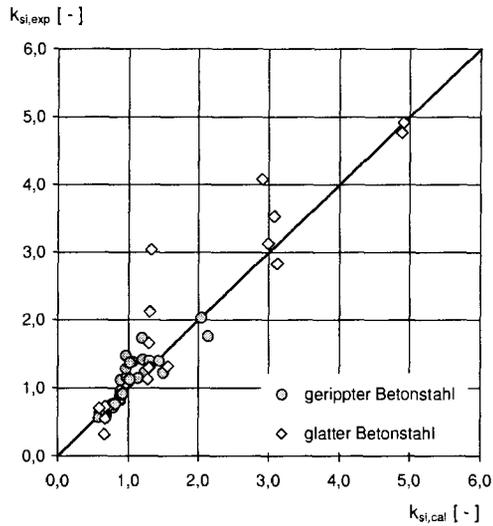
In Tab. 5.1 sind als Ergebnis der Optimierungsrechnung die Koeffizienten der linearen Ansatzfunktionen nach den Gln. (5.26), (5.27) und (5.28) wiedergegeben. Die Korrelation zwischen den Rechenwerten  $k_{si,cal}$  nach Gl. (5.25) und den aus Versuchen abgeleiteten Korrekturgrößen  $k_{si,exp}$  der Verträglichkeitsbedingung ist in Abb. 5.8 dargestellt.

**Tabelle 5.1.** Koeffizienten der Ansatzfunktionen Gln. (5.26), (5.27) und (5.28) für den Korrekturbeiwert  $k_{si}$  der Verträglichkeitsbedingung

Betonstahl Oberflächengestaltung	$C_{c1}$	$C_{c2}$	$C_{L1}$	$C_{L2}$	$C_{s1}$	$C_{s2}$
gerippt	1,91	-0,68	1,24	0,70	0,76	-0,17
glatt	4,94	-2,35	0,31	0,70	1,00	0,00

Abbildung 5.8 zeigt, dass im Initialzustand für gerippten Betonstahl die Korrekturwerte der Verträglichkeitsbedingung nahe dem durch die idealisierte Kompatibilitätsbedingung (Gl. 4.62) vorausgesetzten Wert 1,0 liegen.

Für glatte einbetonierte Bewehrung weichen die Beiwerte z.T. signifikant von 1,0 ab; zudem weisen die aus Versuchsergebnissen innerhalb einer Teilversuchsreihe mit identischen Parametern - insbesondere in Kombination mit aufgeklebten Stahllaschen - abgeleiteten Einzelwerte gegenüber den zugehörigen Rechenwerten deutlich größere Streuungen als die aus Dehnkörperversuchen mit gerippter Betonstahlbewehrung ermittelten Werte auf.

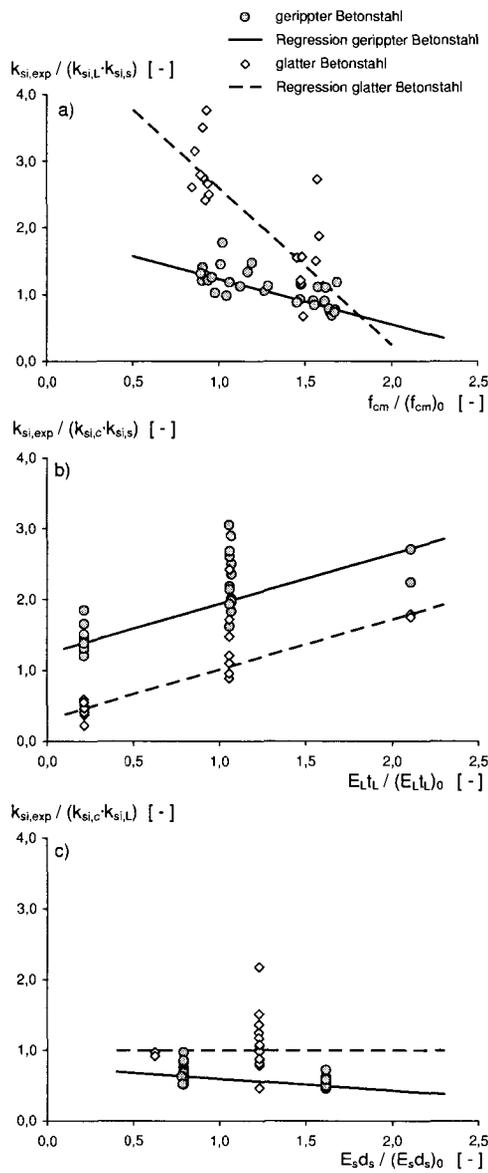


**Abbildung 5.8.** Rechenwerte  $k_{si,cal}$  nach Gl. (5.25) in Verbindung mit den Koeffizienten nach Tab. 5.1 im Vergleich mit den aus Versuchsergebnissen an Dehnkörpern abgeleiteten Größen  $k_{si,exp}$

Die Korrelation der einzelnen linearen Regressionsfunktionen des Produktansatzes nach Gl. (5.25) mit den aus Versuchen abgeleiteten Werten  $k_{si,exp}$  kann isoliert bewertet werden, wenn die Einzelwerte  $k_{si,exp}$  in Abhängigkeit des betrachteten Einflussparameters jeweils bezogen auf die übrigen Ansatzfunktionen dargestellt werden (Abbildungen 5.9 a bis c).

Aus den Abbildungen 5.9 a) bis c) ist abzulesen, dass die gewählten linearen Ansatzfunktionen die Auswirkungen der Einflussgrößen trotz der z.T. signifikanten Streuungen tendenziell richtig erfassen. Über die Betrachtung mechanischer Zusammenhänge können die Ansatzfunktionen im Einzelnen interpretiert werden:

- Einfluss der Betondruckfestigkeit ( $f_{cm} \rightarrow$  Abb. 5.9 a)  
 Mit zunehmender Druckfestigkeit nimmt die Verformungsfähigkeit des Bauteilbetons ab; Einflüsse aus Betonverformungen gehen zurück. Dieser Effekt wird allerdings überlagert durch die von der Druck- und Zugfestigkeit beeinflussten Verbundstörungen der Bewehrungsstränge am Riss. Aus der Tendenz nach Abb. 5.9 a) ist abzuleiten, dass mit zunehmender Druckfestigkeit die Verbundstörungen der Klebarmierung gegenüber den Verbundstörungen des Betonstahls in den Vordergrund treten. Der Geltungsbereich der Einflussfunktion für  $f_{cm}$  ist allerdings durch den experimentell überprüften Bereich eingegrenzt; ausserhalb des Intervalls  $20 \text{ MPa} \leq f_{cm} \leq 60 \text{ MPa}$  trifft die Beziehung nach Abb. 5.9 insbesondere für glatten Betonstahl offensichtlich nicht mehr zu.
- Einfluss der aufgeklebten Bewehrung ( $E_L t_L \rightarrow$  Abb. 5.9 b)  
 Mit zunehmendem Verhältnis von Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamer Oberfläche der Klebarmierung steigt  $k_{si,L}$  an. Dabei ist die Steigung erwartungsgemäß unabhängig von der Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung.  
 Mit ansteigendem  $E_L t_L$  wächst die einer diskreten Lashendehnung  $\epsilon_{Lr}$  zugeordnete aktivierte Verbundlänge, der Gradient der Dehnungen im Verbundbereich unmittelbar am Riss sinkt. Nach Abb. 5.9 werden damit die Verbundstörungen am Rissufer verringert bzw. die aus den Verbundstörungen resultierende freie Dehnlänge der Klebarmierung wird gegenüber der aktivierten Verbundlänge kleiner. Verminderte Verbundstörungen werden in Konsequenz durch ansteigende Verhältniswerte der Relativverschiebungen  $s_{Lr}/s_{sr} = k_s$  über die Verträglichkeitsbedingung angerechnet.
- Einfluss der einbetonierten Bewehrung ( $E_s d_s \rightarrow$  Abb. 5.9 c)  
 Für gerippten Betonstahl gelten zur Klebarmierung analoge Zusammenhänge; mit ansteigendem Verhältniswert von Dehnsteifigkeit zu Verbundumfang nimmt die aktivierte Verbundlänge zu. Im Verhältnis dazu wird die durch Verbundstörungen beeinflusste Länge am Riss reduziert. Tendenziell geht der Einfluss von Verbundstörungen



**Abbildung 5.9.** Lineare Ansatzfunktionen im Vergleich mit bezogenen, aus den Versuchen abgeleiteten Einzelwerten  $k_{si,exp}$   
 a) Einflussparameter  $f_{cm} \rightarrow$  Gl. (5.26)  
 b) Einflussparameter  $E_L t_L \rightarrow$  Gl. (5.27)  
 c) Einflussparameter  $E_s d_s \rightarrow$  Gl. (5.28)

mit wachsendem  $E_s d_s$  zurück; eine Anrechnung über die Verträglichkeitsbedingung erfolgt durch ein mit steigendem  $E_s d_s$  reduzierten Korrekturbeiwert  $k_{si,s}$ .

Bei glattem Betonstahl ist erwartungsgemäß keine eindeutige Abhängigkeit zu  $E_s d_s$  abzuleiten. Allerdings können neben den Versuchen der Reihe V2 mit  $d_s = 12$  mm lediglich 2 Versuche der Reihe V6 mit  $d_s = 6$  mm zur Auswertung herangezogen werden.

Ergänzend sei angemerkt, dass die Regressionsfunktionen nach Abb. 5.9 neben den Auswirkungen der genannten Einflussgrößen auch Streuungen der Verbundeigenschaften sowie immanente systematische Fehler, z.B. eine gegenüber den Verbundmodellen abweichende Korrelation der Verbundeigenschaften mit mechanischen Eigenschaften des Betons bei unterschiedlichen Betonrezepturen abdecken.

### 5.3.2 Versuche mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild

Die Versuchsergebnisse der Reihe V4 mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild dienen zur Ableitung des Kennwertes  $c_{lim}$ , der über die Verhältniswerte der verbundbedingten Dehnungsdifferenzen zu den Rissdehnungen -  $c_s$  und  $c_L$  nach Gl. (5.4) - den Beanspruchungsbereich abgrenzen, in dem lokale Effekte signifikante Auswirkungen auf die

Zugkraftaufteilung zeigen. Mit Hilfe des Rechenmodells wird für jeden Versuch aus den gemessenen Dehnungen der Bewehrungsstränge über eine Berechnung der den Dehnungen zugeordneten Rissrelativverschiebung der Kennwert  $c_{lim}$  ermittelt, für den  $k_{s,exp} = 1$  gilt. Der Auswertung werden dabei die an den vorgegebenen Rissquerschnitten ②,③ und ④ gemessenen Dehnungen zugrunde gelegt (Abb. 5.10).

In Abb. 5.11 sind die Ergebnisse der Auswertung in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit wiedergegeben; für die Umsetzung in ein Rechenmodell wird als unabhängig von den mechanischen Eigenschaften des Betons definierter Kennwert der Mittelwert aller Versuche der Reihe V4  $c_{lim} = 0,34$  verwendet.

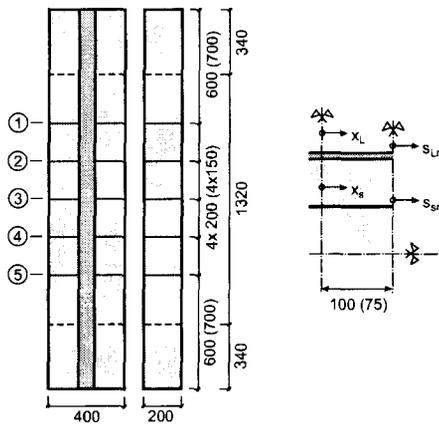


Abbildung 5.10. Modellannahmen zur Auswertung der an den vorgegebenen Rissquerschnitten ②,③ und ④ gemessenen Dehnungen

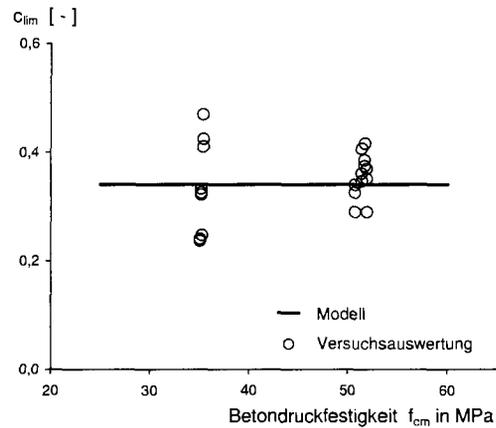


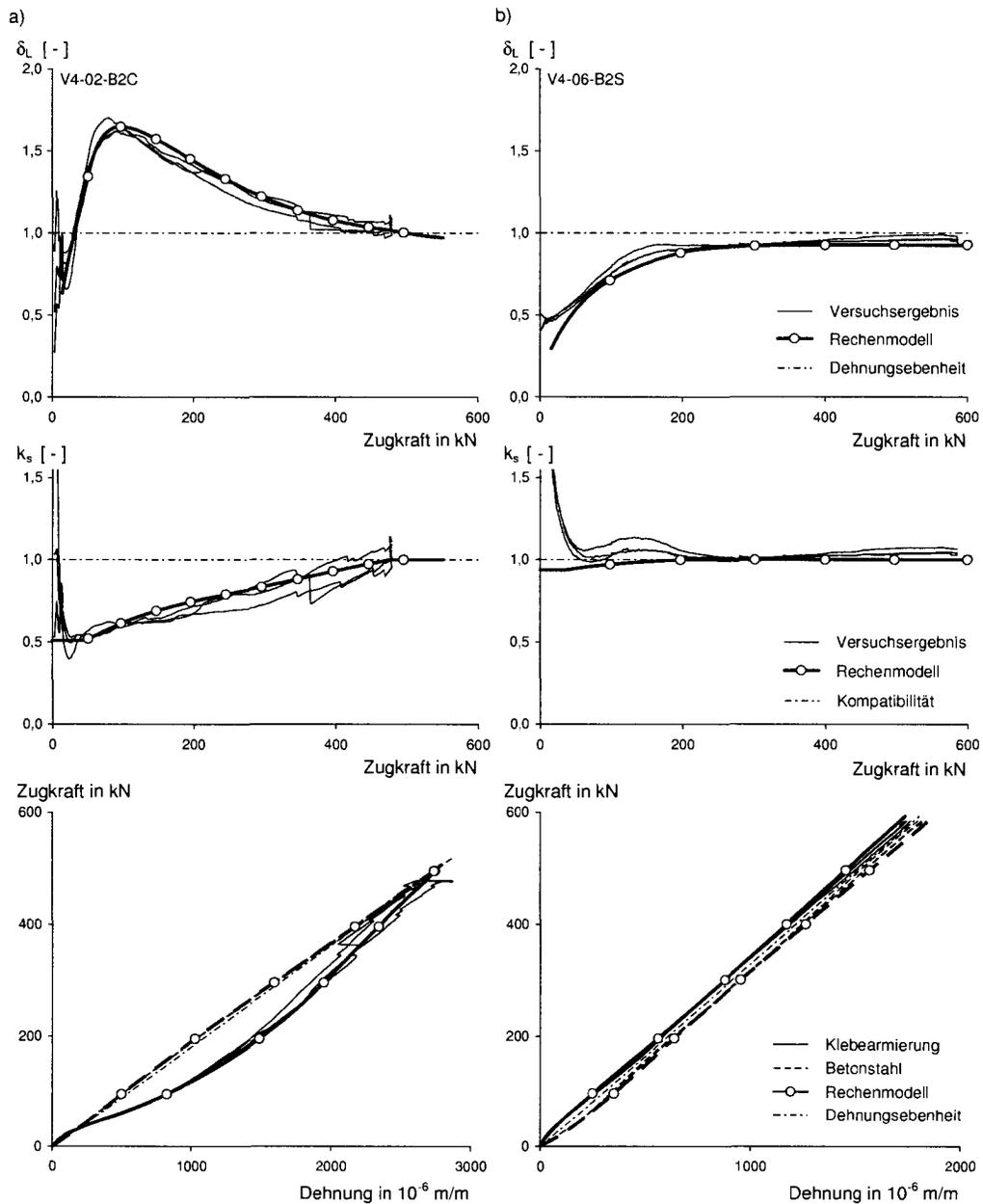
Abbildung 5.11. Auswertung der Versuchsreihe V4: Beiwert  $c_{lim}$

In Abb. 5.12 werden exemplarisch für zwei Versuche der Reihe V4 Versuchsergebnisse und Rechenwerte wiedergegeben. Für einen mit CFK-Lamellen (Abb. 5.12 a) bzw. mit Stahllaschen (Abb. 5.12 b) klebarmierten Dehnkörper ist im Einzelnen dargestellt:

- $\delta_{L,exp}(F)$  Verhältniswert der in den Rissquerschnitten ②,③ und ④ gemessenen Dehnungen  $\epsilon_{Lr}/\epsilon_{sr}$ ;
- $\delta_{L,cal}(F)$  Rechenwert des Dehnungsverhältnisses unter Berücksichtigung der Korrekturfunktion  $k_{s,cal}(F)$ ;
- $k_{s,exp}(F)$  Aus den gemessenen Dehnungen rückgerechnetes Verhältnis der Relativverschiebungen  $s_{Lr}/s_{sr}$ ;
- $k_{s,cal}(F)$  Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung nach Gl. (5.6) mit den Parameter  $k_{si}$  des Initialzustandes nach Gl. (5.25) in Verbindung mit den Koeffizienten nach Tab. 5.1 und dem Grenzwert  $c_{lim}$  nach Abb. 5.11;

Die mit „Kompatibilität“ bezeichnete Linie entspricht der idealisierten Kompatibilitätsbedingung nach Gl. (4.62). Ergänzend sind die durch  $\delta_{L,cal}(F)$  eindeutig bestimmten Rechenwerte der Bewehrungsdehnungen den Messwerten der Rissquerschnitte ②,③ und ④ gegenübergestellt. Die Darstellung ist auf den für das Zusammenwirken relevanten Beanspruchungsbereich mit elastischen Bewehrungssträngen beschränkt.

Die Entwicklung von  $k_{s,cal}(F)$  zeigt, dass der Initialrisszustand mit unterschiedlichen rechnerischen Einleitungslängen - korrespondierend mit einem konstanten Korrekturwert  $k_s = k_{si}$  - nur über einen geringen Teil des Beanspruchungsbereichs vorliegt; mit zunehmender Beanspruchung werden die Dehnungsdifferenzen zwischen Riss und Risselementmitte und damit  $k_s$  sukzessive verringert.



**Abbildung 5.12.** Versuchsreihe V4 - Vergleich von Versuchsergebnissen und Rechenwerten: Verhältniswert der Dehnungen  $\delta_L = \epsilon_{Lr}/\epsilon_{sr}$ ; Verträglichkeitsbedingung  $k_s = s_{Lr}/s_{sr}$ ; Dehnungen in Abhängigkeit der Zugkraft (von oben nach unten); a) Versuch V4-02-B2C; b) Versuch V4-06-B2S

### 5.4 Vergleich von Versuchsergebnissen und Rechenmodell

Mit den aus Versuchen abgeleiteten Korrekturgrößen der Kompatibilitätsbedingung in Verbindung mit den Verbund- und Rissbildungsmodellen sowie den jeweils zugehörigen Randbedingungen ist die Zugkraftaufteilung in zentrisch zugbeanspruchten, symmetrisch bewehrten Bauteilen eindeutig bestimmt.

Im Folgenden wird die Qualität des Rechenmodells anhand eines Vergleichs mit Versuchsergebnissen an zwei Beispielen erläutert. In Anhang B.2 findet sich eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aller Dehnkörperversuche - zusammengefasst in Teilerien mit identischen Parametern - und Rechenergebnissen auf Grundlage des entwickelten Modells. In den Abbildungen werden jeweils folgende Größen dargestellt:

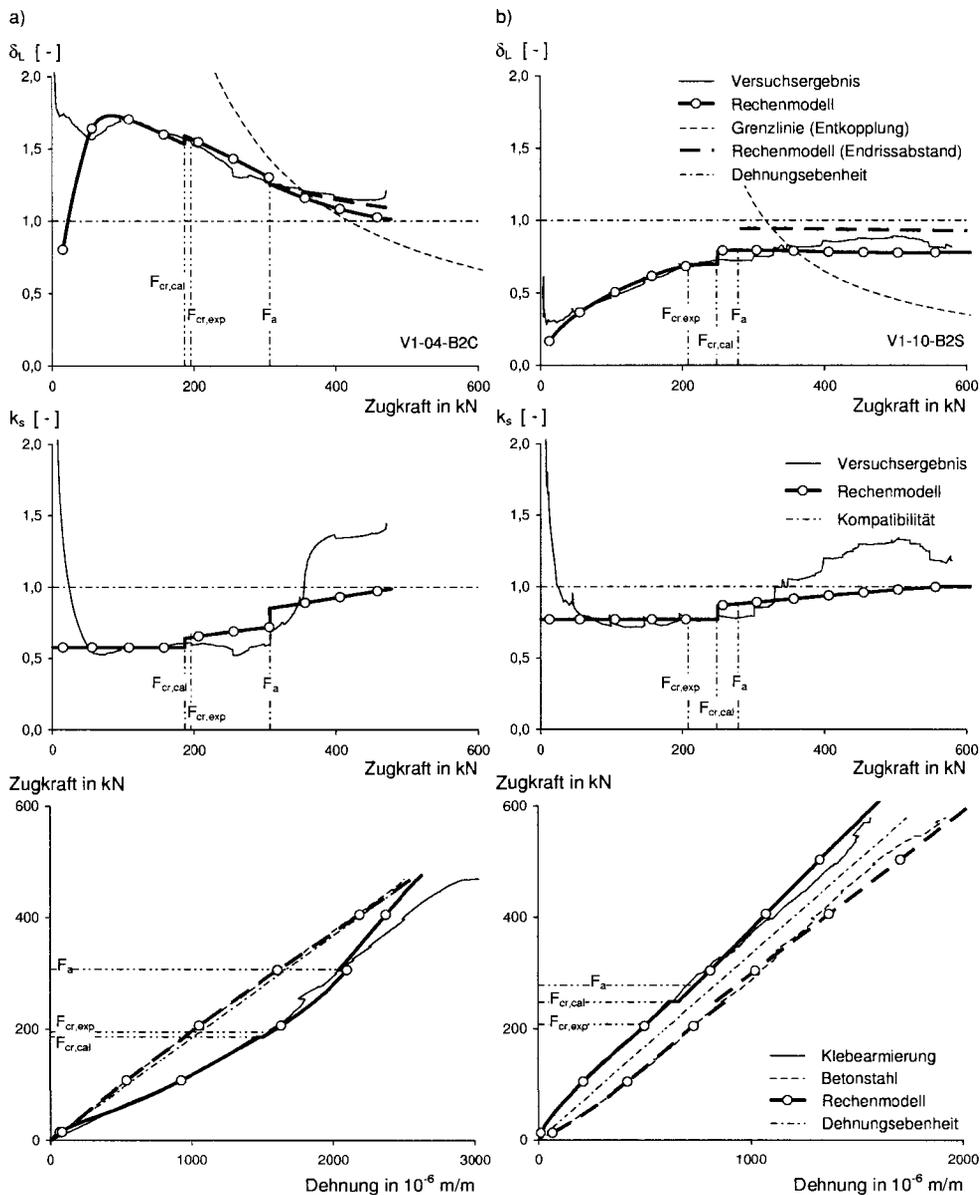
$\delta_{L,exp}(F)$	Verhältniswert der im vorgegebenen Rissquerschnitt gemessenen Dehnungen;
$\delta_{L,cal}(F)$	Rechenwert des Dehnungsverhältnisses unter Berücksichtigung der Korrekturfunktion $k_{s,cal}(F)$ nach 5.3;
$\delta_{L,lim}(F)$	Grenzlinie der Klebarmierungsentkopplung am Einzelriss nach Gl. (5.2);
$\epsilon_{Lr,exp}(F), \epsilon_{sr,exp}(F)$	im vorgegebenen Rissquerschnitt gemessene Dehnungen der Klebarmierung bzw. der einbetonierten Bewehrung (Anhang B.2: Mittelwerte der gemessenen Dehnungen einer Teilserie);
$\epsilon_{Lr,cal}(F), \epsilon_{sr,cal}(F)$	Rechenwert der Dehnung der Klebarmierung bzw. der einbetonierten Bewehrung;
$F_{cr,exp}$	Zugkraft bei Auftreten des ersten zusätzlichen Risses im Versuch;
$F_{cr,cal}$	Rechenwert der Risschnittgröße auf Grundlage der rechnerischen Zugfestigkeit $f_{ctm}$ ;
$F_a$	Rechenwert der Zugkraft bei Erreichen des abgeschlossenen Erstrissbildes.

In Anhang B.2 werden die Rechenwerte auf Grundlage der mittleren Materialkennwerte einer Teilserie ermittelt. Ergänzend werden in Abb. 5.13 folgende Größen wiedergegeben:

$k_{s,exp}(F)$	Aus den gemessenen Dehnungen rückgerechnetes Verhältnis der Relativverschiebungen $s_{Lr}/s_{sr}$ ;
$k_{s,cal}(F)$	Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung nach Gl. (5.6) (Parameter $k_{si}$ und $c_{lim}$ nach 5.3).

Für Versuche der Reihe V4 mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild wurde bereits anhand Abb. 5.12 die sowohl hinsichtlich der Wiedergabe des prinzipiellen Verhaltens als auch der zutreffenden quantitativen Abbildung der Zugkraftaufteilung zufriedenstellende Aussagequalität des Rechenmodells dargestellt. Zur Diskussion der Qualität des Rechenmodells für weitere Stadien des Rissbildungsprozesses eignen sich insbesondere die Versuche der Reihe V1. In Abb. 5.13 werden für zwei Dehnkörperversuche der Reihe V1, Versuch V1-04-B2C mit aufgeklebten CFK-Lamellen und Versuch V1-10-B2S mit Stahllaschen, die alle Rissbildungsstadien ausgehend vom Initialriss über das abgeschlossene Erstrissbild durchlaufen, Rechenwerte und Versuchsergebnisse gegenübergestellt. Die Ergebnisse erfordern eine kritische Wertung:

- **Initialrisszustand**  
Bei geringen Beanspruchungen ist der Einfluss von Streuungen des Verbundverhaltens insbesondere wegen der mit großen Unsicherheiten behafteten elastischen Verbundenergie  $G_e$  deutlich ausgeprägt (vgl. auch Abb. 5.2). Im ansteigenden Bereich der  $F$ - $\delta_L$ -Beziehung zeigen sich dem entsprechend vor allem bei Versuchen mit CFK-Lamellen z.T. signifikante Abweichungen zwischen Rechenwert und Versuchsergebnissen, deren Auswirkungen auf die rechnerischen Dehnungen aber gering bleiben. Das entwickelte Modell ist allerdings in der Lage, die Aufteilung der Zugkräfte für den gesamten Bereich des Initialrisszustand adäquat wiederzugeben.
- **Fortschreitende Rissbildung**  
Mit dem verwendeten Rissmodell ist eine Verfolgung der Rissentwicklung über das der Zugkraft  $F_a$  zugeordnete - abgeschlossene Erstrissbild hinaus nicht möglich. Die rechnerischen Rissabstände bleiben mit steigender Beanspruchung zunehmend hinter den in den Versuchen festgestellten Werten zurück. Insbesondere bei ähnlichen Einleitungslängen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung liegt  $F_a$  nur geringfügig über  $F_{cr,cal}$  (vgl. Abb. 5.13 b), damit unterscheiden sich  $s_{crm,e}$  und  $s_{crm,a}$  kaum. Zur Verdeutlichung sind in den Abbildungen 5.13 a) und b) die Rechenwerte der Dehnungsverhältnisse  $\delta_{L,cal}$  für die jeweiligen Endrissabstände dargestellt (V1-04-B2C:



**Abbildung 5.13.** Vergleich zwischen Versuchsergebnissen und Rechenwerten - Versuche der Reihe V1 mit fortschreitender Rissbildung: Verhältniszwert der Dehnungen  $\delta_L = \epsilon_{LR}/\epsilon_{SR}$ ; Verträglichkeitsbedingung  $k_s = s_{LR}/s_{SR}$ ; Dehnungen in Abhängigkeit der Zugkraft (von oben nach unten); a) Versuch V1-04-B2C; b) Versuch V1-10-B2S

$s_{crm,a} = 259 \text{ mm}$ , Endrissabstand 137 mm; V1-10-B2S:  $s_{crm,a} = 313 \text{ mm}$ , Endrissabstand 164 mm). Die Versuchsergebnisse nähern sich erwartungsgemäß zunehmend den Rechenwerten für den Endrisszustand an. Da gleichzeitig der mit  $k_{s,exp}$  bezeichnete, aus den gemessenen Zugkraftanteilen ermittelte Korrekturwert der Verträglichkeitsbedingungen über das Rechenmodell mit dem Rissabstand verknüpft ist, kann die in Abb. 5.13 a) bzw. b) dargestellte Entwicklung bei Zugkräften oberhalb  $F_a$  nicht mehr als repräsentativ angesehen werden. Wird  $k_{s,exp}$  der Endrissabstand zugrunde gelegt, ergibt sich - wie in 5.2.2 erläutert - eine Annäherung von  $k_{s,exp}$  an 1,0.

- Verbundentkopplung der Klebarmierung

Der Fortschritt der Klebeverbundentkopplung ist mit dem jeweils vorliegenden Rissabstand verknüpft. In den Abbildungen 5.13 a) und b) tritt in Entsprechung der Versuchsergebnisse während des Initialrisszustandes keine Entkopplung des Klebever-

bundes ein - die Grenzlinie  $\delta_{L,lim}$  schneidet  $\delta_{L,cal}$  im Bereich  $0 < F \leq F_{cr,cal}$  nicht. Bei Versuch V1-04-B2C setzt ab  $F = 380$  kN rechnerisch Klebeverbundentkopplung ein. Wegen des im Verbundansatz nicht abgebildeten Reibverbundes aufgeklebter Bewehrung nimmt die rechnerische Relativverschiebung nach Entkopplungsbeginn bei geringfügigem Dehnungsanstieg stark zu; in Konsequenz steigt  $k_{s,exp}$  stark an. Dem entsprechend verliert die Rechengröße  $k_{s,exp}$  nach Entkopplungsbeginn seine Aussagekraft.

Zusammenfassend ist für den Initialrisszustand wie auch für einen vorgegebenen definierten Rissabstand eine befriedigende Qualität der Abbildung des Zusammenwirkens der Bewehrungsstränge in den Dehnkörperversuchen durch das entwickelte Rechenmodell festzustellen.

Bei sukzessiver Rissbildung zeigen sich zum einen angesichts der signifikanten Streuungen der beobachteten Rissabstände, zum anderen aufgrund der durch das Rissbildungsmodell nur begrenzt nachvollziehbaren Rissbildungsprozesse z.T. deutlichere Abweichungen zwischen Rechenwert und Versuchsergebnis.

## Zusammenwirken bei biegebeanspruchten Bauteilen - Rechenmodell

### 6.1 Vorbemerkung

Das Zusammenwirken der Bewehrungsstränge in verstärkten biege- und querkraftbeanspruchten Stahlbetonbauteilen unterscheidet sich in einigen Punkten grundlegend von den Verhältnissen zentrisch gezogener Dehnkörper. Die für Spannbetonbauteile zur Untersuchung der verbundbedingten Zugkraftaufteilung entwickelten Methoden, die unmittelbar an die Verhältnisse bei Zugstäben angelehnt sind (vgl. Trost u. a. 1980; Tue 1993; Rudlof 1998), können nicht uneingeschränkt übernommen werden. Wegen des spröden Verbundverhaltens aufgeklebter Bewehrung - damit verknüpft der Problematik des Zugkraftaufbaus als Grundlage der Tragfähigkeit im Bruchzustand - muss bei klebarmierten Stahlbetonbauteilen der gesamte querkraftbeanspruchte Bereich untersucht werden. Die ausschließliche Betrachtung des höchstbeanspruchten Bereichs, damit die Adaption der Zugstabanalogie unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen, die für ein Element zwischen zwei Rissen eines Zugstabes gelten, ist dem entsprechend nicht ausreichend.

Zur Untersuchung des Zusammenwirkens der Bewehrungsstränge bei biegebeanspruchten Bauteilen müssen daher zunächst Werkzeuge geschaffen werden, die folgenden Anforderungen genügen:

- Die Anwendbarkeit der Hypothese nach *Bernoulli* kann weder in diskreten Querschnitten noch im Mittel über ein Element zwischen zwei Rissen vorausgesetzt werden.
- Angesichts der Abhängigkeit von Zugkraftaufbau und Verbundentkopplung des Klebarmierungsstranges von den Risslagen müssen Risse diskret abgebildet werden.
- Das Verbundverhalten der Bewehrungsstränge muss ausreichend wirklichkeitsnah wiedergegeben werden.
- In Elementen zwischen zwei Rissen gelten Symmetriebedingungen nur mehr eingeschränkt; *per se* identische Symmetrieebenen einbetonierter und angeklebter Bewehrung können nicht mehr vorausgesetzt werden;

Zur rechnerischen Abbildung eines biege- und querkraftbeanspruchten Bauteils, die die genannten Anforderungen erfüllt, stehen verschiedene Wege offen. Grundsätzlich geeignet sind Berechnungssysteme auf Grundlage der Methode der Finiten Elemente. Allerdings machen die bislang fehlenden allgemeingültigen kontinuumsmechanischen, d.h. stoffgesetzlichen Formulierungen des Verbundverhaltens der Bewehrungsstränge einen Rückgriff auf Hilfsmittel zur Modellierung des Verbundes - etwa Kontaktelemente oder nichtlineare Federelemente - erforderlich. Für ausreichend aussagekräftige Rechenergebnisse ist eine feine Diskretisierung des Verbundbereichs mit Elementgrößen angelehnt an das Größtkorn des Betons erforderlich (vgl. Eibl und Ivanyi 1976; Keuser 1985); ein Umstand der bei der Abbildung praxisnaher Strukturen beträchtlichen Rechenaufwand bedeutet.

Vor diesem Hintergrund wurde zur Abbildung verstärkter Bauteile ein eigenes Programmsystem entwickelt. Das Rechenmodell basiert auf der Verknüpfung von Makroelementen, die i.A. den Elementen zwischen zwei Rissen entsprechen.

Die Makroelemente bauen auf wirklichkeitsnahen Formulierungen der Material- und Verbundmodelle nach Kapitel 4 in Form analytischer bzw. numerischer Ansätze auf und erfüllen auf Elementebene alle Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen.

Die Verknüpfung der Makroelemente erfolgt über Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen in den diskreten Rissquerschnitten. Der Dehnungs- und Relativverschiebungszustand der Bewehrungsstränge wie auch der Dehnungszustand des Druckgurtes werden iterativ ermittelt.

Das als modulares Programmsystem entwickelte Rechenmodell basiert auf der Sprache VISUAL BASIC und verwendet MS-EXCEL-Dateien bzw. Tabellenblätter und Diagramme zur Ein- und Ausgabe der Daten bzw. zur Zwischenspeicherung von Datenbasen und Verbundmatrizen.

Das entwickelte Programmsystem wird anhand einer Nachrechnung von Versuchen an biegebeanspruchten, verstärkten Bauteilen überprüft. Zur Verifikation stehen primär die in (Zilch u. a. 2004) (vgl. 3) dokumentierten experimentellen Untersuchungen an Plattenstreifen zur Verfügung. Darüber hinaus werden in der Literatur dokumentierte Versuche nachvollzogen.

In den folgenden Abschnitten werden die Grundzüge der numerischen Abbildung verstärkter biegebeanspruchter Bauteile, grundlegende Annahmen und Grenzen des Rechenmodells umrissen. Die rechentechnische Umsetzung wird in 6.4 beschrieben.

## 6.2 Grundzüge der Modellierung

### 6.2.1 Umfang, Systemkenngrößen

Mit dem entwickelten Programmsystem können Einfeldträger mit statisch bestimmter Lagerung und beliebiger Belastung abgebildet werden. Die Lasten werden als Vektoren der nach Elastizitätstheorie berechneten Schnittgrößen an den Elementrändern verarbeitet (Gl. 6.1)<sup>1</sup>.

$$\mathbf{P}^{ij} = \begin{Bmatrix} N^{ij} \\ V^{ij} \\ M^{ij} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

Es werden ausschließlich statische, kurzzeitig wirkende Beanspruchungen berücksichtigt; die Auswirkungen langandauernder und wiederholter Belastungen auf die Zugkraftaufteilungen können mit dem Rechenmodell nicht unmittelbar verfolgt werden.

Unter der Voraussetzung über die Systemlänge konstanter Querschnitte und statischer Höhen aller Bewehrungsstränge können beliebige Rechteck- und Plattenbalkenquerschnitte der Berechnung zugrunde gelegt werden. Je Bewehrungsstrang - einbetonierte und angeklebte Biegezugbewehrung sowie einbetonierte Druckbewehrung - wird eine Lage berücksichtigt; mehrere Lagen einbetonierten Betonstahls z.B. bei hochbewehrten Balken werden näherungsweise über den mittleren Hebelarm erfasst.

Die verwendeten Material- und Verbundmodelle erlauben die Verfolgung des gesamten Beanspruchungsbereiches bis zum Tragwerksversagen. Folgende Versagensmechanismen können nachvollzogen werden:

- Verbundversagen der Klebarmierung am Endauflager (auflagnächster Biegeriss) bzw. im querkraftbeanspruchten Bereich
- Verbundversagen der einbetonierten Bewehrung
- Zugbruch der Bewehrungsstränge

<sup>1</sup> Der Darstellung in Abb. 6.1 entsprechend bezeichnet der Hochzeiger  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  das jeweilige Element, während der Hochzeiger  $j$  mit  $j = 1$  bzw.  $2$  das betrachtete Rissufer bzw. die dem Rissufer zugeordnete Einleitungs- bzw. Einflusslänge beschreibt. Durch  $n$  wird die Anzahl der Elemente bis zur Systemymmetrieachse beschrieben.

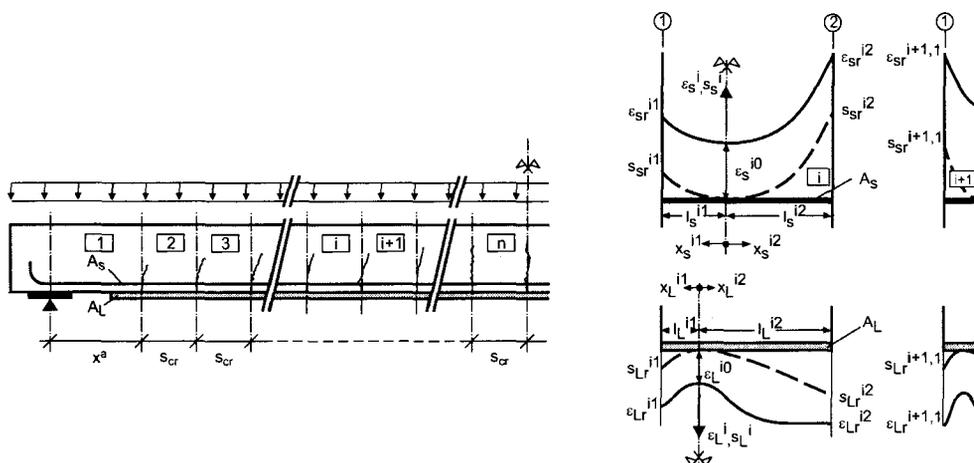


Abbildung 6.1. Rechenmodell - Elementierung, Bezeichnungen eines Elementes

- Versagen der Betondruckzone

Der Modellierungsstrategie entsprechend können einzelne Trag- und Versagensmechanismen klebarmierter Biegebauteile nicht abgebildet werden:

- Auswirkungen geklebter Laschenbügel auf das Verbundtragverhalten
- Versagen durch vollständiges Abschälen der Betondeckung der einbetonierten Bewehrung einschließlich der Klebarmierung ausgehend vom Laschen- bzw. Lamellenende (sog. Versatzbruch; vgl. Jansze 1997)
- Versagen durch Verbundbruch der Klebarmierung ausgelöst durch einen Schubrissversatz (vgl. Kaiser 1989; Zilch u. a. 2000)

Die beiden letztgenannten Mechanismen können gegenüber den im entwickelten Modell abgebildeten Versagensformen gegebenenfalls zu beträchtlich verminderten Bruchlasten führen.

### 6.2.2 Annahmen und Idealisierungen

Neben den bereits in 6.2.1 genannten Einschränkungen bei der Abbildung von Querschnitten und Systemen wird von folgenden Annahmen und Idealisierungen ausgegangen:

- Träger und Belastung besitzen eine gemeinsame Symmetrieebene.
- Bei biegebeanspruchten Bauteilen treten zwischen äußerstem Riss und höchstbeanspruchtem Querschnitt mehrere Rissbildungsphasen nebeneinander auf; dem entsprechend nehmen abhängig von System, Belastungsart und Momentengradienten die Rissabstände zu den Auflagern hin tendenziell zu (vgl. Niedermeier 2001). Im Rechenmodell können allerdings ausschließlich konstante Rissabstände zwischen den auflagernächsten Rissen abgebildet werden.
- Dem Vorgehen bei der Auswertung von Verbundversuchen und Dehnkörpern entsprechend, gilt für die Dehnsteifigkeit des Betons im Zuggurt  $E_c A_c \rightarrow \infty$ . In Konsequenz gilt für die Integration der Bewehrungsdehnungen über die jeweiligen Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  bzw.  $l_L^{ij}$  ausgehend vom Verschiebungsruhepunkt  $x_s^{ij} = 0$  bzw.  $x_L^{ij} = 0$  Gl. (6.2)

$$\int_{l_s^{ij}} \epsilon_s dx_s = s_{sr}^{ij} \quad \int_{l_L^{ij}} \epsilon_L dx_L = s_{Lr}^{ij} \quad (6.2)$$

- Die Dehnungsverteilung im Rissquerschnitt und damit die Druckzonenhöhe ist wegen der nicht mehr zutreffenden Hypothese nach *Bernoulli* nicht mehr an diskrete Rissdehnungen der Bewehrungsstränge gekoppelt. Die *a priori* unbekanntenen Druckzonenhöhen an den Elementrändern werden zunächst über eine Querschnittsberechnung unter Annahme ebener Querschnitte festgelegt. Bedingt durch Zugkraftumlagerungen zwischen Bewehrungssträngen mit unterschiedlichen Hebelarmen ergeben

sich im Laufe der iterativen Berechnung veränderte resultierende Druckkräfte, für die eine wiederholte Neuberechnung von Betonrandstauchung und Schwerpunkt der Betondruckzone erfolgt.

- Sofern bei aufgeklebten Stahllaschen beide Bewehrungsstränge im höchstbeanspruchten Querschnitt die Streckgrenzdehnung überschreiten, ist durch die Ausbildung eines plastischen Gelenkes die Systemtraglast erreicht. Anschließende Laststeigerungen durch die Einschnürung der Druckzone bleiben unberücksichtigt.

Im Gegensatz zu Programmsystemen, die für die Berechnung von Spannbetonbauteilen bei Berücksichtigung unterschiedlicher Verbundeigenschaften entwickelt wurden - z.B. nach (Li 1995) oder (Rebentrost und Warner 2002) - wird hier in der Formulierung von Algorithmen für keinen der beiden Bewehrungsstränge die Hypothese nach *Bernoulli* vorausgesetzt.

### 6.2.3 Grenzen des Rechenmodells

Das entwickelte Programmsystem ist nicht in der Lage, den Rissbildungsprozess vom Erstriss bis hin zum abgeschlossenen Rissbild in Abhängigkeit der Lage des betrachteten Querschnitts zum höchstbeanspruchten Querschnitt abzubilden. Wie erläutert, können lediglich diskrete Risslagen bei konstanten Abständen abgebildet werden. Die Auswirkungen verschiedener, allerdings im gerissenen Bereich des Bauteils jeweils konstanter Rissabstände wird im Rahmen einer Parameterstudie in Kapitel 7 dargestellt.

Die Modellierung sukzessiver, belastungsabhängiger Rissbildung ist allerdings nur sinnvoll, wenn gleichzeitig das verbundhysteretische Verhalten einbetonierter und aufgeklebter Bewehrung abgebildet wird. Derzeit existieren zumindest für Klebarmierung keine geeigneten Modelle zur Abbildung von Verbundschädigungen bzw. Auswirkungen bei Umkehr der Relativverschiebungen. Entsprechend ist eine von der Belastung entkoppelte Vorgabe diskreter Risse ausreichend.

Einflüsse lokaler Effekte auf das Verbundverhalten der Bewehrungsstränge werden - wie in 5.2.3 für zentrisch zugbeanspruchte Bauteile erläutert - nicht explizit über Verbundmodelle berücksichtigt, sondern fließen summarisch über Verträglichkeitsbedingungen ein.

## 6.3 Konzeption des Rechenmodells - Kompatibilitätsbedingungen

### 6.3.1 Elementierung

Als Folge der Einteilung eines Bauteils in Elemente zwischen diskreten Rissen müssen die jeweils unterschiedlichen Randbedingungen durch spezifische Elementformulierungen erfasst werden. Zur Abbildung biegebeanspruchter Bauteile stehen folgende Elementtypen zur Verfügung (Abb. 6.2):

- Endauflager:  
Zur Abbildung des Endauflagerbereichs liegen zwei Elementtypen vor - als einzelnes Element (EA-1) bzw. als gekoppeltes Element, sofern am Ende des Klebarmierungselementes mit Biegerissbildung zu rechnen ist (EA-2). Für den Rissquerschnitt ① gilt die Hypothese nach *Bernoulli* streng. Die Systemrandbedingungen nach 6.3.2 werden in der Formulierung der Elemente berücksichtigt.
- Bereich zwischen Endauflager und Symmetrieachse:  
Der Bereich veränderlicher bzw. konstanter Biegemomente wird durch ein allgemein formuliertes Risselement mit zwei gleichwertigen Elementrändern ① und ② dargestellt (RE).
- Symmetrieachse:  
In Abhängigkeit der Lage der Symmetrieachse zu den Rissquerschnitten - Symmetrieachse im Riss ② (SA-1) bzw. in der Mitte zwischen zwei Rissen (SA-2) - liegen zwei verschiedene Elemente vor. Es gelten die Kompatibilitätsbedingungen auf Systemebene nach 6.3.2

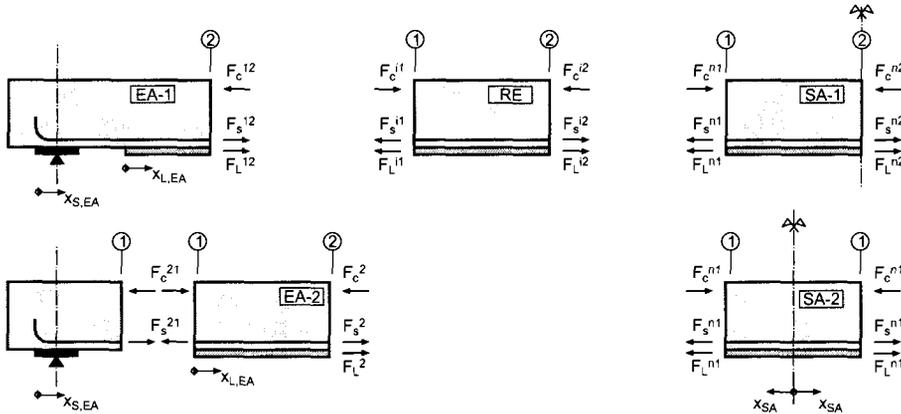


Abbildung 6.2. Verfügbare Elemente des Rechenmodells zur Abbildung biegebeanspruchter Bauteile

### 6.3.2 Kompatibilitätsbedingungen auf Systemebene

Auf Systemebene können für die Bewehrungsstränge lediglich in jeweils zwei Querschnitten allgemeinen Kompatibilitätsbedingungen angegeben werden.

Da die Klebarmierung i.A. vor dem Auflager endet und definitionsgemäß nicht durch mechanische Hilfsmittel verankert ist, gelten die Randbedingungen nach den Gln. (6.3) und (6.4).

$$s_L(x_{L,EA} = 0) \neq 0 \tag{6.3}$$

$$\epsilon_L(x_{L,EA} = 0) = 0 \tag{6.4}$$

Abhängig vom Verankerungstyp (Abb. 6.3) gelten für einbetonierten Betonstahl die Gln. (6.5) bis (6.8).

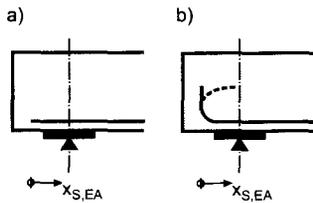


Abbildung 6.3. Endverankerung der Betonstahlbewehrung

für gerade Stabenden:

$$s_s(x_{s,EA} = 0) \neq 0 \tag{6.5}$$

$$\epsilon_s(x_{s,EA} = 0) = 0 \tag{6.6}$$

für Endhaken, Verankerungselemente, etc.:

$$s_s(x_{s,EA} = 0) = 0 \tag{6.7}$$

$$\epsilon_s(x_{s,EA} = 0) \neq 0 \tag{6.8}$$

Die auf i.w.S. mechanische Endverankerungen bezogenen Randbedingungen nach (6.7) und (6.8) setzen als Ursprung des globalen Bewehrungsstrang-Koordinatensystems  $x_s$  einen fiktiven Verschiebungsruehpunkt voraus.

In der Symmetrieachse des Gesamtsystems gelten abhängig von der Lage zu einem Rissquerschnitt folgende Rand- bzw. Kompatibilitätsbedingungen (vgl. Abb. 6.2):

Symmetrieachse liegt im Rissquerschnitt:

$$s_s^{n2} = s_s^{n+1,1} \tag{6.9}$$

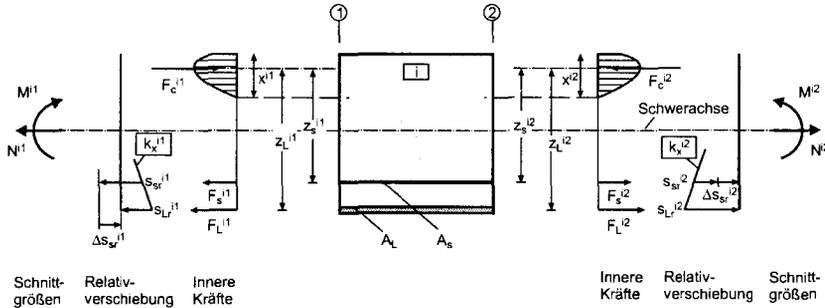
$$s_L^{n2} = s_L^{n+1,1} \tag{6.10}$$

Symmetrieachse in der Mitte zwischen zwei Rissquerschnitten:

$$s_s(x_{s,SA} = 0) = s_L(x_{L,SA} = 0) = 0 \tag{6.11}$$

### 6.3.3 Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen auf Elementebene

Zur numerischen Abbildung eines Elementes zwischen zwei Rissen werden die im folgenden für ein allgemeines Element im querkraftbeanspruchten Bereich vorgestellten grundlegenden Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen verwendet (Abb. 6.4). Durch Berücksichtigung der Rand- und Verträglichkeitsbedingungen auf Systemebene nach 6.3.2 werden für EA- und SA-Elemente die jeweils auf Elementebene formulierten Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen vereinfacht<sup>2</sup>.



**Abbildung 6.4.** Innere Kräfte und Relativverschiebungen an den Rändern eines Elementes (Druckbewehrung nicht dargestellt)

Grundsätzlich sind die Gleichgewichtsbedingungen an den Elementrändern zu erfüllen. Der Übersichtlichkeit halber werden die Zusammenhänge ohne Berücksichtigung der Auswirkungen von Querkraftbeanspruchungen auf die Zuggurtkräfte dargestellt.

$$\sum M^{ij} : F_s^{ij} \cdot z_s^{ij} + F_L^{ij} \cdot z_L^{ij} + F_{s2}^{ij} \cdot z_{s2}^{ij} \equiv M^{ij} \tag{6.12}$$

$$\sum N^{ij} : F_s^{ij} + F_L^{ij} - F_c^{ij} - F_{s2}^{ij} \equiv N^{ij} \tag{6.13}$$

Die Betrachtung des verschieblichen Verbundes der Bewehrungsstränge folgt ebenfalls grundlegenden Gleichgewichtsbedingungen. Die Verbundspannungen und Dehnungen der Bewehrungsstränge werden über die Gln. (6.14) und (6.15) verknüpft (vgl. Abb. 6.1).

$$\epsilon_s^{ij} = \frac{4}{E_s d_s} \int_0^{x^{ij}} \tau_s dx^{ij} + \epsilon_s^{i0} \rightarrow \epsilon_{sr}^{ij} = \frac{4}{E_s d_s} \int_0^{l_s^{ij}} \tau_s dx^{ij} + \epsilon_s^{i0} \tag{6.14}$$

$$\epsilon_L^{ij} = \frac{1}{E_L t_L} \int_0^{x^{ij}} \tau_L dx^{ij} + \epsilon_L^{i0} \rightarrow \epsilon_{Lr}^{ij} = \frac{1}{E_L t_L} \int_0^{l_L^{ij}} \tau_L dx^{ij} + \epsilon_L^{i0} \tag{6.15}$$

### Kopplung der Bewehrungsstränge in den Rissquerschnitten - Kompatibilitätsbedingungen

Zur Kopplung der Relativverschiebungen der Betonstahlbewehrung  $s_{sr}^{ij}$  an die der Klebarmierung  $s_{Lr}^{ij}$  an den Rissufern  $j$  des Elementes  $i$  wird eine verallgemeinerte Koppelbedingung  $k_x^{ij}$  nach Gl. (6.16) eingeführt.

$$k_x^{ij} = \frac{s_{Lr}^{ij}}{s_{sr}^{ij} + \Delta s_{sr}^{ij}} \tag{6.16}$$

Für querkraftbeanspruchte Bereiche von Biegeträgern wurde in 4.5.3 als Kopplungsbedingung die Verträglichkeit der rechnerischen Rissbreiten ermittelt (Gl. 4.72); für Bereiche mit reiner Biegung ist eine Konkretisierung als idealisierte Verträglichkeitsbedingung der Relativverschiebungen im Rissquerschnitt mit Bezug auf eine mittlere Nulllinienlage  $x^*$  möglich (Gl. 4.70). Durch  $\Delta s_{sr}^{ij}$  werden Differenzverschiebungen zwischen den Bewehrungssträngen, die sich aus der Erfüllung der Kompatibilität am Gesamtsystem ergeben,

<sup>2</sup> In den folgenden Abschnitten gilt für alle Gleichungen  $i, j = \text{const.}$ ; die Indizes werden nicht im Sinne einer Tensornotation verwendet.

in der Elementberechnung berücksichtigt. Die Verträglichkeit der rechnerischen Rissbreiten wird über  $\Delta s_{sr}^{ij}$  auf die Verträglichkeit der Relativverschiebungen am Elementrand zurückgeführt.

$$\frac{w_L}{w_s} = \frac{d_L - \tilde{x}}{d - \tilde{x}} \quad \rightarrow \quad \frac{s_{Lr}}{s_{sr}} = \frac{d_L - x^*}{d - x^*}$$

Für eine Abbildung des Zusammenwirkens im Rechenmodell müssen zusätzliche lokale Effekte in der Form der aus Dehnkörperversuchen abgeleiteten Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung einbezogen werden. Der Modellierung werden folgende Annahmen bzw. Zusammenhänge zugrunde gelegt:

- Die Veränderung der Druckzonenhöhe zwischen zwei Rissquerschnitten ist angesichts der insbesondere bei abgeschlossenem Erstrissbild begrenzten eingetragenen Verbundkraft von untergeordneter Bedeutung. Als ausreichend realistische Näherung wird die Verträglichkeitsbedingung auf die Nulllinienlage im Rissquerschnitt bezogen.
- In einem Rissquerschnitt gelten an beiden Rissufern identische Verträglichkeitsbedingungen - ausgedrückt durch identische Faktoren  $k_x \rightarrow k_x^{i,2} = k_x^{i+1,1}$ . Die Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung  $k_s$  nach Gl. (5.6) nimmt Bezug auf die dem Rissquerschnitt zugeordneten Dehnungen; für jedes Rissufer kann ein separater Korrekturwert ermittelt werden, der zur Erfüllung der genannten Bedingung für den Rissquerschnitt gemittelt wird (Gl. 6.17).

$$k_s^{ij} = k_s = \frac{1}{2} \cdot (k_s^{i,2} + k_s^{i+1,1}) \quad (6.17)$$

Die mit  $k_s^{ij}$  multipliziert modifizierte, verallgemeinerte Verträglichkeitsbedingung folgt Gl. (6.18).

$$k_x^{ij} = k_s^{ij} \cdot \frac{d_L^{ij} - x^{ij}}{d^{ij} - x^{ij}} \quad (6.18)$$

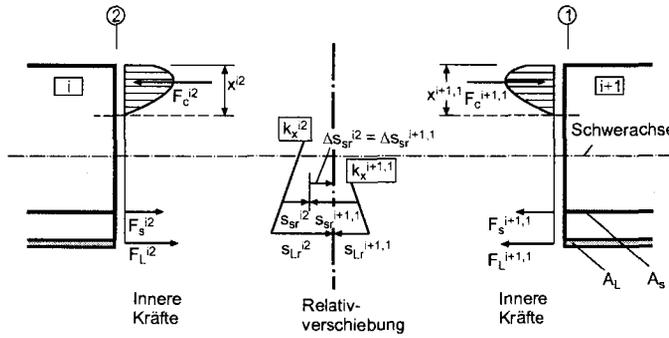
Bei hohen Beanspruchungen gilt  $k_s \rightarrow 1$ ; für die rechnerischen Rissbreiten auf Höhe der Bewehrungsstränge folgt über  $k_x^{ij}$  in diesem Fall eine lineare Abhängigkeit vom Abstand zur Nulllinie des gerissenen Querschnittes.

Ergänzend sei angemerkt, dass die aus Dehnkörperversuchen abgeleitete Korrekturfunktion  $k_s$  der Kompatibilitätsbedingung zunächst für Dehnungs- und Relativverschiebungszustände gilt, die eine Symmetrieebene im Rissquerschnitt besitzen. Bei biegebeanspruchten Bauteilen in Bereichen mit  $V \neq 0$  können diese Symmetriebedingungen nicht mehr vorausgesetzt werden. Darüber hinaus werden bei Biegebeanspruchung durch einen ggf. möglichen gegenseitigen Versatz der Relativverschiebungen - im Rechenmodell durch die Größe  $\Delta s_{sr}^{ij}$  berücksichtigt - die bei Dehnkörpern eindeutige Zuordnung der Relativverschiebungsgrößen der Bewehrungsstränge aufgehoben. Die Verwendung von  $k_s$  ist als Näherung zu werten, die allerdings angesichts der grundsätzlich auftretenden Streuungen zulässig erscheint.

#### 6.3.4 Kopplung der Elemente

Die Kopplung der einzelnen Elemente als Grundlage der Berechnung des Gesamtsystems erfolgt zum einen über Kompatibilitätsbedingungen der Dehnungen bzw. über Gleichgewicht zwischen inneren Kräften und äußeren Schnittgrößen, zum anderen über Verträglichkeitsbedingungen der Relativverschiebungen in den diskreten Rissquerschnitten (Abb. 6.5).

Die Gleichgewichtsbedingungen zwischen inneren Kräften und äußeren Schnittgrößen ist *per se* durch die Gln. (6.12) und (6.13) festgelegt. Allerdings können sie bei Abkehr von der Hypothese nach *Bernoulli* nicht mehr als eindeutiges Kriterium zur Kopplung der Elemente untereinander dienen, da nahezu beliebige Kombinationen der Kräfte gefunden werden können, die die Gln. (6.12) und (6.13) erfüllen. Als hinreichendes Kriterium zur Kopplung der Elemente muss dem entsprechend die Kompatibilität der Kräfte bzw. der



**Abbildung 6.5.** Kopplung der Elemente in den Rissquerschnitten - Gleichgewicht der inneren Kräfte und Kompatibilität der Relativverschiebungen

Dehnungen im Rissquerschnitt verwendet werden. Ausgedrückt durch die Vektoren der inneren Kräfte folgt Gl. (6.19).

$$\mathbf{F}^{i2} = \begin{Bmatrix} F_s^{i2} \\ F_L^{i2} \\ F_c^{i2} \\ F_{s2}^{i2} \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{F}^{i+1,1} = \begin{Bmatrix} F_s^{i+1,1} \\ F_L^{i+1,1} \\ F_c^{i+1,1} \\ F_{s2}^{i+1,1} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

Zur iterativen Berechnung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes ist die Kompatibilitätsbedingung auf Grundlage diskreter Rissdehnungen der Bewehrungsstränge anzugeben (vgl. 6.4):

$$\epsilon_r^{i2} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{sr}^{i2} \\ \epsilon_{Lr}^{i2} \end{Bmatrix} = \epsilon_r^{i+1,1} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{sr}^{i+1,1} \\ \epsilon_{Lr}^{i+1,1} \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Damit verknüpft ist die Identität der die Druckzone beschreibenden Parameter  $x^{i2}$  und  $x^{i+1,1}$  bzw. der Hebelarme der Bewehrungsstränge.

Die Kompatibilität der Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge entspricht unter der Annahme  $E_c A_c \rightarrow \infty$  einer Kopplung der rechnerischen Rissöffnungen in Höhe der Bewehrungslagen. Mit der verallgemeinerten Koppelbedingung der Relativverschiebungen  $k_x^{ij}$  folgt die Verträglichkeitsbedingung mit Gl. (6.21) (vgl. Abb. 6.5).

$$(s_{sr}^{i2} + \Delta s_{sr}^{i2}) \cdot k_x^{i2} + (s_{sr}^{i+1,1} + \Delta s_{sr}^{i+1,1}) \cdot k_x^{i+1,1} = s_{Lr}^{i2} + s_{Lr}^{i+1,1} \quad (6.21)$$

Unter der Voraussetzung der Verschiebungskompatibilität im Rissquerschnitt, d.h. der Verträglichkeit der rechnerischen Rissbreiten, muss Gl. (6.22) erfüllt sein. Entsprechend gilt bei Summation über alle Elemente Gl. (6.23).

$$\Delta s_{sr}^{i,2} + \Delta s_{sr}^{i+1,1} = 0 \quad (6.22)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \Delta s_s^{ij} = 0 \quad (6.23)$$

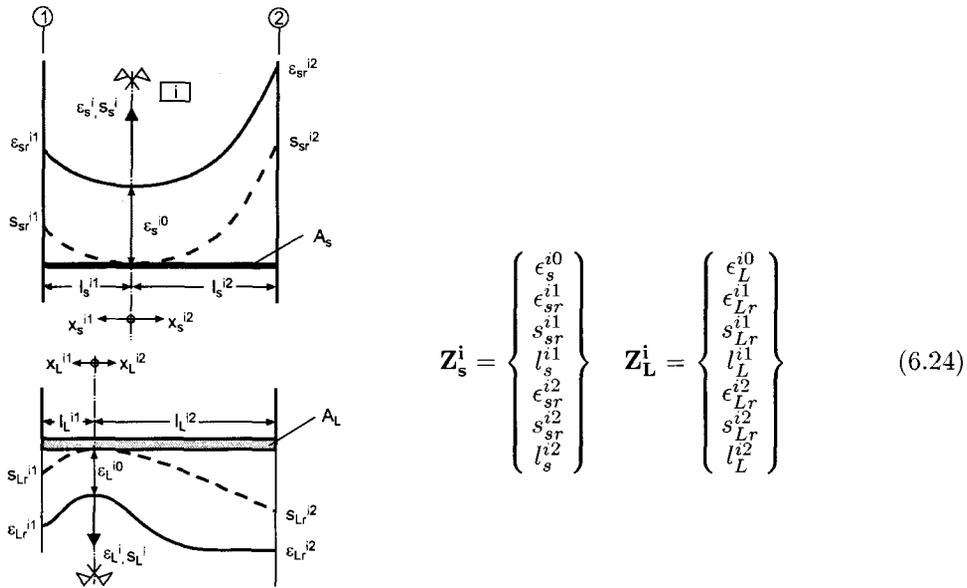
Die Bedingungen (6.22) und (6.23) können zweckmäßig als Konvergenzkriterien der Berechnung verwendet werden.

### 6.3.5 Dehnungs- und Verschiebungszustände der Bewehrungsstränge auf Elementebene

#### Allgemeines

Für ein allgemein formuliertes Risselement im querkraftbeanspruchten Bereich eines verstärkten Bauteils können die Dehnungs- und Relativverschiebungszustände der beiden Bewehrungsstränge nach Abb. 6.6 dargestellt werden. Da verbundhysteretisches Verhalten generell vernachlässigt wird, kann zu beiden Seiten des jeweiligen Verschiebungsrhepunts von identischen Verbundverhältnissen ausgegangen werden; damit wird eine

begrenzte Verwendung von jeweils auf einen Strang bezogenen Symmetriebedingungen möglich. Der Dehnungs- und Verschiebungszustand der Stränge wird durch Zustandsvektoren  $\mathbf{Z}_s^i$  und  $\mathbf{Z}_L^i$  eindeutig beschrieben (Gl. 6.24). Zur Abbildung des Endauflagers (Elemente EA-1, EA-2) und des Bereichs der Systemsymmetrieachse (Element SA-2) werden die Elemente der Zustandsvektoren den Bedingungen nach den Gln. (6.3) bis (6.11) entsprechend reduziert.



**Abbildung 6.6.** Dehnungs- und Relativverschiebungszustand der Bewehrungsstränge im Element

Für Klebarmierung sind in allen Beanspruchungsbereichen die Einleitungslängen über  $l_L^{i1} + l_L^{i2} = l_r^i$  gekoppelt, während angesichts der hohen Anfangsverbundsteifigkeit einbetonierter gerippter Betoustahlbewehrung diskrete Einleitungslängen angegeben werden können. Für geringe Beanspruchungen (Einzelrisszustand) sind  $l_s^{i1}$  und  $l_s^{i2}$  unabhängig voneinander.

Durch Vorgabe von jeweils zwei unabhängigen Größen der Zustandsvektoren ist bei bekannten Verbundansätzen der Dehnungs- und Relativverschiebungszustand der Bewehrungsstränge eindeutig festgelegt. Sofern die Koppelbedingungen  $k_z^{ij}$  und  $\Delta s_{sr}^{ij}$  bekannt sind, ist die Vorgabe von zwei unabhängigen Größen eines Bewehrungsstranges für die vollständige Festlegung der beiden Zustandsvektoren  $\mathbf{Z}_s^i$  und  $\mathbf{Z}_L^i$  ausreichend.

Grundsätzlich kann zur Berechnung der Zustandsvektoren bei Vorgabe zweier unabhängiger Größen für allgemeine Verbundansätze ein numerisch-iteratives Vorgehen auf Grundlage der schrittweisen Integration der Dehnungszustände entlang der Verbundlängen genutzt werden. Angesichts der rechenzeitintensiven Algorithmen werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit für Klebarmierung und einbetonierten glatten Betonstahl sowie in Teilbereichen für gerippte Betonstahlbewehrung analytische Lösungen der DGL des verschieblichen Verbundes genutzt.

In Anhang C.1 werden für den Regelfall der gekoppelten Betrachtung der Bewehrungsstränge eines Elementes zwischen zwei Rissen bei vollständig elastischem Materialverhalten von Betonstahl und Klebarmierung sowie bei Verwendung des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_L^i$  als Steuergröße der Berechnung analytische bzw. auf Energiebetrachtungen basierende Lösungen der möglichen Dehnungs- und Verschiebungszustände zusammenfassend dargestellt. Bei abweichenden Randbedingungen, z.B. wenn ein Bewehrungsstrang an einem Rissufer die Streckgrenze überschreitet, werden darüber hinaus gehende Lösungen erforderlich, die aus Gründen der Übersichtlichkeit hier nicht wiedergegeben werden.

### 6.3.6 Einfluss der Querkraft auf die Gurtkräfte

In querkraftbeanspruchten Trägerabschnitten werden die Zug- und Druckgurtkräfte durch die Querkraft beeinflusst. Zunächst ist zwischen Bauteilen mit und ohne Querkraftbewehrung sowie zwischen Trägerabschnitten mit parallelen Druckfeldern und Störbereichen - Lasteinleitungsbereichen, Auflager, etc. - zu unterscheiden.

#### Allgemeine Zusammenhänge

Die Schubtragmechanismen eines Bauteils ohne Querkraftbewehrung bzw. deren Auswirkungen auf die Gurtkräfte können anhand des Zahnmodells nach (Reineck 1990) angegeben werden. Neben dem über die Druckzone übertragenen Querkraftanteil werden durch die Verzahnung der Rissufer der um  $\beta_R$  geneigten Schubrisse, die Dübelwirkung der Zugbewehrung und durch die Einspannung des Betonzahns in der Druckzone weitere Anteile der einwirkenden Querkraft durch den Zuggurt abgetragen. Aus Gleichgewichtsbedingungen ist abzuleiten, dass aus allen Schubtragmechanismen Längskräfte in den Gurten entstehen, die den Gurtkräften aus Längsbiegung überlagert werden. Die durch die einzelnen Mechanismen abgetragenen Querkraftanteile sind abhängig vom Lastniveau; im Wesentlichen werden zwei Phasen durchlaufen, die sich insbesondere durch die Aufteilung der Querkraft auf Zug- und Druckzone unterscheiden. In der ersten Phase bis zum Versagen der Zahneinspannung, d.h. des entlang der Nulllinie annähernd parallel zum Druckrand fortgesetzten Schubrissswachstums, wird die Querkraft v.a. in der Druckzone abgetragen, während in der zweiten Phase größere Querkraftanteile auf die Zugzone umgelagert und insbesondere durch Rissuferverzahnung aufgenommen werden (vgl. Reineck 1990).

Der Betrachtung querkraftbewehrter Bauteile wird i.A. - zurückgehend auf *Ritter* und *Mörsch* - ein Fachwerkinodell zugrunde gelegt. In Kombination mit dem Zahnmodell nicht querkraftbewehrter Bauteile leitet u.a. *Reineck* das sog. Fachwerkmodell mit Rissreibung ab (vgl. Reineck 2001). In Analogie zum Zahnmodell sind die Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft unmittelbar über Gleichgewichtsbedingungen über die - aus den um  $\beta_R$  geneigten Rissen bzw. aus dem um  $\Theta \neq \beta_R$  geneigten Druckstreben resultierenden - Kraftkomponenten abzuleiten.

#### Gurtkräfte aus Querkraft im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Auf Grundlage der Fachwerktheorie sind bei enger Staffellung bzw. Überlagerung einzelner Fachwerke die Gurtkräfte eines querkraftbewehrten Stahlbetonbauteils infolge der um den Winkel  $\Theta$  geneigten Druckstreben im Bereich zwischen Störstellen - im nach (Schlaich und Schäfer 2001) so genannten „B-Bereich“ - nach Gl. (6.25) bzw. bei lotrechten Bügeln nach Gl. (6.26) zu bestimmen.

$$\Delta F_s = \frac{V}{2}(\cot \Theta - \cot \alpha) \quad \Delta F_c = -\frac{V}{2}(\cot \Theta - \cot \alpha) \quad (6.25)$$

$$\Delta F_s = \frac{V}{2} \cot \Theta \quad \Delta F_c = -\frac{V}{2} \cot \Theta \quad (6.26)$$

Die Überlagerung von Fachwerken entspricht im Ergebnis der Betrachtung auf Basis von Spannungsfeldern, z.B. nach (Marti u. a. 1999). Gleichung (6.26) gilt sinngemäß auch für Bauteile ohne Querkraftbewehrung. Störbereiche können u.a. nach (Marti u. a. 1999) über fächerförmige Druckfelder - gleichbedeutend mit einer zur Störstelle hin sukzessive ansteigenden Druckfeldneigung - abgebildet werden.

Zentrale Bedeutung für die Ermittlung der Gurtkraftanteile aus Querkraft in Tragwerksbereichen mit parallelen Druckfeldern kommt hierbei der Druckfeldneigung  $\Theta$  zu. Für die Bemessung von Stahlbetonbauteilen im Grenzzustand der Tragfähigkeit werden folgende Druckfeldneigungen zur Anrechnung der Querkraftauswirkungen auf die Gurtkräfte angegeben:

- Bauteile ohne Querkraftbewehrung (nach Reineck 1999):

$$\cot \Theta = 1,16 \quad (6.27)$$

- Querkraftbewehrte Bauteile (nach DIN 1045-1 2001):

$$\text{allgemein: } 0,58 \leq \cot \Theta \leq \frac{1,2 - 1,4\sigma_{cd}/f_{cd}}{1 - V_{Rd,c}/V_{Ed}} \quad (6.28)$$

$V_{Rd,c}$  Bemessungswert des Betontraganteils eines Querschnittes mit Querkraftbewehrung (i.W. Anteil aus Rissreibung)

$V_{Ed}$  Bemessungswert der einwirkenden Querkraft

$$\text{vereinfachend für reine Biegung: } \cot \Theta = 1,2 \quad (6.29)$$

### Beanspruchungsabhängigkeit der Gurtkraftanteile

Die Anteile der Gurtkräfte infolge Querkraft bzw. die zugrunde liegenden Druckfeldneigungen werden i.A. aus Versuchsergebnissen zur Querkrafttragfähigkeit abgeleitet und setzen ein ausgeprägtes Schubrissbild voraus. Im Rahmen der vorliegenden Betrachtungen werden u.a. im Zusammenhang mit der Nachrechnung von Versuchen Belastungsgeschichten ausgehend vom unbelasteten Träger bis hin zur Versagenslast verfolgt. Die Annahme eines über alle Beanspruchungsniveaus geltenden Zugkraftanteils aus Querkraft nach Gl. (6.26) ist hier nicht uneingeschränkt zu adaptieren. Die Versuchsergebnisse an mit CFK-Lamellen verstärkten Plattenstreifen aus (Neubauer 2000) wie auch die eigenen Versuche an Plattenstreifen zeigen, dass in Bereichen mit  $V \neq 0$  bei fließender Betonstahlbewehrung - also definierten Zugkraftanteilen der Bewehrungsstränge - die gemessenen Lamellendehnungen eher der elementaren Balkentheorie als der Versatzmaßtheorie folgen. Auswirkungen der Querkraft auf die Zuggurtkräfte sind in diesen Fällen gering; der Ansatz eines zusätzlichen Zugkraftanteils nach Gl. (6.26) überschätzt damit die auftretenden Zuggurtkräfte.

Ausgehend von der Modellvorstellung, dass sich ein Schubriss sukzessive aus einem Biegeriss entwickelt, d.h. zunächst senkrecht zur Bauteilkante verläuft und mit zunehmender Beanspruchung an Neigung gewinnt, ist in Kombination mit den in (Reineck 1990) angegebenen Schubtragmechanismen abzuleiten, dass bei annähernd vertikalem Rissverlauf mangels eines Schubrissversatzes, d.h. fehlender Aktivierung von Rissverzahnung, Dübelwirkung bzw. vertikaler Bügelbewehrung, die Querkraft annähernd zur Gänze über die Druckzone übertragen wird. In Konsequenz bleiben die Gurtkraftanteile aus Querkraft klein. Erst mit zunehmendem Schubrisswachstum, d.h. steigender Belastung wachsen die der Zugzone zugeordneten Anteile der Querkraft und damit die resultierenden Zuggurtkräfte an. Dem entsprechend ist ein veränderlicher Gurtkraftanteil, d.h. ein beanspruchungsabhängiges Versatzmaß anzunehmen.

### Implementierung im Programmsystem

Für eine Nachrechnung von Versuchen an biegebeanspruchten Bauteilen muss eine möglichst realistische Abbildung aller Mechanismen - insbesondere der Effekte, die einen Einfluss auf die Gesamtzugkraft der Bewehrungsstränge ausüben - vorausgesetzt werden. Die aus der Querkraft resultierenden Anteile der Gurtkräfte werden in Bereichen konstanter Druckfeldneigungen nach Gl. (6.26) unter Ansatz der Druckfeldneigungen nach Gl. (6.27) für Bauteile ohne Schubbewehrung bzw. nach Gl. (6.29) für querkraftbewehrte Bauteile berechnet; die Druckfeldneigungen werden in Bereichen zwischen Störstellen unveränderlich angenommen. Die Aufteilung der Zuggurtkraftdifferenz auf die Bewehrungsstränge erfolgt nach dem jeweiligen Zugkraftanteil aus Biegebeanspruchung.

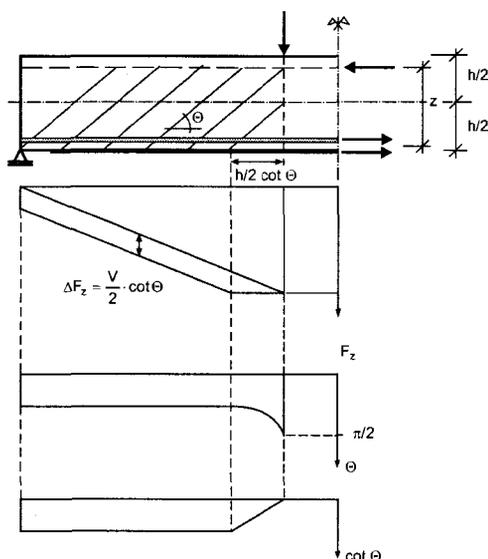
$$\Delta F_{Lr}^{ij} = \frac{V^{ij}}{2} \cot \Theta \frac{F_{Lr}^{ij}}{F_{Lr}^{ij} + F_{sr}^{ij}} \quad (6.30)$$

$$\Delta F_{sr}^{ij} = \frac{V^{ij}}{2} \cot \Theta \frac{F_{sr}^{ij}}{F_{Lr}^{ij} + F_{sr}^{ij}} \quad (6.31)$$

Im Rahmen des beschriebenen Rechenmodells bedingen die Gln. (6.30) und (6.31) eine iterative Bestimmung der Aufteilung anhand der jeweils aktuellen Gurtkräfte. Im Bereich von Einzellasten bzw. in der Symmetrieachse ergibt Gl. (6.26) aufgrund der dort nicht mehr vorauszusetzenden Parallelität der Druckstreben zu große Gurtkraftdifferenzen. In Einleitungsbereichen von Einzellasten, die ausgehend von der Lastachse unter Vernachlässigung der Lastplattenbreite näherungsweise durch die Länge  $h/2 \cot \Theta$  abgegrenzt werden, bzw. analog in Symmetrieachsen gleichlastbeanspruchter Träger, werden die reduzierten Gurtkraftanteile durch nichtlinear auf  $90^\circ$  in Lastachse ansteigende Druckfeldneigungen  $\Theta^*$ , die Gl. (6.32) folgen, angerechnet (Abb. 6.7).

$$\cot \Theta^* = \cot \Theta \left[ 1 - \frac{x - a + \frac{h}{2} \cot \Theta}{\frac{h}{2} \cot \Theta} \right] \quad (6.32)$$

Für  $z \rightarrow h$  ergibt Gl. (6.32) eine der Versatzmaßtheorie entsprechende horizontale Verschiebung des Zugkraftmaximums um den Betrag  $z/2 \cdot \cot \Theta$ .



**Abbildung 6.7.** Auswirkungen der Querkraft auf die Zuggurtkraft - Umsetzung im Programmsystem

Da für beanspruchungsabhängig veränderliche Versatzmaße keine allgemeinen Modelle vorliegen, wird die Abhängigkeit der Gurtkraftanteile vom vorliegenden Lastniveau näherungsweise der erläuterten Modellvorstellung entsprechend, über eine an das Verhältnis  $V/V_{lim}$  für  $V \leq V_{lim}$  geknüpfte lineare Abminderung der Gurtkraftanteile berücksichtigt. Die Grenzquerkraft  $V_{lim}$ , bis zu deren Erreichen gegenüber Gl. (6.26) reduzierte Kräfte  $\Delta F_s$  und  $\Delta F_c$  angesetzt werden, wird bei Bauteilen ohne Querkraftbewehrung dem mit  $\gamma_c$  skalierten Bemessungswert der Querkrafttragfähigkeit  $V_{Rd,ct}$  nach (DIN 1045-1 2001) entsprechend den Gln. (6.33) und (6.34) gleichgesetzt. Damit ist zugleich der Übergang zum Versatzmaß für den Grenzzustand der Querkrafttragfähigkeit näherungsweise hergestellt.

$$V_{Rd,ct} = 0,10 \cdot \kappa \cdot (100 \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} \cdot b_w \cdot d \quad (6.33)$$

$$V_{lim} = \gamma_c \cdot V_{Rd,ct} \quad (6.34)$$

$$\kappa = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \quad \text{mit } d \text{ statische Nutzhöhe der Biegezugbewehrung im maßgebenden Querschnitt in mm}$$

$$\rho_l = A_l / (b_w d) \leq 0,02 \quad \text{Längsbewehrungsgrad der Zugbewehrung}$$

$$\gamma_c = 1,5 \quad (\text{vgl. DIN 1045-1 2001})$$

$$V_{Rd,c} = 0,24 \cdot f_{ck}^{1/3} b_w z \quad V_{lim} = \gamma_c \cdot V_{Rd,c} \quad (6.35)$$

Bei querkraftbewehrten Bauteilen wird von einem ausgeprägten Schubrissbild, d.h. der vollen Anrechnung der Gurtkräfte aus Querkraft bei Erreichen von  $V_{Rd,c} \cdot \gamma_c$  nach (DIN 1045-1 2001) gemäß Gl. (6.35) (Bauteile ohne Längskräfte) ausgegangen.

## 6.4 Rechentechnische Umsetzung

### Grundlagen

Sofern für ein Element zwischen zwei Rissen eines biegebeanspruchten Bauteils die Hypothese nach *Bernoulli* verlassen wird, ist die Bedingung der Dehnungskompatibilität an Elementrändern nicht mehr mit der Gleichgewichtsbedingung zwischen inneren Kräften und äußeren Schnittgrößen verknüpft. Zur Systemberechnung können daher drei unabhängige Kriterien genutzt werden:

- Gleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften nach den Gln. (6.12) und (6.13);
- Kompatibilität der Dehnungen an angrenzenden Elementrändern nach Gl. (6.20);
- Kompatibilität der Verschiebungen in den Rissquerschnitten nach Gl. (6.21).

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird davon ausgegangen, dass für ein System, welches in allen Rissquerschnitten die drei genannten Bedingungen sowie gleichzeitig alle Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen auf Elementebene erfüllt, eine im Rahmen der gewählten Material- und Verbundmodelle mögliche Näherung für den tatsächlichen Dehnungs- und Relativverschiebungszustand gefunden wurde.

#### 6.4.1 Ablauf und Steuerung der Berechnung

Das entwickelte Programmsystem ermittelt iterativ einen Dehnungs- und Relativverschiebungszustand der Bewehrungsstränge, der den angegebenen drei Bedingungen genügt. Als Steuergrößen der Berechnung werden die Differenzverschiebungen  $\Delta s_{sr}^{ij}$  in den diskreten Rissquerschnitten verwendet. Konvergenzprüfungen auf Systemebene erfolgen auf Grundlage der oben genannten Bedingungen:

- Prüfung der Dehnungskompatibilität anhand von Dehnungsdifferenzen:

$$\Delta \epsilon_{sr}^{i,i+1} = \epsilon_{sr}^{i2} - \epsilon_{sr}^{i+1,1} \quad (6.36)$$

$$\Delta \epsilon_{Lr}^{i,i+1} = \epsilon_{Lr}^{i2} - \epsilon_{Lr}^{i+1,1} \quad (6.37)$$

- Prüfung der Verschiebungskompatibilität anhand von Differenzen der rechnerischen Rissöffnung aufbauend auf Gl. (6.21):

$$\Delta w^{i,i+1} = [(s_{sr}^{i2} + \Delta s_{sr}^{i2})k_x^{i2} + (s_{sr}^{i+1,1} + \Delta s_{sr}^{i+1,1})k_x^{i+1,1}] - [s_{Lr}^{i2} + s_{Lr}^{i+1,1}] \quad (6.38)$$

Die Erfüllung des Gleichgewichts zwischen inneren Kräften und äußeren Schnittgrößen ist entkoppelt von der iterativen Ermittlung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes und wird auf Elementebene bei jedem Rechenschritt geprüft. Konvergenzkriterien für Gleichgewichtsbedingungen auf Systemebene sind dem entsprechend nicht erforderlich. Die Kompatibilitätsbedingungen der Dehnungen und Rissrelativverschiebungen sind anhand der Fehlergrößen nach den Gln. (6.39) und (6.40) darzustellen.

$$\text{Verschiebungskompatibilität (SK): } \sum_{i=1}^n \Delta w^{i,i+1} = 0 \quad (6.39)$$

$$\text{Dehnungskompatibilität (EK): } \sum_{i=1}^n \Delta \epsilon_{sr}^{i,i+1} = \sum_{i=1}^n \Delta \epsilon_{Lr}^{i,i+1} = 0 \quad (6.40)$$

### Programmablauf

Die sukzessive Annäherung an eine den oben genannten Bedingungen entsprechende Lösung erfolgt durch Hintereinanderschaltung von Rechenläufen, die jeweils zwei der drei Bedingungen - Gleichgewicht und Verschiebungscompatibilität (SK) nach Bedingung (6.39) bzw. Gleichgewicht und Dehnungscompatibilität (EK) nach Bedingung (6.40) - erfüllen. Den einzelnen Rechenläufen schließt sich eine Korrektur des Dehnungs- bzw. Verschiebungszustandes an. Ein Ablaufdiagramm der Systemberechnung ist in Abb. 6.8 wiedergegeben. Die wesentlichen Elemente werden im Folgenden erläutert<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Die einzelnen Rechenläufe werden mit dem Index „k“ bezeichnet.

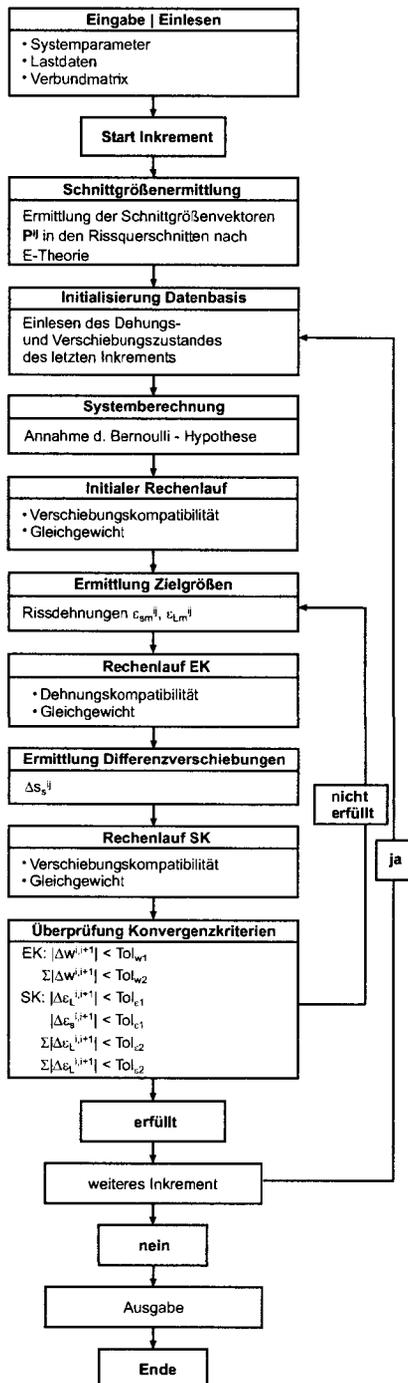


Abbildung 6.8. Ablaufdiagramm der Systemberechnung

*Initialer Rechenlauf - Verschiebungscompatibilität (SK,  $k = 0$ )*

Zur Erfüllung von Verschiebungscompatibilität und Gleichgewicht ist eine gekoppelte Betrachtung der Bewehrungsstränge erforderlich. Dazu werden für jedes Element bei bekanntem bzw. vorgegebenem  $k_x^{ij}$  die Dehnungs- und Verschiebungszustände der Bewehrungsstränge iterativ ermittelt, die Bedingung (6.39) erfüllen. Für den initialen Rechenlauf wird  $\Delta s_{sr}^{ij} = 0$  vorgegeben bzw. die Größen  $\Delta s_{sr}^{ij}$  des letzten Inkrementes als Ausgangszustand übernommen. Die ermittelten Dehnungsverläufe verletzen damit i.A. die Bedingung (6.40).

*Rechenlauf Dehnungscompatibilität (EK)*

Für die Erfüllung von Dehnungscompatibilität und Gleichgewicht ist eine getrennte Betrachtung der Bewehrungsstränge ausreichend. Die Dehnungen der Bewehrungsstränge an den Elementrändern werden unter Wahrung der Gleichgewichtsbedingung aus den Randdehnungen des vorhergehenden SK-Rechenlaufs (Index  $k - 1$ ) ermittelt .

$$(\epsilon_{sr}^{i1})_k = (\epsilon_{sr}^{i+1,1})_k = (\epsilon_{sr,m}^i)_{k-1} = \left[ \frac{\epsilon_{sr}^{i,2} z_s^{i,2} + \epsilon_{sr}^{i+1,1} z_s^{i+1,1}}{z_s^{i,2} + z_s^{i+1,1}} \right]_{k-1} \quad (6.41)$$

$$(\epsilon_{Lr}^{i1})_k = (\epsilon_{Lr}^{i+1,1})_k = (\epsilon_{Lr,m}^i)_{k-1} = \left[ \frac{\epsilon_{Lr}^{i,2} z_L^{i,2} + \epsilon_{Lr}^{i+1,1} z_L^{i+1,1}}{z_L^{i,2} + z_L^{i+1,1}} \right]_{k-1} \quad (6.42)$$

Der die Bedingung (6.40) erfüllende Verschiebungszustand der Bewehrungsstränge verletzt i.A. die Verträglichkeitsforderung der Relativverschiebungen in den Rissquerschnitten nach (6.39); es gilt allgemein:

$$\Delta s_{sr}^{ij} \neq 0 \wedge \Delta s_{sr}^{i,2} + \Delta s_{sr}^{i+1,1} \neq 0$$

*Rechenlauf Verschiebungscompatibilität (SK)*

Der Rechenlauf zur Erfüllung der Verschiebungscompatibilität nach (6.39) folgt hinsichtlich der rechentechnischen Umsetzung dem initialen Rechenlauf SK-0. Zur iterativen Annäherung an den wirklichkeitsnahen Systemzustand, der alle oben genannten Bedingungen erfüllt, werden Korrekturverschiebungen  $\Delta \Delta s_{sr}^{ij}$  eingeführt, mit denen der Verschiebungszustand am Elementrand ① des Elementes  $i + 1$  auf den Verschiebungszustand am Elementrand ② des Elementes  $i$  übertragen wird. Die Berechnung des Ausgangszustandes für den SK-Lauf  $k$  bzw. die Änderung der Verschiebungsdifferenzen folgt den Gln. (6.43) bis (6.45):

Korrekturgröße:

$$(\Delta \Delta s_{sr}^{ij})_{k-1} = (\Delta s_{sr}^{ij})_{k-1} - (\Delta s_{sr}^{ij})_{k-2} \quad (6.43)$$

Element  $i$  - Rissufer ②:

$$(\Delta s_{sr}^{i,2})_k = (\Delta s_{sr}^{i,2})_{k-2} + C \cdot (\Delta \Delta s_{sr}^{i+1,1})_{k-1} \quad (6.44)$$

Element  $i + 1$  - Rissufer ①:

$$(\Delta s_{sr}^{i+1,1})_k = (\Delta s_{sr}^{i+1,1})_{k-2} + C \cdot (\Delta \Delta s_{sr}^{i+1,1})_{k-1} \quad (6.45)$$

Durch den Bezug des Ausgangszustandes für den SK-Rechenlauf  $k$  auf den Verschiebungszustand des SK-Laufs  $k - 2$  sowie die Korrektur des Verschiebungszustandes um  $\Delta \Delta s_{sr}^{i+1,1}$  an beiden Rissufern des Rissquerschnittes  $i$  ist *a priori* die Verschiebungscompatibilität nach (6.39) erfüllt.

Der in den Gln. (6.44) und (6.45) angegebene Skalierungsfaktor  $C$  definiert den Anteil der Differenzverschiebung aus dem EK-Rechenlauf, der für den SK-Rechenlauf angerechnet werden soll. Gute Konvergenzeigenschaften sind mit  $C \leq 0,5$  zu erreichen. Für Werte  $C \rightarrow 1$  treten im Vergleich zweier aneinander anschließender Rechenläufe EK und SK z.T. signifikante Fehlergrößen  $\Delta \epsilon_{Lr}^i$ ,  $\Delta \epsilon_{sr}^i$  und  $\Delta w^i$  an kritischen Rissquerschnitten auf, die sich in Richtung abnehmender Ordnungszahlen  $i$  fortpflanzen und ggf. am Rissquerschnitt des EA-Elementes reflektiert werden und zur Oszillation der Verschiebungsgrößen  $\Delta s_{sr}^{ij}$  um die tatsächliche Lösung führen.

### 6.4.2 Ablauf und Steuerung auf Elementebene

Die einzelnen in Abb. 6.2 dargestellten Elemente vereinen aufgrund der unterschiedlichen Anforderungen - getrennte Betrachtung der Bewehrungsstränge in EK-Rechenläufen bzw. gekoppelte Betrachtung in SK-Rechenläufen - verschiedene Iterationsstrategien. Insbesondere aufgrund der begrenzten Verbundtragfähigkeit der Klebarmierung muss die Dehnungsdifferenz zwischen zwei Elementrändern  $\Delta\epsilon_{Lr}^i = \epsilon_{Lr}^{i2} - \epsilon_{Lr}^{i1}$  von unten angenähert werden. Bei gekoppelter Betrachtung von einbetonierter und angeklebter Bewehrung dient der Klebarmierungsstrang als Leitstrang der Iteration (vgl. 6.3.5).

### Biegedruckzone

Zur Berechnung von Lage und Größe der Druckspannungsergebnisierenden wird über die in Lamellen mit jeweils konstanter Stauchung eingeteilte Betondruckzone numerisch integriert. Die Spannungen der einzelnen Lamellen werden anhand des nichtlinearen Materialmodells nach 4.1.1 auf Basis einer in der Druckzone vereinfachend unterstellten linearen Dehnungsverteilung ermittelt. Die Ermittlung des Spannungszustandes der Druckzone muss jeweils unmittelbar der Bestimmung der Zuggurtkräfte folgen, um das resultierende Biegemoment am Elementrand zutreffend zu berechnen. Dem entsprechend werden bei Aufruf eines Elements Randstauchung, resultierende Druckkraft und Hebelarme bzw. auf die Druckzonenhöhe bezogener Schwerpunktsabstand  $k_a^{ij}$  wiederholt aktualisiert.

### 6.4.3 Iterationskonzepte und Konvergenzkriterien

Zur iterativen Ermittlung der Zustandsgrößen auf Elementebene werden in Abhängigkeit des Charakters der maßgebenden Beziehung - allgemein  $f(s)$  - zwei verschiedene Iterationsstrategien verwendet. Die vorauszusetzende Stetigkeit und Eindeutigkeit ist mit Ausnahme der  $\epsilon_{Lr}^{12}$ - $s_{Lr}^{12}$ -Beziehung der Klebarmierung am Endauflager in allen Fällen gegeben.

Das in Abb. 6.9 dargestellte Quasi-Newton-Verfahren unter Verwendung jeweils aktueller Sekantensteifigkeiten - in Anlehnung an  $BFGS^4$ -Iterationsverfahren formuliert - erweist sich als ausserordentlich effizient und konvergiert schnell. Für  $f(s)$ -Charakteristiken nach Abb. 6.10 wird das Intervallhalbierungs-Verfahren benutzt. Zwar bedingt die Iterationsstrategie aufgrund der langsamen Konvergenz erhebliche Rechenzeiten, zeigt sich allerdings äußerst robust.

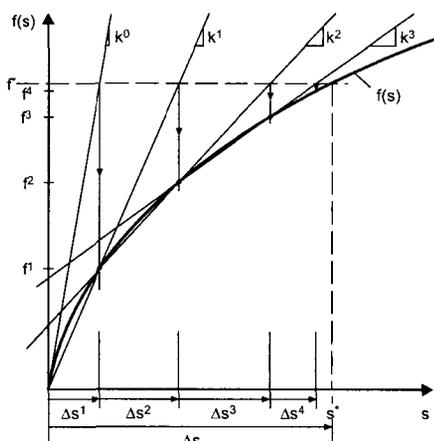


Abbildung 6.9. Quasi-Newton-Iterationsalgorithmus bei Verwendung aktueller Sekantensteifigkeiten (schematisch)

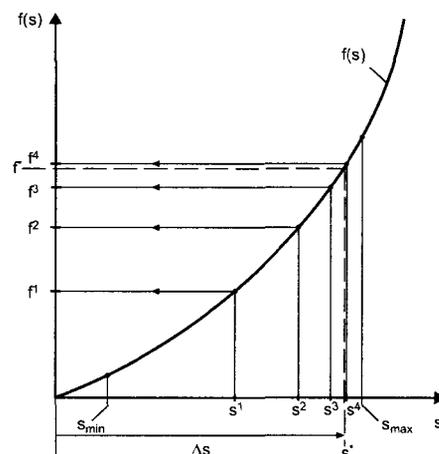


Abbildung 6.10. Intervallhalbierungsmethode (schematisch)

<sup>4</sup> Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Verfahren

Darüber hinaus sind im Programmsystem in Zusammenhang mit Verbundproblemen bei nichtlinearen Verbundcharakteristiken, für die keine analytischen Lösungen angegeben werden können - namentlich für gerippten Betonstahl bei überschneidenden Einleitungslängen sowie für die Abbildung der Endverankerung der Klebearmierung - Verfahren zur numerischen Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes in Anlehnung an das in (Ciampi u. a. 1982) vorgestellte Verfahren der schrittweisen Integration implementiert (vgl. 5.2.1). Bei den genannten Verbundberechnungen handelt es sich um klassische Randwertprobleme - z.B. sind für Betonstahl im Rahmen der Ermittlung von Verbundmatrizen die Relativverschiebungen an den Rändern des Integrationsbereichs vorgegeben - die durch numerische Verfahren auf Anfangswertprobleme zurückgeführt werden können. Hierfür werden einfache, allerdings rechenzeitintensive Einschießverfahren in Verbindung mit der Intervallhalbierungsmethode nach Abb. 6.10 genutzt (vgl. Selder 1979).

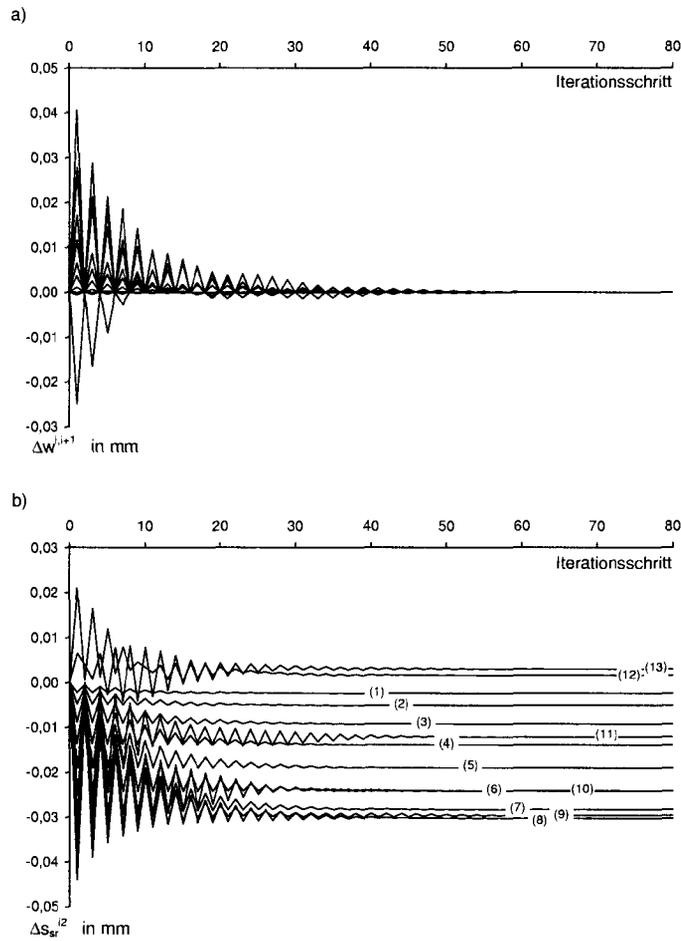
### Konvergenzkriterien

Im Programmsystem werden sowohl auf Element- als auch auf Systemebene Konvergenzprüfungen eingeführt (vgl. 6.4.1), für die relative und absolute Toleranzgrenzen verwendet werden. Nach Testrechnungen mit verschiedenen Toleranzintervallen wurden folgende Grenzen gewählt:

Dehnungen - Element:	$\Delta\epsilon \leq 1 \cdot 10^{-10}$
Dehnungen - Systemkonvergenz:	$\Delta\epsilon^i \leq 1 \cdot 10^{-6}$
Relativverschiebungen - Element:	$\Delta s \leq 1 \cdot 10^{-8}$ mm
Relativverschiebungen - Systemkonvergenz:	$\Delta s \leq 5 \cdot 10^{-5}$ mm
Kräfte absolut:	$\Delta F \leq 10$ N
Kräfte relativ:	$\Delta F \leq 0,001 \cdot F_{max}$
Momente absolut:	$\Delta M \leq 100$ Nmm
Momente relativ:	$\Delta M \leq 0,001 \cdot M_{max}$

### Konvergenzverhalten

In Abb. 6.11 ist exemplarisch für die Nachrechnung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes eines Versuchs für ein Lastinkrement die Entwicklung der Fehlergröße  $\Delta w^{i,i+1}$  nach Gl. (6.38) und der Differenzverschiebung  $\Delta s_{sr}^{i2}$  in Abhängigkeit des Iterationschrittes wiedergegeben. Die dargestellte Berechnung wurde mit einem Skalierungsfaktor  $C = 0,2$  durchgeführt, um eine Übertragung der auftretenden Oszillationen der Steuergröße  $\Delta s_{sr}^{ij}$  auf weitere Elemente zu dämpfen. Ergänzend sei erwähnt, dass die auftretenden Oszillationen durch die Verwendung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes eines vorhergehenden Lastinkrements in Verbindung mit der Wahl ausreichend kleiner Lastschritte deutlich vermindert werden können.



**Abbildung 6.11.** Konvergenzverhalten am Beispiel der Nachrechnung des Versuchs B2-08-B2C (vgl. 6.5.2) (exemplarisch ohne Verwendung des Ergebnisses eines vorhergehenden Lastinkrementes als Ausgangszustand;  $F = 8$  kN) - a) Entwicklung der Fehlergröße  $\Delta w^{i,i+1}$ ; b) Entwicklung der Differenzverschiebung  $\Delta s_{sr}^{i2}$  - in Klammern angegeben Elementnummer  $i$

## 6.5 Nachrechnung von Versuchen - Modellverifikation

### 6.5.1 Allgemeines

Die gewählten Material- und Verbundmodelle und deren Umsetzung in ein Programmsystem auf Basis diskreter Risselemente sowie die Implementierung aus Dehnkörperversuchen abgeleiteter vereinfachter Verträglichkeitsbedingungen werden anhand der Nachrechnung von Versuchen an biegebeanspruchten Bauteilen überprüft. Vergleiche zwischen Versuchsergebnissen und Rechenwerten werden dem Kontext entsprechend auf Grundlage diskreter Dehnungen der Bewehrungsstränge gezogen.

### Auswahl von Versuchen

Diskrete Dehnungen der Bewehrungsstränge unterliegen im Gegensatz zu integralen, vom mittleren Verhalten des Bauteils abhängigen Größen wie etwa der Bauteildurchbiegung deutlich stärker lokalen Einflüssen - z.B. den örtlichen geometrischen Gegebenheiten wie etwa den Einbauhöhen der Bewehrungsstränge, den lokalen Festigkeiten der Betondruckzone sowie dem in der unmittelbaren Umgebung des betrachteten Rissquerschnittes zutreffenden Verbundverhalten. Zudem treten bei Dehnungen im Vergleich zu Durchbiegungen angesichts des Messverfahrens z.T. deutlicher ausgeprägte Messungenauigkeiten auf. Dem entsprechend sind bei gemessenen Dehnungen größere Streuungen der Ergebnisse zu erwarten.

Mittlerweile liegt eine nahezu unüberschaubare Zahl an Versuchen an klebarmierten Biegeträgern vor, allerdings können die Ergebnisse nicht uneingeschränkt zur Verifikation des Rechenmodells herangezogen werden. Zur Auswahl der Versuchsergebnisse waren folgende Gesichtspunkte relevant:

- Vollständige Dokumentation aller relevanten Parameter;
- Messung und Dokumentation diskreter lokaler Dehnungen in Rissquerschnitten;
- Dokumentation des Rissbildes.

Derzeit existieren nur wenige ausreichend belegte Versuche, bei denen Dehnungen der einbetonierten oder angeklebten Bewehrung unmittelbar in Rissquerschnitten aufgenommen wurden. Zudem wäre zur Kompensation der unvermeidlichen verfälschenden Einflüsse der Fügeteilbiegung auf gemessene Dehnungen der Klebarmierung eine Applikation der Dehnmessstreifen sowohl auf der Aussen- als auch auf der Klebeseite erforderlich. Zunächst werden die Ergebnisse der in (Zilch u. a. 2004) beschriebenen Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen als Vergleichsgrundlage verwendet (vgl. 3.3.2); darüber hinaus werden in (Zilch u. a. 2000), (Rostásy und Neubauer 1999) und (Uлага und Meier 2002) dokumentierte Versuche herangezogen.

### Eingangsparameter

Die zur Nachrechnung verwendeten Abmessungen und Materialkenngrößen sowie die daraus abgeleiteten Parameter zur Definition der Verbundmodelle sind in Tab. C.1 (Anhang C.2) zusammengestellt. Als Rissabstand wird der jeweils bei Versuchsende vorliegende mittlere Abstand der Risse im Bereich konstanter Biegemomente zugrunde gelegt; der Abstand des äußersten Biegerisses zum Auflager entspricht dem i.d.R. nach Versuchsende am Bauteil aufgenommenen Größtwert. Weitere, versuchsspezifische Eingangswerte werden in Zusammenhang mit der Darstellung der Ergebnisse erläutert.

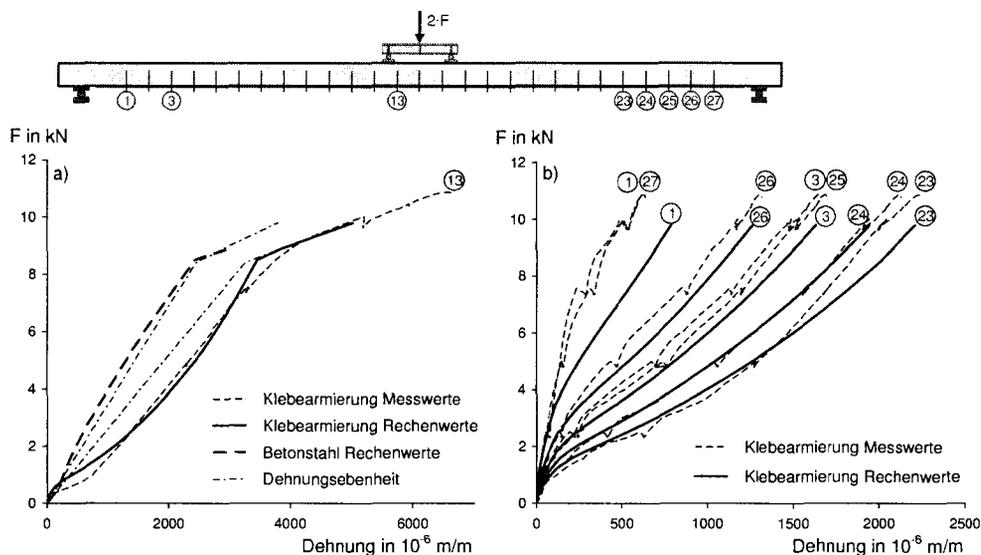
### 6.5.2 Eigene Versuche

Für einen Vergleich mit Rechenwerten werden ausschließlich die Mittelwerte der an Aussen- und Verbundseite der aufgeklebten Bewehrung gemessenen Dehnungen in Rissquerschnitten herangezogen. Die jeweils dargestellten Rechenwerte sind um die Auswirkungen des Eigengewichts korrigiert. Zur Nachrechnung aller Versuche wurde ein Endrissabstand von 150 mm vorausgesetzt; die Auswirkungen des gewählten Rissabstandes

insbesondere für die Versuche B2-01-B2C bis B2-06-B2S mit einem initialen Rissabstand von 300 mm werden im Anschluß an die Diskussion der Mess- und Rechenwerte erläutert. Eine Gegenüberstellung der in den 12 Versuchen an insgesamt 63 Messquerschnitten im Bereich konstanter Momente, dem querkraftbeanspruchten Bereich und dem äußersten Rissquerschnitt gemessenen Dehnungen mit Rechenwerten ist in Anhang C.3 enthalten; ergänzend sind für alle Versuche in Abb. C.5 für einen Rissquerschnitt im Bereich  $M = \text{const.}$  die auf den Rechenwert nach *Bernoulli* bezogenen experimentell und rechnerisch ermittelten Lamellen- bzw. Laschendehnungen  $\eta_L$  dargestellt. Im Folgenden werden exemplarisch für jeweils einen Versuch mit aufgeklebter CFK-Lamelle bzw. Stahllasche Mess- und Rechenwerte erläutert.

### Versuche mit aufgeklebten CFK-Lamellen

In Abb. 6.12 sind für den Versuch B2-08-B2C die in Rissquerschnitten gemessenen Dehnungen der aufgeklebten CFK-Lamelle den Rechenwerten gegenübergestellt.



**Abbildung 6.12.** Versuch B2-08-B2C - Vergleich von experimentell und rechnerisch ermittelten Dehnungen der Klebarmierung in vorgegebenen Rissquerschnitten;

a) Bereich  $M = \text{const.}$  - Querschnitt 13;

b) Endauflager - Querschnitte 1, 27 - und querkraftbeanspruchter Bereich - Querschnitte 3, 23, 24, 25 und 26

Bei Betrachtung der Versuchs- und Rechenwerte im Bereich  $M = \text{const.}$  (Abb. 6.12 a) können drei Phasen unterschieden werden:

- Für Lamellendehnungen bis 1‰ liegen die Rechenwerte teils deutlich unter den experimentell ermittelten Dehnungen. In diesem Beanspruchungsbereich dominiert das elastische Verbundverhalten der Klebarmierung; die generell großen Streuungen der elastischen Verbundenergie  $G_e$  sowie mögliche Verbundstörungen der einbetonierten Bewehrung durch die eingebauten Anrissbleche sind als mögliche Ursachen der Abweichungen in Betracht zu ziehen. In den weiteren Versuchen können z.T. ähnliche Abweichungen bei geringen Lamellendehnungen beobachtet werden (vgl. Anhang C.3).
- Im Bereich der Lamellendehnungen zwischen 1‰ und 3‰ stimmen Rechenwerte und Versuchsergebnisse gut überein; die Abweichungen liegen unter 10%. Die befriedigende Abbildung der Versuchsergebnisse durch das Rechenmodell wird durch die weiteren nachgerechneten Versuche bestätigt.
- Bei Lamellendehnungen über 3‰ wird die Streckgrenze der einbetonierten Bewehrung überschritten; die im Versuch bestimmten Lamellendehnungen nehmen sukzes-

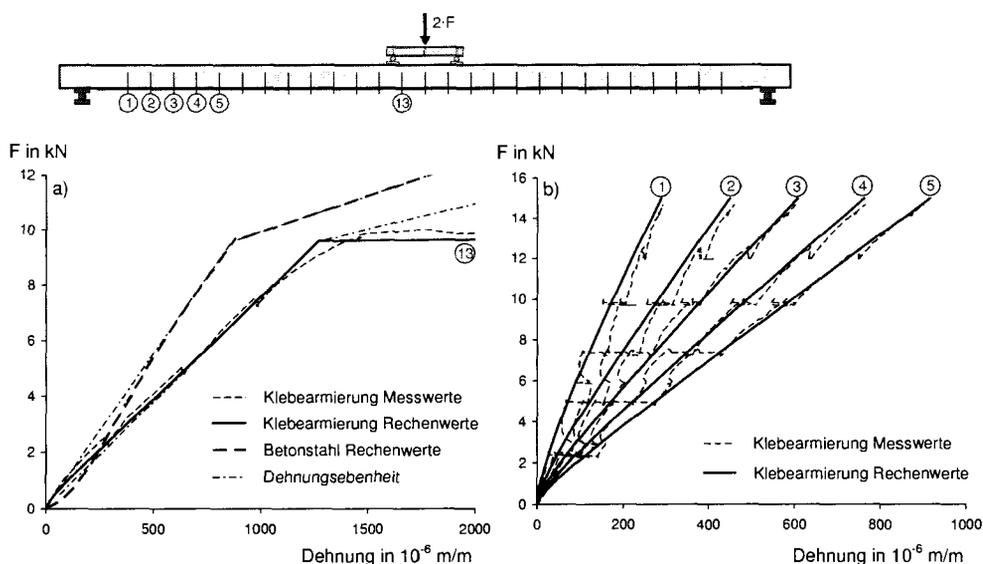
sive zu und münden in die auf Grundlage der *Bernoulli-Hypothese* ermittelte  $F-\epsilon_L$ -Linie ein. Ein allmählicher Übergang des Betonstahls vom elastischen in den plastischen Zustand kann durch die dem Rechenmodell zugrunde liegende Spannungs-Dehnungs-Linie nicht abgebildet werden; entsprechendes gilt für die Veränderung des Verbundverhaltens der einbetonierten Bewehrung bei Überschreiten der Streckgrenze. Im Rechenmodell wird der Fließbeginn der einbetonierten Bewehrung als diskreter Übergang abgebildet; in Konsequenz weichen in diesem Bereich die gemessenen Lamellendehnungen nach oben ab.

Ein Vergleich zwischen Mess- und Rechenwerten der Lamellendehnung im querkraftbeanspruchten Bereich bzw. am äußersten Biegeriss (Abb. 6.12 b) zeigt, dass der prinzipielle Charakter des Zusammenwirkens durch das Rechenmodell erfasst wird. Mit zunehmender Entfernung vom äußersten Biegeriss nehmen die Abweichungen zwischen Mess- und Rechenwerten ab. Gegebenenfalls beeinflussen im Rechenmodell nicht enthaltene Mechanismen - etwa die Zugfestigkeit des Betons im Rissquerschnitt (*tension softening*) insbesondere bei den geringen auftretenden Rissöffnungen - die Dehnungen der Klebarmierung.

Bei Einbeziehung der in Anhang C.3 wiedergegebenen Versuchsnachrechnungen ist angesichts der zu erwartenden Einbau- und Messgenauigkeit eine zufriedenstellende Abbildung des in Versuchen mit aufgeklebten CFK-Lamellen ermittelten Bauteilverhaltens durch das entwickelte Rechenmodell festzustellen.

### Versuche mit aufgeklebten Stahllaschen

Für den Versuch B2-11-B2S sind in Abb. 6.13 gemessene Dehnungen der Stahllaschen im Vergleich mit den zugehörigen Rechenwerten wiedergegeben. Mit einem Dehnsteifigkeitsverhältnis  $E_L A_L / E_s A_s = 1,86$  weist das System gemäß Abb. 2.1 eine nur gering ausgeprägte Sensitivität der Stahllaschendehnungen gegenüber Verbundunterschieden auf. Die Dehnungen der Stahllaschen im Bereich  $M = \text{const.}$  (Abb. 6.13 a) zeigen lediglich im Bereich geringer Beanspruchungen signifikante Abweichungen von den auf Basis der *Bernoulli-Hypothese* ermittelten Dehnungen und nähern sich im weiteren Beanspruchungsverlauf asymptotisch an. Für den querkraftbeanspruchten Bereich bzw. den



**Abbildung 6.13.** Versuch B2-11-B2C - Vergleich von experimentell und rechnerisch ermittelten Dehnungen der Klebarmierung in vorgegebenen Rissquerschnitten;  
a) Bereich  $M = \text{const.}$  - Querschnitt 13;  
b) Endauflager - Querschnitt 1 - und querkraftbeanspruchter Bereich - Querschnitte 2, 3, 4 und 5

auflagernächsten Riss (Abb. 6.13 b) stimmen rechnerisch und experimentell ermittelte Dehnungen gut überein. Auffallend sind die offensichtlich aus dem Verbundkriechen der einbetonierten Bewehrung bei konstanter Belastung (Laststufen  $\Delta F = 2,5 \text{ kN}$ ) resultierenden Zugkraftumlagerungen zur angeklebten Bewehrung, die zu deutlich ansteigenden Dehnungen führen. Bei weiterer Laststeigerung ausgehend von einer Laststufe werden die Umlagerungen offenbar kompensiert; die Ursache ist ggf. im ausgeprägt steifen Wieder- bzw. Weiterbelastungsast des Verbundansatzes einbetonierter Bewehrung nach einer Phase annähernd konstanter Belastung zu sehen (vgl. Franke 1976)(s.a. Abb. 4.30).

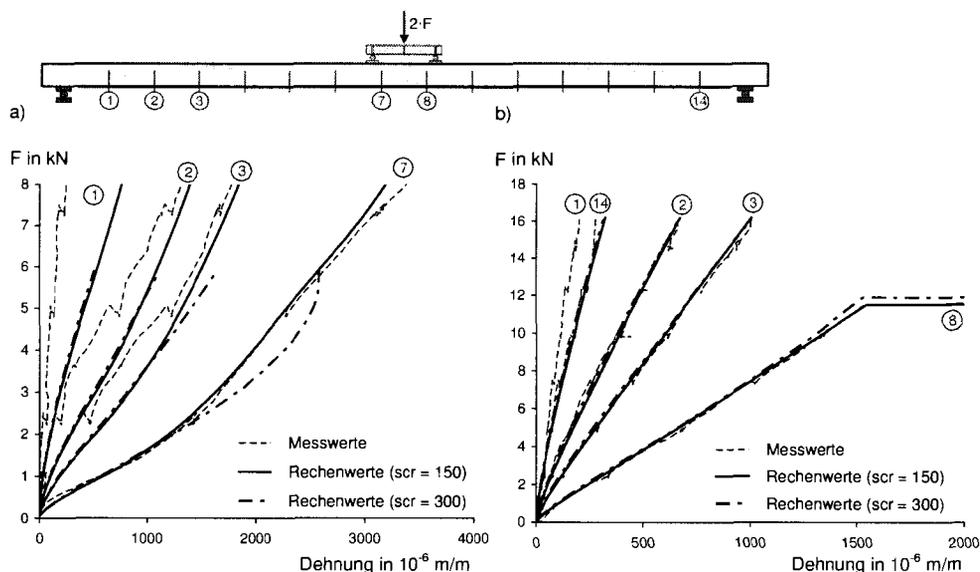
Da dem Rechenalgorithmus die Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung nicht zugrunde liegt, ist die nach Abb. 6.13 für aufgeklebte Stahllaschen ermittelte, mit der Aufteilung nach der *Bernoulli*-Hypothese annähernd identische Dehnungsverteilung als Ergebnis der vorliegenden Verbund- und Dehnsteifigkeitsverhältnisse sowie der Randbedingungen zu sehen (vgl. auch Abb. C.5).

Die in Anhang C.3 zusammengestellten Nachrechnungen der weiteren Versuche mit Stahllaschen zeigen ein ähnlich gute Übereinstimmung zwischen Rechenwerten und Versuchsergebnissen.

### Einfluss des vorgegebenen Rissabstandes

In den Versuchen B2-01-B2C bis B2-06-B2S wurde ein initialer Rissabstand von 300 mm vorgegeben. Mit zunehmender Belastung entstanden sowohl im Bereich konstanter Momente als auch in Teilen des querkraftbeanspruchten Bereiches zwischen den durch Anrissbleche vorgezeichneten Rissen zusätzliche Biegerisse (vgl. Zilch u. a. 2004). Die Vorgabe eines konstanten rechnerischen Rissabstandes von 150 mm stellt daher eine starke Vereinfachung dar. In Abb. 6.14 werden den in verschiedenen Rissquerschnitten gemessenen Dehnungen des Klebarmierungsstranges die Rechenwerte für konstante Rissabstände von 300 mm und 150 mm gegenübergestellt. Generell kann ein nur geringer Einfluss des vorgegebenen Rissabstandes für die betrachteten Konfigurationen abgelesen werden.

Die Nachrechnung des Versuchs mit aufgeklebter CFK-Lamelle (Abb. 6.14 a) zeigt aufgrund des größeren Rissabstandes ab  $F = 2 \text{ kN}$  deutlich größere Dehnungen und bereits frühzeitig Verbundentkopplungen im Bereich  $M = \text{const.}$  - erkennbar durch die



**Abbildung 6.14.** Vergleich gemessener Dehnungen der Klebarmierung in Rissquerschnitten mit Rechenwerten auf Grundlage eines konstanten Rissabstandes  $s_{cr}$  von 150 mm und 300 mm; a) Versuch B2-03-B2C;  $s_{cr,init} = 300 \text{ mm}$ ; CFK-Lamelle  
b) Versuch B2-04-B2S;  $s_{cr,init} = 300 \text{ mm}$ ; Stahllasche

bei ansteigender Belastung annähernd konstanten Dehnungen - mit anschließendem Verbundversagen. Im querkraftbeanspruchten Bereich in Auflagernähe wirkt sich der größere Rissabstand erst bei Dehnungen oberhalb 1‰ aus. Da die zusätzlichen Risse im Bereich  $M = \text{const.}$  bereits bei Lasten unterhalb  $F \leq 2,5 \text{ kN}$  entstehen, erscheint der Ansatz eines Rissabstandes von 150 mm für den relevanten Beanspruchungsbereich gerechtfertigt. Ein Vergleich der Rechenwerte für den mit einer Stahllasche verstärkten Plattenstreifen (Abb. 6.14 b) zeigt im Bereich geringer Beanspruchungen ebenfalls keine signifikanten Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Rissabständen. Lediglich für  $F > 8 \text{ kN}$  entsprechend einer Laschendehnung über 1‰ weichen die Rechenergebnisse voneinander ab; allerdings korrespondiert für diesen Beanspruchungsbereich ein Rissabstand von 150 mm mit den am Plattenstreifen beobachteten Wert.

Der Vergleich zwischen den auf unterschiedlichen rechnerischen Rissabständen basierenden Rechenwerten vor dem Hintergrund des realen Bauteilverhaltens rechtfertigt damit den Ansatz eines Rissabstandes von 150 mm für die Nachrechnung aller 12 Versuche.

### 6.5.3 Weitere Versuche

#### Versuche von Zilch/Schmidhuber/Niedermeier

In (Zilch u. a. 2000) werden u.a. Versuche an biegebeanspruchten Bauteilen - Trägern mit Rechteckquerschnitt und Plattenbalken - mit einbetoniertem gerippten Betonstahl und angeklebten Stahllaschen dokumentiert. Die Dehnungen der Klebarmierung wurden in allen Messquerschnitten ausschließlich durch auf der Aussenseite der Lasche applizierte DMS gemessen.

#### Versuch BB2

Für den Versuch BB2 wurde durch äquidistant angeordnete Anrissbleche ein abgeschlossenes Endrissbild vorgegeben. In den Rissquerschnitten wurden die Dehnungen der Stahllasche mit jeweils zwei DMS in festgelegten Laststufen aufgenommen. In Abb. 6.15 sind neben der Versuchskonfiguration die Ergebnisse von Messung und Rechnung für den Rissquerschnitt in Feldmitte dargestellt. Die gemessenen Dehnungen bleiben deutlich hinter den nach *Bernoulli* zu erwartenden Werten zurück; die Rechenwerte weichen von den Versuchsergebnissen um maximal 3% nach oben ab.

In Abb. 6.16 sind für zwei Laststufen die rechnerischen Verläufe der Dehnungen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung entlang des Trägers den in den vorgegebenen Rissquerschnitten gemessenen diskreten Dehnungen gegenübergestellt. Die aufgeklebte Stahllasche weist im Unterschied zur einbetonierten Bewehrung eine signifikant reduzierte Mitwirkung des Betons (*tension stiffening*) auf; für beide Laststufen stimmen Mess- und Rechenwerte gut überein. Die experimentell bestimmte Versagenslast

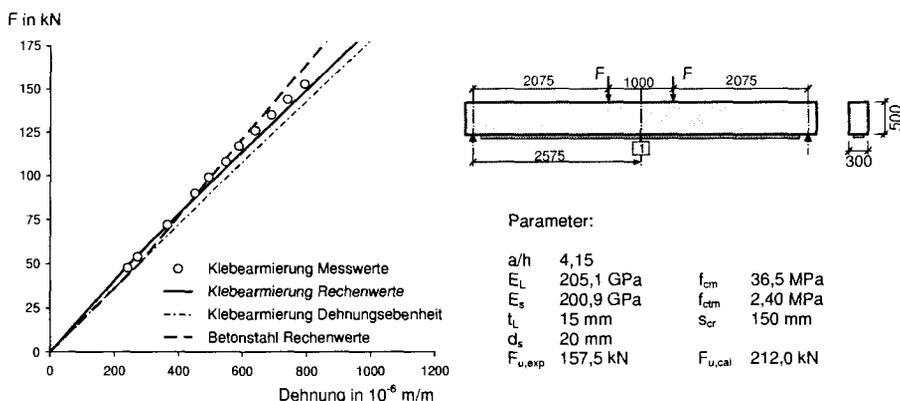
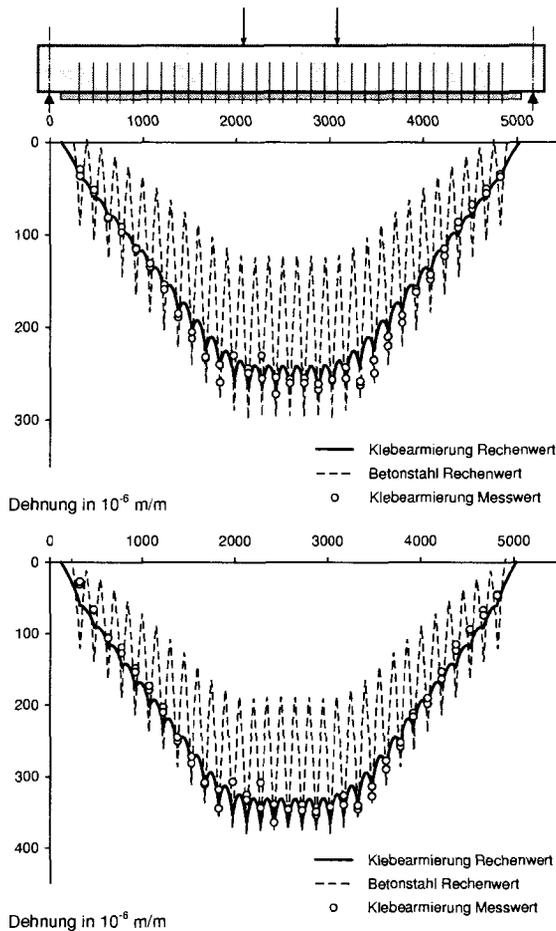


Abbildung 6.15. Versuch BB2 aus (Zilch u. a. 2000) - Dehnungen in Feldmitte (Messquerschnitt A16)

von  $F_{u,exp} = 157,5 \text{ kN}$  wird durch ein Verbundversagen im Endverankerungsbereich bestimmt; die rechnerische Versagenslast liegt mit  $F_{u,cal} = 200 \text{ kN}$  darüber. Im Rechenmodell ist ein Verbundversagen des an den Endverankerungsbereich anschließenden Risselementes 2 für die Traglast bestimmend (vgl. 6.5.4).



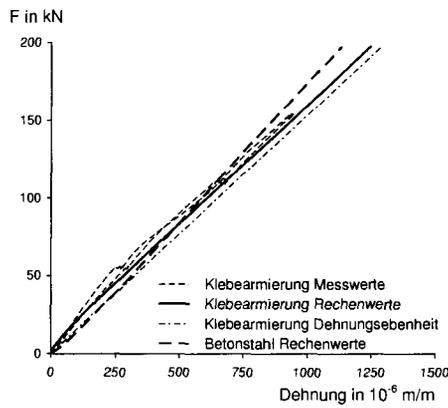
**Abbildung 6.16.** Versuch *BB2* - Messwerte der Stahllaschendehnungen in vorgegebenen Rissquerschnitten im Vergleich mit rechnerischen Dehnungsverläufen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung

- a)  $F = 54 \text{ kN}$   
b)  $F = 72 \text{ kN}$

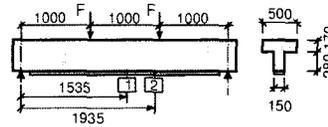
#### Versuche *SB1*, *SB3* und *SB4*

Für die als Schubversuche an Plattenbalken mit geringer Schubslankheit konzipierten Versuche *SB1*, *SB3* und *SB4* wurde auf die Vorgabe eines abgeschlossenen Rissbildes verzichtet; durch eine Vorbelastung wurden Initialrisse erzeugt, an denen die Dehnungen der aufgeklebten Stahllaschen mittels DMS gemessen wurden. Im Laufe der Belastungsgeschichte konnte die Entstehung zusätzlicher Risse beobachtet werden. In Abb. 6.17 werden gemessene Stahllaschendehnungen den Rechenwerten gegenübergestellt. Bei allen Versuchen ist eine durch die sukzessive Rissbildung bedingte Annäherung des Messwertes an den Rechenwert zu erkennen. Für den Versagenszustand - dem das der Rechnung zugrunde liegende Rissbild zugeordnet ist - stimmen Mess- und Rechenwerte gut überein. Grundsätzlich liegen die in den Versuchen gemessenen Werte - mit Ausnahme der Dehnungen eines Messquerschnittes in Versuch *SB3*, für die aller Wahrscheinlichkeit nach Messfehler im Bereich hoher Lasten verantwortlich sind - unter den Rechenwerten.

In Versuch *SB1* wurde ein Verbundversagen im Endverankerungsbereich beobachtet; ein Schubrissversatz ist als mögliche Ursache nicht auszuschließen. Die Versuche *SB3* und *SB4* versagen durch einen sog. „Versatzbruch“ - ein Abschälen der Stahllaschen mit der gesamten Betondeckung im Endverankerungsbereich ausgehend von einem kritischen Schubriss am Laschenende. Die rechnerischen Versagenslasten werden durch ein Ver-

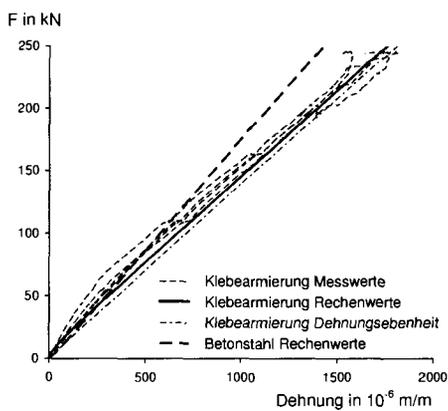


Versuch SB1

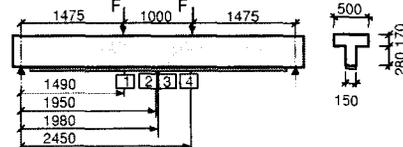


Parameter:

$a/h$	2,22	$f_{cm}$	35,8 MPa
$E_L$	205,9 GPa	$f_{ctm}$	2,71 MPa
$E_s$	200,2 GPa	$S_{cr}$	110 mm
$t_L$	6 mm		
$d_s$	20 mm		
$F_{u,exp}$	155 kN	$F_{u,cal}$	198 kN

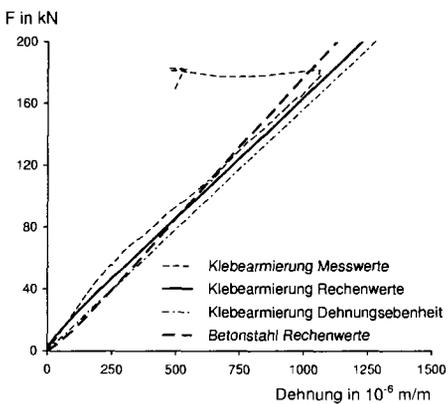


Versuch SB3

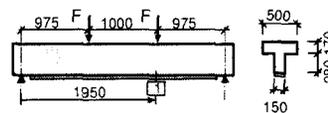


Parameter:

$a/h$	3,28	$f_{cm}$	33,7 MPa
$E_L$	205,9 GPa	$f_{ctm}$	3,27 MPa
$E_s$	200,2 GPa	$S_{cr}$	90 mm
$t_L$	6 mm		
$d_s$	20 mm		
$F_{u,exp}$	246 kN	$F_{u,cal}$	323,5 kN



Versuch SB4



Parameter:

$a/h$	2,17	$f_{cm}$	33,4 MPa
$E_L$	205,9 GPa	$f_{ctm}$	2,70 MPa
$E_s$	200,2 GPa	$S_{cr}$	125 mm
$t_L$	6 mm		
$d_s$	20 mm		
$F_{u,exp}$	183 kN	$F_{u,cal}$	214 kN

**Abbildung 6.17.** Messwerte der Stahllaschendehnungen in Rissquerschnitten gegenüber Rechenwerten der Dehnungen der Bewehrungsstränge - Schubversuche nach (Zilch u. a. 2000) Versuche *SB1*, *SB2* und *SB3*

bundversagen der Klebearmierung im Endverankerungsbereich bestimmt und liegen z.T. deutlich über den Versuchsergebnissen (s. 6.5.4).

### Versuch von Rostasy/Neubauer

Für den in (Rostásy und Neubauer 1999) bzw. (Neubauer 2000) dokumentierten Versuch an einem Plattenstreifen mit aufgeklebten CFK-Lamellen S&P 150/2000 wurden in einem durch ein Anrissblech vorgegebenen Rissquerschnitt in Feldmitte die Dehnungen der einbetonierten Bewehrung gemessen. Angaben über Messwerte der Lamellendehnung in Abhängigkeit der Belastung liegen nicht vor. Durch eine dem Bruchversuch vorausgegangene Schwellbeanspruchung mit 1000 Lastwechseln bei einer Oberlast  $F_o = 10$  kN wurde

ein ausgeprägtes Rissbild erzeugt. Die Rechenwerte der Betonstahldehnungen weichen nur geringfügig von den Messwerten ab, zudem sind die Abweichungen von den nach *Bernoulli* bestimmten Größen nur gering. Ursächlich für die weitgehend einer ebenen Dehnungsverteilung folgenden Werte ist zum einen der geringe Betonstahldurchmesser, zum anderen der enge Rissabstand. Traglastbestimmend war im Versuch ein Verbundversagen der Klebarmierung, allerdings konnte der Bruchausgang nicht lokalisiert werden. Dem Rechenmodell entsprechend wird ein Verbundversagen im querkraftbeanspruchten Bereich in der Region, in der die einbetonierte Bewehrung die Streckgrenze bereits überschritten hat, maßgebend.

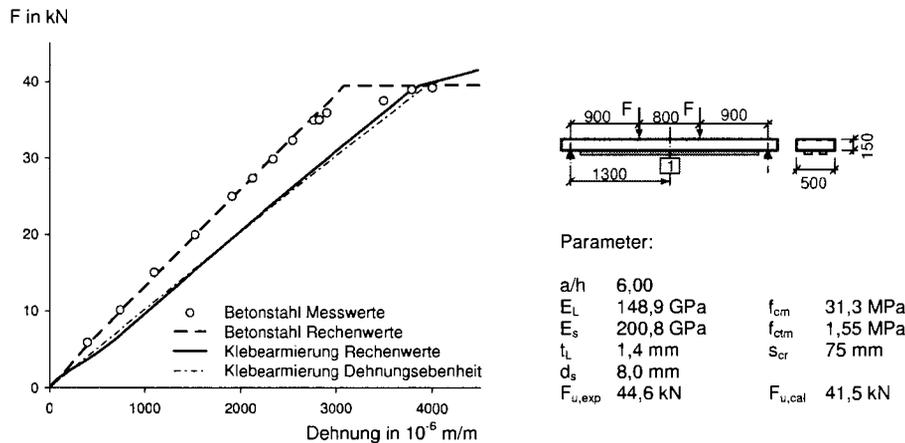


Abbildung 6.18. Versuch P1 (aus Rostásy und Neubauer 1999) - Experimentell und rechnerisch ermittelte Dehnung der einbetonierten Bewehrung, ergänzend Rechenwerte der Dehnung der Klebarmierung

### Versuche von Ulaga/Meier

In (Ulaga und Meier 2002) wird u.a. über Versuche an Plattenstreifen, die mit angeklebten thermoplastischen CFK-Lamellen verstärkt wurden, berichtet. Angesichts des verwendeten Klebstoffes Sikadur 30 und des Verbundversagenshorizontes insbesondere bei Versuch *PS4* in der oberflächennahen Betonschicht wird von der Gültigkeit der in Kapitel 4 formulierten Material- und Verbundmodelle ausgegangen. Im Unterschied zu den

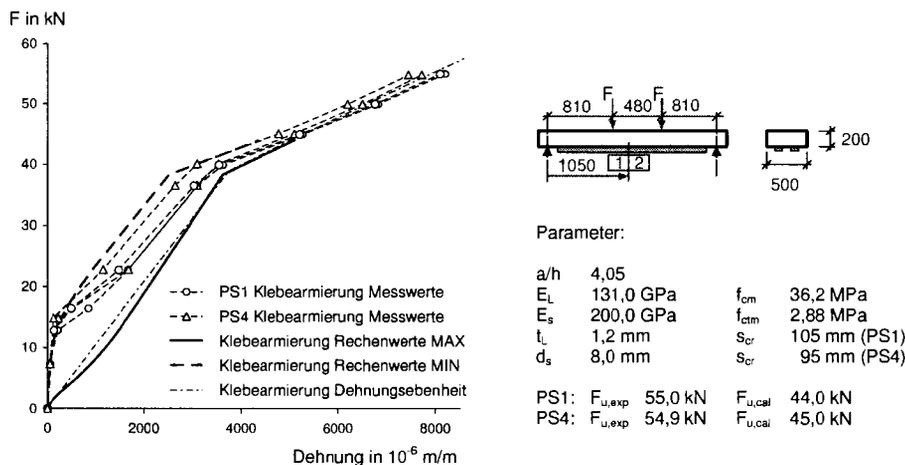


Abbildung 6.19. Versuche *PS1* und *PS4* aus (Ulaga und Meier 2002) - Dehnungen in Feldmitte im Vergleich mit Rechenwerten (dargestellt für  $s_{cr} = 105$  mm)

übrigen zur Modellverifikation herangezogenen Versuchen wurden von *Ulaga* und *Meier* keine diskreten Rissdehnungen sondern Klebarmierungsdehnungen in Feldmitte ohne genaue Lokalisierung gegenüber Rissen gemessen; die Applikation von CFK-Lamellen und DMS erfolgte am ungerissenen Bauteil. In Abb. 6.19 werden die für definierte Laststufen angegebenen Dehnungen den im Bereich  $M = \text{const.}$  auftretenden minimalen ( $\epsilon_{L0}$ ) und maximalen ( $\epsilon_{Lr}$ ) Rechenwerten der Lamellendehnungen gegenübergestellt. Offensichtlich ist das Rechenmodell in der Lage, die auftretenden Dehnungen einzugrenzen; eine Aussage hinsichtlich der Abbildung diskreter Rissdehnungen ist auf Grundlage der Versuchsergebnisse nicht möglich.

#### 6.5.4 Berechnung von Versagenslasten

Wie in 6.2.1 erläutert, sind mit Hilfe des Rechenmodelles nur Versagensformen nachzuvollziehen, die in kausalem Zusammenhang mit dem Versagen des Verbundes bzw. der Überschreitung der Zugfestigkeit eines Bewehrungsstranges oder mit dem Überschreiten der Tragfähigkeit der Betondruckzone stehen. Die bisher nur in geringem Umfang untersuchte versagensinitiierende Wirkung eines Schubrissversatzes bei einem Verbundversagen im Endverankerungsbereich kann nicht verfolgt werden. Entsprechend liegen die rechnerischen Bruchlasten der Schubversuche nach (Zilch u. a. 2000) deutlich über den tatsächlichen Bruchlasten.

Darüber hinaus sind tragfähigkeitserhöhende Effekte, z.B. Reibung zwischen dem entkoppelten Klebarmierungsstrang und dem Betonuntergrund oder durch die Bauteilkrümmung erzeugte, als Anpressdruck wirkende Umlenkkräfte nicht im Verbundmodell für Klebarmierung enthalten. In Konsequenz liegen die einem „reinen“ Verbundversagen zugeordneten Versagenslasten deutlich unter den experimentell bestimmten Werten. Neben den im Rahmen der Modellverifikation vorgestellten Versuchsnachrechnungen erbrachte die Nachrechnung der in (Seim u. a. 2000) und (Seim u. a. 2003) dokumentierten Versuche an mit CFK-Lamellen verstärkten Plattenstreifen rechnerische, dem Verbundversagen zugeordnete Lamellendehnungen zwischen 4,3‰ und 5,2‰ im Vergleich mit experimentell ermittelten Dehnungen zwischen 6,8‰ und 10,8‰.

Der zwischen zwei Rissen über Verbund zu realisierende Dehnungszuwachs hängt nach 4.4.3 neben der Verbundbruchenergie  $G_F$  von der Dehnung am geringer beanspruchten Rissquerschnitt ( $\epsilon_{Lr}^{i1}$ ) ab. In Abb. 6.20 sind aus der Nachrechnung des Versuchs B2-08-B2C (vgl. Abb. 6.12) die Rechenwerte der Dehnungsdifferenzen  $\Delta\epsilon_{Lr}^i = \epsilon_{Lr}^{i2} - \epsilon_{Lr}^{i1}$  über den zugehörigen Werten  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  des letzten konvergenten Lastinkreimentes aufgetragen. Der Vergleich mit der in (Niedermeier 2001) abgeleiteten Grenzkurve  $(\Delta\epsilon_{Lr}^i)_{\max}$ , die im Fall aufgeklebter CFK-Lamellen wegen des geringen Anteils der elastischen Energie an der Bruchenergie im wesentlichen Dehnungsbereich ( $\epsilon_{Lr}^{i1} > 0,16\%$ ) Gl. (6.46) folgt (vgl. Gl. 4.59), zeigt, dass für Element 12 die Verbundtragfähigkeit nahezu ausgeschöpft ist.

$$(\Delta\epsilon_{Lr}^i)_{\max} = \sqrt{\frac{2G_F}{E_L t_L} + (\epsilon_{Lr}^{i1})^2} - \epsilon_{Lr}^{i1} \quad (6.46)$$

Der zugehörige rechnerische Verlauf der Dehnungen der Bewehrungsstränge zeigt für Element 12 ( $1800 \leq x \leq 1950 \text{ mm}$ ) am weniger beanspruchten Riss einen nur mehr geringen Abbau der Lamellendehnungen sowie am höher beanspruchten Riss eine weit fortgeschrittene Verbundentkopplung. Annähernd der gesamte intakte Verbundbereich wird für den Dehnungsaufbau genutzt.

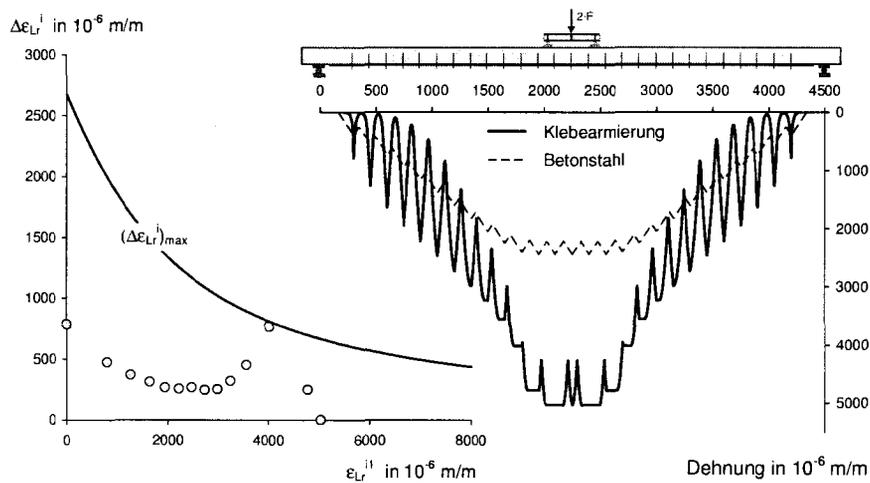
Abbildung 6.20 verdeutlicht die Äquivalenz zwischen dem entwickelten Rechenmodell für die Berechnung von Versagenslasten und dem in (Niedermeier 2001) vorgestellten Nachweiskonzept zur Zugkraftdeckung.

#### 6.5.5 Zusammenfassung

Die auf diskrete Dehnungen der Bewehrungsstränge bezogene Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten, die mit dem entwickelten Programmsystem auf Grundlage der vorgestellten Material- und Verbundmodelle sowie der vereinfachten, aus

Dehnkörperversuchen abgeleiteten Verträglichkeitsbedingungen ermittelt wurden, lässt folgende zusammenfassende Wertung zu:

- Das Rechenmodell ist in der Lage, das in Versuchen beobachtete Verhalten im Hinblick auf das Zusammenwirken von einbetonierter und angeklebter Bewehrung unabhängig von Typ der Klebarmierung (CFK-Lamellen oder Stahllaschen) und Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung qualitativ richtig wiederzugeben.
- Mit Ausnahme der Beanspruchungsbereiche, in denen das generell mit großen Streuungen behaftete elastische Verbundverhalten dominiert, ist die quantitative Erfassung der Dehnungsverteilung bzw. der Zugkraftaufteilung zufriedenstellend.
- Hinsichtlich der Vorhersage der auf diskrete Rissabstände bezogenen Verbundtragfähigkeit ist das Rechenmodell äquivalent zu den in (Niedermeier 2001) angegebenen Ansätzen zum Zugkraftdeckungsnachweis für Klebarmierungsstränge.



**Abbildung 6.20.** Versuch B2-08-B2C, Rechenwerte im letzten Inkrement ( $F_{max,cal} = 9,8 \text{ kN}$ ) - aufnehmbare Dehnungszuwachs zwischen zwei Rissen nach (Niedermeier 2001) im Vergleich mit dem vorhandenen Dehnungszuwachs; Verlauf der rechnerischen Dehnungen der Bewehrungsstränge unmittelbar vor Verbundversagen in Element 12 ( $1800 \leq x \leq 1950 \text{ mm}$ )

---

# Numerische Untersuchungen zum Zusammenwirken bei biegebeanspruchten Bauteilen

## 7.1 Umfang und Grundlagen

Mit Hilfe des in Kapitel 6 erläuterten und verifizierten Rechenmodells werden im Rahmen numerischer Parameterstudien die Auswirkungen verschiedener veränderlicher Einflussgrößen auf das Zusammenwirken einbetonierter und angeklebter Bewehrung bei biegebeanspruchten Bauteilen untersucht.

### 7.1.1 Ziele und Methodik

Eine numerische Untersuchung bei Variation diverser Einflussparameter liefert Erkenntnisse über die grundlegende Charakteristik der beanspruchungsabhängigen Veränderungen der Zugkraftaufteilung. Anhand der Ergebnisse ist die Relevanz einzelner Parameter und damit die Notwendigkeit der Berücksichtigung in vereinfachten Ansätzen abzuschätzen. Zudem dienen die Ergebnisse der Parameterstudien insbesondere bei dem hier gegebenen begrenzten Umfang der verwertbaren experimentellen Ergebnisse an biegebeanspruchten Bauteilen als Grundlage für eine Überprüfung der in Kapitel 8 zu entwickelnden Näherungsansätze.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden anhand zweier für den üblichen Hochbau repräsentativer Referenzsysteme die Auswirkungen von Parametern auf Material-, Querschnitts- und Systemebene untersucht:

- Material- und Querschnittskenngrößen:
  - Einbetonierte Bewehrung
    - Verhältnis Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamen Umfang ( $E_s d_s$ )
    - Verbundbereich (VB)
    - Oberflächengestaltung
  - Klebarmierung
    - Typ
    - Verhältnis Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamen Umfang ( $E_L t_L$ )
  - Beton
    - Druckfestigkeit ( $f_{cm}$ )
  - Querschnittsabmessungen und Bewehrungsgrade
    - Bauteilhöhe ( $h_c$ )
    - Betonstahlbewehrungsgrad ( $\rho_s$ )
    - Klebarmierungsbewehrungsgrad ( $\rho_L$ )
- Systemkenngrößen
  - Rissabstand ( $s_{cr}$ )
  - Spannweite bzw. Schlankheit ( $l_0$ )
  - Querkraftbeanspruchung

Die Auswirkungen von Material- und Querschnittskenngößen werden anhand der für den Rissquerschnitt in der Systemsymmetrieachse ( $V = 0$ ) ermittelten Rechenwerte dargestellt. Für Einflussparameter auf Systemebene - insbesondere die mit der Dehnungsdifferenz zwischen zwei Rissquerschnitten verknüpften Größen - werden weitere Rechenwerte entlang des querkraftbeanspruchten Bereichs angeführt.

Die Untersuchung der Auswirkungen einzelner Parameter auf das Zusammenwirken basiert im Wesentlichen auf einer getrennten Betrachtung von Einflussgrößen; bei Variation einer Größe bleiben die weiteren Material-, Querschnitts- und Systemparameter unverändert. Da die Aufteilung der Zugkräfte auf die Bewehrungsstränge ein komplexes nichtlineares Problem darstellt, ist eine getrennte Betrachtung einzelner Größen *per se* als pragmatische Vereinfachung zu sehen. So wirkt sich u.a. eine Veränderung der Rissabstände dominierend auf die Abweichungen der Dehnungen gegenüber einer ebenen Dehnungsverteilung aus. Allerdings bleiben bei unterschiedlichen Rissabständen die Auswirkungen der Variation weiterer Einflussgrößen dem Charakter bzw. der Tendenz nach unverändert (vgl. auch Kapitel 3); eine separate Betrachtung der variablen Größen ist daher ungeachtet der komplexen Vernetzungen aussagekräftig.

Die numerischen Untersuchungen bauen ausschließlich auf der Betrachtung von gleichmäßig verteilten Linien- bzw. Flächenlasten auf. Des Weiteren sind - den Material- und Verbundmodellen entsprechend - lediglich statische Kurzzeitbelastungen Gegenstand der Parameterstudien. Den Berechnungen werden ausschließlich Mittelwerte der Material- und Verbundkenngößen zugrunde gelegt; systematische Untersuchungen zu den Auswirkungen streuender Parameter auf die Zugkraftaufteilung würden den Rahmen der vorliegenden Arbeit verlassen.

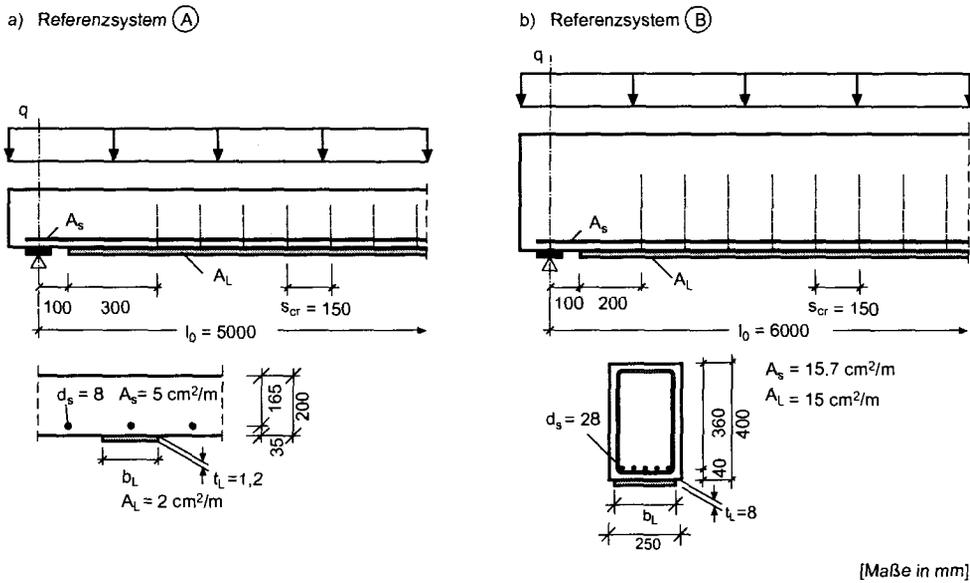
### 7.1.2 Referenzsysteme und Parameterbereich

Als Referenzsysteme wurden zwei idealisierte, statisch bestimmte Elemente des Hochbaus mit praxisüblichen Abmessungen, Bewehrungs- und Verstärkungsgraden gewählt (Abb. 7.1):

- Referenzsystem ① einachsig gespannte Stahlbetonplatte
- Referenzsystem ② Stahlbetonbalken

Die Kenngrößen der Referenzsysteme sind in Tab. 7.1 zusammengestellt; die Festigkeits- und Verformungskenngrößen des Betons werden aus der einachsialen Druckfestigkeit  $f_{cm}$  abgeleitet; insbesondere wird die Oberflächenzugfestigkeit der zentrischen Zugfestigkeit nach Gl. (4.16) gleichgesetzt. Die Bemessung der Stahlbetonbauteile, insbesondere die Bestimmung des Betonstahlbewehrungsgrades der Referenzsysteme folgt (DIN 1045-1 2001); es wird von ungestaffelter Betonstahlbewehrung zwischen den Endauflagern ausgegangen. Im Einzelnen entsprechen die Referenzsysteme folgenden Gesichtspunkten:

- ① Die Betonstahlbewehrung der einachsig gespannten Platte entspricht einer Verkehrslast von  $2 \text{ kN/m}^2$  (Büroräume, Kategorie B1 nach DIN 1055-3 2002, mit  $g_1 + g_2 = 6 \text{ kN/m}^2$ ). Die Grenzschlankheit für vereinfachte Verformungsnachweise nach (DIN 1045-1 2001) wird durch das System erfüllt. Als Verstärkung werden aufgeklebte CFK-Lamellen vorausgesetzt; die Lamellenquerschnittsfläche entspricht dem nach einschlägigen Richtlinien zulässigen, auf den Querschnitt in Feldmitte bezogenen Verstärkungsgrad (vgl. DIBt 2002). Das gewählte Verhältnis von Dehnsteifigkeit zum verbundwirksamen Umfang  $E_L t_L$  lehnt sich an die Kenngrößen der derzeit gebräuchlichsten CFK-Lamellenprofile an (vgl. u.a. DIBt 2002; DIBt 2003)
- ② Abmessungen und Bewehrungsgrad des Balkens orientieren sich an den Schlankheitsgrenzen (Verformungsbegrenzung) für hochbeanspruchte Bauteile nach (DIN V ENV 1992-1-1 1992). Es wird von einer Verstärkung mit aufgeklebten Stahllaschen ausgegangen; eine obligatorische Verbügelung in den Endbereichen (in Abb. 7.1 nicht dargestellt) wird nicht berücksichtigt.



**Abbildung 7.1.** Referenzsysteme als Grundlage der numerischen Untersuchungen  
 a) Referenzsystem (A) - einachsige Stahlbetonplatte  
 b) Referenzsystem (B) - Stahlbetonbalken

**Tabelle 7.1.** Referenzsysteme - Kennwerte der Eingangsgrößen und Parameterbereiche

Kennwert				System A		System B	
				Referenz	Parameterbereich	Referenz	Parameterbereich
Material	Beton	$f_{cm}$	MPa	30	20   30   40   50	30	20   30   40   50
		$E_s$	GPa	200	-	200	-
	Betonstahl	$d_s$	mm	8	6   8   12   16   20	20	12   16   20   28
		Oberfläche	-	gerippt	gerippt   glatt	gerippt	gerippt   glatt
		Verbundgüte	-	gut (VB I)	VB I   VB II	gut (VB I)	VB I   VB II
	Klebe-armierung	Typ	-	CFK	CFK   Stahl	Stahl	CFK   Stahl
$E_L$		GPa	167	167 (CFK)   200 (Stahl)	200	167 (CFK)   200 (Stahl)	
$t_L$		mm	1,2	0,6   1,2   2,4   3,6   4,8 (CFK) 2   5   8   10   15 (Stahl)	8,0	0,6   1,2   2,4   3,6   4,8 (CFK) 2   5   8   10   15 (Stahl)	
Querschnitt	Ab-messungen	$b_c$	mm	(1000)	-	250	-
		$h_c$	mm	200	150   200   300	400	300   400   600
		$d$	mm	165	(prop.) <sup>1</sup>	360	(prop.)
		$d_L$	mm	200	(prop.)	400	(prop.)
	Bewehrungs-grad	$A_s/A_c$	%	0,25	0,125   0,25   0,5	1,57	0,785   1,75   3,14
		$A_L/A_c$	%	0,10	0,05   0,1   0,2	1,50	0,75   1,5   3
System	Rissabstand	$s_{cr}$	mm	150	75   100   150   200   300   450   600	150	75   100   150   200   300   450   600
	Spannweite	$l_0$	m	5,0	1,4   2,3   3,2   4,1   5,0	6,0	1,5   2,4   3,3   4,2   5,1   6,0
	Schub-schlankheit	$\lambda = l_0/(4h)$	-	6,25	1,75   2,9   4   5,1   6,25	3,75	0,94   1,5   2,1   2,6   3,2   3,75

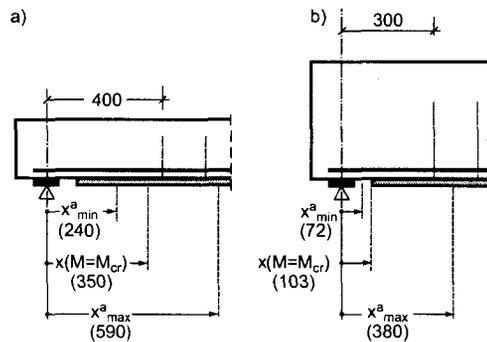
<sup>1</sup> die statischen Nutzhöhen der Bewehrungsstränge werden mit veränderlicher Bauteilhöhe proportional zum Verhältniswert der Referenzsysteme skaliert.

### Risslagen und -abstände

Auf Grundlage der gewählten Bewehrungs- und Verstärkungsgrade werden mit den in 4.6 vorgestellten Beziehungen mögliche Rissabstände bzw. mit dem in (Zilch u. a. 2004) entwickelten Modell der Bereich möglicher Lagen des auflagnächsten Biegerisses bestimmt. Für die beiden Referenzsysteme sind die Einleitungslängen der Risschnittgrößen für das abgeschlossene Erstrissbild sowie die darauf aufbauend gewählten konstanten Rissabstände nachfolgend angegeben; die möglichen und gewählten Lagen des auflagnächsten Risses werden in Abb. 7.2 dargestellt.

Für eine im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht wiedergegebene Variation der Eingangsparameter ( $t_L$ ,  $d_s$  bzw.  $f_{cm}$ , nach Tab. 7.1) bei konstanten Bewehrungsgraden liegt der gewählte Rissabstand im Wesentlichen zwischen dem ein- und zweifachen Wert der Einleitungslänge bei abgeschlossenem Erstrissbild. Der für beide Systeme identisch definierte Rissabstand erscheint zudem hinsichtlich der Vergleichbarkeit der Rechenergebnisse vorteilhaft.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad l_{ea} &= 84 \text{ mm} \rightarrow s_{cr} = 150 \text{ mm} \\ \textcircled{B} \quad l_{ea} &= 116 \text{ mm} \rightarrow s_{cr} = 150 \text{ mm} \end{aligned}$$



**Abbildung 7.2.** Mögliche und gewählte Lagen des auflagnächsten Biegerisses  
a) Referenzsystem  $\textcircled{A}$ ;  
b) Referenzsystem  $\textcircled{B}$

Der Ermittlung des auflagnächsten Biegerisses wird entsprechend Abschnitt 4.6 bzw. (Zilch u. a. 2004) die elementare Biegetheorie zugrunde gelegt. Die resultierenden rechnerischen Risslagen des Referenzsystems  $\textcircled{B}$  (Abb. 7.2 b) liegen im Diskontinuitätsbereich des Endauflagers (vgl. Schlaich und Schäfer 2001), damit außerhalb des Anwendungsbereichs der Biegetheorie. Dessen ungeachtet werden die ermittelten Abstände zur Abschätzung der möglichen Risslagen herangezogen.

## Parameterbereiche

Die im Rahmen der numerischen Untersuchungen überprüften Parameter der Eingangsgrößen werden in Tab. 7.1 wiedergegeben. Die jeweils gewählte Bandbreite erfasst damit den praxisrelevanten Bereich der Einflussgrößen.

Sofern die Dehnungen eines Bewehrungsstranges in einem Rissquerschnitt die Streckgrenze überschreiten, ist die Aufteilung der Zugkräfte unabhängig von Verbundverhältnissen festgelegt. Zur Untersuchung des Zusammenwirkens wird daher sowohl für einbetonierte als auch für angeklebte Bewehrung ideal elastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Damit können die Auswirkungen von Verbundunterschieden jeweils für den vollständigen Beanspruchungsbereich bis zum globalen Verbundversagen der Klebarmierung nachvollzogen werden.

### 7.1.3 Bezugs- und Vergleichsgrößen

Die Darstellung der verbundbedingten Abweichungen von der Zugkraftaufteilung nach der Hypothese von *Bernoulli* wird zweckmäßig auf den Rechenwert der Dehnung  $\epsilon_L^{II}$  bezogen. Da bei unveränderten Bewehrungsgraden  $\rho_s$  und  $\rho_L$  für variable Parameter keine Änderungen der Abhängigkeit zwischen Beanspruchung  $q$  und  $\epsilon_L^{II}$  auftreten<sup>1</sup>, ist  $\epsilon_L^{II}$  als Bezugsgröße geeignet. Zudem ist in Hinblick auf die Entwicklung von Näherungsbeziehungen  $\epsilon_L^{II}$  nach ebener Dehnungsverteilung als ein mit einfachen Hilfsmitteln zu bestimmender Eingangswert der Spannungsermittlung anzusehen.

<sup>1</sup> Die Veränderungen der Druckzonenhöhe bei variabler Betondruckfestigkeit wirkt sich insbesondere bei Referenzsystem  $\textcircled{A}$  nur in geringem Maß auf die Größe  $\epsilon_L^{II}$  aus; näherungsweise kann daher auch für einen Vergleich der Auswirkungen von  $f_{cm}$  als Bezugsgröße  $\epsilon_L^{II}$  gewählt werden.

In Analogie zur Darstellung bei Dehnkörpern wird als Vergleichsgröße das Verhältnis der Bewehrungsdehnungen in den Rissquerschnitten  $\delta_L$  herangezogen. Der Herleitung der Gl. (2.8) entsprechend ist aus der Gleichgewichtsbedingung (7.1) für  $N = 0$  mit den Gln. (7.2) bis (7.4) ein Zusammenhang zwischen  $\epsilon_L^{II}$  bzw.  $\eta_L$  und  $\delta_L$  für biegebeanspruchte Bauteile nach Gl. (7.5) herzustellen. Der Herleitung muss vereinfachend vorausgesetzt werden, dass die Hebelarme  $z_L$  und  $z_s$  der Bewehrungsstränge unabhängig von der Zugkraftaufteilung den Werten nach ebener Dehnungsverteilung entsprechen.

$$E_s A_s z_s \cdot \epsilon_{sr} + E_L A_L z_L \cdot \epsilon_{Lr} \stackrel{!}{=} E_s A_s z_s \cdot \epsilon_s^{II} + E_L A_L z_L \cdot \epsilon_L^{II} \quad (7.1)$$

$$\frac{\epsilon_L^{II}}{\epsilon_s^{II}} = \frac{d_L - x}{d - x} \quad (7.2)$$

$$\delta_L = \frac{\epsilon_{Lr}}{\epsilon_{sr}} \quad (7.3)$$

$$\eta_L = \frac{\epsilon_{Lr}}{\epsilon_L^{II}} \quad (7.4)$$

$$\Rightarrow \delta_L = \frac{\eta_L}{\frac{d-x}{d_L-x} + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \cdot (1 - \eta_L)} \quad (7.5)$$

Sofern die Hypothese nach *Bernoulli* zutrifft, folgt aus Gl. (7.5) mit  $\eta_L = 1$  das unmittelbar aus der ebenen Dehnungsverteilung resultierende Verhältnis der Bewehrungsdehnungen im Rissquerschnitt (vgl. Gl. 7.2).

$$\delta_L = \frac{d_L - x}{d - x}$$

Für eine Gegenüberstellung der Rechenergebnisse an verschiedenen Systemen ist daher eine um die Abstände zur neutralen Achse des Querschnittes bereinigte Größe  $\delta_{Lk}$  zweckmäßig; eine Übereinstimmung der Rechenergebnisse mit Größen nach der *Bernoulli*-Hypothese wird damit analog zu Dehnkörpern durch  $\delta_{Lk} = 1$  angezeigt<sup>2</sup>.

$$\delta_{Lk} = \delta_L \cdot \frac{d - x}{d_L - x} \quad (7.6)$$

Im Hinblick auf die Anwendung von Verbundbeiwerten ist ein aus den Gln. (7.5) und (7.6) folgender Zusammenhang hilfreich.

$$\epsilon_{Lr} = \frac{\left(1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x}\right) \cdot \delta_{Lk}}{1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x} \cdot \delta_{Lk}} \cdot \epsilon_L^{II} \quad (7.7)$$

Gleichung (7.7) stellt die um die Anrechnung verschiedener Abstände zur Nulllinie ergänzte Gl. (2.10) dar. Der konsequente Übergang von biegebeanspruchten zu zentrisch zugbeanspruchten Bauteilen erfolgt über  $d_L = d$ , damit  $z_L = z_s$  und  $\delta_{Lk} = \delta_L$ . Aus Gl. (7.7) folgt damit Gl. (2.10); für Bauteile mit geringen Unterschieden zwischen  $d$  und  $d_L$  ist damit eine Analogie zu Zugstäben gegeben:

$$\epsilon_{Lr} = \frac{\left(1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s}\right) \cdot \delta_{Lk}}{1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s} \cdot \delta_{Lk}} \cdot \epsilon_L^{II}$$

In Abb. 7.3 ist für Referenzsystem  $\textcircled{A}$  der beanspruchungsabhängige Verlauf des bezogenen Dehnungsverhältnisses  $\delta_{Lk}$  in Feldmitte in Abhängigkeit der Dehnung  $\epsilon_L^{II}$  für verschiedene Bewehrungsgrade bzw. Plattendicken wiedergegeben. In Analogie zu den Zusammenhängen bei Dehnkörpern ist die Vergleichsgröße  $\delta_{Lk}$  weitestgehend unabhängig von Bewehrungsgrad bzw. Bauteilhöhe - letzteres, sofern ein unveränderliches Verhältnis  $d_L/d$  vorliegt. Die geringen Unterschiede zwischen den Verläufen resultieren aus einem horizontalen Versatz der einzelnen Kurven und entstehen durch die Verknüpfung der Bezugsgröße  $\epsilon_L^{II}$  mit  $\delta_{Lk}$  über die Dehnsteifigkeitsverhältnisse nach Gl. (7.7).

<sup>2</sup> Es ist anzumerken, dass die Dehnungen der Bewehrungsstränge bedingt durch die nichtlinearen Zusammenhängen zwischen Rissrelativverschiebung und Dehnung nicht - wie durch den Bezug auf  $(d_L - x)/(d - x)$  unterstellt - linear mit dem Verhältnis der Abstände zur Nulllinie verknüpft sind. Gl. (7.6) ist daher als näherungsweise Normierung zu sehen.

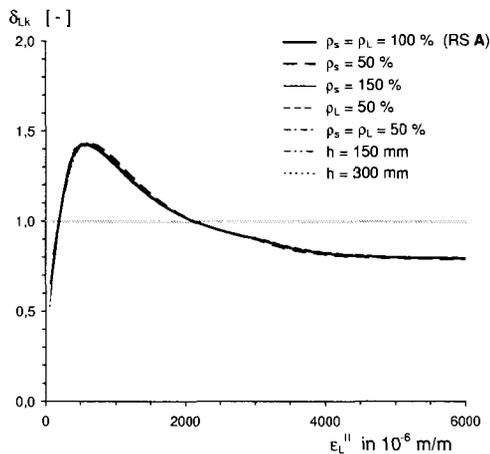


Abbildung 7.3. Referenzsystem A - Auswirkungen einer Variation der Bewehrungsgrade  $\rho_s$  und  $\rho_L$  bzw. der Bauteilhöhe  $h$  bei konstantem Verhältnis  $d_L/d$  auf das bezogene Dehnungsverhältnis  $\delta_{Lk}$ .

### Vergleichbarkeit der Referenzsysteme

Die Zuweisung der Klebarmierungstypen zu Referenzsystemen (RS A - CFK-Lamellen; RS B - Stahllaschen) stellt keine wesentliche Einschränkung der Aussagekraft der Ergebnisse dar. In Abb. 7.4 werden die Rechenwerte bei identischen Kombinationen mit einbetonierter gerippter Bewehrung  $d_s = 12$  mm einander gegenübergestellt. Aus der Darstellung können folgende Erkenntnisse gewonnen werden:

- Die Rechenwerte  $\delta_{Lk}$  der beiden Referenzsysteme unterscheiden sich bei identischen Kombinationen  $E_s d_s$  und  $E_L t_L$  nur geringfügig; die Differenzen resultieren aus den unterschiedlichen Verhältnissen  $d_L/d$  bzw. den unterschiedlichen Spannungsverteilungen in der Druckzone. Bei System B tritt im Unterschied zu A ein Klebeverbundversagen der Endverankerung ein.
- Der Unterschied in den Verläufen zwischen CFK-Lamellen und Stahllaschen bei annähernd identischer Kenngröße  $E_L t_L$  resultiert unmittelbar aus den Abweichungen zwischen den zugrunde gelegten Verbundansätzen, insbesondere dem bei Stahllaschen deutlich größeren Anteil der elastischen Verbundenergie  $G_e$  an der Bruchenergie  $G_F$ . Allerdings sei angemerkt, dass für Stahllaschen hinsichtlich der Laschendicke mit  $t_L = 2$  mm der experimentell abgesicherte Bereich des Verbundansatzes verlassen wurde. Es ist davon auszugehen, dass die Auswirkungen veränderlicher Dicke, d.h. ein mit  $t_L$  anwachsender Bereich des elastischen Verbundverhaltens, implizit in den Verbundansätzen enthalten sind. Der in 7.4 wiedergegebene Vergleich besitzt damit hinsichtlich der Unterschiede zwischen CFK-Lamellen und Stahllaschen nur eingeschränkte Bedeutung.

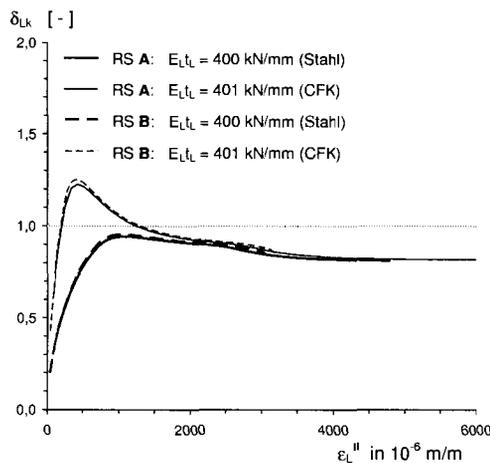


Abbildung 7.4. Systeme A und B - Dehnungsverhältnis  $\delta_{Lk}$  in Feldmitte für jeweils identische Kombinationen  $E_s d_s$  und  $E_L t_L$  ( $d_s = 12$  mm, gerippt; übrige Kenngrößen wie Referenzsysteme)

## 7.2 Einfluss von Material- und Querschnittskenngrößen

Die Auswirkungen der Variation einzelner Einflussparameter wird jeweils getrennt nach Referenzsystem in  $\delta_{Lk}-\epsilon_L^I$ -Koordinaten dargestellt. Die anhand System ① errechneten Ergebnisse werden generell in der linken Bildhälfte, die mit System ② ermittelten Werte in der rechten Bildhälfte wiedergegeben.

Ergänzend zum Verlauf des bezogenen Dehnungsverhältnisses  $\delta_{Lk}$  werden in den Diagrammen folgende charakteristische Beanspruchungszustände gekennzeichnet:

- **AERB**  
Die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge im an die Systemsymmetrieachse angrenzenden Element überschneiden sich; nach Abschnitt 4.6 ist damit der Dehnungs- und Verschiebungszustand des abgeschlossenen Erstrissbildes ( $\rightarrow$  AERB) erreicht. Die rechnerischen Einleitungslängen der Bewehrungsstränge folgen den Zusammenhängen nach 4.6; dem entsprechend wird für aufgeklebte Bewehrung eine ideelle Einleitungslänge auf Basis von Energiebetrachtungen zugrunde gelegt.
- **Entkopplungsbeginn**  
Im betrachteten Rissquerschnitt (Feldmitte) setzt mit dem Überschreiten von  $s_{L0}$  die Entkopplung des Klebeverbundes ein.

Die mit (RS **A**) und (RS **B**) gekennzeichneten Verläufe dienen als Vergleichsgrundlage und werden auf Grundlage der in Tab. 7.1 mit Referenz bezeichneten Größen ermittelt.

### *Klebearmierung - $E_L t_L$*

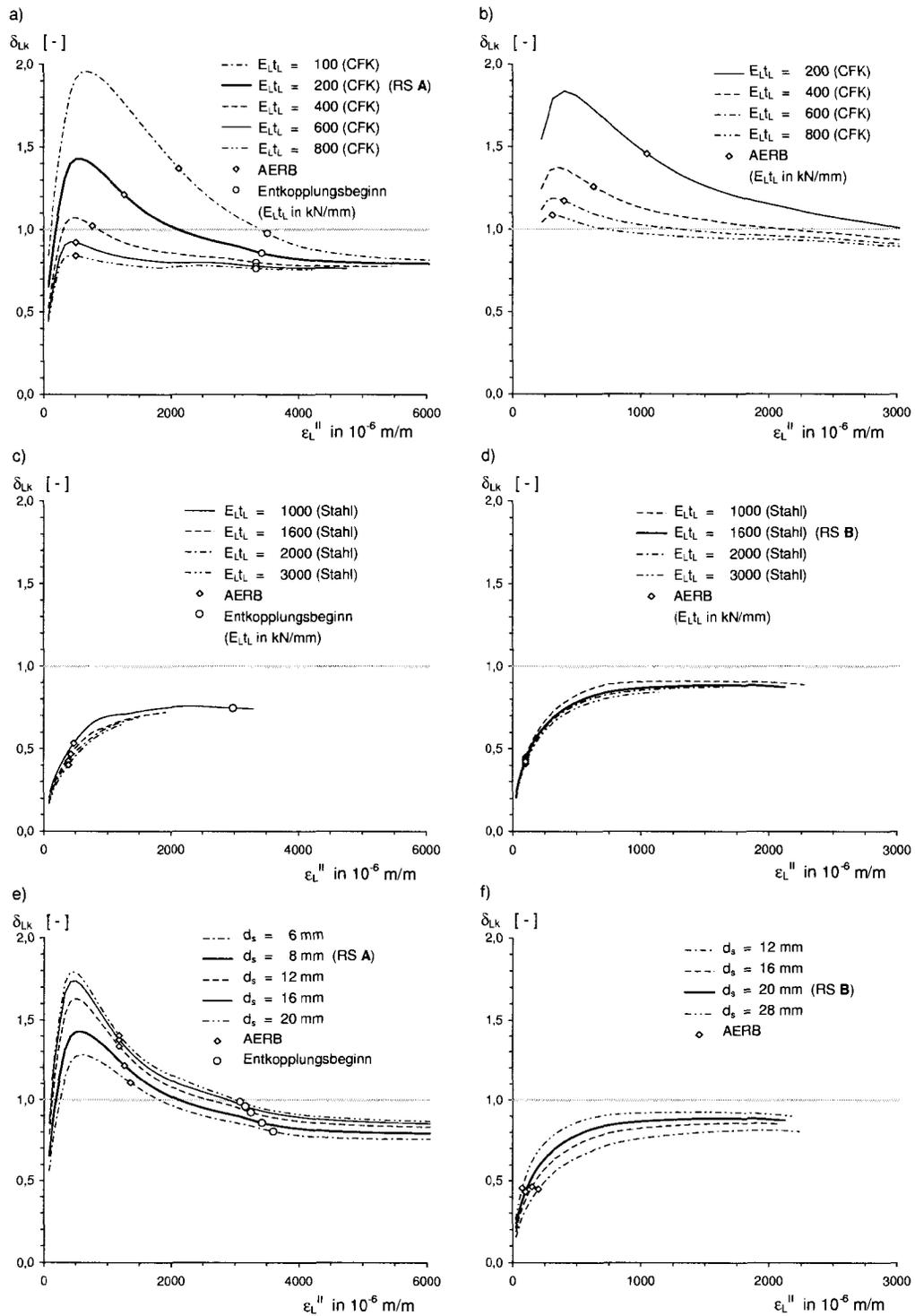
Im Vergleich der Abbildungen 7.5 a) bis d) werden zunächst die bereits in Zusammenhang mit der Gegenüberstellung der Referenzsysteme erläuterten Unterschiede im Verhalten von Bauteilen mit aufgeklebten Stahllaschen und CFK-Lamellen deutlich, die zum Teil auf die voneinander abweichenden Verbundansätze zurückzuführen sind. Generell ist im gesamten Beanspruchungsbereich mit abnehmender Laschen- bzw. Lamellendicke, d.h. mit abnehmendem Kennwert  $E_L t_L$ , eine überproportionale Verschiebung von Zugkraftanteilen zur aufgeklebten Bewehrung festzustellen. Bei CFK-Lamellen (Abb. 7.5 a und b) repräsentiert die Klebearmierung den verbundsteiferen Bewehrungsstrang; bis zum Erreichen der mit *AERB* bezeichneten Marke liegt für CFK-Lamellen der ideelle Einzelrisszustand vor. Im Vergleich mit den Ergebnissen für Stahllaschen tritt das ausgeprägte Maximum des  $\delta_{Lk}$ -Verlaufs nur im ideellen Einzelrisszustand auf.

Die Auswirkungen der Größe  $E_L t_L$  auf die möglichen Zugkraftumlagerungen bei lokaler Klebeverbundentkopplung am höher beanspruchten Rissufer können für CFK-Lamellen anhand Abb. 7.5 a) isoliert betrachtet werden: Umlagerungen sind durch die Unterschiede in der Größe  $\delta_{Lk}$  zwischen Entkopplungsbeginn und dem Endwert, dem sich der Verlauf asymptotisch annähert, gekennzeichnet. Mit abnehmendem Wert  $E_L t_L$  sind nach Entkopplungsbeginn größere Umlagerungen möglich; der Endwert  $\delta_{Lk}$  bei Systemversagen ist allerdings durch die Größe  $E_L t_L$  nur wenig beeinflusst.

### *Betonstahl - $E_s d_s$*

Mit zunehmendem Durchmesser der einbetonierten Bewehrung erfolgt eine unterproportionale Verschiebung von Zugkraftanteilen zum Klebearmierungsstrang (Abb. 7.5 e und f). Hierbei sind die grundsätzlichen Zusammenhänge unabhängig vom Verbundbereich, dem der Betonstahl zugeordnet wird (vgl. Abb. 7.6 c und d) bzw. der Oberflächengestaltung des Betonstahls (vgl. Abb. 7.6 e und f).

Das bezogene Dehnungsverhältnis bei Entkopplungsbeginn  $\delta_{Lk,e}$  wird dabei durch den Betonstahldurchmesser nur wenig beeinflusst; die Auswirkungen auf  $\delta_{Lk,e}$  werden mit abnehmender Verbundwirkung des Betonstahls (VB II bzw. glatter Stahl) deutlich reduziert. Insbesondere werden bei CFK-Lamellen auftretende mögliche Umlagerungen nach Entkopplungsbeginn durch den Durchmesser der einbetonierten Bewehrung - unabhängig von Verbundgüte und Oberflächenprofilierung - kaum beeinflusst.



**Abbildung 7.5.** Auswirkungen von Material- und Querschnittskenngößen

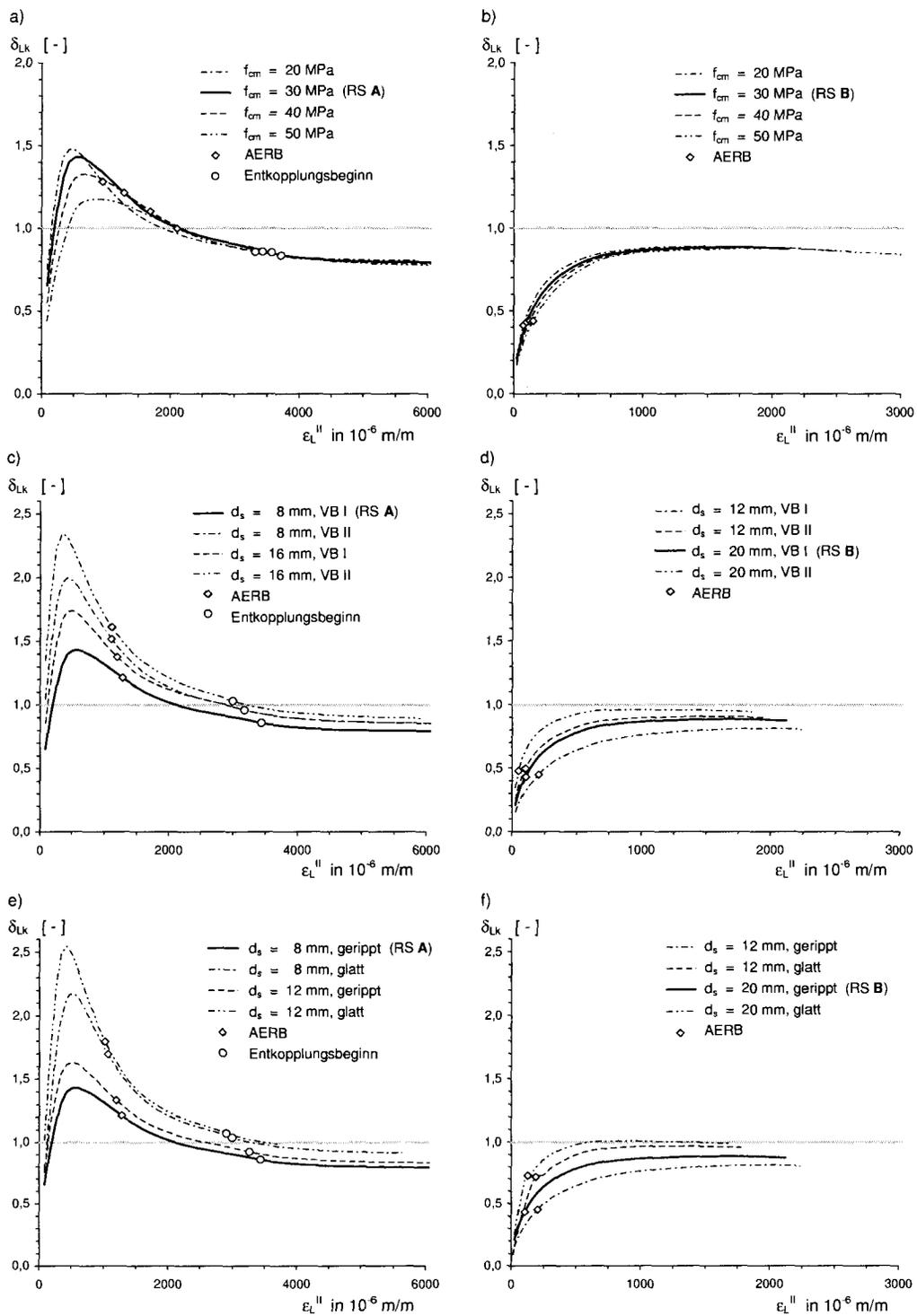
a), c) und d) - Referenzsystem **A**

b), e) und f) - Referenzsystem **B**

a) und b) Auswirkungen der Lamellendicke bzw. des Verhältnisses von Dehnsteifigkeit zu verbundwirksamen Umfang  $E_{LtL}$  bei aufgeklebten CFK-Lamellen

c) und d) Auswirkungen der Laschendicke bzw.  $E_{LtL}$  bei aufgeklebten Stahllaschen

e) und f) Auswirkungen des Durchmessers  $d_s$  der einbetonierten Bewehrung



**Abbildung 7.6.** Auswirkungen von Material- und Querschnittskenngrößen

a), c) und d) - Referenzsystem  $\textcircled{A}$

b), e) und f) - Referenzsystem  $\textcircled{B}$

a) und b) Auswirkungen der Betondruckfestigkeit  $f_{cm}$

c) und d) Auswirkungen der Verbundgüte (Verbundbereich VB) der einbetonierten Bewehrung

e) und f) Auswirkungen der Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung

*Betondruckfestigkeit*

Die vorliegende Betondruckfestigkeit wirkt sich bei CFK-Lamellen im Wesentlichen auf das Maximum des  $\delta_{Lk}$ -Verlaufs im ideellen Einzelrisszustand aus. Bei weiterem Anstieg der Beanspruchung treten die Unterschiede in den Hintergrund. Entkopplungsbeginn und mögliche Zugkraftumlagerungen durch Klebeverbundentkopplung werden durch  $f_{cm}$  kaum beeinflusst (Abb. 7.6 a). Bei aufgeklebten Stahllaschen sind generell nur geringe Auswirkungen der Betondruckfestigkeit festzustellen (Abb. 7.6 b).

*Verbundbereich der einbetonierten Bewehrung*

Mit der Zuordnung der einbetonierten Bewehrung zu Verbundbereich II ist unabhängig vom Klebearmierungstyp eine signifikante Verschiebung der Zugkraftanteile zur aufgeklebten Bewehrung verknüpft. Bei aufgeklebten CFK-Lamellen entspricht die Erhöhung des Größtwertes  $\max \delta_{Lk}$  einer Vergrößerung um den Faktor  $\sqrt{2}$ . Bei weiterer Zunahme der Beanspruchungen werden die Unterschiede reduziert. Anhand der annähernd parallelen Verläufe von  $\delta_{Lk}$  nach einsetzender Entkopplung ist festzustellen, dass in Analogie zur Variation des Betonstahldurchmessers eine Veränderung der Verbundgüte für den betrachteten Querschnitt keinen Einfluss auf die möglichen Zugkraftumlagerungen ausübt (Abb. 7.6 c).

Für aufgeklebte Stahllaschen sind die Einflüsse des Verbundbereichs einbetonierter Bewehrung zwar signifikant, allerdings im Vergleich zu CFK-Lamellen weniger stark ausgeprägt. (Abb. 7.6 d).

*Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung*

Grundsätzlich gelten die für den Verbundbereich erörterten Zusammenhänge für veränderte Verbundcharakteristiken der einbetonierten Bewehrung und sind ohne Einschränkungen auf die Oberflächengestaltung zu übertragen (Abb. 7.6 e und f).

**7.3 Einfluss von Systemkenngrößen***Rissabstand*

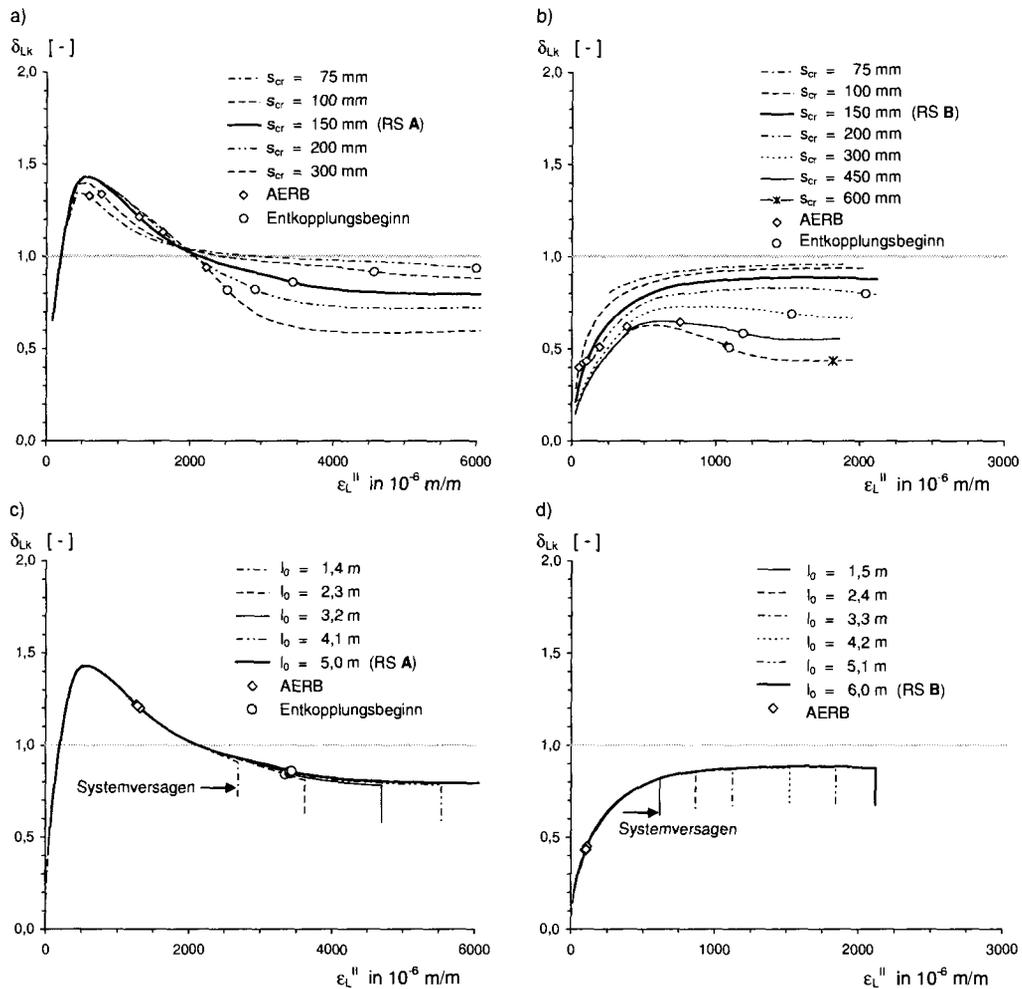
Aus Abb. 7.7 a) und b) ist der signifikante Einfluss des Rissabstandes auf das bezogene Verhältnis der Dehnungen  $\delta_{Lk}$  abzulesen. Erwartungsgemäß ist mit sinkendem Rissabstand eine Annäherung an eine ebene Dehnungsverteilung zu erkennen.

Bei aufgeklebten CFK-Lamellen (Abb. 7.7 a) steigt der Maximalwert  $\max \delta_{Lk}$  mit zunehmendem Rissabstand an, erreicht aber bereits bei  $s_{cr} = 150$  mm einen Grenzwert. Beide Bewehrungsstränge folgen dann den Gesetzmäßigkeiten des Einzelrisszustandes; eine weitere Erhöhung des Rissabstandes wirkt sich nicht mehr auf den Dehnungszustand im Rissquerschnitt aus. Daneben zeigt der Rissabstand wesentlichen Einfluss auf  $\delta_{Lk,e}$ ; mit zunehmendem Rissabstand tritt der Entkopplungsbeginn früher ein, gleichzeitig wird  $\delta_{Lk,e}$  verringert. Darüber hinaus sind mit zunehmendem Rissabstand deutlich ansteigende Zugkraftumlagerungen durch lokale Entkopplungen festzustellen.

Für Stahllaschen (Abb. 7.7 b) zeigt sich bei großen Rissabständen ab 450 mm der bei CFK-Lamellen charakteristische Verlauf mit ausgeprägtem Maximum und Krümmungswechsel. Der dem abgeschlossenen Erstrissbild zuzuordnende Dehnungs- und Verschiebungszustand tritt dem entsprechend erst nach Erreichen des Maximums auf.

*Spannweite / Schlankheit*

Eine Variation der Spannweite  $l_0$ , die bei konstantem Rissabstand gleichzeitig eine Variation der Elementanzahl bedeutet, zeigt nach Abb. 7.7 c) und d) keine wesentlichen Auswirkungen. Grundsätzlich ist eine Reduktion der Spannweite mit einem Anstieg der Zugkraftdifferenz zwischen den Elementrändern verknüpft; in Folge tritt bei reduzierter Spannweite ein Systemversagen in Form eines Verbundversagens am auflagnächsten Riss bei deutlich reduzierter Belastung auf. Ein Vergleich der bezogenen Dehnungsverhältnisse in den weiteren Rissquerschnitten zeigt ähnlich geringe Auswirkungen.



**Abbildung 7.7.** Auswirkungen von Systemkenngrößen

- a) Einfluss des Rissabstandes - Referenzsystem **A**  
 b) Einfluss des Rissabstandes - Referenzsystem **B**  
 c) Einfluss der Spannweite / Schlankheit - Referenzsystem **A**  
 d) Einfluss der Spannweite / Schlankheit - Referenzsystem **B**

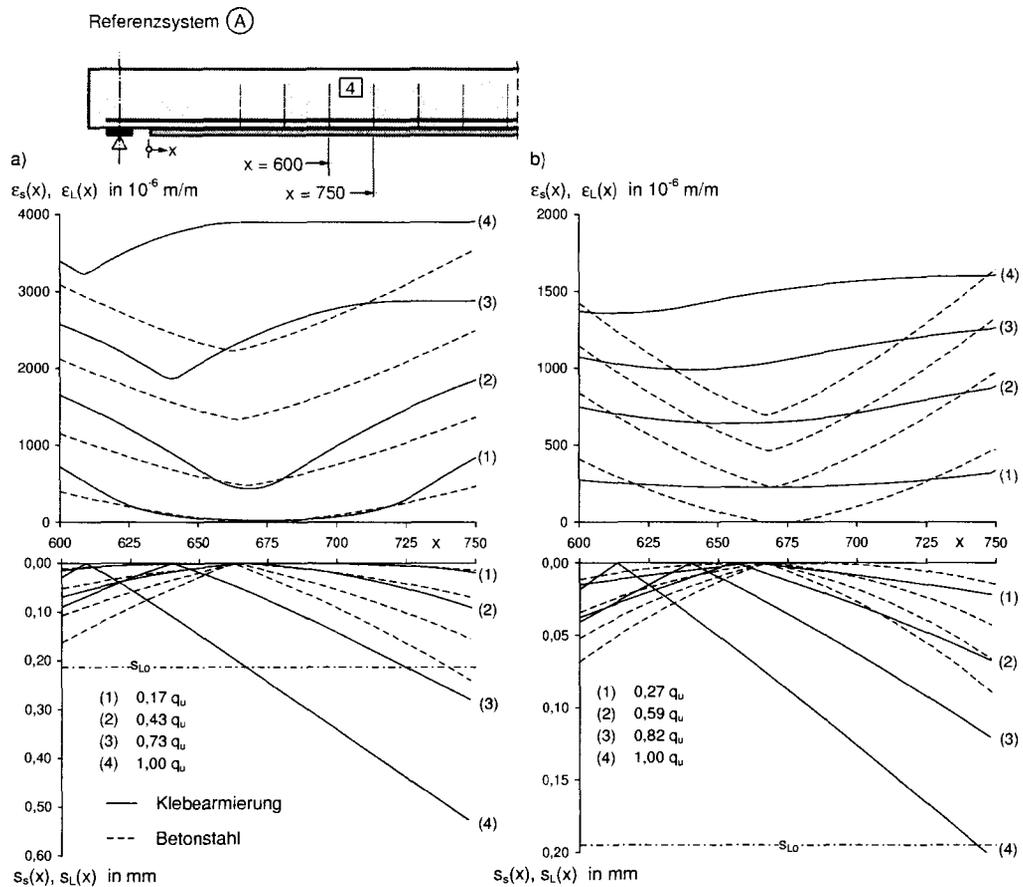
## 7.4 Auswirkungen der Querkraftbeanspruchung

Mit Hilfe des Rechenmodells können die Auswirkungen der Querkraftbeanspruchungen auf die Zugkraftaufteilung in den Rissquerschnitten des querkraftbeanspruchten Bereiches untersucht werden.

Am auflagnächsten Biegeriss gelten aufgrund der Endverankerung von Betonstahl und Klebarmierung von den übrigen Rissquerschnitten abweichende Randbedingungen; in den Folgenden Betrachtungen wird dem entsprechend die Endverankerungsproblematik ausgeklammert.

### 7.4.1 Auswirkungen auf Elementebene

Die auf Elementebene aus Querkraftbeanspruchungen resultierende Differenz der an den Rändern vorliegenden Zugkräfte bedingt den Ausgleich des Zugkraftunterschieds durch Verbundspannungen. In Abb. 7.8 sind für Element 4 des Referenzsystems **A** mit aufgeklebten CFK-Lamellen bzw. als Variation mit aufgeklebten Stahllaschen die Dehnungs- und Relativverschiebungsverläufe der Bewehrungsstränge für jeweils vier Beanspruchungsniveaus dargestellt.

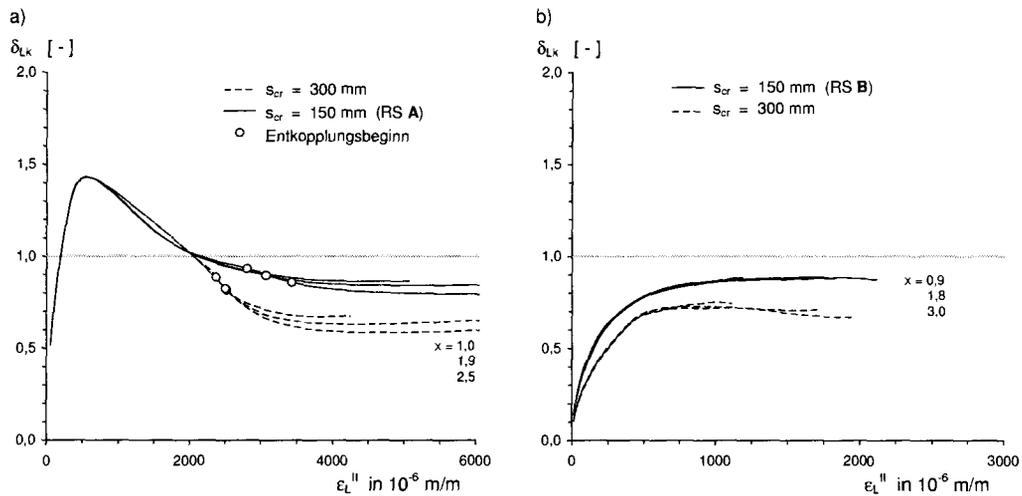


**Abbildung 7.8.** Dehnungen und Relativverschiebungen der einbetonierten und angeklebten Bewehrung in Element 4 für verschiedene Laststufen  
 a) Referenzsystem A - Verstärkung mit CFK-Lamellen ( $E_{LtL} = 100 \text{ kN/mm}$ )  
 b) Referenzsystem A - Verstärkung mit Stahllaschen ( $E_{LtL} = 1000 \text{ kN/mm}$ )

Generell ist eine Interaktion der Dehnungs- und Verschiebungsgrößen angrenzender Rissquerschnitte nicht möglich, sofern sich die Einleitungslängen nicht berühren (Einzelrisszustand). Bei geringer Belastung fallen nach Abb. 7.8 die Verschiebungsruhepunkte der Bewehrungsstränge noch weitgehend zusammen; erst bei weiterem Lastanstieg ist der erforderliche Zugkraftaufbau durch einen Versatz zwischen den Verschiebungsruhepunkten der Bewehrungsstränge zu erkennen. Aus Abb. 7.8 a) wird zudem deutlich, dass die Differenz der Klebarmierungsdehnung zwischen Ruhepunkt ( $\epsilon_{L0}$ ) und Elementrand ( $\epsilon_{Lr}^2$ ) mit zunehmender Beanspruchung abnimmt (vgl. Abschnitt 6.5.4 bzw. Gl. 6.46). Parallel dazu wird die für den Dehnungsaufbau erforderliche Verbundlänge reduziert. Der Anteil der Verbundlänge eines Elementes, in dem lokale Klebeverbundentkopplungen auftreten, ist demnach durch die Lage des Verschiebungsruhepunktes, die Ruhepunktsdehnung  $\epsilon_{L0}$  und die Dehnungsdifferenz bestimmt. Lokale Verbundlösungen führen in Konsequenz zu einer Umlagerung von Zugkraftanteilen auf die einbetonierte Bewehrung.

### 7.4.2 Auswirkungen auf Systemebene

Auf Systemebene führt die Aneinanderreihung von Elementen mit - ausgehend vom Auflager - ansteigendem Dehnungsniveau und - sofern Gleichlastbeanspruchung und konstante Rissabstände vorausgesetzt werden - abnehmender Zugkraftdifferenz zu Wechselwirkungen zwischen den Dehnungen in den einzelnen Rissquerschnitten. In Abb. 7.9 werden exemplarisch Verläufe des bezogenen Dehnungsverhältnisses  $\delta_{Lk}$  für verschiedene Rissquerschnitte des querkraftbeanspruchten Bereichs wiedergegeben.



**Abbildung 7.9.** Auswirkungen der Querkraftbeanspruchung -  $\delta_{Lk}$  in verschiedenen Rissquerschnitten des querkraftbeanspruchten Bereichs ( $x \hat{=}$  Abstand des betrachteten Querschnitts von der Auflagerlinie - Zuordnung jeweils von oben nach unten)

- a) Referenzsystem A -  $s_{cr} = 150$  mm und  $300$  mm  
 b) Referenzsystem B -  $s_{cr} = 150$  mm und  $300$  mm

Querkraftbeanspruchungen bewirken im Einzelrisszustand wegen der fehlenden Interaktion zwischen den einzelnen Rissquerschnitten keinerlei Veränderungen der Rechenwerte. Bei CFK-Lamellen treten darüber hinaus wesentliche Unterschiede generell erst nach einsetzender Klebeverbundentkopplung auf (Abb. 7.9 a); die durch Entkopplung realisierten Zugkraftumlagerungen werden bei Annäherung an das Auflager aufgrund der auf Elementebene erläuterten Zusammenhänge reduziert.

Bei Stahllaschen (Abb. 7.9 b) sind bereits bei vollständig intaktem Klebeverbund Abweichungen der  $\delta_{Lk}$ -Verläufe nach oben festzustellen. Die Unterschiede zum Querschnitt in Feldmitte resultieren aus der durch das Rechenmodell erzwungenen Systemverträglichkeit.

## 7.5 Zusammenfassung

Das Zusammenwirken einbetonierter und aufgeklebter Bewehrung ist zunächst grundlegend durch den Typ der Klebearmierung dominiert. Für CFK-Lamellen ist, bedingt durch die geringen Werte für  $E_L t_L$  sowie den im Vergleich zum Verbundansatz für Stahllaschen deutlich geringeren Anteil elastischen Verbundverhaltens ein ausgeprägtes Maximum des  $\delta_{Lk}$ -Verlaufs im ideellen Einzelrisszustand festzustellen. Mit zunehmender Beanspruchung nähert sich bei beiden Klebearmierungstypen die Dehnungsverteilung der nach *Bernoulli* unterstellten Verteilung an. Für die zugrunde gelegten Systemkonfigurationen und insbesondere für den gewählten, für alle in den Abbildungen 7.5 und 7.6 dargestellten Verläufe unveränderlichen Rissabstand ist bei einsetzender Klebeverbundentkopplung ein bezogenes Dehnungsverhältnis  $\delta_{Lk,e} \leq 1,1$  abzulesen. Zugkraftumlagerungen zur einbetonierten Bewehrung ausgelöst durch lokale Verbundentkopplungen werden bei konstanten Rissabständen im Wesentlichen durch die Kenngrößen der Klebearmierung, den Rissabstand und die Querkraftbeanspruchung - d.h. Dehnungsniveau und Dehnungsdifferenz - bestimmt.

Alle überprüften Material- und Querschnittskenngrößen beeinflussen die Größe des bei CFK-Lamellen ausgeprägten Maximalwertes. Die Auswirkungen unterschiedlicher Betondruckfestigkeiten treten bei steigender Beanspruchung in den Hintergrund. Darüber hinaus sind die Auswirkungen unterschiedlicher Durchmesser, des Verbundbereichs und der Oberflächengestaltung der einbetonierten Bewehrung tendenziell ähnlich.

Neben den Material- und Querschnittsparametern wirkt sich der im verwendeten Rechenmodell konstant angenommene Rissabstand signifikant auf die Abweichungen zur

ebenen Dehnungsverteilung aus. Allerdings ist insbesondere bei CFK-Lamellen eine mit guter Vorhersagequalität behaftete obere Abgrenzung des auftretenden Größtwertes  $\max \delta_{Lk}$  durch die Beziehungen des Einzelrisszustandes auch bei äußerst geringen Rissabständen möglich.

Die festgestellten Einflüsse korrespondieren grundsätzlich mit den Ergebnissen der Versuche an gemischt bewehrten Dehnkörpern bzw. an Plattenstreifen.

In querkraftbeanspruchten Bereichen biegebeanspruchter Bauteile treten gegenüber dem Bereich annähernd konstanter Biegemomente bei intaktem Klebeverbund nur geringfügige Einflüsse auf die beanspruchungsabhängige Entwicklung des bezogenen Dehnungsverhältnisses  $\delta_{Lk}$  bzw. der Zugkraftaufteilung zu Tage. Wesentliche Abweichungen sind bei CFK-Lamellen insbesondere nach einsetzender Klebeverbundentkopplung durch die Wechselwirkung von Dehnungsniveau, Dehnungsdifferenz und Rissabstand zu erwarten. Generell können bei biegebeanspruchten Bauteilen in Rissquerschnitten im Bereich der Feldmitte größere Zugkraftumlagerungen realisiert werden. Stahllaschen reagieren im Unterschied zu CFK-Lamellen wenig empfindlich auf Querkraftbeanspruchungen.

Im Hinblick auf die Ableitung vereinfachter Verbundbeiwerte erscheint angesichts der v.a. bei Verstärkungen mit CFK-Lamellen signifikanten querkraftbedingten Unterschiede der bezogenen Dehnungsverhältnisse  $\delta_{Lk}$  nach einsetzender Entkopplung bzw. aufgrund der Ortsabhängigkeit der möglichen Zugkraftumlagerungen eine obere Abgrenzung des Dehnungsverhältnisses auf dem Niveau von  $\delta_{Lk,e}$  sinnvoll.

---

## Spannungsermittlung bei biegebeanspruchten Bauteilen

Als Ergänzung des in (Zilch u. a. 2004) formulierten Konzeptes eines Zugkraftdeckungs-nachweises am auflagnächsten Riss biegebeanspruchter Klebarmierten Bauteile, das eine explizite Berücksichtigung von Verträglichkeitsbedingungen zulässt, werden im Folgenden einfache Hilfsmittel zur näherungsweisen Anrechnung der Auswirkungen von Verbundunterschieden in den übrigen querkraftbeanspruchten Bereichen entwickelt.

### 8.1 Vorbemerkung

Die Anrechnung von Auswirkungen unterschiedlichen Verbundverhaltens auf die Dehnungen bzw. Spannungen der Bewehrungsstränge kann bei Bemessungsaufgaben in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit in Anlehnung an die gängige Praxis des Spannbetonbaus durch Verbundbeiwerte erfolgen. Die Ableitung von Verbundbeiwerten für klebarmierte Bauteile ist an folgenden Anforderungen zu orientieren:

- Berücksichtigung aller wesentlichen Einflussparameter;
- in Bezug auf den sensitiveren Bewehrungsstrang konservative Spannungsermittlung;
- einfache Handhabung.

Für klebarmierte Bauteile müssen Verbundbeiwerte angesichts der Verbundentkopplungsproblematik des nachträglich aufgeklebten Bewehrungsstranges eine im Hinblick auf die Spannungen der Klebarmierung konservative obere Abgrenzung gewährleisten. Eine quasi-empirische Ableitung alleine anhand der Ergebnisse aus Parameterstudien ist angesichts der komplexen Vernetzung der vielfältigen Einflussgrößen wie auch der großen Bandbreite der Rechenwerte nicht möglich (vgl. Ulaga 2003). Verbundbeiwerte müssen daher konsequent auf Grundlage mechanischer Modelle abgeleitet werden. Die Ableitung erfolgt vor dem Hintergrund folgender Rahmenbedingungen:

- Die in (Neubauer 2000) und (Niedermeier 2001) vorgelegten Konzepte für einen Zugkraftdeckungsnachweis erfordern die Ermittlung diskreter Rissabstände im Vorlauf des Nachweises. In Konsequenz ist als wesentliche Eingangsgröße für die Ermittlung von Verbundbeiwerten der Abstand zwischen zwei benachbarten Rissen zu sehen. Damit wird gleichzeitig eine vorteilhafte Entkopplung der Verbundbeiwerte von einer Querschnittsbetrachtung erreicht.
- Die Ermittlung von Spannungen und damit verknüpft die Ableitung von Verbundbeiwerten basiert auf den Mittelwerten der Material- und Verbundeigenschaften.

Zur Ableitung der Verbundbeiwerte wird auf das um die Auswirkungen unterschiedlicher Hebelarme korrigierte Verhältnis der Rissdehnungen  $\delta_{Lk}$  Bezug genommen. Dadurch wird eine allgemeine, von den spezifischen Randbedingungen und insbesondere von den Bewehrungsgraden und Dehnsteifigkeitsverhältnissen weitgehend unabhängige Formulierung der Verbundbeiwerte erreicht (vgl. Abschnitte 2.1.1 und 7.1.3).

Die Ermittlung von Spannungen bzw. Dehnungen erfolgt ausgehend von den Rechenwerten auf Basis der *Bernoulli*-Hypothese über Gl. (8.1) (vgl. Gl. 7.7) unter Verwendung der Verbundbeiwerte  $\delta_{Lk}$ .

$$\epsilon_{Lr} = \frac{\left(1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x}\right) \cdot \delta_{Lk}}{1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x} \cdot \delta_{Lk}} \cdot \epsilon_L^{II} \quad (8.1)$$

Für annähernd identische Höhenlagen der Bewehrungsstränge bzw. für zentrische Zugbeanspruchung geht Gl. (8.1) über in die z.B. für Spannbetonbauteile in (DIN 1045-1 2001) sinngemäß angegebene Form nach Gl. (8.2).

$$\epsilon_{Lr} = \frac{\left(1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s}\right) \cdot \delta_{Lk}}{1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s} \cdot \delta_{Lk}} \cdot \epsilon_L^{II} \quad (8.2)$$

Im Folgenden werden Verbundbeiwerte  $\delta_{Lk}$  für ausgezeichnete Punkte des Beanspruchungsbereichs angegeben.

## 8.2 Grundlagen und Konzepte für Verbundbeiwerte

### 8.2.1 Stadien des Zusammenwirkens

Bei Bauteilen mit einbetonierter und angeklebter Bewehrung sind - zum einen bedingt durch die Voraussetzung eines von der Belastung entkoppelten konstanten Rissabstandes, zum anderen infolge des komplexen Verbundverhaltens aufgeklebter Bewehrung - verschiedene beanspruchungsabhängige Stadien des Zusammenwirkens zu unterscheiden. In Abb. 8.1 werden die bei vorgegebenem Rissabstand auftretenden Fälle vereinfachend anhand starr-plastischer Verbundansätze unter Berücksichtigung der Klebeverbundentkopplung für ein Element zwischen zwei Rissen im Bereich  $M \approx \text{const.}$  dargestellt. Die Beanspruchung nimmt dabei von ① ausgehend zu.

Die in Abb. 8.1 wiedergegebenen 10 Fälle können anhand folgender Gesetzmäßigkeiten unterschieden werden:

- ① Einzelrisszustand:  
Größte Abweichungen der Dehnungen gegenüber der Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung; zugeordneter Maximalwert  $\delta_{Lki, \max}^1$ ;
- ② Klebeverbundentkopplung im Einzelrisszustand:  
Voraussetzung:  $s_{cr}/2 \geq l_t$  ( $l_t$  nach Gl. 8.3; vgl. Niedermeier 2001);

$$l_t = \frac{2}{\kappa} \cdot \sqrt{\frac{2G_F E_L t_L}{\tau_{L1}^2}} \quad (8.3)$$

mit:  $\kappa = 1, 112$

- ③ ④ Einleitungslängen der Klebarmierung überschneiden sich<sup>2</sup>:  
Der Klebarmierungsstrang ist gegenüber der einbetonierten Bewehrung verbundweicher; für Betonstahl gelten die Beziehungen des Einzelrisszustandes; in Bezug auf das Auftreten von  $\delta_{Lki, \max}$  sind zwei Fälle zu unterscheiden<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \delta_{Lki, \max} \text{ tritt auf} & \Leftrightarrow s_{cr}/2 \geq l_{eL}^* = l_{eL}(\delta_{Lki, \max}) \\ \textcircled{4} \quad \delta_{Lki, \max} \text{ tritt nicht auf} & \Leftrightarrow s_{cr}/2 < l_{eL}^* = l_{eL}(\delta_{Lki, \max}); \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $\delta_{Lki, \max}$  bezeichnet den im Einzelrisszustand (Index  $i \rightarrow \text{initial}$ ) auftretenden Maximalwert des bezogenen Dehnungsverhältnisses.

<sup>2</sup> Ideelle Einleitungslänge z.B. auf Grundlage einer Näherung über Energiebetrachtungen, vgl. Abschnitt 4.6.2.

<sup>3</sup>  $l_{es}^*$  und  $l_{eL}^*$  bezeichnen die bei Eintreten von  $\delta_{Lki, \max}$  vorliegenden Einleitungslängen von einbetonierter bzw. angeklebter Bewehrung.

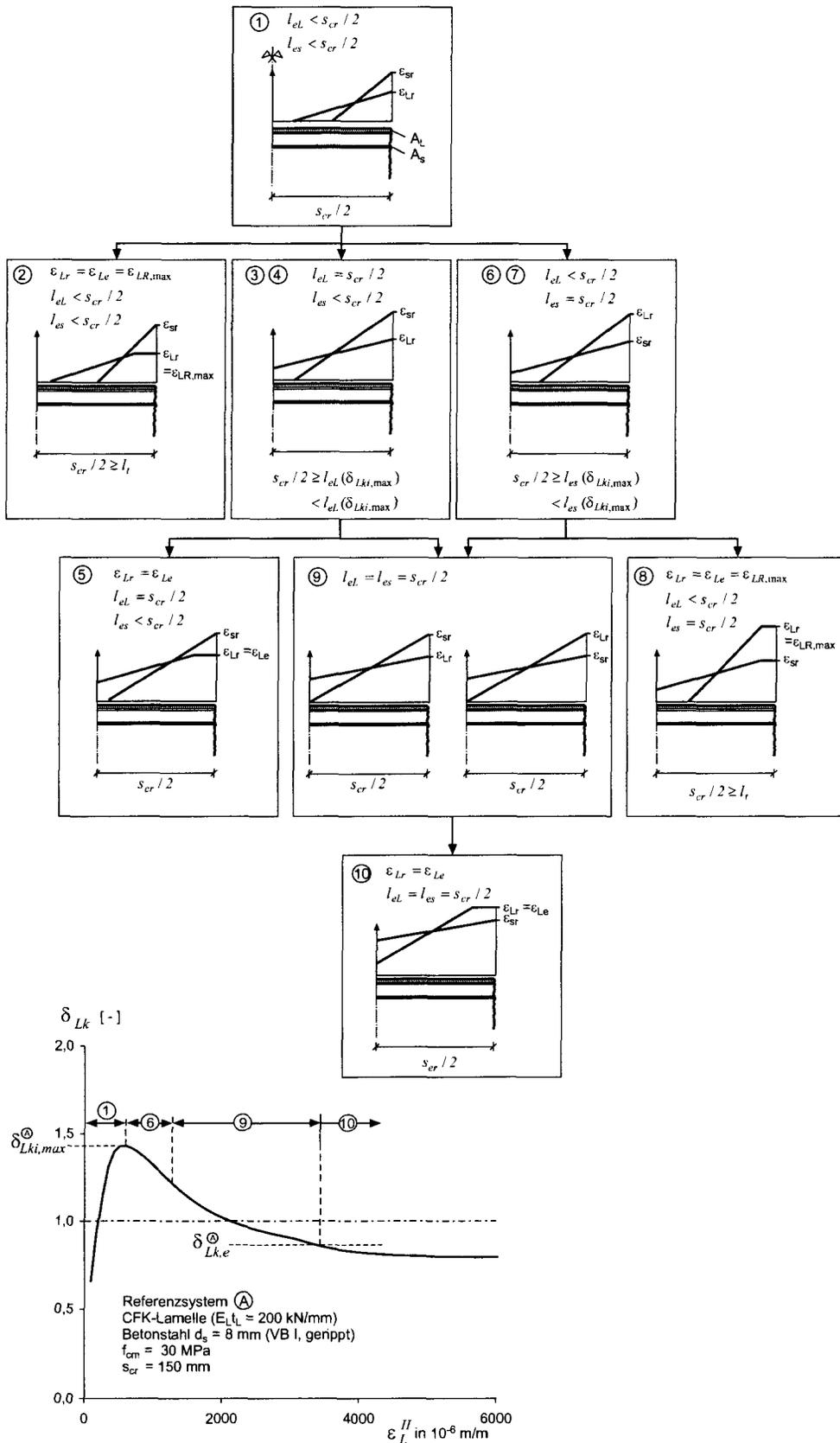


Abbildung 8.1. Mögliche Stadien des Zusammenwirkens einbetonierter und angeklebter Bewehrung (schematisch;  $l_{es}$  und  $l_{eL}$  bezeichnen die rechnerischen Einleitungslängen); Referenzsystem (A) nach Abb. 7.1 - Zuordnung zu Stadien

- ⑤ Klebeverbundentkopplung:  
Die Einleitungslängen der einbetonierten Bewehrung überschneiden sich bei einsetzender Verbundentkopplung noch nicht;
- ⑥ ⑦ Einleitungslängen der einbetonierten Bewehrung überschneiden sich:  
Der Klebearmierungsstrang ist gegenüber der einbetonierten Bewehrung verbundsteifer; für die aufgeklebte Bewehrung gelten die Beziehungen des Einzelrisszustandes; in Bezug auf das Auftreten von  $\delta_{Lki,max}$  sind ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden:  
 ⑥  $\delta_{Lki,max}$  tritt auf  $\Leftrightarrow s_{cr}/2 \geq l_{es}^* = l_{es}(\delta_{Lki,max})$   
 ⑦  $\delta_{Lki,max}$  tritt nicht auf  $\Leftrightarrow s_{cr}/2 < l_{es}^* = l_{es}(\delta_{Lki,max})$ ;
- ⑧ Klebeverbundentkopplung:  
Die ideellen Einleitungslängen der aufgeklebten Bewehrung überschneiden sich bei einsetzender Verbundentkopplung noch nicht; vorausgesetzt werden muss  $s_{cr}/2 \geq l_t$ ;
- ⑨ Einleitungslängen beider Bewehrungsstränge überschneiden sich:  
Der Dehnungszustand ist nach Abschnitt 4.6 dem abgeschlossenen Erstrissbild zugeordnet; für beiden Bewehrungsstränge gelten die für das abgeschlossene Erstrissbild abgeleiteten Beziehungen;
- ⑩ Klebeverbundentkopplung;  
Der einsetzenden Verbundentkopplung ist  $\delta_{Lk,e}$  als bezogenes Verhältnis der Dehnungen der Bewehrungsstränge zugeordnet.

Für die in Abb. 8.1 wiedergegebenen Stadien gelten jeweils unterschiedliche Randbedingungen, auf Grundlage derer Verbundbeiwerte anhand analytischer Zusammenhänge abgeleitet werden können. Eine weitgehend exakte Erfassung der verschiedenen Phasen erfordert dem entsprechend erheblichen Aufwand, der im Rahmen eines praxisgerechten Nachweiskonzepts nicht gerechtfertigt erscheint.

### 8.2.2 Konzept für Verbundbeiwerte

Zur Spannungsermittlung bei klebarmierten Bauteilen werden Verbundbeiwerte entwickelt, die eine obere Abschätzung der Beanspruchungen der Klebearmierung erlauben. Basierend auf analytischen Zusammenhängen werden für maßgebende Punkte Verbundbeiwerte abgeleitet (Abb. 8.2):

- Als einfache Näherungsbeziehung für einen auf der sicheren Seite liegenden, konstanten Verbundbeiwert  $\delta_{Lk}$  ist der größere der den Stadien ① und ⑩ zugeordneten Beiwerte anzunehmen (Gl. 8.4).

$$\delta_{Lk} = \max \begin{cases} \delta_{Lki,max} \\ \delta_{Lk,e} \end{cases} \quad (8.4)$$

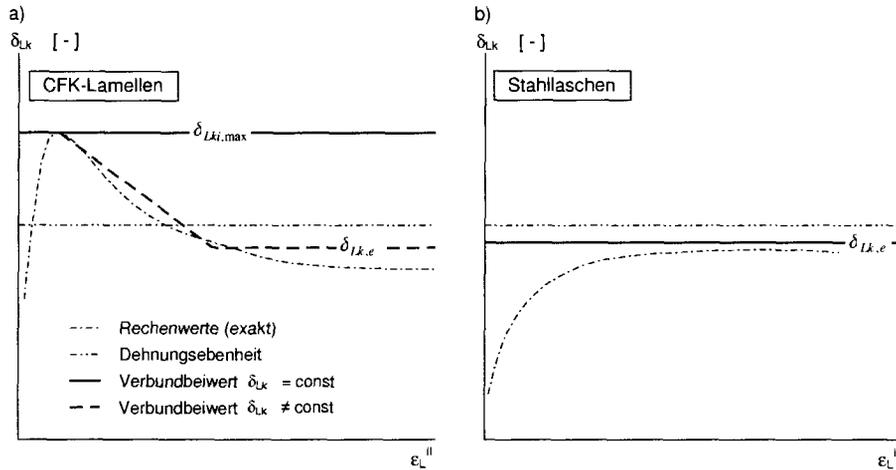
- Der bei CFK-Lamellen in vielen Fällen ausgeprägte Einzelrisszustand führt bei Annahme konstanter Beiwerte auf dem Niveau von  $\delta_{Lki,max}$  zu teilweise unwirtschaftlichen Ergebnissen. Der beanspruchungsabhängige Übergang vom Einzelrisszustand zum abgeschlossenen Rissbild kann vereinfachend durch abschnittsweise lineare Beziehungen wiedergegeben werden. Die Größen  $\delta_{Lki,max}$  und  $\delta_{Lk,e}$  dienen jeweils als Abgrenzung.

Die Beiwerte werden zunächst für ein biegebeanspruchtes Bauteil im Bereich  $M \approx \text{const.}$  angegeben. Die allgemeine Verträglichkeitsbedingung (Gl. 6.16) kann damit wegen  $\Delta s_{sr}^{ij} \approx 0$  durch Gl. (8.5) ersetzt werden<sup>4</sup>.

$$\frac{s_{Lr}}{s_{sr}} = k_x = k_s \cdot \frac{d_L - x}{d - x} \quad (8.5)$$

Erläuterungen zur Übertragbarkeit auf querkraftbeanspruchte Bereiche sowie die Entwicklung praxisgerechter Verbundbeiwerte folgen anschließend.

<sup>4</sup> Im Folgenden wird aus Übersichtlichkeitsgründen auf die Element- und Rissufer-Hochzeiger  $i,j$  verzichtet.



**Abbildung 8.2.** Verbundbeiwerte - Obere Abgrenzung durch konstante Verbundbeiwerte nach Gl. (8.4); Verfeinertes Modell für CFK-Lamellen mit abschnittsweise linearem Verbundbeiwert

## 8.3 Lösungen für maßgebende Beanspruchungszustände

### 8.3.1 Einzelriss - Maximalwert $\delta_{Lki, \max}$

Zur Ermittlung des im Einzelrisszustand auftretenden Größtwertes  $\delta_{Lki, \max}$  wird von den exakten Lösungen der Zusammenhänge zwischen Rissdehnung und Rissrelativverschiebung auf Grundlage von Energiebetrachtung ausgegangen. Für den Einzelrisszustand ist in direkter Analogie zu den Dehnkörperversuchen von  $k_s = k_{si}$  als Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung auszugehen.

$$\epsilon_{Lr}(s_{Lr}) = \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L} \cdot \left( 2s_{Lr} - s_{L1} - \frac{(s_{Lr} - s_{L1})^2}{s_{L0} - s_{L1}} \right)} \quad (8.6)$$

$$\epsilon_{sr}(s_{Lr}) = \sqrt{\frac{8A\sqrt{f_{cm}}}{(N+1)E_s d_s} \cdot \left( \frac{s_{Lr}}{k_{si} \cdot \frac{d_L - x}{d - x}} \right)^{(N+1)/2}} \quad (8.7)$$

$$\delta_{Lk}(s_{Lr}) = \frac{\epsilon_{Lr}(s_{Lr})}{\epsilon_{sr}(s_{Lr})} \cdot \frac{d - x}{d_L - x} \quad (8.8)$$

Der Maximalwert  $\delta_{Lki, \max}$  ist an eine Nullstelle der Ableitung  $d\delta_{Lk}(s_{Lr})/ds_{Lr}$  gekoppelt. Die resultierende quadratische Gleichung (8.9) ist ausschließlich von den Parametern der verwendeten Verbundansätze abhängig und besitzt lediglich eine sinnvolle Lösung für die  $\delta_{Lki, \max}$  zugeordnete Relativverschiebung  $s_L^*$  (Gl. 8.10).

$$\frac{d\delta_L}{ds_{Lr}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (N-1)s_{Lr}^2 - 2 \cdot N s_{L0} s_{Lr} + (N+1)s_{L1} s_{L0} = 0 \quad (8.9)$$

$$s_L^* = \frac{N s_{L0} - \sqrt{N^2 s_{L0}^2 - s_{L1} s_{L0} (N^2 - 1)}}{N - 1} \quad (8.10)$$

Durch Einsetzen von  $s_L^*$  in Gl. (8.8) bzw. die Gln. (8.6) und (8.7) kann  $\delta_{Lki, \max}$  angegeben werden.

$$\delta_{Lki, \max} = \sqrt{\frac{E_s d_s \tau_{L1}}{E_L t_L \sqrt{f_{cm}}}} \cdot k_{si}^{(N+1)/2} \cdot \left( \frac{d_L - x}{d - x} \right)^{(N-1)/2} \cdot \sqrt{\frac{N+1}{8A}} \cdot \dots \cdot \frac{\sqrt{2s_L^* - s_{L1} - \frac{(s_L^* - s_{L1})^2}{s_{L0} - s_{L1}}}}{(s_L^*)^{(N+1)/2}} \quad (8.11)$$

Der Ausdruck nach Gl. (8.11) zerfällt in zwei Anteile - einen ausschließlich von der betrachteten Kombination von einbetonierter und angeklebter Bewehrung, d.h. den Parametern der Verbundansätze abhängigen Anteil sowie einen Term, der die spezifischen

Randbedingungen, d.h. die maßgebenden Kennwerte und Höhenlagen der Bewehrungsstränge berücksichtigt. Ob  $\delta_{Lki,\max}$  auftreten kann, ist vom vorhandenen Rissabstand im Vergleich mit den für  $\delta_{Lki,\max}$  erforderlichen Einleitungslängen  $l_{eL}^*$  bzw.  $l_{es}^*$  abhängig (Gl. 8.12).

$$s_{cr} \geq 2 \cdot \max \left\{ \begin{array}{l} l_{es}^* \\ l_{eL}^* \end{array} \right. \quad (8.12)$$

mit:

$$l_{eL}^* = 2 \cdot \sqrt{\frac{E_L t_L}{\tau_{L1}}} \cdot \sqrt{\frac{s_L^* (s_{L1} - s_{L0})}{(s_L^*)^2 - 2s_L^* s_{L0} + s_{L1} s_{L0}}} \quad (8.13)$$

$$l_{es}^* = \sqrt{\frac{E_s d_s}{\sqrt{f_{cm}}}} \cdot \left( k_{si} \cdot \frac{d_L - x}{d - x} \right)^{(N-1)/2} \cdot \sqrt{\frac{N+1}{2A}} \cdot \frac{(s_L^*)^{(1-N)/2}}{1-N} \quad (8.14)$$

In Analogie zur Bestimmungsgleichung für  $\delta_{Lki,\max}$  sind die Gln. (8.13) und (8.14) in einen lediglich von den Parametern des Verbundansatzes abhängigen Anteil und einen die spezifischen Randbedingungen berücksichtigenden Anteil zu trennen. Während Gl. (8.14) auf der exakten Lösung für die Einleitungslänge nach der DGL des verschieblichen Verbundes basiert, ist die Einleitungslänge der Klebarmierung auf Grundlage der Näherungslösungen aus Energiebetrachtungen nach Abschnitt 4.6 abgeleitet. Eine eindeutige Zuordnung der bezogenen Größe  $\delta_{Lki,\max}$  erfordert die Kenntnis der zugehörigen Dehnung  $\epsilon_L^I$ . Mit Gl. (8.1) folgt:

$$\epsilon_L^{II}(\delta_{Lki,\max}) = \frac{1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s} \frac{z_L}{z_s} \frac{d_L - x}{d - x} \delta_{Lki,\max}}{\left( 1 + \frac{E_L A_L}{E_s A_s} \frac{z_L}{z_s} \frac{d_L - x}{d - x} \right) \delta_{Lki,\max}} \cdot \epsilon_{Lr}(\delta_{Lki,\max}) \quad (8.15)$$

Die tatsächliche Dehnung der Klebarmierung bei Erreichen von  $\delta_{Lki,\max}$  ist durch die Verknüpfung der Beziehungen (8.6) und (8.10) gegeben:

$$\epsilon_{Lr}(\delta_{Lki,\max}) = \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L}} \cdot \sqrt{2s_L^* - s_{L1} - \frac{(s_L^* - s_{L1})^2}{s_{L0} - s_{L1}}} \quad (8.16)$$

### 8.3.2 Entkopplungsbeginn - $\delta_{Lk,e}$

Für die Ableitung des dem Entkopplungsbeginn zugeordneten Verbundbeiwertes wird zunächst vorausgesetzt, dass sich die Einleitungslängen aller Bewehrungsstränge in Riss-elementmitte überschneiden (Fall ⑩ in Abb. 8.1). Da weder für einbetonierte noch für aufgeklebte Bewehrung für die genannten Randbedingungen geschlossen lösbar Zusammenhänge zwischen Rissdehnung  $\epsilon_{Lr}$  bzw.  $\epsilon_{sr}$  und den zugehörigen Relativverschiebungen  $s_{Lr}$  bzw.  $s_{sr}$  vorliegen, werden Näherungslösungen verwendet.

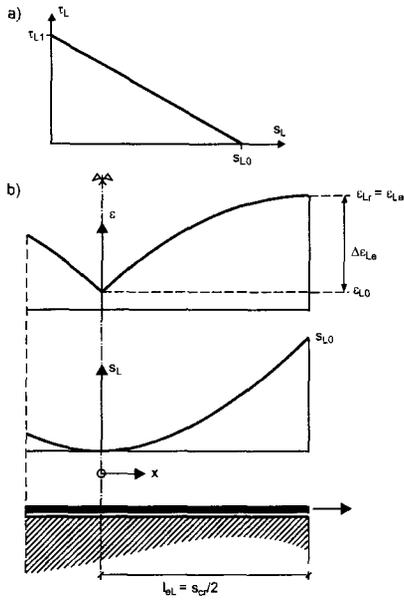
Grundlegender Eingangswert ist die am Einzelriss zu realisierende Verbundbruchdehnung der Klebarmierung  $\epsilon_{LR,\max}^a$ . Für  $l_{bL} \rightarrow \infty$  folgt wegen  $s_L^a(x=0) \rightarrow 0$  aus Energiebetrachtungen  $\epsilon_{LR,\max}^a$  nach Gl. (8.17) (vgl. Gl. 4.58).

$$\epsilon_{LR,\max}^a = \sqrt{\frac{2G_f}{E_L t_L}} = \sqrt{\frac{\tau_{L1} s_{L0}}{E_L t_L}} \quad (8.17)$$

Für aufgeklebte Bewehrung folgt bei Verwendung eines starr-plastisch-entfestigenden Verbundansatzes mit den Randbedingungen nach Abb. 8.3 bzw. nach den Gln. (8.18) bis (8.20) die Dehnung bei einsetzender Verbundentkopplung nach Gl. (8.21) bei Bezug auf die am Einzelriss zu realisierende Verbundbruchdehnung  $\epsilon_{LR,\max}^a$  (Gl. 8.17).

Gleichung (8.21) gilt für Rissabstände nach Bedingung (8.23);  $\tilde{l}_t$  repräsentiert hierbei die für den starr-plastisch-entfestigenden Verbundansatz abgeleitete wirksame Verbundlänge am Einzelriss<sup>5</sup>.

<sup>5</sup> In (Uлага 2003) wird auf analogem Weg die Verankerungslänge am auflagnächsten Risquerschnitt abgeleitet. Unabhängig vom zugrunde gelegten Verbundansatz beträgt  $\tilde{l}_t$  87% der Verankerungslänge  $l_t$  nach (Niedermeier 2001) (Gl. 8.3)


**Abbildung 8.3.**

a) Starr-plastisch-entfestigender Verbundansatz; b) Randbedingungen zur Ableitung der Dehnung  $\epsilon_{Le}$  bei Entkopplungsbeginn

$$s_L(x=0) = 0 \quad (8.18)$$

$$s_L(x=l_{eL}) = s_{L0} \quad (8.19)$$

$$\epsilon_L(x=l_{eL}) = \epsilon_{Le} \quad (8.20)$$

mit

$$l_{eL} = s_{cr}/2$$

$$\epsilon_{Le} = \frac{\epsilon_{LR,max}^a}{\sin(\omega l_{eL})} \quad (8.21)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L s_{L0}}} \quad (8.22)$$

$$s_{cr}/2 \leq \tilde{l}_t = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{E_L t_L s_{L0}}{\tau_{L1}}} \quad (8.23)$$

Zur Bestimmung der dem Entkopplungsbeginn zugeordneten Dehnung der einbetonierten Bewehrung wird auf eine Beschreibung mit entlang der Verbundlänge konstanten, allerdings beanspruchungsabhängigen Verbundspannungen nach Gl. (8.24) (vgl. Abschnitt 4.6.2) zurückgegriffen. Die Betonstahldehnung im Rissquerschnitt folgt Gl. (8.25)

$$\tau_{sm} = \frac{A \cdot \sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{L0}^N \cdot \left( \frac{d-x}{k_s(d_L-x)} \right)^N \quad (8.24)$$

$$\epsilon_{sr,e} = \frac{s_{L0}}{l_{es}} \cdot \frac{d-x}{k_s(d_L-x)} + \frac{2 \cdot l_{es}}{E_s d_s} \cdot \frac{A \cdot \sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{L0}^N \cdot \left( \frac{d-x}{k_s(d_L-x)} \right)^N \quad (8.25)$$

Im Vergleich mit der numerischen Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes für einbetonierte Bewehrung ergibt sich durch Gl. (8.25) für gerippten Betonstahl unabhängig vom Durchmesser eine maximale Abweichung von der exakten Lösung von  $\approx 5\%$ ; der größte Fehler tritt für  $\epsilon_{s0} \rightarrow 0$  auf. Für glatten Betonstahl repräsentiert Gl. (8.25) die exakte Lösung.

Das bezogene Dehnungsverhältnis bei Entkopplungsbeginn  $\delta_{Lk,e}$  ist mit  $l_{eL} = l_{es} = s_{cr}/2$  durch Gl. (8.26) gegeben.

$$\begin{aligned} \delta_{Lk,e} &= \frac{\epsilon_{Le}}{\epsilon_{sr,e}} \cdot \frac{d-x}{d_L-x} \\ &= \frac{\epsilon_{LR,max}^a / \sin(\omega s_{cr}/2)}{\frac{2s_{L0}}{s_{cr}} \cdot \frac{1}{k_s} + \frac{s_{cr}}{E_s d_s} \cdot \frac{A \cdot \sqrt{f_{cm}}}{N+1} \cdot s_{L0}^N \cdot k_s^{-N} \cdot \left( \frac{d_L-x}{d-x} \right)^{1-N}} \end{aligned} \quad (8.26)$$

### 8.3.3 Übergangsbereich

Sofern  $\delta_{Lk, max} > \delta_{Lk, e}$  gilt, kann der insbesondere bei CFK-Lamellen ausgeprägte Übergangsbereich zwischen dem Erstrisszustand ① und dem Zustand, im dem sich die Einleitungslängen der Bewehrungsstränge überschneiden ⑨, auf der sicheren Seite liegend durch die Beziehungen des Einzelrisszustandes abgegrenzt werden. Ausreichende Genauigkeit bietet eine lineare Beziehung zwischen  $\delta_{Lk}$  und  $\epsilon_L^{II}$ . Eine einfache Verknüpfung der beiden Größen wird durch eine abschnittsweise Linearisierung der Beziehungen  $\delta_{Lk}(s_{Lr})$  und  $\epsilon_L^{II}(s_{Lr})$  erreicht.

Der Bestimmung der Neigung der linearen  $\delta_{Lk}$ - $\epsilon_L^{II}$ -Beziehung werden die für  $s_{Lr} = s_{L0}$  angeschriebenen exakten Lösungen der  $\epsilon_{Lr}(s_{Lr})$ - bzw. der  $\epsilon_{sr}(s_{Lr})$ -Beziehungen des Einzelrisszustandes nach den Gln. (8.6) und (8.7) zugrunde gelegt;  $d\delta_{Lk}/ds_{Lr}$  ergibt sich damit nach Gl. (8.27).

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{Lk}(s_{Lr})}{ds_{Lr}}(s_{Lr} = s_{L0}) &= \\ &= -\sqrt{\frac{E_s d_s \tau_{L1}}{4E_L t_L \sqrt{f_{cm}}}} \cdot \sqrt{\frac{N+1}{8A}} \cdot (N+1) \cdot \left(\frac{k_{si}}{s_{L0}}\right)^{(N+1)/2} \cdot \left(\frac{d_L - x}{d - x}\right)^{(N-1)/2} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Die Ableitung der  $\epsilon_L^{II}$ - $s_{Lr}$ -Beziehung wird für  $s_{Lr} = s_{L0}$  aufgrund der einsetzenden Verbundentkopplung nur durch das Verbundverhalten der einbetonierten Bewehrung bestimmt (Gl. 8.28).

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_L^{II}(s_{Lr})}{ds_{Lr}}(s_{Lr} = s_{L0}) &= \\ &= \sqrt{\frac{8A\sqrt{f_{cm}}}{(N+1)E_s d_s}} \cdot \left(\frac{d-x}{k_{si}(d_L-x)}\right)^{(N+1)} \cdot \frac{N+1}{2} \cdot s_{L0}^{(N-1)/2} \cdot \frac{E_s A_s}{EA_{tot}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

Der in Gl. (8.28) enthaltenen Umrechnung der Zugkraft der einbetonierten Bewehrung in die Dehnung  $\epsilon_L^{II}$  wurden unter Vernachlässigung der unterschiedlichen Hebelarme der Bewehrungsstränge vereinfachend die Beziehungen eines zentrisch beanspruchten Zugstabes zugrunde gelegt.

Die Neigung des linearen  $\delta_{Lk}$ - $\epsilon_L^{II}$ -Zusammenhanges wird durch die Verknüpfung der Gln. (8.27) und (8.28) beschrieben (Gl. 8.29).

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{Lk}(\epsilon_L^{II})}{d\epsilon_L^{II}} &= \frac{d\delta_{Lk}/ds_{Lr}(s_{Lr} = s_{L0})}{d\epsilon_L^{II}/ds_{Lr}(s_{Lr} = s_{L0})} \\ &= -E_s d_s \cdot \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L f_{cm}}} \cdot k_{si}^{N+1} \cdot \left(\frac{d_L - x}{d - x}\right)^N \cdot \frac{N+1}{8A} \cdot s_{L0}^{-N} \cdot \frac{EA_{tot}}{E_s A_s} \end{aligned} \quad (8.29)$$

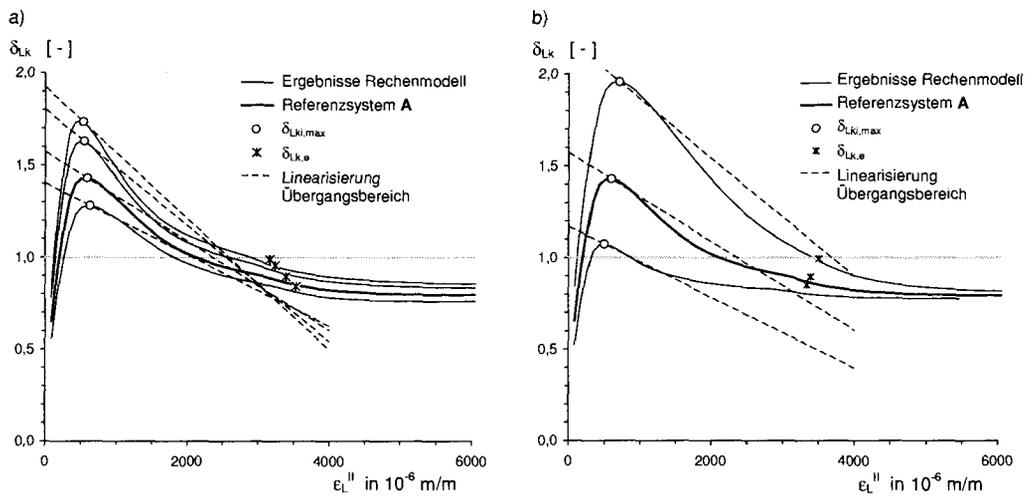
Neben der Dehnsteifigkeit der Betonstahlbewehrung bzw. der gesamten Zugbewehrung ( $EA_{tot} = E_s A_s + E_L A_L$ ) und den Kenngrößen der Bewehrungsstränge und Hebelarme fließen lediglich für jeweils eine Kombination konstante Verbundansatzparameter in Gl. (8.29) ein. In Abb. 8.4 werden lineare Funktionen, deren Gradienten jeweils Gl. (8.29) entsprechen, den Rechenergebnissen bei Variation des Betonstahldurchmessers bzw. der Lamellendicke gegenübergestellt.

### 8.3.4 Weitere Beanspruchungsstadien - Querkraftbeanspruchter Bereich

Für weitere, in Abb. 8.1 wiedergegebene Beanspruchungsstadien können ebenfalls analytische Ausdrücke für Verbundbeiwerte angegeben werden.

#### Entkopplung am Einzelriss

Sofern der vorliegende Rissabstand Bedingung (8.23) nicht erfüllt, liegt am Beginn der Verbundentkopplung für den Klebarmierungsstrang ein ideeller Einzelrisszustand entsprechend den Stadien ② bzw. ⑧ nach Abb. 8.1 vor. Für den Fall ② kann unmittelbar



**Abbildung 8.4.**  $\delta_{Lk}-\epsilon_L^{II}$ -Beziehungen im Vergleich mit linearen Beziehung mit einer Neigung nach Gl. (8.29); ergänzend  $\delta_{Lki,max}$  und  $\delta_{Lk,e}$  eingetragen (Referenzsystem A - Feldmitte)  
 a) Variation des Betonstahldurchmesseres ( $d_s = 6 \dots 16$  mm, vgl. Abb. 7.5 e)  
 b) Variation der Lamellendicke ( $t_L = 0,6 \dots 2,4$  mm, vgl. Abb. 7.5 a)

aufbauend auf Energieüberlegungen der Verbundbeiwert für den Entkopplungsbeginn angegeben werden:

$$\delta_{Lk,e} = \frac{\epsilon_{LR,max}^2}{\sqrt{\frac{8A\sqrt{f_{cm}}}{(N+1)E_s d_s} \cdot s_{L0}^{(N+1)/2} \cdot k_{si}^{-(N+1)/2} \left(\frac{d_L-x}{d-x}\right)^{(1-n)/2}}} \quad (8.30)$$

Für einen Verbundtragfähigkeitsnachweis an singulären Rissen wurden in (Zilch u. a. 2004) Modelle abgeleitet, die über eine Anrechnung von Verträglichkeitsbedingungen hinaus mögliche Zugkraftumlagerungen berücksichtigen. Dem zufolge wird davon ausgegangen, dass ergänzende Verbundbeiwerte zur Spannungsermittlung für diesen Fall wenig Relevanz besitzen.

### Zugkraftumlagerungen nach Entkopplungsbeginn - Auswirkungen der Querkraftbeanspruchung

Liegt Beanspruchungsstadium ① vor, treten keine Auswirkungen der Querkraftbeanspruchungen, d.h. der Zugkraftdifferenzen zwischen den Grenzen eines Zwischenrisselementes auf. Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge an den einzelnen Rissquerschnitten interagieren nicht; entsprechend ist der für den Einzelrisszustand hergeleitete Beiwert  $\delta_{Lki,max}$  unabhängig von der Querkraftbeanspruchung.

Wesentliche Auswirkungen der Querkraftbeanspruchung treten, den Ergebnissen numerischer Untersuchungen nach Abschnitt 7.4 entsprechend, erst nach Entkopplungsbeginn durch Unterschiede in den möglichen Zugkraftumlagerungen zu Tage.

Für die Anrechnung von Zugkraftumlagerungen nach einsetzender Entkopplung durch Verbundbeiwerte müssten allerdings neben dem Rissabstand auch Dehnungsniveau und Dehnungsdifferenz eines Elementes zwischen zwei Rissen berücksichtigt werden; damit würden die Verbundbeiwerte abhängig vom jeweils betrachteten Querschnitt. Angesichts des nicht gerechtfertigten Aufwandes wird eine obere Abgrenzung durch  $\delta_{Lk,e}$  als ausreichend wirklichkeitsnah angesehen. Mögliche Umlagerungen durch lokale Klebeverbundentkopplung werden daher in den vorgeschlagenen Verbundbeiwerten nicht wiedergegeben.

## 8.4 Verbundbeiwerte - Näherungen

Im Rahmen eines praxisgerechten Konzeptes zur Spannungsermittlung bei klebarmierten Bauteilen werden Verbundbeiwerte in Form von Diagrammen dargestellt.

Die angegebenen Beiwerte repräsentieren die i.d.R. bei biegebeanspruchten Bauteilen auftretenden Kombinationen von einbetonierter und angeklebter Bewehrung. Der Parameterbereich der Betondruckfestigkeit spiegelt annähernd den in den experimentellen Untersuchungen erfassten Bereich wieder; die für  $\delta_{Lk,e}$  angegebenen Rissabstände berücksichtigen i.A. Bedingung (8.23). Die Beiwerte basieren auf den analytischen Lösungen der charakterisierenden Punkte, wobei die in den numerischen Analysen identifizierten wesentlichen Einflussgrößen als Eingangswerte - Abszissenwerte und Scharparameter - verwendet werden. Generell stellen die in den Diagrammen wiedergegebenen Beiwerte konservative Einhüllende der möglichen Wertebereiche dar.

### 8.4.1 Maßgebende Verbundbeiwerte

Während für die derzeit gebräuchlichen CFK-Lamellen stets  $\delta_{Lki,max} > \delta_{Lk,e}$  gilt, ist für Stahllaschen bei Kombination mit geripptem Betonstahl vereinfachend ein durch Rissabstand und Durchmesser der einbetonierten Bewehrung beschriebener Bereich anzugeben, in dem die alleinige Betrachtung von  $\delta_{Lk,e}$  ausreichend ist. Der Ansatz eines konstanten Verbundbeiwertes erfasst für den in Abb. 8.5 nicht schraffiert wiedergegebenen Parameterbereich unabhängig von der Verbundqualität der einbetonierten Bewehrung die Abweichungen von einer ebenen Dehnungsverteilung hinreichend. Bei Kombination von Stahllaschen mit glattem Betonstahl speziell bei geringer Betondruckfestigkeit ist  $\delta_{Lki,max} > \delta_{Lk,e}$  möglich.

Im Folgenden werden in Diagrammform angegebene Näherungsbeziehungen für folgende Kombinationen bzw. Größen wiedergegeben:

- **CFK-Lamellen**

Kombination mit geripptem und glattem Betonstahl

$\delta_{Lki,max}$  Größtwert des Verbundbeiwertes für den Einzelrisszustand in Abhängigkeit von  $E_L$ ,  $t_L$ ,  $E_s$ ,  $d_s$  und  $f_{cm}$ ;

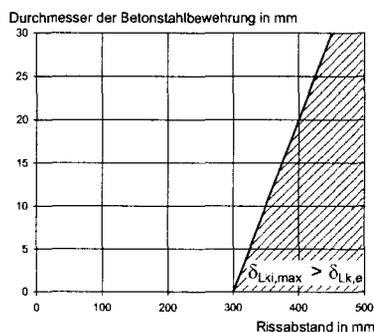
$\delta_{Lk,e}$  dem Entkopplungsbeginn zugeordneter Verbundbeiwert als obere Abgrenzung für den Bereich abgeschlossener Rissbildung in Abhängigkeit der Größen  $E_L$ ,  $t_L$ ,  $E_s$ ,  $d_s$  und  $s_{cr}$ ;

$m$  Bezogene Neigung des Übergangsbereiches zwischen Einzelrisszustand und abgeschlossenem Rissbild.

- **Stahllaschen**

Für die Kombination mit geripptem Betonstahl sowie - der Vollständigkeit halber - glattem Betonstahl werden für den baupraktisch relevanten Bereich mit Rissabständen bis 400 mm die Beiwerte  $\delta_{Lk,e}$  in Abhängigkeit der Größen  $E_L$ ,  $t_L$ ,  $E_s$ ,  $d_s$  und  $s_{cr}$  angegeben.

Durch die Wahl spezifischer bezogener Größen als Abszissenwerte kann für  $\delta_{Lki,max}$  und  $m$  eine vereinfachte Darstellung als Geradenschar erreicht werden.



**Abbildung 8.5.** Kombination von Stahllaschen mit geripptem Betonstahl → im nicht schraffierten Bereich ist i.A. wegen  $\delta_{Lk,e} > \delta_{Lki,max}$  der Ansatz eines konstanten Verbundbeiwertes  $\delta_{Lk,e}$  hinreichend.

### 8.4.2 Einheiten der Eingangsgrößen und Beiwerte - Bezugspunkte

Da die analytischen Lösungen z.T. nicht einheitenrein sind, sind die Größen in den Abbildungen 8.7 und 8.6 in folgenden Einheiten einzusetzen:

$$\begin{array}{ll} E_L, E_s, f_{cm} & \text{in MPa} \\ t_L, d_s, s_{cr} & \text{in mm} \end{array}$$

Die Neigung des Übergangsbereichs  $d\delta_{Lk}/d\epsilon_L^{II}$  ist auf  $\epsilon_L^{II}$  in m/m bezogen und kann aus  $m$  nach Abb. 8.6 c) und d) über eine Skalierung mit dem Dehnsteifigkeitsverhältnis  $EA_{tot}/E_sA_s$  bestimmt werden. Die Geradengleichung des Übergangsbereiches im  $\delta_{Lk}$ - $\epsilon_L^{II}$ -System folgt Gl. (8.31).

$$\delta_{Lk} = \delta_{Lk,0} + m \cdot \frac{EA_{tot}}{E_sA_s} \cdot \epsilon_L^{II} \quad (8.31)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta_{Lk,0}$  den Ordinatenwert bei  $\epsilon_L^{II} = 0$ , der über Gl. (8.31) mit dem Bezugspunkt  $[\epsilon_L^{II}(\delta_{Lki,max}), \delta_{Lki,max}]$  bestimmt werden kann:

$$\delta_{Lk,0} = \delta_{Lki,max} - m \cdot \frac{EA_{tot}}{E_sA_s} \cdot \epsilon_L^{II}(\delta_{Lki,max}) \quad (8.32)$$

mit  $\delta_{Lki,max}$  nach Abb. 8.6 a) bzw. b) und:

$$\epsilon_L^{II}(\delta_{Lki,max}) = \frac{1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x} \cdot \delta_{Lki,max}}{\left(1 + \frac{E_L A_L z_L}{E_s A_s z_s} \frac{d_L - x}{d - x}\right) \cdot \delta_{Lki,max}} \cdot \epsilon_{Lr}(\delta_{Lki,max}) \quad (8.33)$$

$$\epsilon_{Lr}(\delta_{Lki,max}) = \sqrt{\frac{\sqrt{f_{cm} f_{ctm}}}{E_L t_L}} \cdot C_{\epsilon,max} \quad (8.34)$$

$$\text{mit: } C_{\epsilon,max} = \begin{cases} 0,106 & \text{für gerippten Betonstahl} \\ 0,179 & \text{für glatten Betonstahl} \end{cases}$$

### 8.4.3 Anrechnung des Verbundbereichs einbetonierter Bewehrung

Die in den Abbildungen 8.7 und 8.6 dargestellten Größen beziehen sich auf gute Verbundqualität (Verbundbereich I). Sofern die einbetonierte Bewehrung Verbundbereich II (mäßige Verbundqualität) zuzuordnen ist, ist eine Modifizierung der aus den Diagrammen abgelesenen Werte erforderlich.

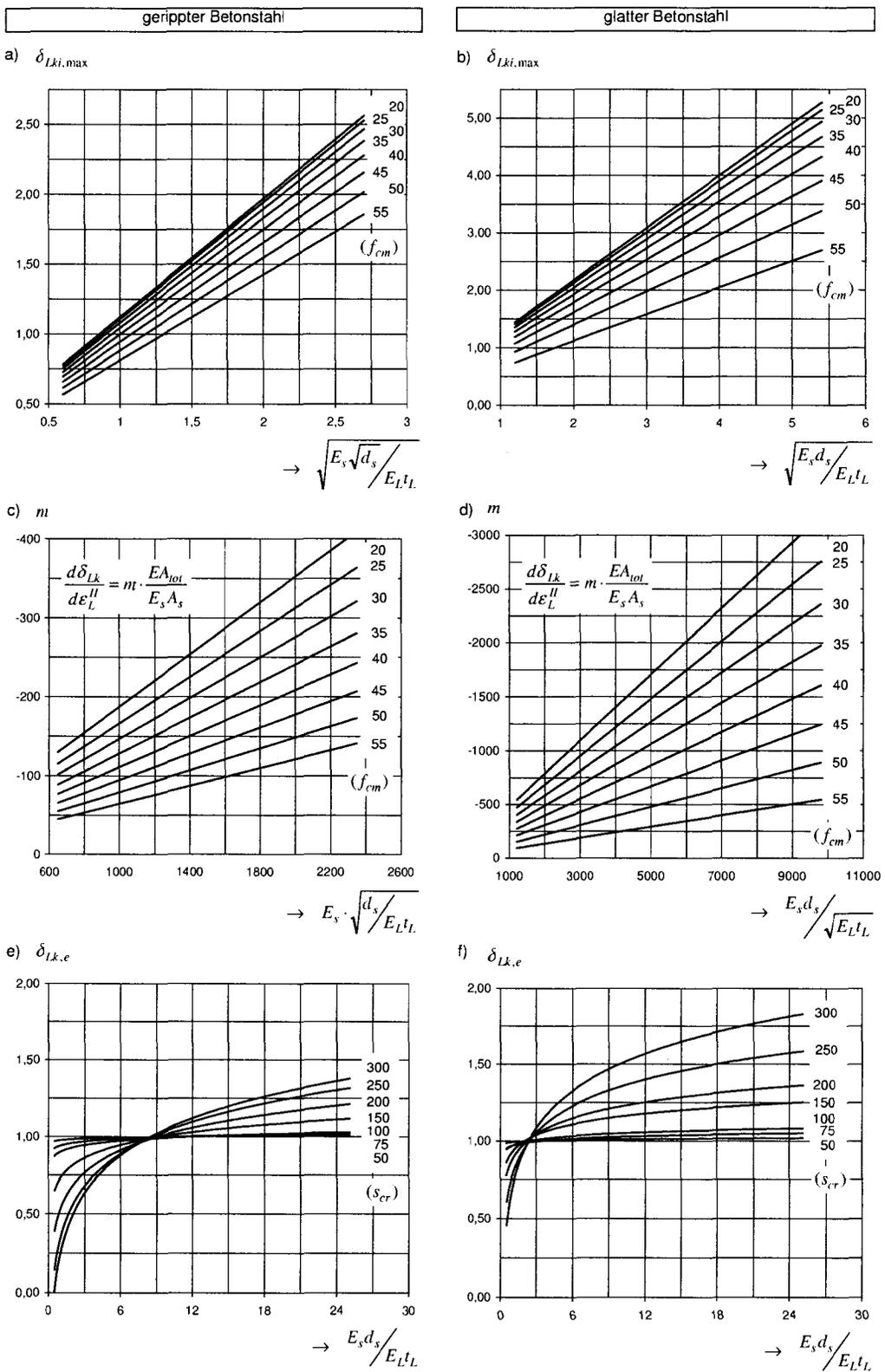
$\delta_{Lki,max}$  Aus Gl. (8.11) folgt unmittelbar, dass die Größen nach Abb. 8.6 a) und b) mit  $k_{VB}$  wie folgt zu skalieren sind:

$$\delta_{Lki,max}^{VBII} = \delta_{Lki,max} \cdot \frac{1}{k_{VB}} \quad \text{mit } k_{VB} = 0,7 \quad (8.35)$$

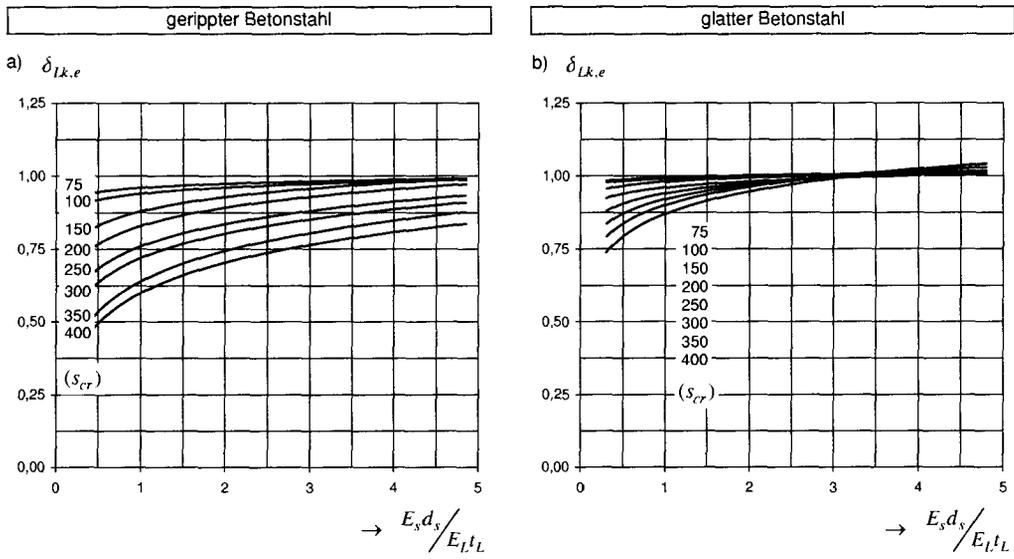
$m$  Für die bezogene Gradienten des Übergangsbereichs nach Abb. 8.6 c) und d) gilt nach Gl. (8.29) für VB II:

$$m^{VBII} = m \cdot \frac{1}{(k_{VB})^2} \quad \text{mit } k_{VB} = 0,7 \quad (8.36)$$

$\delta_{Lk,e}$  Bei geripptem Betonstahl ist eine Skalierung der Größen  $\delta_{Lk,e}$  nach den Abbildungen 8.6 e) und 8.7 a) mit dem Faktor 1,2 hinreichend. Eine Modifikation der Beiwerte für glatten Betonstahl nach den Abbildungen 8.6 f) und 8.7 b) ist nicht erforderlich.



**Abbildung 8.6.** Verbundbeiwerte für aufgeklebte CFK-Lamellen  
Diagramme a), c) e) bei Kombination mit geripptem Betonstahl;  
Diagramme b), d), f) bei Kombination mit glattem Betonstahl



**Abbildung 8.7.** Verbundbeiwerte für aufgelebte Stahlaschen  
 a) gerippter Betonstahl; b) glatter Betonstahl

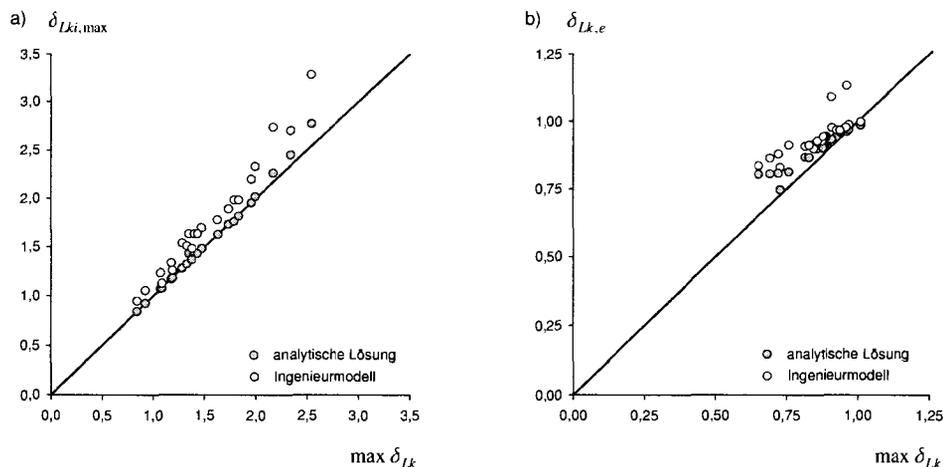
## 8.5 Vergleich mit Versuchs- und Rechenergebnissen

Zur Verifikation werden die konstant (Stahllaschen) bzw. abschnittsweise linear (CFK-Lamellen) definierten Verbundbeiwerte Ergebnissen der numerischen Parameterstudie des Kapitels 7 bzw. den Ergebnissen der durchgeführten Versuche gegenübergestellt.

### 8.5.1 Gegenüberstellung mit Rechenergebnissen

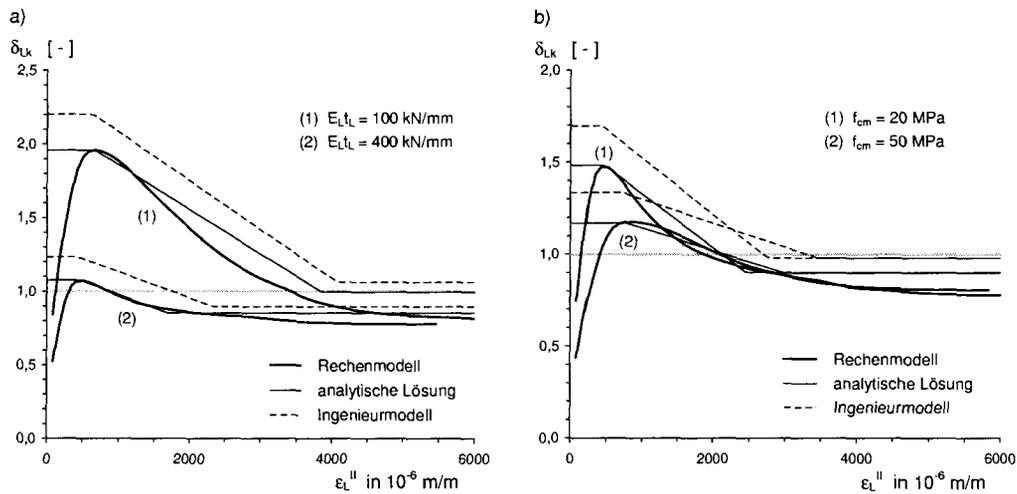
Die angegebenen Verbundbeiwerte müssen eine im Hinblick auf die Klebarmierung konservative Spannungsermittlung erlauben, d.h. die Maximalwerte der bezogenen Dehnungsverhältnisse  $\max \delta_{Lk}$  wiedergeben. Dem entsprechend werden in Abb. 8.8 die Rechenwerte auf Basis der analytischen Beziehungen bzw. nach den vereinfachten Verbundbeiwerten der Abbildungen 8.6 und 8.7 - im Folgenden als *Ingenieurmodell* bezeichnet - den Maximalwerten der numerischen Berechnungen gegenübergestellt. Für Verstärkungen mit CFK-Lamellen (Abb. 8.8 a) erfasst  $\delta_{Lki,max}$  nach Gl. (8.11) die auftretenden Größtwerte sehr gut; die vereinfachten Verbundbeiwerte liegen gegenüber den analytischen Lösungen deutlicher auf der sicheren Seite und geben offenbar die Auswirkungen der wesentlichen Einflussparameter in ausreichender Genauigkeit wieder. Bei aufgeklebten Stahllaschen (Abb. 8.8 b) ist der Rechenwert  $\delta_{Lk,e}$  nach Gl. (8.26) in der Lage, die auftretenden Maxima auf der sicheren Seite liegend abzugrenzen; gleiches gilt für die Verbundbeiwerte nach Abb. 8.7.

Während für Stahllaschen in Kombination mit geripptem Betonstahl angesichts des konstanten Verbundbeiwertes die Abbildung der  $\delta_{Lk}$ -Maxima für eine konservative Spannungsermittlung hinreichend ist, muss aufgrund des für CFK-Lamellen definierten abschnittsweise linearen Verlaufs eine näherungsweise Wiedergabe des beanspruchungsabhängigen Verhaltens gewährleistet werden. In Abb. 8.9 werden exemplarisch die numerisch ermittelten  $\delta_{Lk}$ -Verläufe mit den abschnittsweise linearen Verbundbeiwerten verglichen. Neben der Anknüpfung des Verlaufs an  $\delta_{Lki,max}$  und  $\delta_{Lk,e}$  ist durch den expliziten Bezug der Neigung des Übergangsbereiches auf den Entkopplungsbeginn im Einzelrisszustand eine zufriedenstellende Abbildung des beanspruchungsabhängigen Verlaufs unter Berücksichtigung der wesentlichen Einflussfaktoren zu erzielen. Generell liegen die Verbundbeiwerte des Ingenieurmodelles oberhalb der Rechenwerte, damit auf der sicheren Seite.



**Abbildung 8.8.** Gegenüberstellung Maximalwerte des bezogenen Dehnungsverhältnisses  $\max \delta_{Lk}$  aus den numerischen Berechnungen mit den Größen  $\delta_{Lki,max}$  (CFK-Lamellen) bzw.  $\delta_{Lk,e}$  (Stahllaschen) nach analytischer Lösung und nach Ingenieurmodell

a) CFK-Lamellen  $\rightarrow \delta_{Lki,max}$ ; b) Stahllaschen  $\rightarrow \delta_{Lk,e}$



**Abbildung 8.9.** Vergleich des beanspruchungsabhängigen Verlaufs der Verbundbeiwerte bei CFK-Lamellen nach den analytischen Lösungen und nach dem Ingenieurmodell mit dem Ergebnis der numerischen Berechnungen a) Variation der Lamellendicke; b) Variation der Betondruckfestigkeit

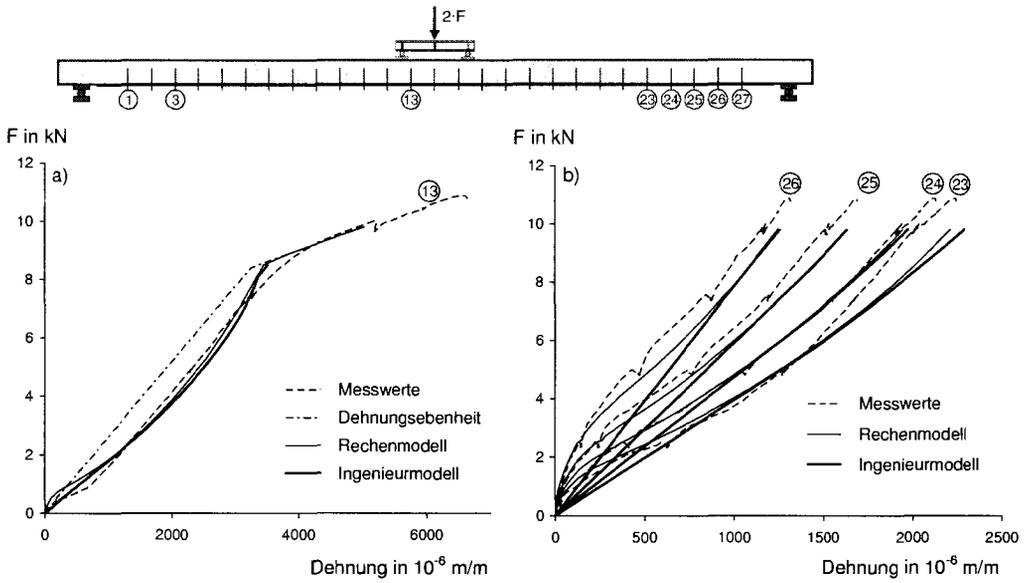
### 8.5.2 Vergleich mit Versuchsergebnissen

#### Biegebeanspruchte Bauteile

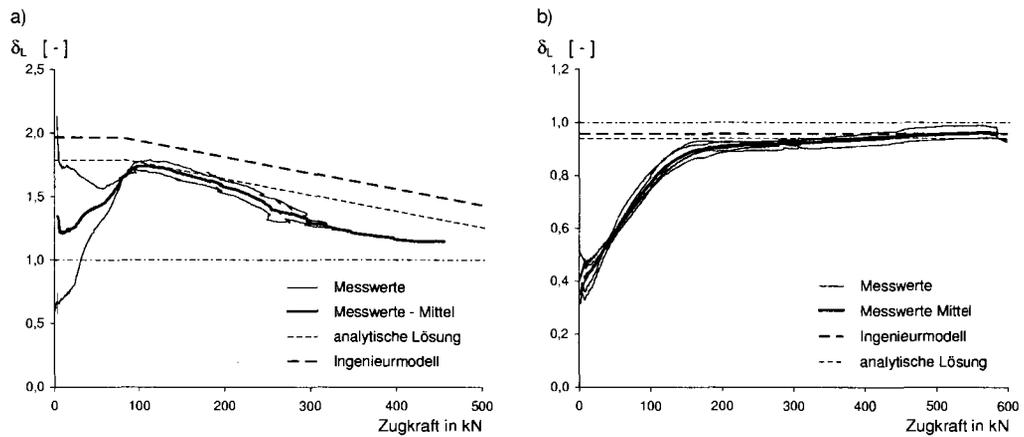
Anhand der bereits zur Verifikation des entwickelten Programmsystems verwendeten Ergebnisse der Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen ist die Wirklichkeitsnähe des Ingenieurmodells bzw. der Verbundbeiwerte abzuschätzen. Primär ist ein Vergleich auf Basis der gemessenen diskreten Dehnungen in Rissquerschnitten möglich. In Abbildung 8.10 werden für einen Versuch mit aufgeklebten CFK-Lamellen bei einbetoniertem glatten Betonstahl die experimentell bestimmten Dehnungen der Klebarmierung den numerisch ermittelten Werten (vgl. Abb. 6.12) sowie den Rechenwerten auf Grundlage der Verbundbeiwerte nach Abb. 8.6 gegenübergestellt. Wegen des bis  $\epsilon_L^{II}(\delta_{Lki,max}) = 1290 \cdot 10^{-6} \text{ m/m}$  konstanten Verbundbeiwertes  $\delta_{Lki,max}$  ist der insbesondere bei den Messwerten in Rissquerschnitten im querkraftbeanspruchten Bereich (Abb. 8.10 b) ausgeprägte allmähliche Anstieg der Dehnungen mit dem charakteristischen Krümmungswechsel des Verlaufs nur durch die nichtlineare numerische Berechnung nachzuvollziehen. Im weiteren Verlauf stimmen Mess- und Rechenwerte gut überein.

#### Zentrisch zugbeanspruchte Bauteile

Da die in den Abbildungen 8.6 und 8.7 angegebenen Verbundbeiwerte *per se* unabhängig vom Verhältnis der Abstände der Bewehrungsstränge zur neutralen Achse des Querschnittes sind, ist eine unmittelbare Übertragung auf zentrisch zugbeanspruchte Bauteile und damit ein direkter Vergleich mit Ergebnissen der Dehnkörperversuche möglich. Lediglich der in Abschnitt 5.2.5 hergeleitete Verbundbeiwert  $k_{VB}$  zur Berücksichtigung von Bewehrungssträngen unterschiedlicher Verbundbereiche in einem Querschnitt ist zu berücksichtigen. Exemplarisch sind in Abb. 8.11 die Ergebnisse der Teilerien V1-B2C (Kombination von CFK-Lamellen mit geripptem Betonstahl; Initialriss) und V4-B2S (Kombination von Stahllaschen mit geripptem Betonstahl; vorgegebenes abgeschlossenes Rissbild) den Rechenwerten - zum einen der analytischen Lösung, zum anderen den vereinfachten Verbundbeiwerten - gegenübergestellt. Für beide Kombinationen ist durch die angegebenen Zusammenhänge eine obere Abschätzung der Beanspruchungen des Klebarmierungsstranges zu erzielen.



**Abbildung 8.10.** Versuch B2-08-B2C - Dehnungen in ausgewählten Rissquerschnitten: Messwerte, Rechenwerte aus der numerischen Berechnung und Größen auf Basis der Verbundbeiwerte nach dem Ingenieurmodell



**Abbildung 8.11.** Gegenüberstellung von Mess- und Rechenwerten der Dehnungsverhältnisse  $\delta_L$  bei zentrisch zugbeanspruchten Dehnkörpern

- a) CFK-Lamellen: Teilsérie V1-B2C mit vorgegebenem Initialriss
- b) Stahllaschen: Teilsérie V4-B2S mit vorgegebenem abgeschlossenem Rissbild

---

## Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Auswirkungen des unterschiedlichen Verbundverhaltens von einbetoniertem Betonstahl und aufgeklebter Bewehrung auf die Zuggurtkräfte bei klebarmierten Bauteilen untersucht. Aufbauend auf experimentell und numerisch ermittelten Ergebnissen werden Verbundbeiwerte für klebarmierte Stahlbetonbauteile entwickelt, die eine Berücksichtigung der Auswirkungen unterschiedlicher Verbundeigenschaften bei der Spannungsermittlung - z.B. im Kontext eines Zugkraftdeckungsnachweises - zulassen.

Gegenüber einer angenommenen Dehnungsverteilung auf Basis der Hypothese nach *Bernoulli* treten bei biegebeanspruchten Bauteilen zum Teil signifikante Abweichungen auf, die auf die deutlichen Unterschiede in den Verbundeigenschaften der Bewehrungsstränge zurückzuführen sind. Angesichts der notwendigen Berücksichtigung querkraftbeanspruchter Bereiche ist eine auf der Zugstabanalogie aufbauende Abbildung des Zusammenwirkens nicht hinreichend, zumal bei den für Klebeverstärkungen relevanten Tragelementen des Hochbaus - insbesondere Deckenplatten mit geringer Bauhöhe - deutliche Einflüsse unterschiedlicher Hebelarme auf die Zugkraftaufteilung zu erwarten sind.

Auf der Grundlage von Verträglichkeitsbedingungen, die aus Dehnkörperversuchen abgeleitet werden, gelingt mit Hilfe eines numerisch-iterativen Rechenmodells, das auf die Hypothese nach *Bernoulli* vollständig verzichtet, die Abbildung des Zusammenwirkens bei biegebeanspruchten Bauteilen. Aufbauend auf analytischen Lösungen in Kombination mit den Ergebnissen des Rechenmodells werden für alle baupraktisch relevanten Kombinationen einbetonierter und angeklebter Bewehrung Verbundbeiwerte angegeben, mit denen eine praxisgerechte Berücksichtigung von Verbundunterschieden bei der Spannungsermittlung möglich wird.

Als Ausgangsbasis der Untersuchung wird im Rahmen einer Zusammenfassung mechanischer Grundlagen der Quotient diskreter Bewehrungsdehnungen im gerissenen Querschnitt  $\delta_L$  als geeignete, von den vorliegenden Dehnsteifigkeitsverhältnissen *per se* unabhängige Größe zur quantitativen Beschreibung der Auswirkungen von Verbundunterschieden identifiziert (Kapitel 2). Ein Überblick über vorliegende Arbeiten zum Zusammenwirken bei klebarmierten Bauteilen zeigt die bisherige Beschränkung der rechnerischen Abbildung auf Zugstabmodelle, die durch eine weitgehende Verwendung von Symmetriebedingungen in der Aussagekraft eingeschränkt und zugleich nur in geringem Umfang durch Versuche belegt sind.

Die den Verbundbeiwerten zugrunde liegenden Verträglichkeitsbedingungen - die Verknüpfungsbeziehungen der Bewehrungsstränge über Relativverschiebungen in den Risquerschnitten - werden auf Basis von Versuchen an 56 gemischt bewehrten Dehnkörpern abgeleitet. Dazu werden von den Verfassern durchgeführte Versuche aus einem grundlagenorientierten, durch die *Deutsche Forschungsgemeinschaft* geförderten Vorhaben sowie aus einem durch das *Deutsche Institut für Bautechnik* finanzierten Forschungsprojekt zur Ableitung eines Konzeptes für den Zugkraftdeckungsnachweis am Endauflager herangezogen (Kapitel 3). Mit den unter statischer Kurzzeitbelastung geprüften Bauteilen gelingt

die Erfassung eines breiten Spektrums derzeit baupraktisch relevanter Kombinationen; neben aufgeklebten CFK-Lamellen und Stahllaschen wird einbetonierter gerippter und glatter Betonstahl bei unterschiedlichen Betonfestigkeitsklassen untersucht. Der dominierende Einfluss des Rissbildes wird zum einen durch vorgegebene Rissbilder des Initialzustandes, zum anderen durch die mit der konstruktiven Gestaltung der Versuchskörper gesteuerten Rissbildung bei ansteigender Belastung untersucht. Alle experimentellen Untersuchungen wurden mit nicht vorbelasteter einbetonierter Bewehrung durchgeführt. Die Versuchsergebnisse zeigen deutliche Abweichungen von der unterstellten Dehnungsverteilung vor allem bei CFK-Lamellen oder glattem Betonstahl.

Angesichts der komplex vernetzten Abhängigkeiten verschiedener Einflussgrößen auf das Zusammenwirken gelingt eine aussagekräftige Versuchsauswertung wie auch eine sinnvolle Übertragung der Verträglichkeitsbedingungen auf biegebeanspruchte Bauteile nur in Verbindung mit Rechenmodellen. Der vorliegende Bericht fasst die notwendigen Modellgrundlagen in gebotener Breite zusammen (Kapitel 4). Neben den verwendeten Verbundmodellen für angeklebte und einbetonierte Bewehrung werden idealisierte Verträglichkeitsbedingungen erläutert. Die Modellgrundlagen werden durch ein Rissbildungsmodell und Energieformulierungen von Verbundproblemen, die eine einfache Ableitung von Zusammenhängen zwischen Relativverschiebung und Dehnung ermöglichen, ergänzt.

Die entwickelten Rechenmodelle wie auch die abgeleiteten Verbundbeiwerte bauen grundlegend auf einem bilinearen Verbundansatz für aufgeklebte Bewehrungselemente auf. Für Stahllaschen wird der umfangreich experimentell belegte Ansatz nach *Niedermeier* adaptiert, für CFK-Lamellen werden auf Basis eigener Versuche maßgebende Parameter des Ansatzes abgeleitet. Einbetonierte gerippte Bewehrung wird durch ein Verbundmodell in Anlehnung an *Noakowski* bzw. *Eligehausen*, das an eigenen Verbundversuchen kalibriert wurde, abgebildet. Für glatten Betonstahl werden auf der Grundlage der Versuche von *Martin* und *Noakowski* bzw. eigener Verbundversuche Ansätze für konstante Verbundspannungen angegeben. Für beide Bewehrungsstränge werden angesichts der damit möglichen geschlossenen Lösungen globale Verbundansätze gewählt. Lokale Mechanismen, insbesondere die beanspruchungsabhängig fortschreitende Beeinträchtigung der Verbundwirkung unmittelbar am Rissquerschnitt, die bei einbetonierter Bewehrung in der Bildung eines Ausbruchkegels und in Analogie dazu bei Klebarmierung in der Formation eines Bruchkeils mündet, werden summarisch in den Verträglichkeitsbedingungen berücksichtigt. Damit wird die Ableitung von Zusammenhängen zwischen Dehnungen und Relativverschiebungen der Bewehrungsstränge auf Basis der analytischen Lösungen der Differentialgleichungen des verschieblichen Verbundes möglich.

Die in den Dehnkörperversuchen ermittelten Teilzugkräfte bilden die Grundlage der mit Hilfe eines Rechenmodells für zentrisch zugbeanspruchte Bauteile erfolgenden Versuchsauswertung (Kapitel 5). Durch Regressionsanalysen gelingt die Ableitung verallgemeinerter Verträglichkeitsbedingungen, die mit geringen Modifikationen in ein Rechenmodell für biegebeanspruchte Bauteile implementiert werden können. Angesichts der summarischen Berücksichtigung lokaler Effekte werden die mit den maßgebenden Größen  $f_{cm}$ ,  $E_L t_L$  und  $E_s d_s$  verknüpften Verträglichkeitsbedingungen zum einen von der Beanspruchungshöhe, zum anderen vom Rissbildungsfortschritt beeinflusst. Es wird dargelegt, dass für den Einzelrisszustand mit ausreichender Genauigkeit eine für die Formulierung von Ingenieurmodellen vorteilhafte Entkopplung von der Beanspruchungshöhe erfolgen kann.

Zur Abbildung biegebeanspruchter Bauteile, u.a. auch zur Übertragung der Verträglichkeitsbedingungen auf die Randbedingungen von Biegeträgern, wird ein als *diskretes Rissmodell* konzipiertes Rechenmodell entwickelt. Erstmals wird unter Verzicht auf die Hypothesen von *Bernoulli* und *Navier* der Dehnungs- und Relativverschiebungszustand der Bewehrungsstränge über das Gesamtsystem bei expliziter Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen in den Rissquerschnitten numerisch-iterativ ermittelt. Die entwickelten Algorithmen werden auf Basis der Sprache VISUAL BASIC in einem modularen Programmsystem umgesetzt. Der Vergleich von Mess- und Rechenwerten diskreter Dehnungen insbesondere im querkraftbeanspruchten Bereich belegt die grundsätzliche Eignung

des Rechenmodells zur Abbildung verstärkter Stahlbetonbauteile. Durch das Programmsystem werden die Auswirkungen unterschiedlicher Abstände der Bewehrungsstränge zur neutralen Achse des Querschnittes, die aus der Querkraftwirkung resultierenden Effekte sowie mögliche Zugkraftumlagerungen von angeklebter zur einbetonierter Bewehrung infolge lokaler Klebeverbundentkopplung nachvollziehbar.

Anhand eines Beispiels wird zudem die Äquivalenz zu dem von *Niedermeier* entwickelten Nachweismodell für den Grenzzustand der Tragfähigkeit dargestellt. Die Vorhersage von Systemtraglasten ist angesichts der durch die Modellgrundlagen wiedergegebenen Trag- und Versagensmechanismen nur eingeschränkt möglich. Zum einen verzichtet der Verbundansatz aufgeklebter Bewehrung auf die Abbildung von Reibverbundspannungen nach einsetzender Klebeverbundentkopplung, zum anderen werden insbesondere mit der Querkrafttragfähigkeit bzw. der Schubrissbildung verknüpfte Versagensmechanismen nicht modelliert.

Im Rahmen einer Parameterstudie gelingt mit Hilfe des Rechenmodells die Darstellung der Einflüsse von Material-, Querschnitts- und Systemkenngrößen wie auch der Einflüsse aus Querkraftbeanspruchung auf das Zusammenwirken bei biegebeanspruchten Bauteilen (Kapitel 7). Wesentliche Parameter, die in vereinfachten Ansätzen Berücksichtigung finden müssen, werden identifiziert. Es zeigt sich, dass mit Ausnahme des Einzelrisszustandes bei CFK-Lamellen die Auswirkungen variabler Betondruckfestigkeit von untergeordneter Bedeutung sind.

Es wird dargestellt, dass die Möglichkeit von Zugkraftumlagerungen zur einbetonierten Bewehrung durch Klebeverbundentkopplung neben der zwischen zwei angrenzenden Rissequerschnitten vorliegenden Zugkraftdifferenz in Verbindung mit dem Rissabstand auch eng an das Dehnungsniveau am geringer beanspruchten Rissufer geknüpft ist. In Konsequenz wird auf eine pauschale Berücksichtigung von Zugkraftumlagerungen im Rahmen vereinfachter, ortsunabhängiger Verbundbeiwerte verzichtet.

Die Berücksichtigung der Auswirkungen unterschiedlicher Verbundeigenschaften einbetonierter und angeklebter Bewehrung im Rahmen der Spannungsermittlung kann in Anlehnung an die gängige Praxis des Spannbetonbaus näherungsweise durch Verbundbeiwerte erfolgen (Kapitel 8). Die Verbundbeiwerte bauen auf analytischen Lösungen der DGL des verschieblichen Verbundes auf; die Verknüpfung der Bewehrungsstränge erfolgt mit den aus Dehnkörperversuchen abgeleiteten und anhand des Rechenmodells für biegebeanspruchte Bauteile modifizierten Verträglichkeitsbedingungen.

Es wird dargestellt, dass konstante Verbundbeiwerte, die an charakteristische Beanspruchungsstadien - dem Einzelrisszustand (CFK-Lamellen) bzw. dem Entkopplungsbeginn (Stahllaschen in Kombination mit geripptem Betonstahl) - geknüpft werden, eine auf der sicheren Seite liegende Ermittlung der Teilzugkräfte ermöglichen. Um die Wirtschaftlichkeit aufgeklebter CFK-Lamellen durch die Vorgabe eines konservativen, den Einzelrisszustand erfassenden Beiwerts nicht über Gebühr einzuschränken, wird ergänzend eine differenzierte, beanspruchungsabhängige Formulierung des Beiwerts angegeben, die den Übergang vom Einzelrisszustand zum abgeschlossenen Rissbild vereinfachend abbildet. Durch die Angabe abschnittsweise von der rechnerischen Dehnung auf Basis der *Bernoulli*-Hypothese  $\epsilon_L^I$  linear abhängiger Beiwerte wird die Anwendung deutlich vereinfacht. Neben den analytischen Ausdrücken zur Ermittlung der Verbundbeiwerte werden für die wesentlichen baupraktisch relevanten Kombinationen zur Anwendung im Rahmen einer Handrechnung Diagramme aufbereitet, die eine praxisgerechte Ermittlung des jeweils zutreffenden Verbundbeiwertes erlauben.

Entwicklungsmöglichkeiten der vorgestellten Modellierung biegebeanspruchter Bauteile ergeben sich aus den Beschränkungen der experimentellen Grundlagen. So können langandauernde oder nicht ruhende Belastungen gegenüber den hier untersuchten statischen, kurzzeitig wirkenden Beanspruchungen zu einer Umlagerung von Zugkraftanteilen führen. Die Erweiterung des Rechenmodells um Verbundkriecheffekte bzw. Auswirkungen von Verbundschädigungen infolge dynamischer Belastungen ist grundsätzlich möglich. Für einbetonierte Bewehrung liegen durch Versuche belegte Verbundmodelle vor; eine

entsprechende Beschreibung des Verbundverhaltens aufgeklebter Bewehrung erfordert allerdings zunächst die Erarbeitung experimenteller Grundlagen. Gleiches gilt für die in Abschnitt 4.7 erörterte Problematik vorbelasteter Betonstahlbewehrung.

Die vorgestellten Ergebnisse können darüber hinaus als Grundlage der Entwicklung von Formaten für Gebrauchstauglichkeitsnachweise dienen. Der zunehmenden Erfordernis, die Gebrauchstauglichkeit bestehender Bauteile wiederherzustellen oder zu verbessern, steht derzeit ein Mangel an geeigneten Rechenmodellen für Klebarmierungsverfahren gegenüber. Eine Erweiterung des Rechenmodells auf alternative Methoden der Klebarmierung - allen voran die angesichts der deutlich verbesserten Verbundeigenschaften gerade bei Fragen der Gebrauchstauglichkeit günstigen, in Schlitze eingeklebten CFK-Lamellen (vgl. Blaschko 2001) - ist mit geringen Modifikationen möglich. Die Berücksichtigung der Interaktion mit einbetoniertem Betonstahl könnte hier - vor dem Hintergrund der derzeit noch signifikanten Kosten für CFK-Lamellen - zu wirtschaftlichen Lösungen beitragen.

---

## Bezeichnungen

### Vorbemerkung

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Bezeichnungen lehnen sich weitestgehend an die Notation nach (DIN 1045-1 2001) an. Soweit im Text nicht näher erläutert, gelten folgende Abkürzungen und Bezeichnungen:

### Abkürzungen

Abb.	Abbildung
AERB	abgeschlossenes Erstrissbild
CFK	kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff
DGL	Differentialgleichung
DMS	Dehnmessstreifen
EA	Endverankerung (Nachweis am auflagnächsten Biegeriss)
Gl.	Gleichung
RS	Referenzsystem
Tab.	Tabelle
VB	Verbundbereich der einbetonierten Bewehrung

### Große lateinische Buchstaben

<i>A</i>	Fläche, Parameter des Verbundansatzes für Betonstahl
<i>B</i>	Parameter des Verbundansatzes für Betonstahl
<i>C</i>	Konstante, Koeffizient zur Bestimmung von $\tau_{s,max}$
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>F</i>	Kraft
<i>G</i>	Energie
<i>M</i>	Biegemoment
<i>N</i>	Normalkraft, Parameter des Verbundansatzes für Betonstahl
<i>R</i>	Tragwiderstand
<i>U</i>	Umfang
<i>V</i>	Querkraft

### Kleine lateinische Buchstaben

<i>b</i>	Breite
<i>c</i>	Betondeckung, Konstante
<i>d</i>	statische Nutzhöhe der Betonstahlbewehrung
<i>f</i>	Festigkeit
<i>h</i>	Höhe
<i>k</i>	Koeffizient, Konstante
<i>l</i>	Länge
<i>m</i>	bezogene Neigung zur Beschreibung des Verbundbeiwertes für CFK-Lamellen
<i>n</i>	Elementanzahl

<i>s</i>	Relativverschiebung
<i>t</i>	Dicke
<i>u</i>	Verlängerung
<i>w</i>	Rissbreite
<i>x</i>	Druckzonenhöhe
<i>z</i>	Hebelarm

**Griechische Buchstaben**

$\alpha$	Winkelgröße
$\beta$	Festigkeit
$\gamma$	Teilsicherheitsbeiwert
$\delta$	Verhältnis der Rissdehnungen, Verbundbeiwert
$\epsilon$	Dehnung
$\eta$	bezogene Dehnung
$\theta$	Druckstrebenwinkel
$\kappa$	bezogene Dehnung
$\lambda$	Rechengröße zur Beschreibung des Verbundverhaltens der Klebarmierung
$\xi$	Verbundbeiwert (Spannbeton)
$\rho$	geometrischer Bewehrungsgrad
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Schubspannung
$\omega$	Rechengröße zur Beschreibung des Verbundverhaltens der Klebarmierung
$\Delta$	Differenz

**Hochzeiger**

<i>a</i>	Endverankerung, auflagernächster Biegeriss
<i>i</i>	Element mit $0 \leq i \leq n$
<i>j</i>	Elementrand mit $j \in \{1, 2\}$
<i>II</i>	Größe nach Dehnungsebenheit im gerissenen Querschnitt

**Fußzeiger**

<i>a</i>	abgeschlossenes Erstrissbild
<i>b</i>	Verbund
<i>c</i>	Beton, Druck
<i>d</i>	Bemessungswert
<i>e</i>	elastisch, Klebeverbundentkopplung, Einzelriss
<i>i</i>	Initialzustand

<i>k</i>	charakteristischer Wert
<i>m</i>	Mittelwert
<i>p</i>	Spannstahl
<i>r</i>	Größe im Rissquerschnitt
<i>s</i>	Betonstahl
<i>t</i>	Zugfestigkeit, Zeitpunkt
<i>u</i>	Bruchzustand
<i>w</i>	Steg
<i>x</i>	Krümmungseinfluss (Biegung)
<i>y</i>	Fließ-, Streckgrenze
<i>bL</i>	Verbund Klebarmierung
<i>bs</i>	Verbund Betonstahl
<i>cal</i>	rechnerisch ermittelte Größe
<i>cube</i>	Würfel
<i>eff</i>	effektiv, wirksam
<i>exp</i>	experimentell ermittelte Größe
<i>fl</i>	Biegung
<i>init</i>	Initialzustand
<i>lim</i>	Grenzwert
<i>max</i>	maximaler Wert
<i>min</i>	minimaler Wert
<i>sf</i>	entfestigend
<i>s2</i>	Druckbewehrung
<i>sur</i>	Oberfläche
<i>tot</i>	gesamt
<i>E</i>	Beanspruchung
<i>F</i>	Bruch
<i>L</i>	Klebarmierung
<i>R</i>	Tragwiderstand, Reibung
<i>V</i>	verstärkter Zustand
<i>EA</i>	Endauflager
<i>RVE</i>	Repräsentative Volumeneinheit
<i>SA</i>	Symmetrieachse
<i>VB</i>	Verbundbereich (Betonstahl)
$\tau$	Größe bezogen auf $\tau_{L1}$
<i>0</i>	Ausgangszustand, Zustand am Relativverschiebungsruehpunkt, unverstärkter Zustand
0.05	5%-Quantil
0.95	95%-Quantil
<i>I</i>	Verbundbereich I (Betonstahl)
<i>II</i>	Verbundbereich II (Betonstahl)

**Große lateinische Buchstaben mit Indizes**

$A_c$	Brutto-Betonquerschnittsfläche
$A_L$	Querschnittsfläche Klebarmierung
$A_s$	Querschnittsfläche Betonstahl - Zugbewehrung
$A_{s2}$	Querschnittsfläche Betonstahl - Druckbewehrung
$D_{k,max}$	Größtkorndurchmesser
$E_c$	E-Modul Beton
$E_L$	E-Modul Klebarmierung
$E_s$	E-Modul Betonstahl
$F_a$	Zugkraft bei Erreichen des abgeschlossenen Erstrissbildes (zent. Zug)
$F_{cr}$	Rissschnittgröße (zent. Zug)
$F_e$	Zugkraft bei einsetzender Klebeverbundentkopplung (zent. Zug)
$G_b$	Verbundenergie
$G_{b,L}$	Verbundenergie Klebarmierung (allgemein)
$G_{b,s}$	Verbundenergie Betonstahl (allgemein)
$G_e$	elastische Verbundenergie (Klebarmierung)
$G_F$	Verbundbruchenergie (Klebarmierung)
$G_{sf}$	Verbundenergie des entfestigenden Verbundbereichs (Klebarmierung)
$K_s$	Fraktalfaktor
$M_{cr}$	Rissschnittgröße (Biegung)
$M_{u0}$	Querschnittswiderstand vor der Verstärkung ( $\rightarrow$ DIN 1045 1988)
$M_{uV}$	Querschnittswiderstand nach der Verstärkung ( $\rightarrow$ DIN 1045 1988)
$R_{eH}$	oberer Wert der Streckgrenze
$R_m$	Zugfestigkeit
$U_s$	Umfang Betonstahl
$V_{lim}$	Grenzquerkraft, ab der die Auswirkungen der Querkraft auf die Gurtkräfte voll berücksichtigt werden

**Kleine lateinische Buchstaben mit Indizes**

$a_1$	Länge des elastischen Verbundbereichs (Klebarmierung)
$a_2$	Länge des plastisch-entfestigenden Verbundbereichs (Klebarmierung)
$b_L$	Breite des Klebarmierungselementes
$c_e$	Koeffizient des Verbundansatzes für Klebarmierung ( $\rightarrow G_e$ )
$c_F$	Koeffizient des Verbundansatzes für Klebarmierung ( $\rightarrow G_F$ )
$c_\tau$	Koeffizient des Verbundansatzes für Klebarmierung ( $\rightarrow \tau_{L1}$ )
$c_s$	Formfaktor, Dehnungsverhältnis $\Delta\epsilon_s/\epsilon_{sr}$
$c_L$	Dehnungsverhältnis $\Delta\epsilon_L/\epsilon_{Lr}$
$c_{lim}$	Grenzwert
$d_L$	statische Nutzhöhe der Klebarmierung
$d_p$	Durchmesser Spannstahl
$d_s$	Durchmesser Betonstahl - Zugbewehrung
$d_{s2}$	Durchmesser Betonstahl - Druckbewehrung
$d_2$	statische Nutzhöhe der Druckbewehrung
$f_c$	Betondruckfestigkeit (Zylinder)
$f_{ct}$	Betonzugfestigkeit (zentrisch)
$f_{ct,eff}$	wirksame Betonzugfestigkeit
$f_{ct,fl}$	Biegezugfestigkeit Beton
$f_{ct,sur}$	Oberflächenzugfestigkeit Beton
$f_{Lu}$	Zugfestigkeit CFK-Lamellen
$f_{Ly}$	Streckgrenze Stahllaschen
$f_{sy}$	Streckgrenze Betonstahl
$k_b$	Beiwert zur Berücksichtigung des Breiteneinflusses (Verbundansatz Klebarmierung)
$k_c$	Beiwert zur Berücksichtigung der Orientierung der Oberfläche (Verbundansatz Klebarmierung)
$k_{cr}$	Rissbildungsfaktor
$k_s$	Korrekturfunktion der Verträglichkeitsbedingung
$k_{si}$	Korrekturwert der Verträglichkeitsbedingung des Initial- bzw. Einzelrisszustandes

$k_x$	Verträglichkeitsbedingung bei biegebeanspruchten Bauteilen (allgemein)	$z_s$	Hebelarm des Betonstahl
$l_b$	Verbundlänge	<b>Griechische Buchstaben mit Indizes</b>	
$l_{bL}$	Verbundlänge der Klebarmierung (EA)	$\beta_w$	Betondruckfestigkeit
$l_e$	Einleitungslänge	$\delta_L$	Verhältnis der Dehnungen der Bewehrungsstränge im Rissquerschnitt $\epsilon_{Lr}/\epsilon_{sr}$
$l_{ea}$	gemeinsame Einleitungslänge bei abgeschlossenem Erstrissbild	$\delta_{L,\text{lim}}$	Dehnungsverhältnis bei Klebeverbundentkopplung am Einzelriss
$l_{ee}$	maßgebende Einleitungslänge bei Erstrissbildung	$\delta_{Lk}$	um Krümmungseinfluss bereinigtes (bezogenes) Dehnungsverhältnis der Bewehrungsstränge bei biegebeanspruchten Bauteilen
$l_{eL}$	Einleitungslänge Klebarmierung	$\delta_{Lk,e}$	bezogenes Dehnungsverhältnis bei einsetzender Klebeverbundentkopplung
$l_{es}$	Einleitungslänge Betonstahl	$\delta_{Lki,\text{max}}$	Maximalwert des bezogenen Dehnungsverhältnisses im Einzelrisszustand (Initialzustand)
$l_r^i$	Länge des Elements $i$	$\epsilon_L$	Dehnung der Klebarmierung
$l_t$	der Verbundbruchkraft zugeordnete Verbundlänge (Klebarmierung)	$\epsilon_{Le}$	Dehnung bei einsetzender Klebeverbundentkopplung
$l_v$	Verbundlänge (Ausziehversuche)	$\epsilon_{LR,\text{max}}^a$	Verbundbruchdehnung am Einzelriss für $l_{bL} \rightarrow \infty$ (EA)
$n_L$	$E_L/E_c$	$\epsilon_s$	Dehnung der Betonstahlbewehrung
$n_s$	$E_s/E_c$	$\epsilon_{se}$	Betonstahldehnung bei einsetzender Klebeverbundentkopplung
$s_{cr}$	Rissabstand	$\eta_b$	Biegeverstärkungsgrad $M_{u0}/M_{uV}$
$s_{crm,e}$	mittlerer Rissabstand im Einzelrisszustand	$\eta_L$	Dehnungsverhältnis $\epsilon_{Lr}/\epsilon_L^{II}$
$s_{crm,a}$	mittlerer Rissabstand bei abgeschlossenem Erstrissbild	$\eta_s$	Dehnungsverhältnis $\epsilon_{sr}/\epsilon_s^{II}$
$s_L$	Relativverschiebung der Klebarmierung	$\kappa_L$	Dehnungsverhältnis $\epsilon_{Lr}/\epsilon_{Lm}$
$s_{L1}$	Grenzwert der elastischen Relativverschiebung	$\kappa_s$	Dehnungsverhältnis $\epsilon_{sr}/\epsilon_{sm}$
$s_{L0}$	Relativverschiebung bei einsetzender Verbundentkopplung	$\xi_1$	Verhältnis der mittleren Verbundspannungen (Spannbeton)
$s_s$	Relativverschiebung des Betonstahls	$\xi_L$	Verbundbeiwert
$s_X$	Mittelwert einer Stichprobe	$\rho_L$	geometrischer Bewehrungsgrad der Klebarmierung
$t_L$	Dicke der Klebarmierung	$\rho_s$	geometrischer Bewehrungsgrad des Betonstahls
$w_L$	Rissbreite auf Höhe des Klebarmierungsstranges	$\tau_{L1}$	Verbundspannungsmaximum der Klebarmierung
$w_r$	Rissbreite (allgemein)	$\tau_{s,\text{max}}$	Verbundspannungsmaximum des Betonstahls
$w_s$	Rissbreite auf Höhe der Betonstahlbewehrung		
$x_{\text{max}}^a$	größtmöglicher Abstand des äußersten Biegerisses zur Auflagerlinie		
$x_{\text{min}}^a$	kleinstmöglicher Abstand des äußersten Biegerisses zur Auflagerlinie		
$z_L$	Hebelarm der Klebarmierung		

$\tau_{sR}$	Reibverbundspannung des Betonstahl
$\tau_{s,0.1}$	Verbundspannung bei einer Betonstahlrelativverschiebung von 0,1 mm
$\Delta s_{sr}^{ij}$	dem Element $i$ zugeordnete Differenzverschiebung an Risser $j$ bei biegebeanspruchten Bauteilen

### Vektoren

$\mathbf{F}^{ij}$	Vektor der inneren Kräfte <sup>1</sup>
$\mathbf{P}^{ij}$	Vektor der äußeren Schnittgrößen
$\mathbf{Z}_s^i$	Vektor der Dehnungs- und Relativverschiebungskenngrößen der Betonstahlbewehrung in Element $i$
$\mathbf{Z}_L^i$	Vektor der Dehnungs- und Relativverschiebungskenngrößen der Klebarmierung in Element $i$
$\mathbf{s}_r^{ij}$	Vektor der Relativverschiebungen
$\epsilon_r^{ij}$	Vektor der Bewehrungsdehnungen

---

<sup>1</sup> Die Hochzeiger bezeichnen jeweils das Risser  $j$  des Elementes  $i$ .

---

## Literatur

- Alvarez 1998** ALVAREZ, M.: *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*, ETH Zürich, Diss., 1998
- Bachmann 1989** BACHMANN, H. *Stahlbeton I - Skriptum zur Vorlesung an der ETH Zürich*. 1989
- Balázs und Koch 1992** BALÁZS, G. ; KOCH, R.: Influence of load history on bond behaviour. In: *Bond in Concrete - From Research to Practice, Proceedings*. Riga : Comité Euro-International du Béton, Oktober 1992, S. 7-1 – 7-10
- Bažant und Oh 1983** BAŽANT, Z. ; OH, B.: Crack band theory for fracture of concrete. In: *Materials and Structures* 93 (1983), S. 155-177
- Bažant u. a. 1994** BAŽANT, Z. ; OŽBOLT, J. ; ELIGEHAUSEN, R.: Fracture Size Effect - Review of Evidence for Concrete Structures. In: *Journal of Structural Engineering* 120 (1994), Nr. 8, S. 2377-2398
- Beeby 1973** BEEBY, A.W.: Suggested modifications to the crack prediction formula in the 1970 CEB Recommendations. In: *Bulletin d'Information No. 89*. Paris : CEB, 1973
- Bigaj 1999** BIGAJ, A.J.: *Structural dependence of rotation capacity of plastic hinges in rc beams and slabs*, Delft University of Technology, Diss., 1999
- Bizindavyi und Neale 1999** BIZINDAVYI, L. ; NEALE, K.W.: Transfer lengths and bond strengths for composites bonded to concrete. In: *Journal of Composites for Construction* 3 (1999), Nr. 4, S. 153-160
- Blaschko 2001** BLASCHKO, M.: *Zum Tragverhalten von Betonbauteilen mit in Schlitz eingeklebten CFK-Lamellen*, Technische Universität München, Diss., 2001
- Bonzel 1959** BONZEL, J.: Zur Gestaltabhängigkeit der Betondruckfestigkeit. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 54 (1959), S. 223-248
- Bresson 1971** BRESSON, J.: Nouvelles recherches et applications concernant l'utilisation des collages dans les structures. Béton plaqué. In: *Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics* (1971), Nr. 278, S. 21-55
- Broms 1965** BROMS, B.B.: Crack width and crack spacing in reinforced concrete members. In: *ACI Journal, Proceedings* 62 (1965), Nr. 10, S. 1237-1256
- Budnik und Dornauer 1993** BUDNIK, J. ; DORNAUER, H.: Sichere Grundlage für Beschichtungen - Untersuchungen zur Abreissfestigkeit von Betonen. In: *beton* 43 (1993), Nr. 12, S. 650-653
- CEB-FIP MC 90 1993** CEB-FIP MC 90: *Model Code 1990*. Lausanne : Comité Euro-International du Béton, 1993
- Ceroni u. a. 2004** CERONI, F. ; PECCE, M. ; MATTHYS, S.: Tenison Stiffening of Reinforced Concrete Ties Strengthened with Externally Bonded Fiber-Reinforced Polymer-Sheets. In: *Journal of Composites for Construction* 8 (2004), Nr. 1, S. 22-32
- Chajes u. a. 1996** CHAJES, M.J. ; FINCH, W.W. ; JANUSZKA, T.F. ; THOMSON, T.A.: Bond and force transfer of composite material plates bonded to concrete. In: *ACI Structural Journal* 93 (1996), Nr. 2, S. 208-217

- DIN 1045-2 2001** DIN 1045-2: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 2: Beton - Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität; Anwendungsregeln zu DIN EN 206-1*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juli 2001
- DIN 1048-2 1991** DIN 1048-2: *Prüfverfahren für Beton. Teil 2: Festbeton in Bauwerken und Bauteilen*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juni 1991
- DIN 1048-5 1996** DIN 1048-5: *Prüfverfahren für Beton. Teil 5: Festbeton, gesondert hergestellte Probekörper*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juni 1996
- DIN 1055-3 2002** DIN 1055-3: *DIN 1055 Einwirkungen auf Tragwerke. Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Oktober 2002
- DIN 4227-1/A1 1995** DIN 4227-1/A1: *Spannbeton. Teil 1: Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung, Änderung A1*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Dezember 1995
- DIN 488-3 1986** DIN 488-3: *Betonstahl. Teil 3: Betonstabstahl - Prüfungen*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juni 1986
- DIN EN 10002-1 2001** DIN EN 10002-1: *Metallische Werkstoffe - Zugversuch. Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Dezember 2001
- DIN EN 12390-2 2001** DIN EN 12390-2: *Prüfung von Festbeton. Teil 2: Herstellung und Lagerung von Probekörpern für Festigkeitsprüfungen*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juni 2001
- DIN EN 206-1 2001** DIN EN 206-1: *Beton. Teil 1: Festlegung, Eigenschaften, Herstellung und Konformität*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juli 2001
- DIN EN 2561 1995** DIN EN 2561: *Kohlenstofffaserverstärkte Kunststoffe - Unidirektionale Laminate - Zugprüfung parallel zur Faserrichtung*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, November 1995
- DIN-FB 100 2001** DIN-FB 100: *DIN-Fachbericht 100: Beton*. 1. Fassung. Berlin: Deutsches Institut für Normung, 2001
- DIN V ENV- 1992-2 1997** DIN V ENV- 1992-2: *Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 2: Betonbrücken*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Oktober 1997
- DIN V ENV 1992-1-1 1992** DIN V ENV 1992-1-1: *Eurocode 2: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juni 1992
- Dörr und Mehlhorn 1979** DÖRR, K. ; MEHLHORN, G.: *Berechnung von Stahlbetonscheiben im Zustand II bei Annahme eines wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens / Institut für Massivbau, Technische Hochschule Darmstadt*. 1979. – Bericht Nr. 39
- Eibl und Ivanyi 1976** EIBL, J. ; IVANYI, G.: *Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton*. Berlin : Ernst & Sohn, 1976 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 260)
- Eibl und Kobarg 1984** EIBL, J. ; KOBARG, J.: *Das Verbundverhalten von Stahl und Beton unter besonderer Berücksichtigung der lokalen Stahlspannung*. In: *Fortschritte im Konstruktiven Ingenieurbau - Gallus Rehm zum 60. Geburtstag*. Berlin : Ernst & Sohn, 1984, S. 143–152
- Eligehausen 1979** ELIGEHAUSEN, R.: *Übergreifungsstöße zugbeanspruchter Rippenstäbe mit geraden Stabenden*. Berlin : Ernst & Sohn, 1979 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 301)
- Eligehausen und Kreller 1988** ELIGEHAUSEN, R. ; KRELLER, H.: *Querschnittsbericht zur Rissbildung in Stahl- und Spannbetonkonstruktionen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1988 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 393)
- Eligehausen u. a. 1989** ELIGEHAUSEN, R. ; KRELLER, H. ; LANGER, P.: *Untersuchungen zum Verbundverhalten gerippter Bewehrungsstäbe mit praxisüblichen Betondeckungen / Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen*. Stuttgart, Juni 1989 ( IWB-Mitteilungen 1989/05). – Forschungsbericht
- Eligehausen u. a. 1983** ELIGEHAUSEN, R. ; POPOV, E. ; BERTERO, V.: *Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars Under Generalized Excitations / Ear-*

- Chang und Kesler 1958** CHANG, T.S. ; KESLER, C.E.: Static and fatigue strength in shear of beams with tensile reinforcement. In: *ACI Journal* 29 (1958), Juni, Nr. 12, S. 1033–1057
- Chen und Teng 2001** CHEN, J.F. ; TENG, J.G.: Anchorage strength models for FRP and steel plates bonded to concrete. In: *Journal of Structural Engineering* 127 (2001), Nr. 7, S. 784–791
- Ciampi u. a. 1982** CIAMPI, V. ; ELIGEHAUSEN, R. ; BERTERO, V. ; POPOV, E.: Analytical Model For Concrete Anchorages of Reinforcing Bars Under Generalized Excitations / Earthquake Engeneering Research Center, University of California at Berkeley. 1982 (UCB/EERC-82/23). – Forschungsbericht
- Cordes u. a. 2000** CORDES, H. ; HEGGER, J. ; RUDLOF, M.: Spannungumlagerungen in gemischt bewehrten Querschnitten. In: DEUTSCHE FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT (Hrsg.): *Bewehrte Betonbauteile unter Betriebsbedingungen*. Weinheim : Wiley-VCH, 2000
- Cordes u. a. 1980** CORDES, H. ; THORMÄHLEN, U. ; TROST, H.: Zum Nachweis der Rissbreitenbeschränkung nach DIN 4227. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1980), Nr. 7, S. 169–172
- Curbach u. a. 2003** CURBACH, M. ; TUE, N.V. ; ECKFELD, L. ; SPECK, K.: Zum Nachweis der Rissbreitenbeschränkung gemäß DIN 1045-1. In: *Erläuterungen zu DIN 1045-1 - Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 525*. Berlin : Beuth, 2003
- DAfStb 2003** DAFSTB: *Erläuterungen zu DIN 1045-1*. Berlin : Beuth, 2003 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 525)
- Dai und Ueda 2003** DAI, J.G. ; UEDA, T.: Local bond stress slip relations for FRP sheets - concrete interfaces. In: TAN, K.H. (Hrsg.): *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on FRP Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-6)*. Singapore : World Scientific Publishing, Juli 2003, S. 143–152
- Derflinger u. a. 1981** DERFLINGER, F. ; JANOVIČ, K. ; KUPFER, H.: Einfluss der Betondeckung von Spanngliedern auf den Verlauf der Rissbreite in ihrer Umgebung bei teilweiser Vorspannung / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 1981 (1151/De/mb). – Forschungsbericht
- DIBt 1979** DIBT: *Zulassungsbescheid Nr. 26.1-1: Schubfeste Klebeverbindung zwischen Stahlplatten und Stahlbetonbauteilen vom 1. Oktober 1979*. Antragsteller: Ingenieurbüro Tausky, Zürich. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Oktober 1979
- DIBt 1992** DIBT: *Zulassungsbescheid Z-36.1-4: Schubfeste Klebeverbindung zwischen Stahlplatten und Stahlbetonbauteilen oder Spannbetonbauteilen vom 2. Dezember 1992*; Antragsteller: Dipl.-Ing. R. Laumer GmbH & Co. Bautechnik, Massing. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Dezember 1992
- DIBt 1993** DIBT: *Richtlinien für das Verstärken von Betonbauteilen durch Ankleben von Stahllaschen*. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Februar 1993
- DIBt 1997** DIBT: *Richtlinien für das Verstärken von Betonbauteilen durch Ankleben von Stahllaschen*. Entwurf. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Juni 1997
- DIBt 1998** DIBT: *Richtlinien für das Verstärken von Betonbauteilen durch Ankleben von unidirektionalen kohlenstofffaserverstärkten Kunststofflamellen (CFK-Lamellen)*. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, September 1998
- DIBt 2002** DIBT: *Allg. bauaufs. Zulassung Nr. Z-36.12.29, Verstärkung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen durch schubfest aufgeklebte Kohlefaserlamellen Sika CarboDur*. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Juli 2002
- DIBt 2003** DIBT: *Allg. bauaufs. Zulassung Nr. Z-36.12-57 Verstärkung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen durch schubfest aufgeklebte Kohlefaserlamellen Carboplus*. Berlin: Deutsches Institut für Bautechnik, Mai 2003
- DIN 1045 1988** DIN 1045: *Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juli 1988
- DIN 1045-1 2001** DIN 1045-1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton. Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Juli 2001

- Janovič 1986** JANOVIČ, K.: Zur Rißbildung im Stahlbeton- und Spannbetonbau. In: *Betonwerk + Fertigteil-Technik* (1986), Nr. 12
- Janovič und Kupfer 1984** JANOVIČ, K. ; KUPFER, H.: *Teilweise Vorspannung - Plattenversuche*. Berlin : Ernst & Sohn, 1984 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 351)
- Jansze 1997** JANSZE, W.: Strengthening of Reinforced Concrete Members in Bending by Externally Bonded Steel Plates / TU Delft. 1997. – Forschungsbericht
- Kaiser 1989** KAISER, H.: *Bewehren von Stahlbeton mit kohlenstoffaserverstärkten Epoxidharzen*, ETH Zürich, Diss., 1989
- Kent und Park 1971** KENT, D.C. ; PARK, R.: Flexural Member with Confined Concrete. In: *ASCE Journal* 97 (1971), S. 1969–1990
- Keuser 1985** KEUSER, M.: *Verbundmodelle für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen*, TH Darmstadt, Diss., 1985
- Kobarg 1986** KOBARG, J.: *Ein inkrementelles Stahlbetonverbundgesetz unter Berücksichtigung von Stahldehnung und Querdruck*, Universität Karlsruhe, Diss., 1986
- König und Fehling 1988** KÖNIG, G. ; FEHLING, E.: Grundlagen zur Rißbreitenbeschränkung im Spannbetonbau. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 83 (1988), Nr. 12, S. 317–323
- König u. a. 1999** KÖNIG, G. ; POMMERENING, D. ; TUE, N.V.: *Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrößenermittlung*. Berlin : Beuth, 1999 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 492)
- König und Tue 1996** KÖNIG, G. ; TUE, N.: *Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton*. Berlin : Beuth, 1996 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 466)
- Kreller 1989** KRELLER, H.: *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung*, Universität Stuttgart, Diss., 1989
- Krenchel und Bickley 1984** KRENCHHEL, H. ; BICKLEY, J.A. *Concrete Pullout Test Methods: Historical Background and Scientific Level Today*. Vortrag auf der 1984 Convention; American Concrete Institute, Phoenix, Arizona, 4. - 9. März. 1984
- Krips 1984** KRIPS, M.: *Rissbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton*, Technische Hochschule Darmstadt, Diss., 1984
- Kupfer 1973** KUPFER, H.: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Berlin : Ernst & Sohn, 1973 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229)
- Kurz 1997** KURZ, W.: *Ein mechanisches Modell zur Beschreibung des Verbundes zwischen Stahl und Beton*, Technische Hochschule Darmstadt, Diss., 1997
- Ladner und Weder 1981** LADNER, M. ; WEDER, Ch.: Geklebte Bewehrung im Stahlbetonbau / EMPA. Dübendorf, 1981. – Bericht Nr. 206
- Langer 1987** LANGER, P.: *Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Diss., 1987
- Lee u. a. 1999** LEE, Y. J. ; BOOTHBY, T. E. ; BAKIS, C. E. ; NANNI, A.: Slip Modulus of FRP Sheets Bonded to Concrete. In: *Journal of Composites for Construction* 3 (1999), Nr. 4, S. 161–165
- Leon 1935** LEON, A.: Über die Scherfestigkeit des Betons. In: *Beton und Eisen* 34 (1935), Nr. 8, S. 130–135
- Leonhardt 1978** LEONHARDT, F.: *Vorlesungen über Massivbau - Vierter Teil: Nachweis der Gebrauchsfähigkeit*. Berlin : Springer-Verlag, 1978
- L'Hermite 1967** L'HERMITE, R.: L'application des colles et des resines dans la construction. In: *Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics* (1967), Nr. 239
- Li 1995** LI, L.: *Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken im Stahl- und Spannbetonbau*, Universität Stuttgart, Diss., 1995
- Maeda u. a. 1997** MAEDA, T. ; ASANO, Y. ; YASUHIKO, S ; UEDA, T. ; YOSHIO, K.: A study on bond mechanism of carbon fiber sheet. In: *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Interna-*

- thquake Engineering Research Center, University of California at Berkeley. 1983 (UCB/EERC-83/23). – Forschungsbericht
- Falkner 1969** FALKNER, H.: *Zur Frage der Rißbildung durch Eigen- und Zwängspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1969 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 208)
- Faoro 1988** FAORO, M.: *Zum Tragverhalten kunstharzgebundener Glasfaserstäbe im Bereich von Endverankerungen und Rissen im Beton*, Universität Stuttgart, Diss., 1988
- Fehling 1990** FEHLING, E.: *Zur Energiedissipation und Steifigkeit von Stahlbetonbauteilen unter besonderer Berücksichtigung von Rißbildung und verschieblichem Verbund*, Technische Hochschule Darmstadt, Diss., 1990
- Feix 1993** FEIX, J.: *Kritische Analyse und Darstellung der Bemessung für Biegung und Längskraft, Querkraft und Torsion nach Eurocode 2 Teil 1*, Technische Universität München, Diss., 1993
- fib 2000** FIB: *Bond of reinforcement in concrete*. fib bulletin No. 10. Lausanne: fédération internationale du béton, August 2000
- fib 2001** FIB: *Externally bonded FRP reinforcement for RC structures*. fib bulletin No. 14. Lausanne: fédération internationale du béton, 2001
- Fischer 1993** FISCHER, A.: *Modelluntersuchungen zur Ermittlung des Rißabstandes dicker Bauteile aus Stahlbeton*, TH Darmstadt, Diss., 1993
- Franke 1976** FRANKE, L.: *Einfluss der Belastungsdauer auf das Verbundverhalten von Stahl in Beton (Verbundkriechen)*. Berlin : Ernst & Sohn, 1976 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 268)
- Goland und Reissner 1944** GOLAND, M. ; REISSNER, E.: The stresses in cemented joints. In: *Journal of Applied Mechanics* 66 (1944), Nr. 11, S. A-17-22
- Goto 1971** GOTO, Y.: Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars. In: *ACI Journal* 68 (1971), Nr. 4, S. 244-251
- Grasser 1968** GRASSER, E.: *Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen*, Technische Universität München, Diss., 1968
- Graubner 1989** GRAUBNER, C.-A.: *Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze*, Technische Universität München, Diss., 1989
- Günther 1989** GÜNTHER, G.: *Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton unter monoton steigender, schwellender und lang andauernder Belastung*, Gesamthochschule Kassel, Diss., 1989
- Hartz 2002** HARTZ, U.: Neues Normenwerk im Betonbau. In: *DIBt Mitteilungen* (2002), Nr. 1, S. 2-6
- Heilmann 1969** HEILMANN, H.: Beziehungen zwischen Zug- und Druckfestigkeiten des Betons. In: *beton* 2 (1969), S. 68-70
- Hillerborg u. a. 1976** HILLERBORG, A. ; MODÉER, M ; PETERSSON, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* (1976), S. 773-782
- HILTI 1991** HILTI: Statische Versuche an Biegebalken mit geklebter Bewehrung / HILTI Konzernforschung. Schaan (FL), 1991. – (unveröffentlicht)
- Holzenkämpfer 1994** HOLZENKÄMPFER, P.: *Ingenieurmodelle des Verbunds geklebter Bewehrung für Betonbauteile*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 1994
- Iványi und Buschmeyer 1992** IVÁNYI, G. ; BUSCHMEYER, W.: Verstärkung von Spannbetonbrücken durch Stahllaschen - Anwendungskriterien. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 87 (1992), Nr. 11, 12, S. 265-271, 305-311
- Jahn 1983** JAHN, M.: *Zum Ansatz der Betonzugfestigkeit bei den Nachweisen zur Trag- und Gebrauchsfähigkeit von unbewehrten und bewehrten Betonbauteilen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1983 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 341)
- Janovič 1979** JANOVIČ, K.: Bericht über den neuen konsolenförmigen Ausziehkörper als Vorschlag für ein allgemeingültiges Verbundprüfverfahren / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 1979 ( 1222/Ja/K). – Forschungsbericht

- Pichler 1993** PICHLER, D.: *Die Auswirkungen von Anpressdrücken auf die Verankerung von Klebelamellen*, Universität Innsbruck, Diss., 1993
- prEN 10025-2 2000** PREN 10025-2: *Warmgewalzte Erzeugnisse aus Baustählen. Teil 2: Allgemeine Lieferbedingungen für unlegierte Baustähle*. Berlin: Deutsches Institut für Normung, Dezember 2000
- Rabinovich und Frostig 2000** RABINOVICH, O. ; FROSTIG, Y.: Closed-form high-order analysis of RC-beams strengthened with FRP strips. In: *Journal of Composites for Construction* 4 (2000), Nr. 2, S. 65–74
- Ranisch 1982** RANISCH, E.-H.: *Zur Tragfähigkeit von Verklebungen zwischen Baustahl und Beton - geklebte Bewehrung*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 1982
- Rasch 1962** RASCH, Ch.: *Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit*. Berlin : Ernst & Sohn, 1962 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 154)
- Rebentrost und Warner 2002** REBENTROST, M. ; WARNER, R.F.: Influence of bond on the behaviour of prestressed concrete beams. In: BALÁZS, G. (Hrsg.) ; BARTOS, P. (Hrsg.) ; CAIRNS, J. (Hrsg.) ; BOROSNYÓI, A. (Hrsg.): *Bond in Concrete - From Research to Standards, Proceedings*. Budapest : Budapest University of Technology and Economics, November 2002, S. 78–85
- Rehm 1961** REHM, G.: *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. Berlin : Ernst & Sohn, 1961 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138)
- Rehm und Martin 1968** REHM, G. ; MARTIN, H.: Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1968), Nr. 8, S. 175–182
- Reineck 1990** REINECK, K.-H.: *Ein mechanisches Modell für den Querkraftbereich von Stahlbetonbauteilen*, Universität Stuttgart, Diss., 1990
- Reineck 1999** REINECK, K.-H.: Querkraftbemessung von Bauteilen ohne Querkraftbewehrung in DIN 1045-1. In: *Abschlussbericht zum DIBt-Forschungsvorhaben IV 1-5-876/98: Überprüfung und Vereinheitlichung der Bemessungsansätze für querkraftbeanspruchte Stahl- und Spannbetonbauteile aus normalfestem und hochfestem Beton nach DIN 1045-1*. DIBt, 1999
- Reineck 2001** REINECK, K.-H.: Hintergründe zur Querkraftbemessung in DIN 1045-1 für Bauteile aus Konstruktionsbeton mit Querkraftbewehrung. In: *Bauingenieur* 76 (2001), Nr. 4, S. 168–179
- Reinhardt und Hilsdorf 2001** REINHARDT, H.-W. ; HILSDORF, H.K.: Beton. In: *Betonkalender 2001*. Ernst & Sohn, 2001, S. 1–144
- RILEM 1994** RILEM: *Recommendations for the testing and use of construction materials*. London : E&FN Spon, 1994
- Rostásy und Neubauer 1999** ROSTÁSY, F. S. ; NEUBAUER, U.: Grundlagen zur Verstärkung von Balkonplatten von Plattenbauten mit CFK-Lamellen / Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Technische Universität Braunschweig, 1999. – Forschungsbericht
- Rostásy und Ranisch 1983** ROSTÁSY, F. S. ; RANISCH, E.-H.: Einseitige Verstärkung gerissener Koppelfugenbereiche durch angeklebte Stahllaschen. In: *Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik* 378 (1983)
- Rostásy u. a. 1981** ROSTÁSY, F. S. ; RANISCH, E.-H. ; ALDA, W.: Nachträgliche Verstärkung von Spannbetonbrücken im Koppelfugenbereich durch geklebte Stahllaschen. In: *Forschung Straßenbau und Straßenverkehrstechnik* 326 (1981)
- Rostásy u. a. 1996** ROSTÁSY, F.S. ; HOLZENKÄMPFER, P. ; HANKERS, Ch.: Geklebte Bewehrung für die Verstärkung von Betonbauteilen. In: EIBL, J. (Hrsg.): *Betonkalender 1996*. Berlin : Ernst & Sohn, 1996
- Rudlof 1998** RUDLOF, M.: *Zur Spannungsumlagerung zwischen Spannstahl und Betonstahl bei Spannbeton mit nachträglichem Verbund*, RWTH Aachen, Diss., 1998
- Rüsch 1955** RÜSCH, H.: *Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone*. Berlin : Ernst & Sohn, 1955 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 120)
- Rüsch 1960** RÜSCH, H.: Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete. In: *ACI Journal* 57 (1960), Juli, S. 1–28

- tional Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)*. Sapporo : Japan Concrete Institute, Oktober 1997, S. 279–286
- Marti u. a. 1998** MARTI, P. ; ALVAREZ, M. ; KAUFMANN, W. ; SIGRIST, V.: Tension Chord Model for Structural Concrete. In: *Structural Engineering International* 8 (1998), Nr. 4, S. 287–298
- Marti u. a. 1999** MARTI, P. ; ALVAREZ, M. ; KAUFMANN, W. ; SIGRIST, V.: *Tragverhalten von Stahlbeton*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1999 (Dokumentation zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich, 30.9./1.10.1999)
- Martin 1973** MARTIN, H.: *Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstählen unter Kurzzeitbelastung*. Berlin : Ernst & Sohn, 1973 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 228)
- Martin und Noakowski 1981** MARTIN, H. ; NOAKOWSKI, P.: *Verbundverhalten von Betonstählen. Untersuchung auf der Grundlage von Ausziehversuchen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1981 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 319)
- Martin u. a. 1979** MARTIN, H. ; SCHIESSL, P ; SCHWARZKOPF, M.: Ableitung eines allgemeingültigen Berechnungsverfahrens für Rißbreiten aus Lastbeanspruchung auf der Grundlage von theoretischen Erkenntnissen und Versuchsergebnissen / Institut für Betonstahl und Stahlbetonbau e.V. München, 1979. – Bericht Nr. 471/79
- Matthys 2000** MATTHYS, S.: *Structural Behaviour and Design of Concrete Members Strengthened with Externally Bonded FRP Reinforcement*, Universität Gent, Diss., 2000
- Mayer 1967** MAYER, H.: *Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1967 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 194)
- Mayer 2001** MAYER, U.: *Zum Einfluss der Oberflächengestalt von Rippenstählen auf das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen*, Universität Stuttgart, Diss., 2001
- Neubauer 2000** NEUBAUER, U.: *Verbundtragverhalten geklebter Lamellen aus Kohlenstoffaser-Verbundwerkstoffen zur Verstärkung von Betonbauteilen*, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2000
- Neubauer und Rostasy 1997** NEUBAUER, U. ; ROSTASY, F.S.: Design Aspects of Concrete Structures Strengthened with Externally Bonded CFRP-Plates. In: *Concrete+Composites, Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Structural Faults and Repair*. Edinburgh, 1997, S. (2) 109–118
- Niedermeier 2001** NIEDERMEIER, R.: *Zugkraftdeckung bei klebarmierten Biegeträgern*, Technische Universität München, Diss., 2001
- Niedermeier und Zilch 2001** NIEDERMEIER, R. ; ZILCH, K.: Zugkraftdeckung bei klebarmierten Biegebauteilen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 96 (2001), Nr. 12, S. 759–770
- Nilson 1972** NILSON, A.H.: Internal Measurement of Bond Slip. In: *ACI-Journal* 69 (1972), Nr. 7
- Noakowski 1978** NOAKOWSKI, P.: *Die Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung infolge Temperatur*. Berlin : Ernst & Sohn, 1978 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 296)
- Noakowski 1985** NOAKOWSKI, P.: Verbundorientierte, kontinuierliche Theorie zur Ermittlung der Rißbreite. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (1985), Nr. 7, 8, S. 185–190 bzw. 215–221
- Noakowski 1988** NOAKOWSKI, P.: *Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rissbreite; Kontinuierliche Theorie der Mitwirkung des Betons auf Zug*. Berlin : Beuth, 1988 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 394)
- ÖVBB 2002** ÖVBB: *Richtlinie - Nachträgliche Verstärkung von Betonbauwerken mit geklebter Bewehrung*. Österreichischer Beton- und Bautechnikverein, Dezember 2002

- Shima u. a. 1992** SHIMA, H. ; CHOU, L.-L. ; OKAMURA, H.: Bond-Slip-Strain Relationship of Deformed Bars. In: *Bond in Concrete - From Research to Practice, Proceedings*. Riga : Comité Euro-International du Béton, Oktober 1992, S. 11.38–11.47
- SIA 166 2004** SIA 166: *SIA 166: Klebebewehrung*. Zürich: Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Februar 2004
- Sigrist 1995** SIGRIST, V.: Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern / Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich. Zürich, Juli 1995 ( IBK Bericht Nr. 210). – Forschungsbericht
- Staller 2001** STALLER, M.: *Analytische und numerische Untersuchungen des Durchstantragverhaltens punktgestützter Stahlbetonplatten*. Berlin : Beuth, 2001 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 515)
- Täljsten 1994** TÄLJSTEN, B.: *Strengthening of existing concrete structures with epoxy bonded plates of steel or fibre reinforced plastics*, Lulea University of Technology, Diss., 1994
- Täljsten 2003** TÄLJSTEN, B.: Design guideline for CFRP-strengthening of concrete structures. In: *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on FRP Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-6)*. Singapore : World Scientific Publishing, Juli 2003, S. 1425–1434
- Tausky 1993** TAUSKY, R.: *Betontragwerke mit Aussenbewehrung*. Basel : Birkhäuser, 1993
- Tepfers 1979** TEPFERS, R.: Cracking of concrete cover along anchored deformed reinforcing bars. In: *Magazine of Concrete Research* 106 (1979), Nr. 31, S. 3–12
- Thormählen 1978** THORMÄHLEN, U.: *Zum Einfluss von Spanngliedern mit nachträglichem Verbund auf Rissbildung und Rissbreitenbeschränkung bei teilweise vorgespannten Konstruktionen*, RWTH Aachen, Diss., 1978
- Tripi u. a. 2000** TRIPI, J. ; BAKIS, C. ; BOOTHBY, T. ; NANNI, A.: Deformation in Concrete with External CFRP Sheet Reinforcement. In: *Journal of Composites for Construction* 4 (2000), Nr. 2, S. 85–94
- Trost u. a. 1980** TROST, H. ; CORDES, H. ; THORMÄHLEN, U. ; HAGEN, H.: *Teilweise Vorspannung - Verbundfestigkeit von Spanngliedern und ihre Bedeutung für Rissbildung und Rissbreitenbeschränkung*. Berlin : Ernst & Sohn, 1980 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 310)
- Tue 1993** TUE, N. V.: *Zur Spannungsumlagerung im Spannbeton bei der Rissbildung unter statischer und wiederholter Belastung*. Berlin, Köln : Beuth, 1993 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 435)
- Ueda u. a. 2002** UEDA, T. ; YAMAGUCHI, R. ; SHOJI, K. ; SATO, Y.: Study on Behavior in Tension of Reinforced Concrete Members Strengthened by Carbon Fiber Sheets. In: *Journal of Composites for Construction* 6 (2002), Nr. 3, S. 168–174
- Ulaga 2003** ULAGA, T.: *Betonbauteile mit Stab- und Lamellenbewehrung: Verbund- und Zuggliedmodellierung*, ETH Zürich, Diss., 2003
- Ulaga und Meier 2002** ULAGA, T. ; MEIER, U.: Kohlenstofffaserverstärkte thermoplastische Lamellen für die Verstärkung von Betontragwerken / Eidgenössische Materialprüfungs- und Forschungsanstalt (EMPA). CH-Dübendorf, 2002. – EMPA-Bericht Nr. 260
- Vogel und Ulaga 2003** VOGEL, T. ; ULAGA, T.: Design Concepts of the new Swiss Code on Externally Bonded Reinforcement. In: TAN, K. H. (Hrsg.): *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on FRP Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-6)*. Singapore : World Scientific, Juli 2003
- Zilch und Niedermeier 1999** ZILCH, K. ; NIEDERMEIER, R.: Ermittlung der charakteristischen Verbundbruchkraft für auf Betonbauteile aufgeklebte Stahllaschen / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 1999. – Forschungsbericht
- Zilch u. a. 2000** ZILCH, K. ; SCHMIDHUBER, Ch. ; NIEDERMEIER, R.: Bauteilversuche zur Querkraftbiegung an mittels Klebearmierung verstärkten Betonbauteilen / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 2000. – Forschungsbericht

- Rüsch 1975** RÜSCH, H.: Die Ableitung der charakteristischen Werte der Betonzugfestigkeit. In: *beton* 25 (1975), Nr. 4, S. 55–58
- Rüsch und Stöckl 1963** RÜSCH, H. ; STÖCKL, S.: *Der Einfluss von Bügeln und Druckstäben auf das Verhalten der Biegedruckzone von Stahlbetonbalken*. Berlin : Beuth, 1963 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 148)
- Saadatmanesh und Malek 1997** SAADATMANESH, H. ; MALEK, A.M.: Prediction of shear and peeling stresses at the plate ends of beams with FRP plates. In: *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Symposium on Non-Metallic (FRP) Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-3)*. Sapporo : Japan Concrete Institute, Oktober 1997, S. 311–318
- Sato u. a. 2002** SATO, Y. ; UEDA, T. ; YAMAGUCHI, R. ; SHOJI, K.: Tension Stiffening Effect of Reinforced Concrete Member Strengthened by Carbon Fiber Sheet. In: BALÁZS, G. (Hrsg.) ; BARTOS, P. (Hrsg.) ; CAIRNS, J. (Hrsg.) ; BOROSNYÓI, A. (Hrsg.): *Bond in Concrete - From Research to Standards, Proceedings*. Budapest : Budapest University of Technology and Economics, November 2002, S. 606–613
- Savoia u. a. 2003** SAVOIA, M. ; FERRACUTI, B. ; MAZZOTTI, C.: Non-linear bond-slip law for FRP-concrete interface. In: TAN, K.H. (Hrsg.): *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on FRP Reinforcement for Concrete Structures (FRPRCS-6)*. Singapore : World Scientific Publishing, Juli 2003, S. 163–172
- Schickert 1981** SCHICKERT, G.: Formfaktoren der Betondruckfestigkeit. In: *Bautechnik* 58 (1981), S. 52–57
- Schießl 1976** SCHIESSL, P.: Beschränkung der Rißbreiten bei Zwangsbeanspruchung. In: *Betonwerk + Fertigteil-Technik* (1976), Nr. 6
- Schießl 1989** SCHIESSL, P.: *Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rißbreite*. Beuth, 1989 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 400)
- Schlaich und Schäfer 2001** SCHLAICH, J. ; SCHÄFER, K.: Konstruieren im Stahlbetonbau. In: *Beton-Kalender 2001*. Berlin : Ernst & Sohn, 2001, S. 311–492
- Schmidhuber 2004** SCHMIDHUBER, Ch.: *Grundsätzliche Neumodellierung des Schubtragverhaltens mit CFK-Lamellen verstärkter Bauteile*, Technische Universität München, Diss., 2004
- Schmidt-Thrö u. a. 1986** SCHMIDT-THRÖ, G. ; STÖCKL, S. ; KUPFER, H.: *Einfluss der Probekörperform und der Meßpunktanordnung auf die Ergebnisse von Ausziehversuchen*. Berlin : Ernst & Sohn, 1986 (Schriftenreihe des Deutschen Ausschuss für Stahlbeton, Heft 378)
- Schober 1984** SCHOBER, H.: *Ein Modell zur Berechnung des Verbundes und der Risse im Stahl- und Spannbeton*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Diss., 1984
- Sebastian 2001** SEBASTIAN, W.M.: Significance of midspan debonding failure in FRP-plated concrete beams. In: *Journal of Structural Engineering* 127 (2001), Nr. 7, S. 792–798
- Seim u. a. 1999** SEIM, W. ; KARBHARI, V. ; SEIBLE, F.: Nachträgliches Verstärken von Stahlbetonplatten mit faserverstärkten Kunststoffen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 94 (1999), Nr. 11, S. 440–456
- Seim u. a. 2000** SEIM, W. ; KARBHARI, V. ; SEIBLE, F. ; VASQUES, A.: Post-strengthening of concrete slabs with externally bonded fibre reinforced polymer (FRP) strips - test on full-scale slabs / University of California, San Diego, Division of Structural Engineering. 2000. – Forschungsbericht
- Seim u. a. 2003** SEIM, W. ; VASQUEZ, A. ; KARBHARI, V. ; SEIBLE, F.: Poststrengthening of concrete slabs: Full-scale testing and design recommendations. In: *Journal of Structural Engineering* 129 (2003), Nr. 6, S. 743–752
- Seim u. a. 2003** SEIM, W. ; VASQUEZ, A. ; KARBHARI, V. ; SEIBLE, W.: Poststrengthening of concrete slabs: full-scale testing and design recommendations. In: *Journal of Structural Engineering* 129 (2003), Nr. 6, S. 743–752
- Selder 1979** SELDER, H.: *Einführung in die numerische Mathematik für Ingenieure*. München : Carl Hanser Verlag, 1979
- Sheikh und Uzumeri 1980** SHEIKH, S.A. ; UZUMERI, S.M.: Strength and Ductility of Tied Concrete Columns. In: *Proceedings ASCE* 106 (1980), S. 1079–1102

# A

## Experimentelle Untersuchungen - Materialkenngrößen

Tabelle A.1. Verbundversuche - Übersicht

Versuch	Beton				Betonstahl					Klebearmierung					Kleber
	Klasse	Alter [d]	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$d_s$ [mm]	$E_s$ [GPa]	$f_{sy}$ [MPa]	$n_s$ [-]	$f_R$ [-]	Material	$E_L$ [GPa]	$f_{Ly}$   $f_{Lw}$ [MPa]	$b_L$ [mm]	$t_L$ [mm]	
A1-B1	C20/25	28	30,4	-	16	201,64	528	1	0,060	-	-	-	-	-	-
A1-B2	C40/50	28	46,3	-	16	201,64	528	1	0,060	-	-	-	-	-	-
A2-B1	C20/25	28	30,4	-	12	204,73	555	1	0,000	-	-	-	-	-	-
A2-B2	C40/50	28	46,3	-	12	204,73	555	1	0,000	-	-	-	-	-	-
A3-B1	C20/25	28	30,4	-	8	197,23	528	1	0,080	-	-	-	-	-	-
A3-B2	C40/50	28	46,3	-	8	197,23	528	1	0,080	-	-	-	-	-	-
A5-B1	C20/25	28	24,4	-	8	195,85	559	1	0,075	-	-	-	-	-	-
A6-B1	C20/25	28	24,4	-	6	208,02	556	1	0,000	-	-	-	-	-	-
D3-B1	C20/25	32	28,3	-	8	197,23	528	0	0,080	-	-	-	-	-	-

Tabelle A.2. Dehnkörperversuche - Übersicht

Versuch	Beton				Betonstahl					Klebearmierung					Kleber
	Klasse	Alter [d]	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$d_s$ [mm]	$E_s$ [GPa]	$f_{sy}$ [MPa]	$n_s$ [-]	$f_R$ [-]	Material	$E_L$ [GPa]	$f_{Ly}$   $f_{Lw}$ [MPa]	$b_L$ [mm]	$t_L$ [mm]	
V1-01-B2C	C40/50	491	0,0	2,77	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	22
V1-02-B2C	C40/50	36	38,5	2,56	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	14
V1-03-B2C	C40/50	26	46,4	2,40	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	19
V1-04-B2C	C40/50	27	46,6	2,20	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	20
V1-05-B1C	C20/25	21	27,1	1,33	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	8
V1-06-B1C	C20/25	29	27,8	1,58	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	16
V1-07-B1C	C20/25	32	28,1	1,84	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	19
V1-08-B1C	C20/25	21	27,1	1,21	16	201,64	528	4	0,060	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	13
V1-09-B2S	C40/50	42	49,3	2,62	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	6
V1-10-B2S	C40/50	41	49,1	2,79	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	5
V1-11-B2S	C40/50	26	44,1	3,11	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	4
V1-12-B2S	C40/50	29	44,3	2,31	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	7
V1-13-B1S	C20/25	39	28,8	1,61	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	10
V1-14-B1S	C20/25	32	30,3	2,03	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	19
V1-15-B1S	C20/25	33	30,6	1,94	16	201,64	528	4	0,060	St37	205,44	373	80,1	5,20	20

- Zilch und Zehetmaier 2003** ZILCH, K. ; ZEHETMAIER, G.: Auswirkungen eines Anpressdrucks auf die Verbundtragfähigkeit von aufgeklebten Stahllaschen im Endverankerungsbereich / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 2003 ( unveröffentlicht). – Forschungsbericht
- Zilch u. a. 2002** ZILCH, K. ; ZEHETMAIER, G. ; NIEDERMEIER, R.: Zusammenwirken von einbetonierter Bewehrung mit Klebarmierung bei verstärkten Stahlbetonbauteilen / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 2002. – Forschungsbericht
- Zilch u. a. 2004** ZILCH, K. ; ZEHETMAIER, G. ; NIEDERMEIER, R.: Zugkraftdeckung im Bereich von Endauflagern klebarmierter Biegebauteile / Technische Universität München, Lehrstuhl für Massivbau. 2004. – Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben DIBt P 32-5-19.40-1001/01

Tabelle A.3. Versuche an Plattenstreifen - Übersicht

Versuch	Beton				Betonstahl					Klebearmierung					Kleber
	Klasse	Alter [d]	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$d_s$ [mm]	$E_s$ [GPa]	$f_{sy}$ [MPa]	$n_s$ [-]	$f_{ft}$ [-]	Material	$E_L$ [GPa]	$f_{Ly}$   $f_{Lw}$ [MPa]	$b_L$ [mm]	$t_L$ [mm]	
B2-01-B2C	C40/50	78	51,5	2,76	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	66
B2-02-B2C	C40/50	74	51,5	2,71	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	66
B2-03-B2C	C40/50	87	43,7	3,83	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	79
B2-04-B2S	C40/50	58	52,6	3,63	12	204,73	555	2	0	Si37	203,40	378	80,1	5,20	38
B2-05-B2S	C40/50	64	51,0	3,71	12	204,73	555	2	0	Si37	203,40	378	80,1	5,20	38
B2-06-B2S	C40/50	65	53,6	3,35	12	204,73	555	2	0	Si37	206,79	301	80,1	5,20	38
B2-07-B2C	C40/50	74	56,8	3,19	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	65
B2-08-B2C	C40/50	87	57,5	3,38	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	65
B2-09-B2C	C40/50	88	57,5	2,85	12	204,73	555	2	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	65
B2-10-B2S	C40/50	52	54,9	3,08	12	204,73	555	2	0	Si37	203,40	378	80,1	5,20	11
B2-11-B2S	C40/50	57	53,0	3,01	12	204,73	555	2	0	Si37	206,79	301	80,1	5,20	32
B2-12-B2S	C40/50	62	54,4	1,79	12	204,73	555	2	0	Si37	206,79	301	80,1	5,20	32

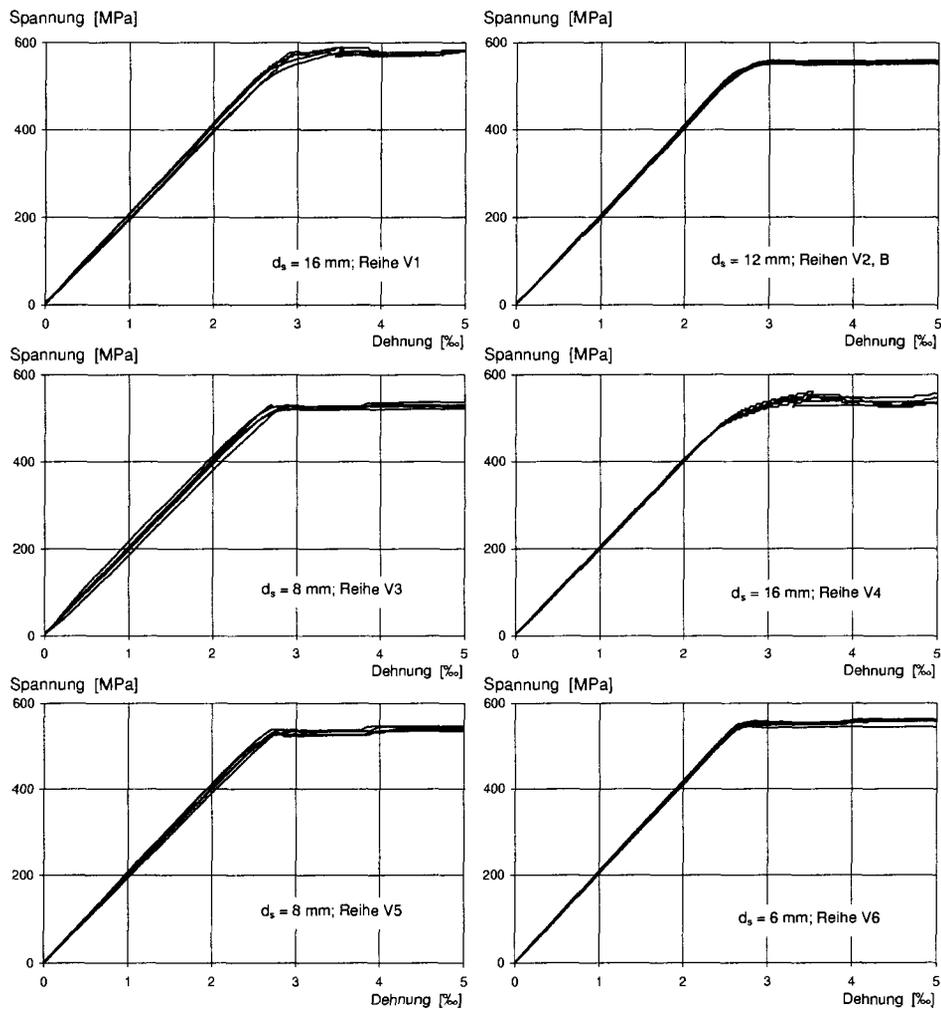


Abbildung A.1. Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der in den Versuchen verwendeten Betonstähle, ermittelt nach (DIN 488-3 1986) bzw. (DIN EN 10002-1 2001)

Fortsetzung Tabelle A.2

Versuch	Beton				Betonstahl					Klebearmierung					Kleber
	Klasse	Alter [d]	$f_{cm}$ [MPa]	$f_{ctm}$ [MPa]	$d_s$ [mm]	$E_s$ [GPa]	$f_{sy}$ [MPa]	$n_s$ [-]	$f_R$ [-]	Material	$E_L$ [GPa]	$f_{ly} / f_{Lw}$ [MPa]	$b_L$ [mm]	$t_L$ [mm]	
V2-01-B2C	C40/50	15	43,6	2,31	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	9
V2-02-B2C	C40/50	34	44,3	2,58	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	9
V2-03-B2C	C40/50	36	44,4	2,44	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	11
V2-04-B2C	C40/50	40	44,7	2,72	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	15
V2-05-B1C	C20/25	32	27,2	1,81	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	14
V2-06-B1C	C20/25	28	27,0	2,29	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	10
V2-07-B1C	C20/25	39	27,7	2,09	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	10
V2-08-B1C	C20/25	34	27,4	1,85	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	5
V2-09-B2S	C40/50	33	44,2	2,87	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	21
V2-10-B2S	C40/50	32	47,1	2,76	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	12
V2-11-B2C	C40/50	26	46,8	2,56	12	204,73	555	4	0	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	11
V2-12-B2S	C40/50	36	47,4	2,51	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	16
V2-13-B1S	C20/25	32	26,9	1,65	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	13
V2-14-B1S	C20/25	36	27,9	1,28	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	17
V2-15-B1S	C20/25	26	25,3	2,06	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	7
V2-16-B1S	C20/25	28	25,8	1,60	12	204,73	555	4	0	St37	203,40	378	80,1	5,20	9
V3-01-B2C	C40/50	21	43,6	2,30	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	15
V3-02-B2C	C40/50	29	49,6	2,60	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	15
V3-03-B2C	C40/50	42	50,2	2,83	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	28
V3-04-B2C	C40/50	40	50,1	2,39	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	26
V3-05-B1C	C20/25	20	26,9	1,70	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	12
V3-06-B1C	C20/25	95	37,9	2,27	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	34
V3-07-B1C	C20/25	41	35,0	1,63	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	20
V3-08-B1C	C20/25	54	35,7	1,92	8	197,23	528	4	0,080	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	33
V3-09-B2S	C40/50	33	47,2	2,94	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	13
V3-10-B2S	C40/50	48	50,5	2,29	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	21
V3-11-B2S	C40/50	33	48,3	2,73	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	20
V3-12-B2S	C40/50	36	48,5	2,19	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	23
V3-13-B1S	C20/25	151	38,6	1,48	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	82
V3-14-B1S	C20/25	54	31,6	2,06	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	34
V3-15-B1S	C20/25	47	31,3	1,76	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	27
V3-16-B1S	C20/25	99	33,6	1,84	8	197,23	528	4	0,080	St37	203,40	378	80,1	5,20	46
V4-01-B2C	C40/50	88	51,7	2,76	16	198,38	548	4	0,090	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	48
V4-02-B2C	C40/50	82	51,4	1,89	16	198,38	548	4	0,090	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	42
V4-03-B1C	C20/25	138	35,4	1,44	16	198,38	548	4	0,090	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	91
V4-04-B1C	C20/25	77	35,2	1,42	16	198,38	548	4	0,090	CFK	159,53	2700	50,0	1,34	44
V4-05-B2S	C40/50	105	51,9	-	16	198,38	548	4	0,090	St37	203,40	378	80,1	5,20	73
V4-06-B2S	C40/50	84	50,7	1,87	16	198,38	548	4	0,090	St37	203,40	378	80,1	5,20	52
V4-07-B1S	C20/25	103	35,1	1,74	16	198,38	548	4	0,090	St37	203,40	378	80,1	5,20	64
V4-08-B1S	C20/25	105	35,3	-	16	198,38	548	4	0,090	St37	203,40	378	80,1	5,20	66
V5-01-B1S	C20/25	47	29,3	1,51	8	195,85	559	8	0,075	St37	210,88	368	80,0	10,00	13
V5-02-B1s	C20/25	414	31,8	1,72	8	194,49	539	8	0,075	St37	210,88	368	80,0	10,00	380
V6-01-B1S	C20/25	132	28,1	1,45	6	208,02	556	12	0	St37	210,88	368	80,0	10,00	98
V6-02-B1S	C20/25	191	28,3	1,6	6	208,02	556	12	0	St37	210,88	368	80,0	10,00	157

## B

---

### Zusammenwirken bei Dehnkörpern

#### B.1 Eingangsgrößen der Versuchsauswertung

In Tab. B.1 werden die der Auswertung von Versuchen an gemischt bewehrten Dehnkörpern zugrunde gelegten Eingangsparameter sowie wesentliche Regressionsergebnisse zusammengestellt. Im Einzelnen:

- Verbundparameter der angeklebten Bewehrung
  - $\tau_{L1}$  in MPa
  - $G_e$  in N/mm
  - $G_F$  in N/mm
- Verbundparameter der einbetonierten Bewehrung
  - $C$  in  $\sqrt{\text{MPa}}$
  - $A$  in  $\sqrt{\text{MPa}}/\text{mm}^{0,25}$
  - $N$  -
- Kenngrößen der Rissbildung
  - $F_{cr,cal}$  in kN Rechenwert der Zugkraft bei Erstrissbildung
  - $F_a$  in kN Rechenwert der Zugkraft bei Erreichen des abgeschlossenen Erstrissbildes
  - $s_{cra,exp}$  in mm Rissabstand im Versuch bei  $F_a$
- Beiwert der Kompatibilitätsbedingung
  - $k_{si,exp}$  - Korrekturbeiwert der Verträglichkeitsbedingung; dem Minimum der auf die Stützstellen der  $F$ - $\delta_L$ -Beziehung bezogenen Fehlerquadratsumme zugeordnet;
  - $k_{si,cal}$  - Korrekturbeiwert der Verträglichkeitsbedingung nach dem in 5.3 abgeleiteten Rechenmodell

Fortsetzung Tabelle B.1

Versuch	Verbund						Rissbildung			Kompatibilität	
	Klebearmierung			Betonstahl			$F_{cr,cal}$	$F_s$	$S_{cr,exp}$	$k_{rel,exp}$	$k_{rel,cal}$
	$\tau_{L1}$	$G_s$	$G_F$	C	A	N					
V4-01-B2C	6,15	0,019	0,654	1,39	1,35	0,25	308,1	-	-	-	0,503
V4-02-B2C	5,07	0,016	0,540	1,39	1,35	0,25	307,0	-	-	-	0,507
V4-03-B1C	3,67	0,012	0,391	1,39	1,35	0,25	241,3	-	-	-	0,755
V4-04-B1C	3,64	0,011	0,367	1,39	1,35	0,25	240,4	-	-	-	0,758
V4-05-B2S	5,01	0,087	0,489	1,39	1,35	0,25	324,2	-	-	-	0,712
V4-06-B2S	4,11	0,072	0,401	1,39	1,35	0,25	319,5	-	-	-	0,739
V4-07-B1S	3,30	0,058	0,322	1,39	1,35	0,25	253,4	-	-	-	1,082
V4-08-B1S	3,64	0,063	0,354	1,39	1,35	0,25	254,3	-	-	-	1,077
V5-01-B1S	3,75	0,038	0,544	2,33	1,35	0,25	535,2	-	-	2,134	1,761
V5-02-B1s	3,69	0,046	0,517	2,33	1,35	0,25	367,1	-	-	2,040	2,034
V6-01-B1S	3,50	0,053	0,508	0,17	0,17	0	309,8	-	-	4,915	4,900
V6-02-B1S	3,40	0,043	0,459	0,17	0,17	0	341,8	-	-	4,887	4,800

Tabelle B.1. Eingangsgrößen und Ergebnisse der Auswertung von Versuchen an Dehnkörpern

Versuch	Verbund						Rissbildung			Kompatibilität	
	Klebearmierung			Betonstahl			$F_{cr,cal}$	$F_a$	$S_{cr,exp}$	$k_{al,exp}$	$k_{al,cal}$
	$\tau_{L1}$	$G_a$	$G_F$	C	A	N					
V1-03-B2C	5,43	0,017	0,578	1,39	1,35	0,25	212,9	330,6	180	0,618	0,587
V1-04-B2C	5,21	0,016	0,555	1,39	1,35	0,25	213,5	326,7	224	0,573	0,584
V1-05-B1C	3,09	0,010	0,329	1,39	1,35	0,25	150,6	236,4	273	0,825	0,884
V1-06-B1C	3,41	0,011	0,363	1,39	1,35	0,25	153,1	246,5	265	0,873	0,872
V1-07-B1C	3,70	0,012	0,394	1,39	1,35	0,25	154,2	254,6	290	0,828	0,868
V1-08-B1C	2,95	0,009	0,314	1,39	1,35	0,25	150,6	232,3	263	0,960	0,883
V1-09-B2S	4,80	0,084	0,468	1,39	1,35	0,25	232,7	261,1	313	0,718	0,777
V1-10-B2S	4,94	0,086	0,482	1,39	1,35	0,25	232,1	261,2	227	0,772	0,781
V1-11-B2S	4,95	0,086	0,482	1,39	1,35	0,25	216,9	247,4	255	0,904	0,892
V1-12-B2S	4,27	0,075	0,416	1,39	1,35	0,25	217,6	243,0	350	1,120	0,888
V1-13-B1S	2,88	0,050	0,280	1,39	1,35	0,25	166,1	188,2	310	1,230	1,230
V1-14-B1S	3,31	0,058	0,323	1,39	1,35	0,25	171,4	192,7	455	1,420	1,197
V1-15-B1S	3,25	0,057	0,317	1,39	1,35	0,25	172,5	193,8	372	1,738	1,190
V2-01-B2C	5,16	0,016	0,550	0,17	0,17	0	191,6	323,1	-	0,710	0,704
V2-02-B2C	5,50	0,017	0,586	0,17	0,17	0	214,0	359,3	-	0,550	0,679
V2-03-B2C	5,36	0,017	0,570	0,17	0,17	0	202,4	312,4	-	0,730	0,674
V2-04-B2C	5,67	0,018	0,604	0,17	0,17	0	225,6	363,8	-	0,320	0,665
V2-05-B1C	3,61	0,011	0,384	0,17	0,17	0	151,2	243,2	-	1,660	1,290
V2-06-B1C	4,05	0,013	0,431	0,17	0,17	0	191,3	281,5	-	1,300	1,300
V2-07-B1C	3,92	0,012	0,417	0,17	0,17	0	174,5	267,1	-	1,130	1,274
V2-08-B1C	3,66	0,012	0,390	0,17	0,17	0	154,5	247,0	-	1,300	1,286
V2-09-B2S	4,76	0,083	0,464	0,17	0,17	0	250,7	265,7	-	1,320	1,561
V2-10-B2S	4,82	0,084	0,469	0,17	0,17	0	240,6	260,7	-	3,040	1,320
V2-11-B2C	5,63	0,018	0,600	0,17	0,17	0	212,2	324,0	-	0,705	0,589
V2-12-B2S	4,61	0,080	0,449	0,17	0,17	0	218,8	234,3	-	2,125	1,301
V2-13-B1S	2,81	0,049	0,274	0,17	0,17	0	146,4	168,0	-	3,133	2,990
V2-14-B1S	2,52	0,044	0,246	0,17	0,17	0	113,5	133,4	-	4,083	2,908
V2-15-B1S	3,05	0,053	0,297	0,17	0,17	0	183,2	192,8	-	2,833	3,115
V2-16-B1S	2,71	0,047	0,265	0,17	0,17	0	142,2	163,5	-	3,533	3,074
V3-01-B2C	5,15	0,016	0,549	2,33	1,35	0,25	187,7	188,6	-	0,767	0,806
V3-02-B2C	5,84	0,018	0,622	2,33	1,35	0,25	212,0	213,2	-	0,599	0,687
V3-03-B2C	6,13	0,019	0,653	2,33	1,35	0,25	230,8	231,4	-	0,675	0,675
V3-04-B2C	5,63	0,018	0,599	2,33	1,35	0,25	194,9	196,1	-	0,642	0,677
V3-05-B1C	3,48	0,011	0,370	2,33	1,35	0,25	139,3	140,7	-	1,146	1,134
V3-06-B1C	4,77	0,015	0,508	2,33	1,35	0,25	185,5	186,2	-	0,917	0,917
V3-07-B1C	3,89	0,012	0,414	2,33	1,35	0,25	133,3	135,2	-	1,167	0,975
V3-08-B1C	4,26	0,013	0,454	2,33	1,35	0,25	157,0	159,1	-	1,285	0,961
V3-09-B2S	4,98	0,087	0,485	2,33	1,35	0,25	252,5	593,0	-	1,383	1,049
V3-10-B2S	4,54	0,079	0,443	2,33	1,35	0,25	196,4	415,7	-	1,475	0,956
V3-11-B2S	4,85	0,085	0,473	2,33	1,35	0,25	234,4	537,3	-	1,125	1,017
V3-12-B2S	4,35	0,076	0,424	2,33	1,35	0,25	188,0	390,8	-	1,373	1,012
V3-13-B1S	3,19	0,056	0,311	2,33	1,35	0,25	127,7	202,9	-	1,400	1,292
V3-15-B1S	3,14	0,055	0,306	2,33	1,35	0,25	152,7	301,1	-	1,227	1,496
V3-16-B1S	3,32	0,058	0,324	2,33	1,35	0,25	159,4	319,4	-	1,400	1,430

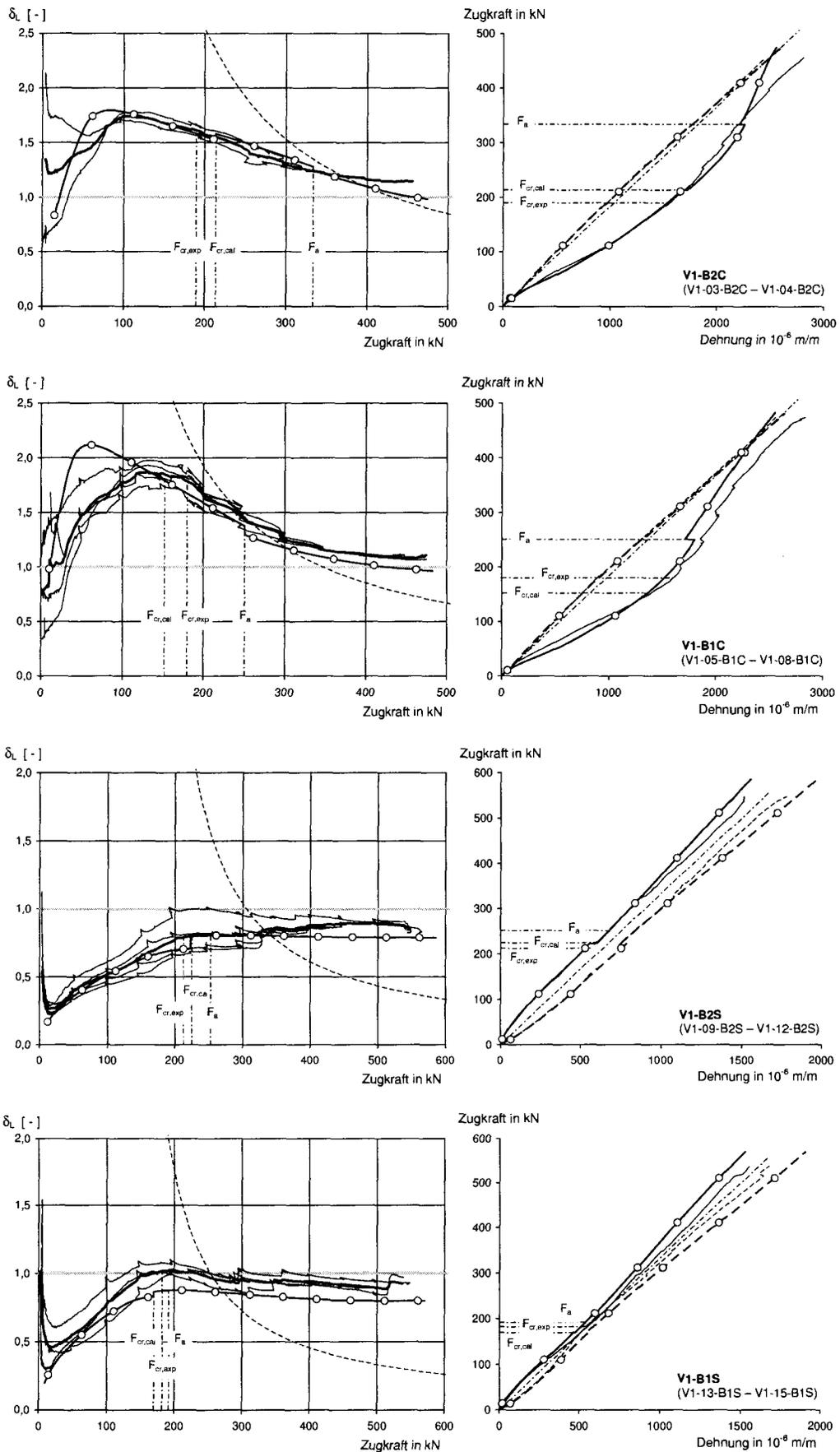


Abbildung B.1. Versuchsreihe V1 - Versuchsergebnisse und Rechenwerte

## B.2 Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten

### Darstellungsumfang

In den Abbildungen B.1 bis B.5 werden die Ergebnisse aus den Dehnkörperversuchen, zusammengefasst zu Teilsereien mit annähernd identischen Parametern, Rechenwerten gegenübergestellt. Im Einzelnen werden wiedergegeben:

- Zusammenhang zwischen Zugkraft und Verhältnis der Dehnungen der Bewehrungsstränge im vorgegebenen Rissquerschnitt ( $F$ - $\delta_L$ -Diagramm)
  - $\delta_{L,exp}(F)$  Verhältnis der gemessenen Dehnungen der Bewehrungsstränge in Abhängigkeit der Zugkraft; Ergebnisse der einzelnen Versuche sowie Mittelwert der Teilserie
  - $\delta_{L,cal}(F)$  mit Hilfe des numerischen Modells berechnetes Verhältnis der Dehnungen auf Grundlage der mittleren Betondruckfestigkeit der Teilserie und der aus  $f_{cm}$  abgeleiteten Oberflächenzugfestigkeit
  - $\delta_{L,lim}(F)$  Grenzlinie der Klebarmierungsentkopplung am Einzelriss nach Gl. (5.2)
- Zusammenhang zwischen Zugkraft und Dehnungen der Bewehrungsstränge im vorgegebenen Rissquerschnitt ( $F$ - $\epsilon$ -Diagramm)
  - $\epsilon_{s,exp}(F)$  Mittelwert der gemessenen Betonstahldehnungen einer Teilserie;
  - $\epsilon_{L,exp}(F)$  Mittelwert der gemessenen Dehnungen des Klebarmierungsstranges einer Teilserie;
  - $\epsilon_{s,cal}(F)$  Rechenwerte der Betonstahldehnung zugehörig zur  $F$ - $\delta_{L,cal}$ -Beziehung (Mittelwert)
  - $\epsilon_{L,cal}(F)$  Rechenwert der Klebarmierungsdehnung
  - $\epsilon_{Bernoulli}$  Dehnungen bei Annahme einer ebenen Dehnungsverteilung;

In allen Abbildungen sind ergänzend der Mittelwert der Zugkraft bei Auftreten des ersten zusätzlichen Risses ( $F_{cr,exp}$ ) sowie die Rechenwerte der Zugkräfte bei Erstrissbildung (Risschnittgröße auf Basis der mittleren zentrischen Zugfestigkeit;  $F_{cr,cal}$ ) bzw. bei Erreichen des abgeschlossenen Erstrissbildes ( $F_a$ ) angegeben.

### Legende

—	$\delta_{L,exp}(F)$ Versuchsergebnis (Einzelwert)	----	$\epsilon_{s,exp}(F)$ Versuchsergebnis Betonstahl (Mittelwert)
—	$\delta_{L,exp}(F)$ Versuchsergebnis (Mittelwert d. Teilserie)	—	$\epsilon_{L,exp}(F)$ Versuchsergebnis Klebarmierung (Mittelwert)
—○—	$\delta_{L,cal}(F)$ Rechenmodell	-○-	$\epsilon_{s,cal}(F)$ Rechenwert Betonstahl
----	$\delta_{L,lim}(F)$ Grenzlinie (Entkopplung am Einzelriss)	—○—	$\epsilon_{L,cal}(F)$ Rechenwert Klebarmierung
		----	$\epsilon_{Bernoulli}(F)$ Dehnungsebenheit

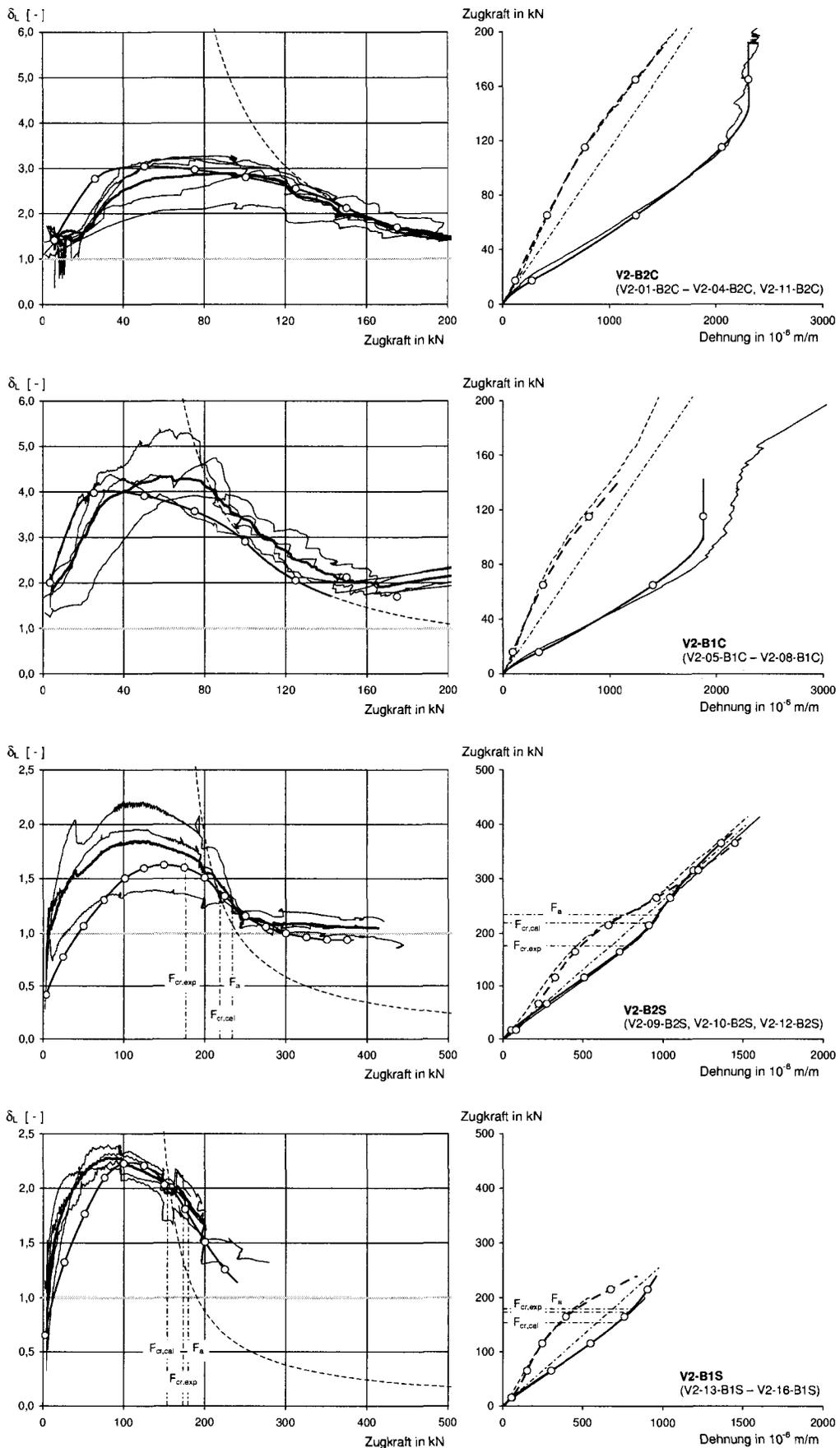


Abbildung B.2. Versuchsreihe V2 - Versuchsergebnisse und Rechenwerte

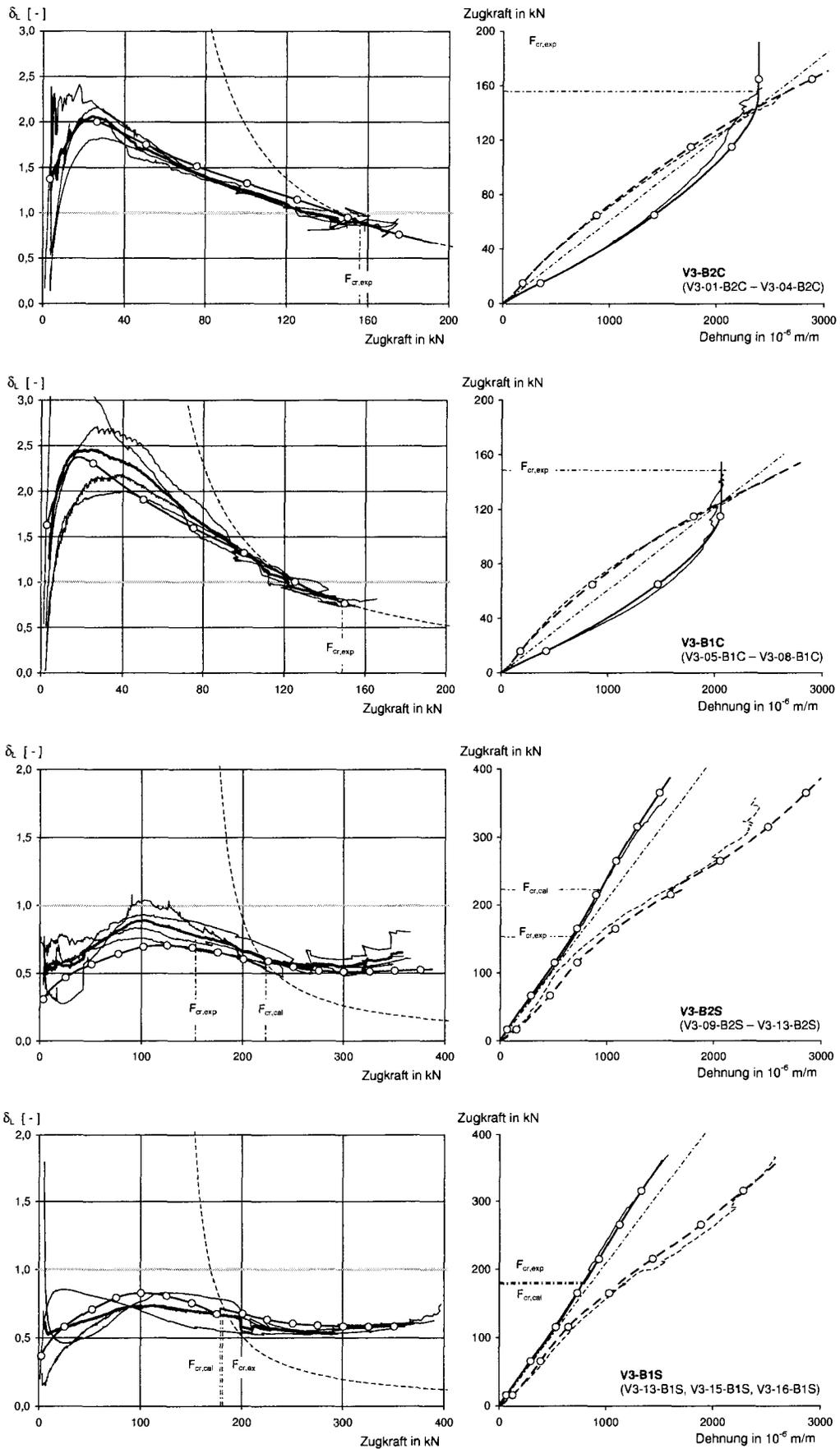


Abbildung B.3. Versuchsreihe V3 - Versuchsergebnisse und Rechenwerte

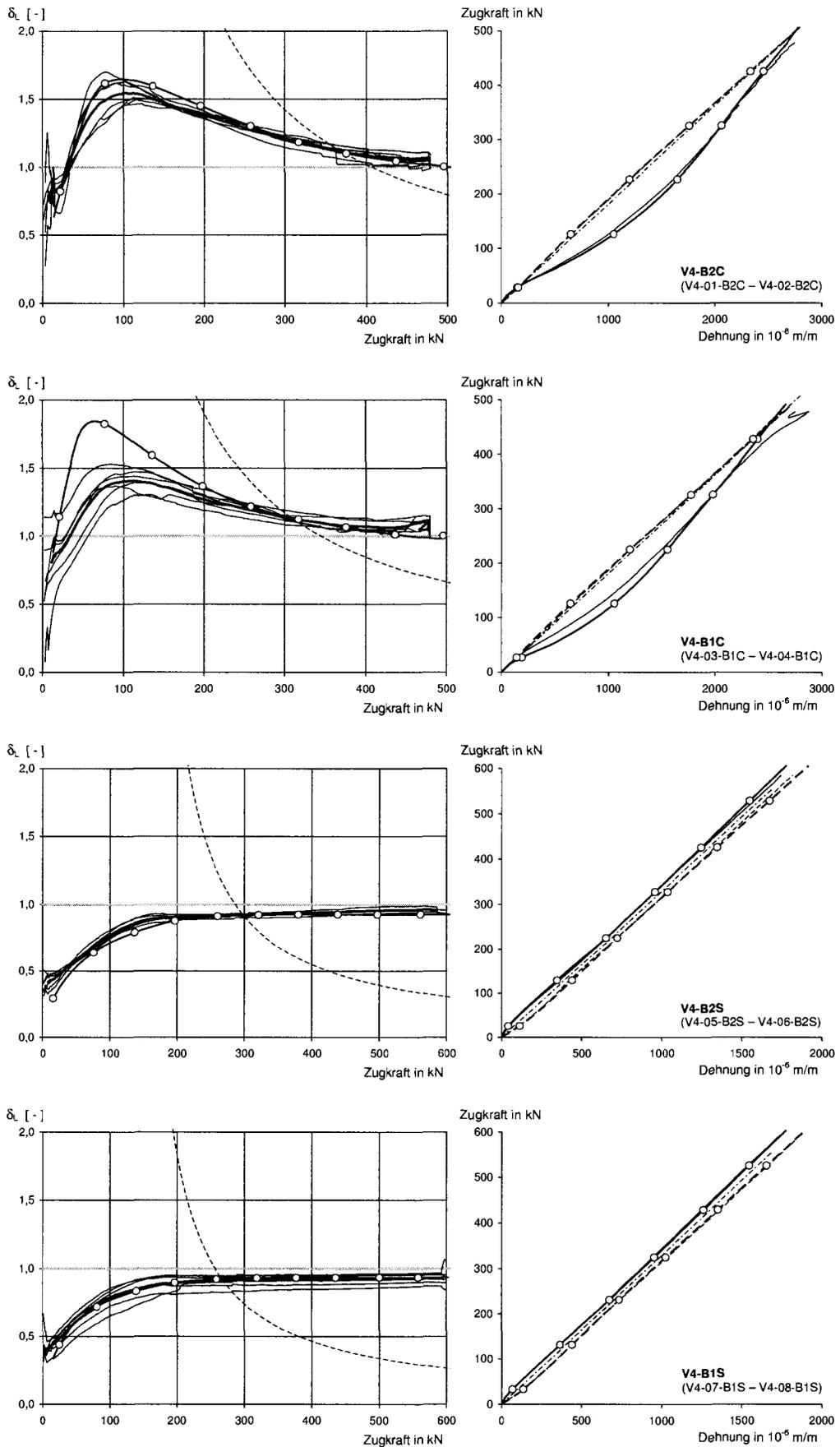


Abbildung B.4. Versuchsreihe V4 - Versuchsergebnisse und Rechenwerte

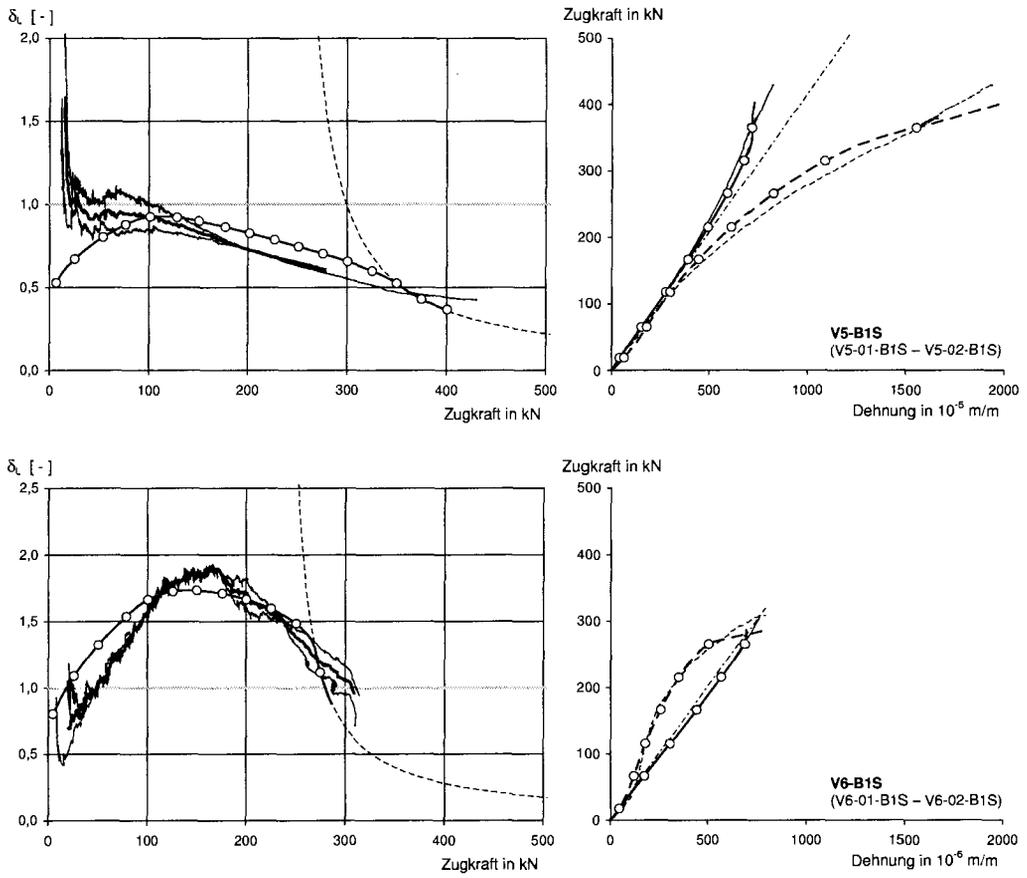


Abbildung B.5. Versuchsreihen V5 und V6 - Versuchsergebnisse und Rechenwerte

## Zusammenwirken der Bewehrungsstränge bei biegebeanspruchten Bauteilen

### C.1 Rechenmodell - Dehnungs- und Verschiebungszustände auf Elementebene

#### C.1.1 Klebarmierung

Die für ein Element zwischen zwei Rissen möglichen Dehnungs- und Verschiebungsfälle aufgeklebter Bewehrungselemente auf der Grundlage eines global gültigen, bilinearen Verbundansatzes nach 4.3 werden in (Niedermeier 2001) für querkraftbeanspruchte Bereiche und ergänzend für Bereiche konstanter Biegemomente in (Schmidhuber 2004) zusammengestellt. Die nach den Relativverschiebungen  $s_{Lr}^{ij}$  an den Rissufern separierten insgesamt 13 Verschiebungsfälle können für die Umsetzung in einen Rechenalgorithmus in zwei Grundfälle unterschieden werden<sup>1</sup>:

- positive Relativverschiebungen an beiden Rissufern:  $s_{Lr}^{ij} \geq 0$
- negative Relativverschiebungen an Rissufer ①:  $s_{Lr}^{i1} < 0, s_{Lr}^{i2} > 0$

Die unter dem erstgenannten Punkt zusammengefassten 12 Verschiebungsfälle lassen sich in einem Iterationsalgorithmus einheitlich umsetzen. Für den zweiten Fall - die Klebarmierung wird über das Element hinweggezogen - sind erweiterte Überlegungen erforderlich (s.u.).

Zur Berechnung des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_L^i$  werden für den Regelfall positiver Relativverschiebungen an beiden Rissufern i.A. die Größen  $s_{Lr}^{i2}$  und  $l_L^{i2}$  vorgegeben. Die Kopplung der beiden durch  $l_L^{i1}$  und  $l_L^{i2}$  abgegrenzten Bereiche erfolgt über die Ruhepunktsdehnung  $\epsilon_L^{i0}$ . Im Folgenden werden die analytischen Ausdrücke zur Berechnung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes der Klebarmierung in Abhängigkeit der genannten Größen im Überblick dargestellt. Generell wird zwischen drei Beanspruchungsbereichen unterschieden:

- Bereich ①  $0 < s_L^{i2} \leq s_{L1}$   
 Bereich ②  $s_{L1} < s_L^{i2} \leq s_{L0}$   
 Bereich ③  $s_{L0} < s_L^{i2}$

Die Beziehungen bauen dabei auf den allgemeinen Lösungen der DGL des verschieblichen Verbundes für die Beanspruchungsbereiche ① nach Gl. (C.1) bzw. ② nach Gl. (C.2) auf:

$$s_{L①}(x_L^{i2}) = A_{①} \sinh(\omega x_L^{i2}) + B_{①} \cosh(\omega x_L^{i2}) \quad (C.1)$$

$$s_{L②}(x_L^{i2}) = A_{②} \sin(\omega \lambda x_L^{i2}) + B_{②} \cos(\omega \lambda x_L^{i2}) + s_{L0} \quad (C.2)$$

mit:

$$\omega = \sqrt{\frac{\tau_{L1}}{E_L t_L s_{L1}}} \quad \lambda = \sqrt{\frac{s_{L1}}{s_{L0} - s_{L1}}} \quad (C.3)$$

<sup>1</sup> Positive Relativverschiebungen entsprechen Verschiebungen in Richtung positiver lokaler Koordinaten  $x_s^{ij}$  bzw.  $x_L^{ij}$  nach Abb. 6.6.

**Elastisches Verbundverhalten - Bereich ①:**  $0 < s_{Lr}^{i2} \leq s_{L1}$ 

Mit den Randbedingungen

$$s_{L①}(x_L^{i2} = 0) = 0 \quad (C.4)$$

$$\epsilon_{L①}(x_L^{i2} = 0) = \epsilon_L^{i0} \quad (C.5)$$

$$s_{L①}(x_L^{i2} = l_L^{i2}) = s_{Lr}^{i2} \quad (C.6)$$

$$\epsilon_{L①}(x_L^{i2} = l_L^{i2}) = \epsilon_{Lr}^{i2} \quad (C.7)$$

folgt für die unbekanntenen Dehnungen an den Rändern des durch  $l_L^{i2}$  begrenzten Bereiches:

$$\epsilon_{Lr}^{i0} = s_{Lr}^{i2} / \omega \sinh(\omega l_L^{i2}) \quad (C.8)$$

$$\epsilon_{Lr}^{i2} = s_{Lr}^{i2} \omega \coth(\omega l_L^{i2}) \quad (C.9)$$

**Entfestigtes Verbundverhalten - Bereich ②:**  $s_{L1} < s_{Lr}^{i2} \leq s_{L0}$ 

Die Dehnungen und Verschiebungen der Klebarmierung nach Überschreiten der elastischen Grenzverschiebung  $s_{L1}$  können nur bei bekannter Länge des elastischen Verbundbereiches  $a_{①}$  angegeben werden. Grundsätzlich gelten die für den Beanspruchungsbereich ① angegebenen Randbedingungen (C.4) und (C.5). Ergänzend sind folgende Rand- und Übergangsbedingungen zu nutzen:

$$s_{L②}(x_L^{i2} = l_L^{i2}) = s_{Lr}^{i2} \quad (C.10)$$

$$\epsilon_{L②}(x_L^{i2} = l_L^{i2}) = \epsilon_{Lr}^{i2} \quad (C.11)$$

$$s_{L①}(x_L^{i2} = a_{①}) = s_{L1} \quad (C.12)$$

$$\epsilon_{L①}(x_L^{i2} = a_{①}) = \epsilon_{L②}(x_L^{i2} = a_{①}) \quad (C.13)$$

Die nur iterativ zu lösende Beziehung Gl. (C.14) zur Ermittlung des elastischen Bereichs der Verbundlänge folgt aus der allgemeinen Lösung für den Beanspruchungsbereich ② unter Verwendung der Rand- und Übergangsbedingungen bei Bezug auf die vorgegebene Relativverschiebung  $s_{Lr}^{i2}$ .

$$\left[ \frac{\lambda \sin(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①}))}{\tanh(\omega a_{①})} - \cos(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①})) \right] (s_{L0} - s_{L1}) + s_{L0} - s_{Lr}^{i2} = 0 \quad (C.14)$$

Mit bekanntem  $a_{①}$  folgt:

$$\epsilon_L^{i0} = \frac{[(s_{Lr}^{i2} - s_{L1}) - (s_{L1} - s_{L0}) \cos(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①}))] \omega \lambda}{\sin(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①})) \cosh(\omega a_{①})} \quad (C.15)$$

$$\epsilon_{Lr}^{i2} = \epsilon_L^{i0} \cosh(\omega a_{①}) \cos(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①})) - (s_{L1} - s_{L0}) \omega \lambda \sin(\omega \lambda (l_L^{i2} - a_{①})) \quad (C.16)$$

**Verbundentkopplung - Bereich ③:**  $s_{L0} < s_{Lr}^{i2}$ 

Zusätzlich zu den Randbedingungen (C.4) und (C.5) sowie den Übergangsbedingungen (C.12) und (C.13) gelten folgende Übergangsbedingungen am Ende des plastisch-entfestigten Verbundbereichs  $a_{②}$ :

$$s_{L②}(x_L^{i2} = a_{①} + a_{②}) = s_{L0} \quad (C.17)$$

$$\epsilon_{L②}(x_L^{i2} = a_{①} + a_{②}) = \epsilon_{Lr}^{i2} \quad (C.18)$$

Die zur Ermittlung der Dehnungen an den Rändern der durch  $l_L^{i2}$  begrenzten Verbundlänge erforderlichen Längen des elastischen sowie des plastisch-entfestigten Verbundbereichs  $a_{①}$  und  $a_{②}$  erfolgt iterativ unter Verwendung der Gln. (C.19) bis (C.21).

$$a_{②} = \frac{1}{\omega \lambda} \arctan \left( \frac{\tanh(\omega a_{①})}{\lambda} \right) \quad (C.19)$$

$$s_{L0} + \epsilon_{Lr}^{i2} (l_L^{i2} - a_{①} - a_{②}) - s_{Lr}^{i2} = 0 \quad (C.20)$$

$$\epsilon_{Lr}^{i2} = \frac{\lambda \cos(\omega \lambda a_{②})}{\tanh(\omega a_{①})} + (s_{L0} - s_{L1}) \omega \lambda \sin(\omega \lambda a_{②}) \quad (C.21)$$

Mit bekannten Bereichen elastischen und plastisch-entfestigten Verbundverhaltens ist die Ruhepunktsdehnung  $\epsilon_L^{i0}$  zu bestimmen.

$$\epsilon_L^{i0} = \frac{(s_{L0} - s_{L1})\omega\lambda}{\cosh(\omega a_{\textcircled{1}}) \tan(\omega\lambda a_{\textcircled{2}})} \quad (\text{C.22})$$

### Berechnung der Kenngrößen an Rissufer ①

Die dem Rissufer ① zugeordneten Komponenten des Zustandsvektors -  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  und  $s_{Lr}^{i1}$  - werden aufbauend auf der allgemeinen Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes nach den Gln. (C.1) und (C.2) unter Verwendung der auf Rissufer ① übertragenen Rand- und Übergangsbedingungen (C.4) bis (C.7), (C.10) bis (C.13) sowie (C.17) und (C.18) in Abhängigkeit der bekannten Größen  $\epsilon_L^{i0}$  und  $l_L^{i1}$  berechnet<sup>2</sup>.

Sofern  $s_{Lr}^{i1}$  die elastische Grenzverschiebung  $s_{L1}$  nicht überschreitet, gilt

$$s_{Lr}^{i1} = \frac{\epsilon_L^{i0}}{\omega} \sinh(\omega l_L^{i1}) \quad (\text{C.23})$$

$$\epsilon_{Lr}^{i1} = \epsilon_L^{i0} \cosh(\omega l_L^{i1}) \quad (\text{C.24})$$

Ist  $l_L^{i1}$  größer als  $a_{\textcircled{1}}$ , d.h.  $s_{Lr}^{i1} > s_{L1}$ , sind Randdehnung und -verschiebung über die Gln. (C.25) und (C.26) zu bestimmen.

$$s_{Lr}^{i1} = \frac{\epsilon_L^{i0}}{\omega\lambda} \cosh(\omega a_{\textcircled{1}}) \sin(\omega\lambda(l_L^{i1} - a_{\textcircled{1}})) + (s_{L1} - s_{L0}) \cos(\omega\lambda(l_L^{i1} - a_{\textcircled{1}})) + s_{L0} \quad (\text{C.25})$$

$$\epsilon_{Lr}^{i1} = \epsilon_L^{i0} \cosh(\omega a_{\textcircled{1}}) \cos(\omega\lambda(l_L^{i1} - a_{\textcircled{1}})) - (s_{L1} - s_{L0}) \sin(\omega\lambda(l_L^{i1} - a_{\textcircled{1}})) \quad (\text{C.26})$$

Sofern Bedingung (C.27) gilt, ist  $a_{\textcircled{1}}$  unbekannt und muss iterativ mit Hilfe von Gl. (C.28) ermittelt werden.

$$l_L^{i1} > a_{\textcircled{1}} > l_L^{i2} \quad \text{bzw.} \quad s_{Lr}^{i2} \leq s_{L1} \wedge s_{Lr}^{i1} > s_{L1} \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\epsilon_L^{i0}}{\omega} \sinh(\omega a_{\textcircled{1}}) - s_{L1} = 0 \quad (\text{C.28})$$

Treten am Rissufer ① Verbundentkopplungen auf, d.h.  $s_{Lr}^{i1} > s_{L0}$ , können Dehnung und Verschiebung  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  und  $s_{Lr}^{i1}$  mit den aus der Berechnung der Größen an Rissufer ② bekannten Kennwerten  $a_{\textcircled{1}}$  und  $a_{\textcircled{2}}$  unter sinngemäßer Verwendung der Gln. (C.20) und (C.21) ermittelt werden. Bei unbekanntem Kennwerten ist  $a_{\textcircled{1}}$  über Gl. (C.28) und  $a_{\textcircled{2}}$  unmittelbar mit Gl. (C.19) zu berechnen.

### Negative Relativverschiebungen der Klebarmierung an Rissufer ①

Negative Relativverschiebungen an Rissufer ① treten bei gleichzeitig geringen Dehnungen  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  und großen Dehnungsdifferenzen  $\Delta\epsilon_{Lr}^i$  auf. Zur Behandlung des Sonderfalls der möglichen Verschiebungszustände wird einschränkend und entgegen der Praxis bei allen anderen Verschiebungsfällen vereinbart, dass der Klebarmierungsstrang an Rissufer ② höhere Beanspruchungen aufweist.

Wird die Annahme vorausgesetzt, dass bei geringen Rissdehnungen der Klebarmierung, etwa im Einzelrisszustand, stets positive Relativverschiebungen an den Rissufern vorliegen, bedeutet das Auftreten negativer Relativverschiebungen im Lauf der Lastgeschichte eine Verschiebungsumkehr. Daraus sind zwei Grundsätze abzuleiten:

- Negative Relativverschiebungen treten nur auf, wenn sie für die Realisierung der Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon_{Lr}^i$  zwischen den Rissufern eines Elements erforderlich sind.
- Da negative Relativverschiebungen nur bei kleinen Verzerrungen möglich erscheinen (vgl. Niedermeier 2001), wird die elastische Grenzverschiebung  $s_{L1}$  als Beschränkung für negative Werte von  $s_{Lr}^{i1}$  angesehen.

<sup>2</sup> Die sinngemäße Übertragung der Rand- und Übergangsbedingungen der drei Beanspruchungsbereiche auf den  $l_L^{i1}$  zugeordneten Verbundbereich erfolgt durch Anpassung des Rissufer-Indexes  $j : 2 \rightarrow 1$ .

Zur Umsetzung negativer Relativverschiebungen in ein Rechenmodell wird die Definition von Abgrenzungskriterien erforderlich; die implementierte Verzweigungsstruktur ist in Abb. C.2 wiedergegeben. Für die Entscheidungskriterien sind folgende Grenzwerte zu ermitteln:

$(\epsilon_{Lr}^{i1})_{gr1}$  Dehnungsgrenzwert, bis zu dessen Erreichen die maximal zu realisierende Dehnungsdifferenz  $\Delta\epsilon_{Lr}^i$  negativen Relativverschiebungen an Rissufer ① zugeordnet ist. Die zugehörige Dehnungsverteilung über die Risselementlänge  $l_r^i$  wird durch die Relativverschiebungen an den Rändern definiert:

$$s_{Lr}^{i1} = 0 \quad \wedge \quad s_{Lr}^{i2} = s_{l0}$$

$(\Delta\epsilon_{Lr}^i)_{gr1}$  Dehnungsdifferenz, die dem für  $(\epsilon_{Lr}^{i1})_{gr1}$  vereinbarten Grenzfall zugeordnet ist. Aus Energiebetrachtungen folgt unmittelbar:

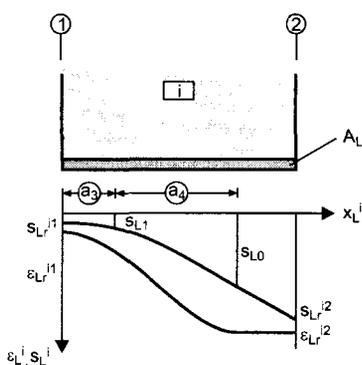
$$(\Delta\epsilon_{Lr}^i)_{gr1} = \sqrt{\frac{2G_F}{E_L t_L} + ((\epsilon_{Lr}^{i1})_{gr1})^2}$$

$(\Delta\epsilon_{Lr}^i)_{gr2}$  Dehnungsdifferenz, die für die vorgegebene Randdehnung  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  für  $s_{Lr}^{i1} = 0$  realisiert werden kann.

Sofern negative Relativverschiebungen an Rissufer ① erforderlich sind, wird zur Wahrung der Eindeutigkeit  $s_{Lr}^{i1}$  auf den Bereich  $(s_{Lr}^{i1})_{max} \leq s_{Lr}^{i1} < 0$  begrenzt.

Im Unterschied zum Regelfall positiver Verschiebungen an beiden Rissufern werden zur Ermittlung des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_L^i$  die Größen an Rissufer ①  $s_{Lr}^{i1}$  und  $\epsilon_{Lr}^{i1}$  vorgegeben. Die zur Umsetzung in analytische Bestimmungsgleichungen für die Elemente des Zustandsvektors auf Grundlage der allgemeinen Lösung der DGL nach den Gln. (C.1) und (C.2) veränderte Festlegung des Koordinatenursprungs ist in Abb. C.1 wiedergegeben; dem Koordinatensystem entsprechend werden die an Rissufer ① auftretenden und zum Rissufer ② orientierten Relativverschiebungen zur Lösung auf Elementebene positiv angesetzt.

Die Rand- und Übergangsbedingungen zur Festlegung der Koeffizienten der allgemeinen Lösungen der DGL sind mit (C.29) bis (C.33) angegeben. Dabei bezeichnen  $a_{(3)}$  bzw.  $a_{(4)}$  die Ausdehnung der elastischen bzw. plastisch-entfestigten Verbundbereiche.



$$s_{L(3)}(x_L^i = 0) = s_{Lr}^{i1} \tag{C.29}$$

$$\epsilon_{L(3)}(x_L^i = 0) = \epsilon_{Lr}^{i1} \tag{C.30}$$

$$s_{L(3)}(x_L^i = a_{(3)}) = s_{L1} \tag{C.31}$$

$$\epsilon_{L(3)}(x_L^i = a_{(3)}) = \epsilon_{L(4)}(x_L^i = a_{(3)}) \tag{C.32}$$

$$s_{L(4)}(x_L^i = a_{(3)} + a_{(4)}) = s_{L0} \tag{C.33}$$

**Abbildung C.1.** Dehnungs- und Verschiebungszustand des Klebarmierungsstranges bei negativer Relativverschiebung an Rissufer ①

Die Länge des elastischen Verbundbereichs  $a_{(3)}$  ist iterativ aus der an die Rand- und Übergangsbedingungen (C.29) bis (C.31) angepassten allgemeinen Lösung nach Gl. (C.34) zu bestimmen. Die Ausdehnung des plastisch-entfestigten Verbundbereichs ergibt sich aus den Bedingungen (C.32) und (C.33) unmittelbar nach Gl. (C.35).

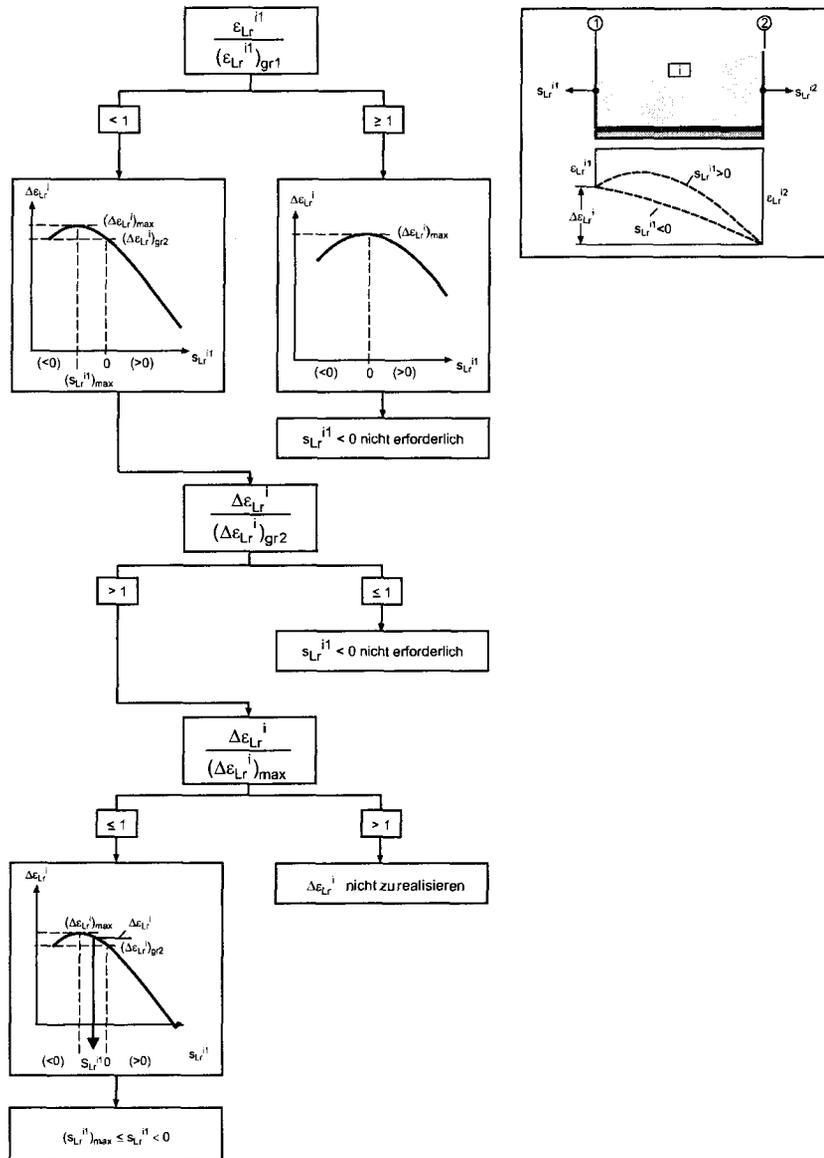


Abbildung C.2. Voraussetzungen für das Auftreten negativer Relativverschiebungen an Rissufer ① - Verzweigungsstruktur

$$\frac{\epsilon_{Lr}^{i1}}{\omega} \sinh(\omega a_{(3)}) + s_{Lr}^{i1} \sinh(\omega a_{(3)}) - s_{L1} = 0 \quad (C.34)$$

$$a_{(4)} = \frac{1}{\omega \lambda} \arctan \frac{(s_{L0} - s_{L1}) \omega \lambda}{\epsilon_{Lr}^{i1} \cosh(\omega a_{(3)}) + s_{Lr}^{i1} \sinh(\omega a_{(3)})} \quad (C.35)$$

Aus dem Vergleich der Kenngrößen  $a_{(3)}$  und  $a_{(4)}$  mit der Elementlänge  $l_r^i$  sind die Komponenten des Zustandsvektors vollständig zu ermitteln.

Für  $l_r^i \leq a_{(3)}$  (ausschließlich elastisches Verbundverhalten) gilt:

$$s_{Lr}^{i2} = \frac{\epsilon_{Lr}^{i1}}{\omega} \sinh(\omega l_r^i) + s_{Lr}^{i1} \cosh(\omega l_r^i) \quad (C.36)$$

$$\epsilon_{Lr}^{i2} = \epsilon_{Lr}^{i1} \cosh(\omega l_r^i) + s_{Lr}^{i1} \omega \sinh(\omega l_r^i) \quad (C.37)$$

Für  $a_{(3)} < l_r^i \leq a_{(4)}$  folgt:

$$s_{Lr}^{i2} = \frac{\epsilon_{Lr}^{i1} \cosh(\omega a_{\textcircled{3}}) + s_{Lr}^{i1} \sinh(\omega a_{\textcircled{3}})}{\omega \lambda} \sin(\omega \lambda (l_r^i - a_{\textcircled{3}})) + (s_{L1} - s_{L0}) \sin(\omega \lambda (l_r^i - a_{\textcircled{3}})) + s_{L0} \quad (\text{C.38})$$

$$\epsilon_{Lr}^{i2} = (\epsilon_{Lr}^{i1} \cosh(\omega a_{\textcircled{3}}) + s_{Lr}^{i1} \sinh(\omega a_{\textcircled{3}})) \cos(\omega \lambda (l_r^i - a_{\textcircled{3}})) - (s_{L1} - s_{L0}) \omega \lambda \sin(\omega \lambda (l_r^i - a_{\textcircled{3}})) \quad (\text{C.39})$$

Sofern  $a_{\textcircled{3}} + a_{\textcircled{4}} < l_r^i$  gilt, d.h. sofern an Rissufer  $\textcircled{2}$  Verbundentkopplungen auftreten, ist  $\epsilon_{Lr}^{i2}$  mit Gl. (C.39) bei Substitution von  $(l_r^i - a_{\textcircled{3}})$  durch  $a_{\textcircled{4}}$  zu bestimmen. Die zugehörige Rissrelativverschiebung folgt nach Gl. (C.40).

$$s_{Lr}^{i2} = s_{L0} + \epsilon_{Lr}^{i2} (l_r^i - a_{\textcircled{3}} - a_{\textcircled{4}}) \quad (\text{C.40})$$

### Endverankerung des Klebarmierungsstranges

Zur Abbildung des Dehnungs-Relativverschiebungs-Verhaltens der Klebarmierung am auflagnächsten Riss werden numerische Verfahren auf Grundlage der schrittweisen Integration in Kombination mit Iterationsalgorithmen verwendet, um das gesamte Spektrum des  $\epsilon_{Lr}^{i2}$ - $s_{Lr}^{i2}$ -Zusammenhangs einschließlich lokaler Verbundentkopplungen und ggf. dadurch geschaffene Umlagerungsmöglichkeiten zur einbetonierten Bewehrung zu berücksichtigen (vgl. 6.4).

### C.1.2 Betonstahl

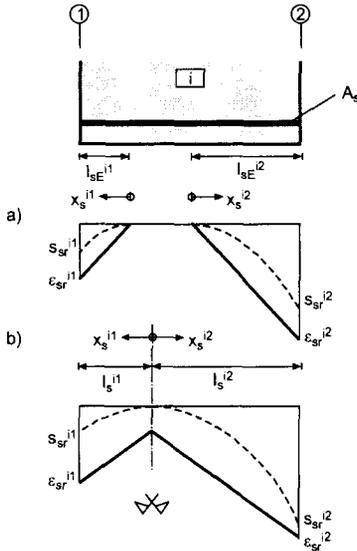
Im Rahmen der numerischen Modellierung eines gemischt bewehrten Elementes zwischen zwei Rissen wird - sofern eine gekoppelte Berechnung der beiden Bewehrungsstränge erforderlich ist - der Zustandsvektor  $\mathbf{Z}_L^i$  des Klebarmierungsstranges als Leitgröße zur Ermittlung der Dehnungen und Verschiebungen auf Elementebene verwendet. Zum einen reagiert der Klebarmierungsstrang aufgrund der beschränkten Verbundtragfähigkeit sensitiver auf Variationen der Eingangsgrößen bzw. der Dehnungsdifferenz  $\Delta \epsilon_L^i$  zwischen den beiden Elementrändern. Zum anderen sind aufgrund der endlichen Einleitungslängen der Betonstahlbewehrung bei geringen Beanspruchungen (Einzelrisszustand) die Zustandsgrößen der beiden Rissufer nicht miteinander verknüpft. Daher sind bei bekannten Koppelbedingungen  $k_x^{ij}$  und  $\Delta s_s^{ij}$  die Rissrelativverschiebungen  $s_{sr}^{ij}$  im Nachlauf zur Ermittlung des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_L^i$  bereits festgelegt. Die Berechnung der fehlenden Komponenten des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_s^i$  - namentlich  $\epsilon_{sr}^{ij}$ ,  $\epsilon_s^{i0}$  sowie die Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  - erfolgt anhand vorgegebener Größen  $s_{sr}^{ij}$ .

Vor dem Hintergrund rechenzeitintensiver Algorithmen wird zwischen glatter und gerippter Betonstahlbewehrung unterschieden. Für glatte Bewehrung können sowohl für den Einzelrisszustand als auch für sich überschneidende Einleitungslängen analytische Lösungen angegeben werden. Bei geripptem Betonstahl, der durch einen Verbundansatz nach 4.2.5 beschrieben wird, gelingt für den Einzelrisszustand eine analytische Lösung auf Grundlage des ansteigenden Astes (vgl. Noakowski 1978; Krips 1984). Für fortschreitende Rissbildung wird in (Krips 1984) eine analytische Beschreibung angegeben, die ebenfalls auf einer Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes beruht, allerdings eine bekannte Lösung für die Erstrissbildung voraussetzt. Generell ist die numerische Umsetzung der von Krips angegebenen Lösungen gegenüber einer auf Energiebetrachtungen basierenden Vorgehensweise (s.u.) ohne signifikanten Vorteil. Für die Abbildung sich überschneidender Einleitungslängen wird für gerippten Betonstahl daher auf numerische Verfahren zurückgegriffen, zumal dadurch eine Beschränkung auf den ansteigenden Ast des Verbundansatzes aufgehoben wird.

### Glatte Betonstahl

Die Verknüpfung von Relativverschiebungen und Dehnungen folgt unmittelbar aus der Lösung der DGL des verschieblichen Verbundes für konstante, verschiebungsunabhängige Verbundspannungen  $\tau_s$ . Vorgegebene Rissrelativverschiebungen  $s_{sr}^{ij}$  erfordern zunächst eine Unterscheidung nach Einzelrissbildung bzw. sich überschneidenden Einleitungslängen.

Sofern sich die Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  nicht berühren, gelten die Randbedingungen (C.41) und (C.42), die Einleitungslängen sind mit Gl. (C.43) gegeben (Abb. C.3)<sup>3</sup>.



$$\epsilon_s(x_s^{ij} = 0) = \epsilon_s^{i0} = 0 \quad (C.41)$$

$$s_s(x_s^{ij} = 0) = 0 \quad (C.42)$$

$$l_{se}^{ij} = \sqrt{\frac{E_s d_s \cdot s_{sr}^{ij}}{8\tau_s}} \quad (C.43)$$

**Abbildung C.3.** Dehnungs- und Verschiebungszustand glatten Betonstahls - Einzelrissbildung und überschneidende Einleitungslängen

Der Einzelrisszustand - damit voneinander unabhängige Dehnungen und Relativverschiebungen der beiden Elementränder - liegt vor, wenn Bedingung (C.44) erfüllt ist. Die Betonstahldehnungen an den Rissufren folgen dann Gl. (C.45).

$$\sum_{j=1}^2 l_{se}^{ij} \leq l_r^i \quad (C.44)$$

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \sqrt{\frac{8\tau_s \cdot s_{sr}^{ij}}{E_s d_s}} \quad (C.45)$$

Sofern Bedingung (C.44) nicht erfüllt ist, überschneiden sich die Einleitungslängen; die Dehnungen und Relativverschiebungen der beiden Elementränder sind miteinander verknüpft. Zur Bestimmung der Elemente des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_s^i$  wird die Verknüpfung über die Ruhepunktsdehnung  $\epsilon_s^{i0}$  nach Gl. (C.46) zusammen mit Gl. (C.47) genutzt.

$$\epsilon_s^{i0} = \frac{s_{sr}^{i1}}{l_s^{i1}} - \frac{2\tau_s l_s^{i1}}{E_s d_s} = \frac{s_{sr}^{i2}}{l_s^{i2}} - \frac{2\tau_s l_s^{i2}}{E_s d_s} \quad (C.46)$$

$$l_s^{i1} + l_s^{i2} = l_r^i \quad (C.47)$$

Aus den Gln. (C.46) und (C.47) können die Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  eindeutig als Nullstelle eines kubischen Polynoms im Intervall  $[0, l_r^i]$  ermittelt werden (z.B. Gl. C.48 auf  $l_s^{i2}$  bezogen).

$$4\tau_s (l_s^{i2})^3 - 6\tau_s l_r^i (l_s^{i2})^2 + [2\tau_s (l_r^i)^2 - (s_{sr}^{i1} + s_{sr}^{i2}) E_s d_s] l_s^{i2} + s_{sr}^{i2} E_s d_s l_r^i = 0 \quad (C.48)$$

Mit bekannten Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  folgen die Betonstahldehnungen an den Elementrändern Gl. (C.49).

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \frac{s_{sr}^{ij}}{l_s^{ij}} + \frac{2\tau_s l_s^{ij}}{E_s d_s} \quad (C.49)$$

<sup>3</sup> Die dem Einzelrisszustand zugeordneten Einleitungslängen werden hier mit „e“ indiziert.

### Gerippter Betonstahl

Die Berechnung des Zustandsvektors  $\mathbf{Z}_s^i$  folgt dem für glatten Betonstahl dargestellten Schema. Soweit möglich, wird auf analytische Lösungen der DGL des verschieblichen Verbundes zurückgegriffen.

Sofern sich die Einleitungslängen  $l_s^{ij}$  nicht berühren, gelten die Randbedingungen (C.41) und (C.42). Aus Energiebetrachtungen folgt unmittelbar die Rissdehnung  $\epsilon_{sr}^{ij}$  der Betonstahlbewehrung nach Gl. (C.50); sofern lediglich der ansteigende Ast des Verbundansatzes genutzt wird, gilt Gl. (C.51). Die jeweils zugehörige Einleitungslänge des Einzelrisszustandes ist nicht über Energiebetrachtungen abzuleiten; für den ansteigenden Ast der  $\tau_s$ - $s_s$ -Beziehung ist eine explizite Lösung auf Basis der DGL in Abhängigkeit der Rissdehnung anzugeben (vgl. Noakowski 1978) Gl. (C.52).

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \sqrt{\frac{8G_b}{E_s d_s}} \quad (\text{C.50})$$

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \sqrt{\frac{8A\sqrt{f_c}(s_{sr}^{ij})^{(N+1)}}{(N+1)E_s d_s}} \quad (\text{C.51})$$

$$l_{se}^{ij} = \frac{2}{1-N} \left[ \frac{(\epsilon_{sr}^{ij})^{(1-N)}(N+1)E_s d_s}{8A\sqrt{f_c}} \right]^{\frac{1}{1+N}} \quad (\text{C.52})$$

Sofern die Einzelriss-Bedingung (C.44) nicht erfüllt ist, überschneiden sich die Einleitungslängen; Randbedingung (C.41) verliert damit seine Gültigkeit. Die Betonstahldehnung an den Elementrändern ergibt sich Energiebetrachtungen folgend nach Gl. (C.53), speziell bei alleiniger Nutzung des ansteigenden Astes nach Gl. (C.54).

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \sqrt{\frac{8G_b}{E_s d_s} + (\epsilon_s^{i0})^2} \quad (\text{C.53})$$

$$\epsilon_{sr}^{ij} = \sqrt{\frac{8A\sqrt{f_c}(s_{sr}^{ij})^{(N+1)}}{(N+1)E_s d_s} + (\epsilon_s^{i0})^2} \quad (\text{C.54})$$

Die zur vollständigen Lösung erforderliche Verknüpfung der Elemente  $\epsilon_{sr}^{ij}$  und  $s_{sr}^{ij}$  erfordert die Kenntnis der Ruhepunktsdehnung  $\epsilon_s^{i0}$ , die an die zugehörige Einleitungslänge  $l_s^{ij}$  gekoppelt ist.

Da  $\epsilon_s^{i0}$  nicht aus Energiebetrachtungen herzuleiten ist, wird im Rahmen der numerischen Abbildung vorab für mögliche Kombinationen ( $s_{sr}^{ij}/l_s^{ij}$ ) die eindeutig zuzuordnende Größe  $\epsilon_s^{i0}$  ermittelt und in Form einer Verbundmatrix in der Datenbasis abgelegt. Die Berechnung des Dehnungs- und Verschiebungszustandes der Betonstahlbewehrung bei vorgegebenen Relativverschiebungen an den Elementrändern erfolgt iterativ über eine Variation der Einleitungslängen  $l_s^{ij}$ .

## C.2 Zusammenstellung von Eingangsdaten zur Versuchsnachrechnung

In Tab. C.1 werden die der Nachrechnung bzw. dem Vergleich mit rechnerischen Rissabständen zugrunde gelegten Kennwerte der Versuche an klebarmierten Biegebauteilen zusammengefasst. Die in Tab. C.1 verwendeten Bezeichnungen werden in Abb. C.4 erläutert; die Größen werden in folgenden Einheiten angegeben:

Materialkenngrößen	MPa
Abmessungen	mm
Versagenslast $F_u$	kN

Darüber hinaus bedeuten folgende Kennzeichnungen:

r	gerippter Betonstahl
g	glatter Betonstahl
c	CFK-Lamellen
s	Stahllaschen

Der in Tab. C.1 unter  $s_{cr}$  angegebene Rissabstand bezeichnet den Mittelwert der Rissabstände im Bereich  $M \approx \text{const.}$

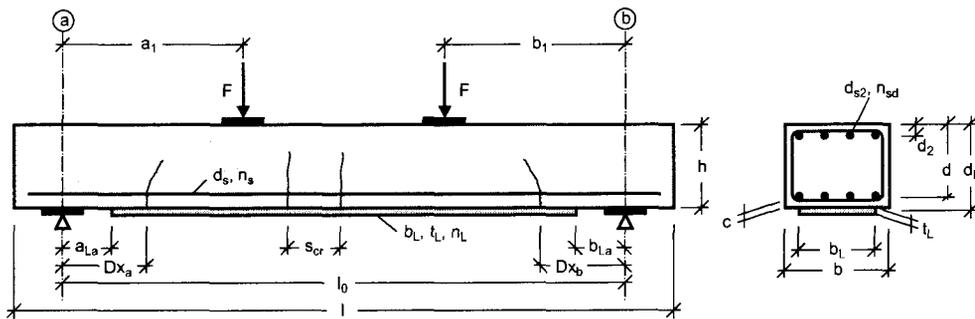


Abbildung C.4. Bezeichnungen

Tabelle C.1. Kennwerte der Versuche an biegebeanspruchten Bauteilen

Quelle	Bez.	QS	Geometrie							
			Querschnitt				Lamelle		Last	
			l	b	h	l <sub>0</sub>	a <sub>La</sub>	b <sub>La</sub>	a <sub>1</sub>	b <sub>1</sub>
Zilch u.a. 2000	bb1	RE	5500	300	500	5250	175	175	2125	2125
	bb2	RE	5500	300	500	5150	125	125	2075	2075
	bpl1	RE	5500	900	160	5250	175	175	2125	2125
	bpl2	RE	5500	900	160	5100	100	100	2050	2050
	sb1	Plaba	3150	500	450	3000	125	125	1000	1000
	sb3	Plaba	4150	500	450	3950	100	100	1475	1475
	sb4	Plaba	3150	500	450	2950	100	100	975	975
Neubauer 2000	Sika P1	RE	4500	500	150	4000	0	100	1400	1400
	Sika P2	RE	4500	500	150	4000	0	100	1400	1400
	Sika P3	RE	4500	500	150	4000	0	100	1400	1400
	lspo P1	RE	3000	500	150	2600	0	100	900	900
	lspo P2	RE	3000	500	150	2600	0	100	900	900
Ulaga und Meier 2002	PS1	RE	2300	500	200	2100	50	50	810	810
	PS2	RE	2300	500	200	2100	50	50	810	810
	PS4	RE	2300	500	200	2100	50	50	810	810
Zilch u.a. 1998	BALK-A1	RE	3000	350	150	2500	0	0	910	910
	BALK-A3	RE	3000	350	150	2500	0	0	1250	1250
	BALK-B1	RE	3000	150	350	2500	0	0	1250	1250
Rostásy und Holzenkämpfer 1989	DB04	RE	3700	200	270	3000	450	250	1250	1250
	DB06	RE	3700	200	270	3000	150	150	1250	1250
	DB08	RE	3700	200	270	3000	150	50	1250	1250
	DB09	RE	3700	200	270	3000	550	350	1250	1250
	DB10	RE	3700	200	270	3000	450	250	1250	1250
	SB01	RE	3700	200	270	3000	250	50	1250	1250
	SB02	RE	3700	200	270	3000	250	50	1250	1250
	SB03	RE	3700	200	270	3000	250	50	1250	1250
	SB04	RE	3700	200	270	3000	250	50	1250	1250
	SB05	RE	3700	200	270	3000	250	50	950	950
	SB06	RE	3700	200	270	3000	250	50	950	950
Seim u.a. 2000	SF1	RE	4500	950	203	4170	460	460	1885	1885
	SF2	RE	4500	950	203	4170	460	460	1885	1885
	SF15	RE	4500	950	203	4170	460	460	1885	1885
	SF4	RE	4500	950	203	4170	460	460	1885	1885
	SF5	RE	4500	950	203	4170	278	278	1585	1585
	SF6	RE	4500	950	203	4170	278	278	1585	1585
Jansze 1997	bm1	RE	2500	100	200	2400	100	100	800	800
HILTI 1991	b3	RE	4600	300	200	4600	250	250	1050	1050
Matthys 2000	b'2	RE	4600	200	450	3800	70	70	1250	1250
	b'3	RE	4600	200	450	3800	70	70	1250	1250
	b'8	RE	4600	200	450	3800	70	70	1250	1250
eigene Versuche	B2-01-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-02-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-03-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-04-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-05-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-06-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-07-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-08-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-09-B2C	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-10-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-11-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000
	B2-12-B2S	RE	4800	300	150	4500	100	100	2000	2000

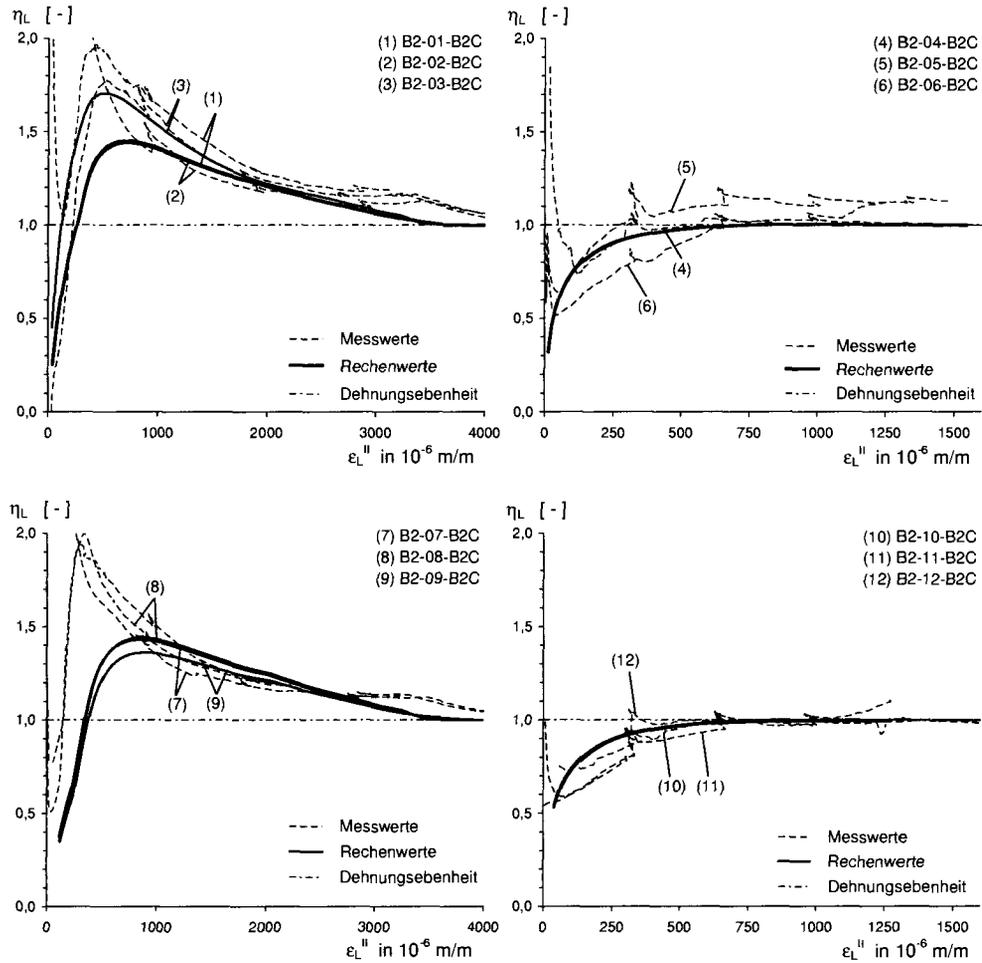
Fortsetzung Tabelle C.1

Quelle	Bez.	Geometrie											
		Betonstahl				Klebarmierung				Druckbewehrung			
		d	d <sub>s</sub>	c	n <sub>s</sub>	d <sub>L</sub>	l <sub>L</sub>	b <sub>L</sub>	t <sub>L</sub>	n <sub>L</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>a2</sub>	n <sub>ad</sub>
Zlich u.a. 2000	bb1	451	28	35	3	509	4900	201	15,0	1	60	12	2
	bb2	451	28	35	3	509	4900	200	15,0	1	60	12	2
	bpl1	129	12	25	6	164	4900	80	5,0	2	-	-	-
	bpl2	129	12	25	6	164	4900	80	5,0	2	18	6	2
	sb1	405	20	35	4	454	2750	150	6,0	1	40	8	4
	sb3	388	20	35	8	454	3750	150	6,0	1	40	8	4
	sb4	405	20	35	4	454	2750	150	6,0	1	40	8	4
Neubauer 2000	Sika P1	127	6	20	6	152	3900	50	1,2	1	23	6	2
	Sika P2	125	10	20	4	152	3900	50	2,4	1	23	6	2
	Sika P3	127	6	20	6	154	3900	50	6,0	1	23	6	2
	lspo P1	126	8	20	7	152	2500	50	1,4	2	23	6	2
	lspo P2	126	8	20	7	152	2500	50	1,4	2	23	6	2
Uлага und Meier 2002	PS1	158	8	38	5	202	2000	50	1,2	2	42	8	3
	PS2	158	8	38	5	202	2000	50	1,2	2	42	8	3
	PS4	158	8	38	5	202	2000	50	1,2	2	42	8	3
Zlich u.a. 1998	BALK-A1	122	6	25	3	152	2500	50	1,2	1	28	6	3
	BALK-A3	122	6	25	3	152	2500	50	1,4	1	28	6	3
	BALK-B1	322	6	25	2	352	2500	50	1,2	1	28	6	2
Rostásy und Holzenkämpfer 1989	DB04	240	10	20	2	274	2300	80	5,0	1	23	5	2
	DB06	240	10	20	2	274	2700	40	6,1	1	23	5	2
	DB08	240	10	20	2	275	2800	40	8,0	1	23	5	2
	DB09	240	10	20	2	273	2100	39	4,0	1	23	5	2
	DB10	240	10	20	2	272	2300	79	3,0	1	23	5	2
	SB01	240	10	20	2	275	2700	60	7,9	1	23	5	2
	SB02	240	10	20	2	273	2700	120	3,9	1	23	5	2
	SB03	240	10	20	2	276	2700	40	10,0	1	23	5	2
	SB04	240	10	20	2	274	2700	80	5,0	1	23	5	2
	SB05	240	10	20	2	276	2700	40	10,0	1	23	5	2
	SB06	240	10	20	2	274	2700	80	5,0	1	23	5	2
Seim u.a. 2000	SF1	168	19	25	3	205	3250	100	1,3	2	-	-	-
	SF2	167	22	25	2	205	3250	100	1,3	2	-	-	-
	SF15	172	13	25	7	205	3250	100	1,3	2	-	-	-
	SF4	168	19	25	3	205	3250	50	1,3	4	-	-	-
	SF5	168	19	25	3	205	3610	100	1,3	2	-	-	-
	SF6	167	22	25	2	205	3610	100	1,3	2	-	-	-
Jansze 1997	bm1	169	8	25	2	204	2200	100	5,0	1	25	8	2
HILTI 1991	b3	174	8	26	3	205	4100	50	8,0	1	25	8	3
Matthys 2000	bf2	409	16	33	4	452	3660	100	1,2	1	-	-	-
	bf3	409	16	33	4	452	3660	100	1,2	1	-	-	-
	bf8	409	16	33	2	452	3660	100	1,2	1	-	-	-
eigene Versuche	B2-01-B2C	121	12	30	2	155	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-02-B2C	120	12	30	2	155	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-03-B2C	125	12	30	2	155	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-04-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2
	B2-05-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2
	B2-06-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2
	B2-07-B2C	123	12	30	2	155	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-08-B2C	118	12	30	2	147	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-09-B2C	118	12	30	2	155	4300	50	1,3	1	25	8	2
	B2-10-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2
	B2-11-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2
	B2-12-B2S	120	12	30	2	155	4300	80	5,2	1	25	8	2

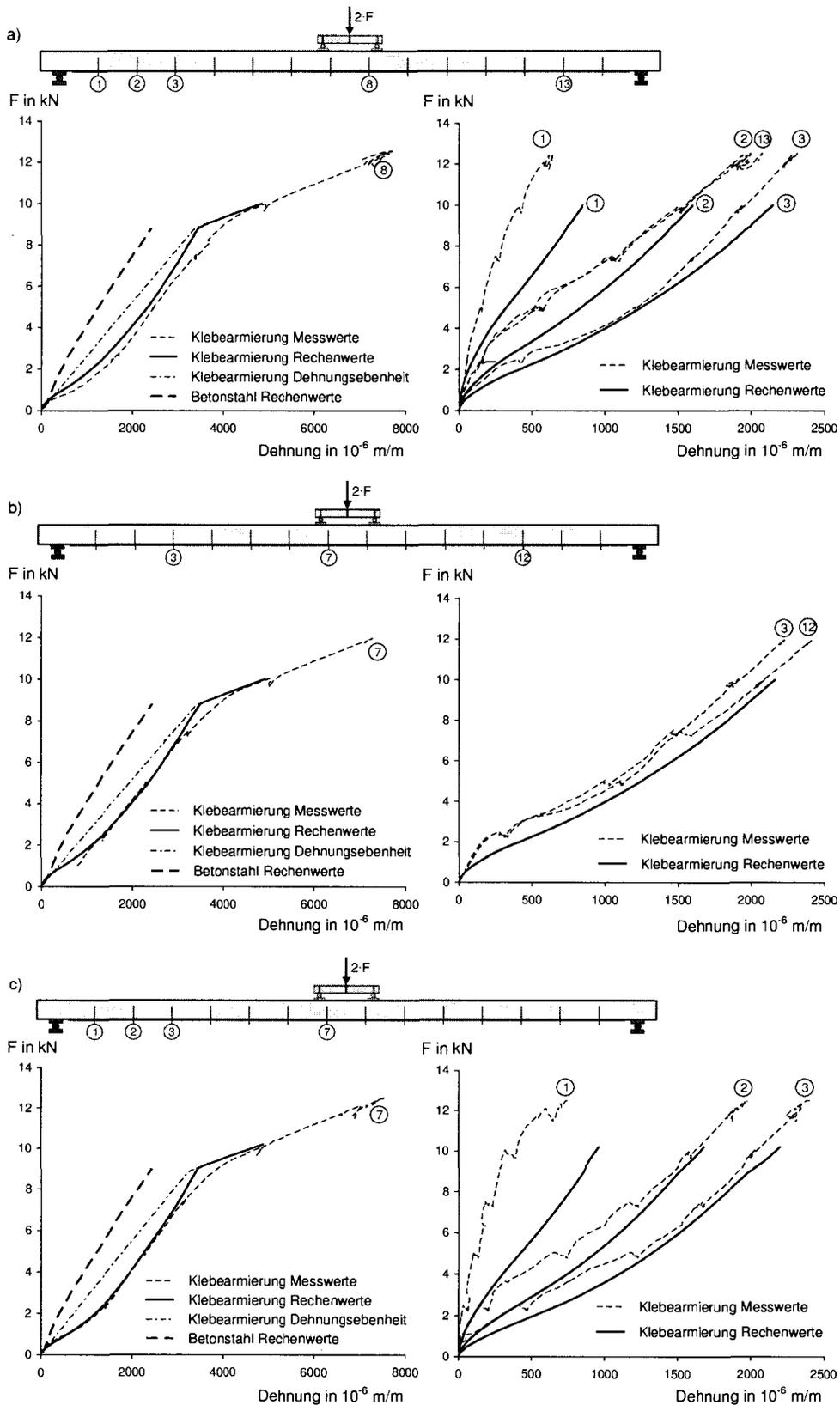
Fortsetzung Tabelle C.1

Quelle	Bez.	Beton			Material						Rissbild			F <sub>u</sub>
		f <sub>cm</sub>	f <sub>ctm</sub>	E <sub>cm</sub>	E <sub>s</sub>	f <sub>sy</sub>	g   r	E <sub>L</sub>	f <sub>Ly</sub>   f <sub>Lu</sub>	c   s	Dx <sub>a</sub>	Dx <sub>b</sub>	s <sub>cr</sub>	
Zilch u.a. 2000	bb1	34,0	3,45	30776	200953	564	r	205052	317	s	203	203	120	162,7
	bb2	36,5	2,40	31513	200953	564	r	205052	317	s	325	325	150	157,5
	bpl1	33,4	3,52	30594	204228	554	g	206504	355	s	537	502	110	28,3
	bpl2	31,8	3,23	30098	204228	554	g	196100	336	s	520	520	140	31,5
	sb1	35,8	2,71	31310	200214	568	r	205900	321	s	544	639	110	155
	sb3	33,7	3,27	30686	200214	568	r	205900	321	s	305	264	87	246
	sb4	33,4	2,70	30594	200214	568	r	205900	321	s	262	317	123	183
Neubauer 2000	Sika P1	22,6	1,37	26859	204763	564	r	180984	2891	c	420	420	127	13
	Sika P2	35,7	2,42	31281	197973	519	r	180984	2891	c	420	420	110	23
	Sika P3	22,6	1,69	26859	204763	564	r	205459	452	s	420	420	118	16,4
	lspo P1	31,3	1,55	29939	200821	619	r	148864	1860	c	222	351	76	44,6
	lspo P2	31,3	1,99	29939	200821	619	r	205517	2681	c	265	204	71	51,4
Ulaga und Meier 2002	PS1	36,2	2,88	31426	200000	554	r	131000	2248	c	382	390	107	55
	PS2	36,2	2,88	31426	200000	554	r	165000	2800	c	410	440	91	63,5
	PS4	36,2	2,88	31426	200000	554	r	131000	2248	c	396	370	95	55
Zilch u.a. 1998	BALK-A1	23,0	1,27	27017	200000	240	g	169100	3140	c	430		130	10,97
	BALK-A3	26,5	2,37	28323	200000	240	g	218700	2680	c	420		100	10
	BALK-B1	37,1	1,69	31685	200000	240	g	169100	3140	c	610		140	21,48
Rostásy und Holzenkämpfer 1989	DB04	42,3	3,10	28600	198000	604	r	210000	327	s	450	250	119	62,7
	DB06	39,0	3,10	27100	198000	604	r	203000	330	s	150	150	73	69
	DB08	40,7	3,10	27500	198000	604	r	205000	338	s	184	71	99	57,5
	DB09	40,7	3,10	26200	198000	604	r	206000	329	s	563	350	113	32,5
	DB10	39,0	3,10	25700	198000	604	r	220000	282	s	337	246	96	67,1
	SB01	40,7	3,10	29400	198000	584	r	200000	297	s	328	494	83	75
	SB02	36,5	3,10	28000	198000	584	r	210000	293	s	198	498	78	90
	SB03	36,5	3,10	28200	198000	584	r	200000	278	s	254	856	96	50
	SB04	39,8	3,10	27100	198000	584	r	200000	317	s	250	144	89	75
	SB05	43,2	3,10	29200	198000	584	r	200000	278	s	250	139	120	57,5
	SB06	40,7	3,10	28800	198000	584	r	200000	317	s	250	561	100	70
Seim u.a. 2000	SF1	31,6	3,16	30034	202200	451	r	179200	2221	c	468		116	64
	SF2	31,5	3,15	30003	206200	452	r	179200	2221	c	428		150	66
	SF15	33,3	3,27	30564	208700	457	r	179200	2221	c	420		125	67
	SF4	33,4	3,28	30594	202200	451	r	192000	2300	c	370		100	65
	SF5	35,2	3,39	31134	202200	451	r	179100	2663	c	255		156	72
	SF6	34,5	3,35	30938	206200	452	r	179200	2221	c	630		194	73,5
Jansze 1997	bm1	42,8	3,22	33231	200000	550	r	200000	300	s	100	100	67	34,3
HILTI 1991	b3	48,3	3,49	34591	200000	550	r	200000	300	s	410	620	106	31,5
Matthys 2000	bf2	36,5	2,80	31513	200000	500	r	159000	3200	c	114	114	74	185
	bf3	34,9	2,69	31046	200000	500	r	159000	3200	c	462	148	63	186
	bf8	39,4	2,99	32326	200000	500	r	159000	3200	c	309	220	69	111,3
eigene Versuche	B2-01-B2C	51,5	2,76	35336	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	25,08
	B2-02-B2C	51,5	2,71	35336	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	23,96
	B2-03-B2C	43,7	3,83	33451	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	25,02
	B2-04-B2S	52,6	3,63	35600	204730	555	g	203400	378	s	300	300	100	32,23
	B2-05-B2S	51,0	3,71	35240	204730	555	g	203400	378	s	300	300	100	32,97
	B2-06-B2S	53,6	3,35	35823	204730	555	g	206790	301	s	300	300	100	28,95
	B2-07-B2C	56,8	3,19	36512	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	24,73
	B2-08-B2C	57,5	3,38	36671	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	21,75
	B2-09-B2C	57,5	2,85	36671	204730	555	g	159530	2800	c	300	300	150	24,99
	B2-10-B2S	54,9	3,08	36116	204730	555	g	203400	378	s	300	300	150	34,12
	B2-11-B2S	53,0	3,01	35693	204730	555	g	206790	301	s	300	300	120	29,35
	B2-12-B2S	54,4	1,79	36007	204730	555	g	206790	301	s	300	300	150	28,98

### C.3 Gegenüberstellung von Versuchsergebnissen und Rechenwerten



**Abbildung C.5.** Vergleich zwischen gemessenen Werten und Rechenwerten der bezogenen Dehnung der Klebarmierung  $\eta_L$  für die Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen

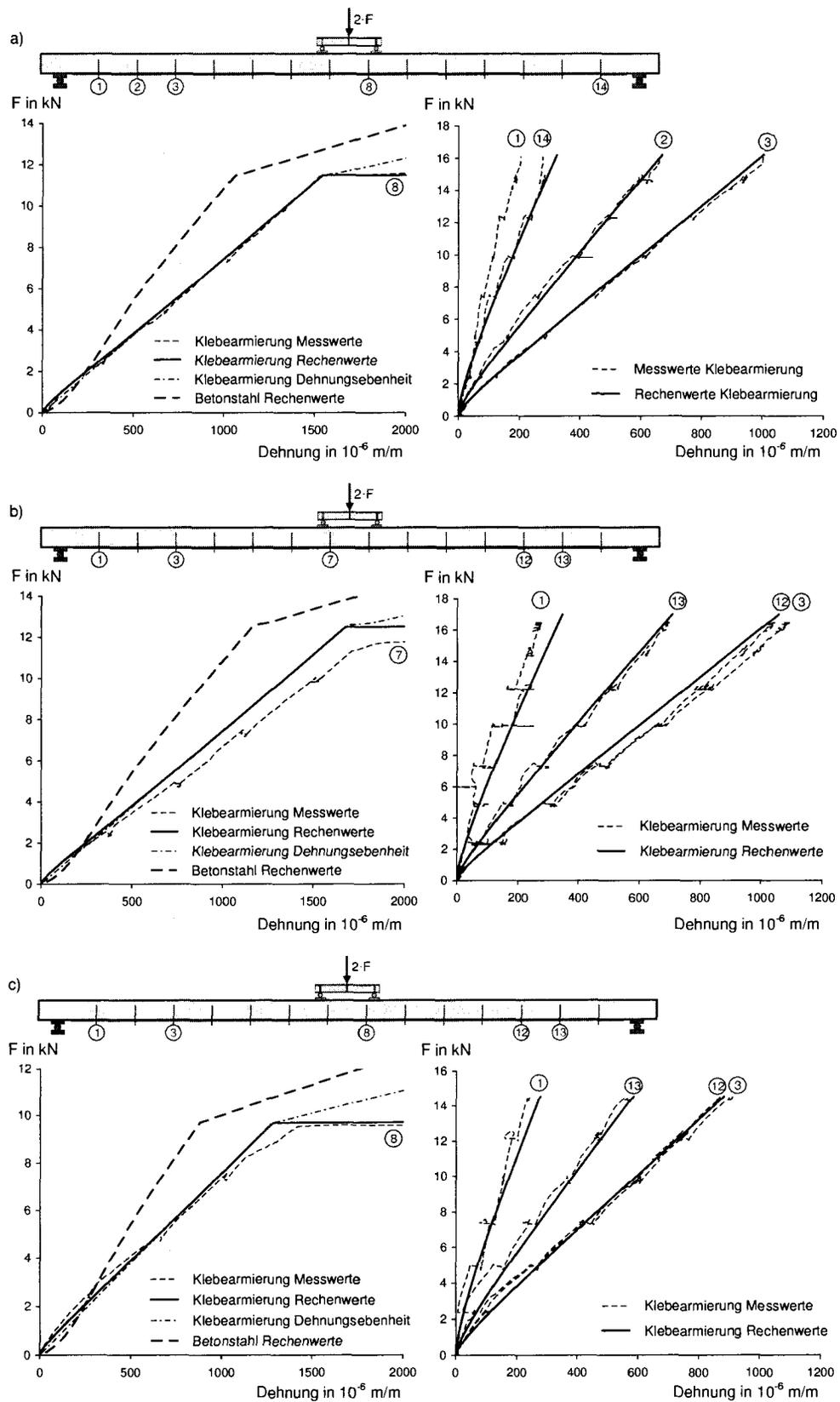


**Abbildung C.6.** Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen;

a) Versuch B2-01-B2C

b) Versuch B2-02-B2C

c) Versuch B2-03-B2C



**Abbildung C.7.** Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen;  
 a) Versuch B2-04-B2S  
 b) Versuch B2-05-B2S  
 c) Versuch B2-06-B2S

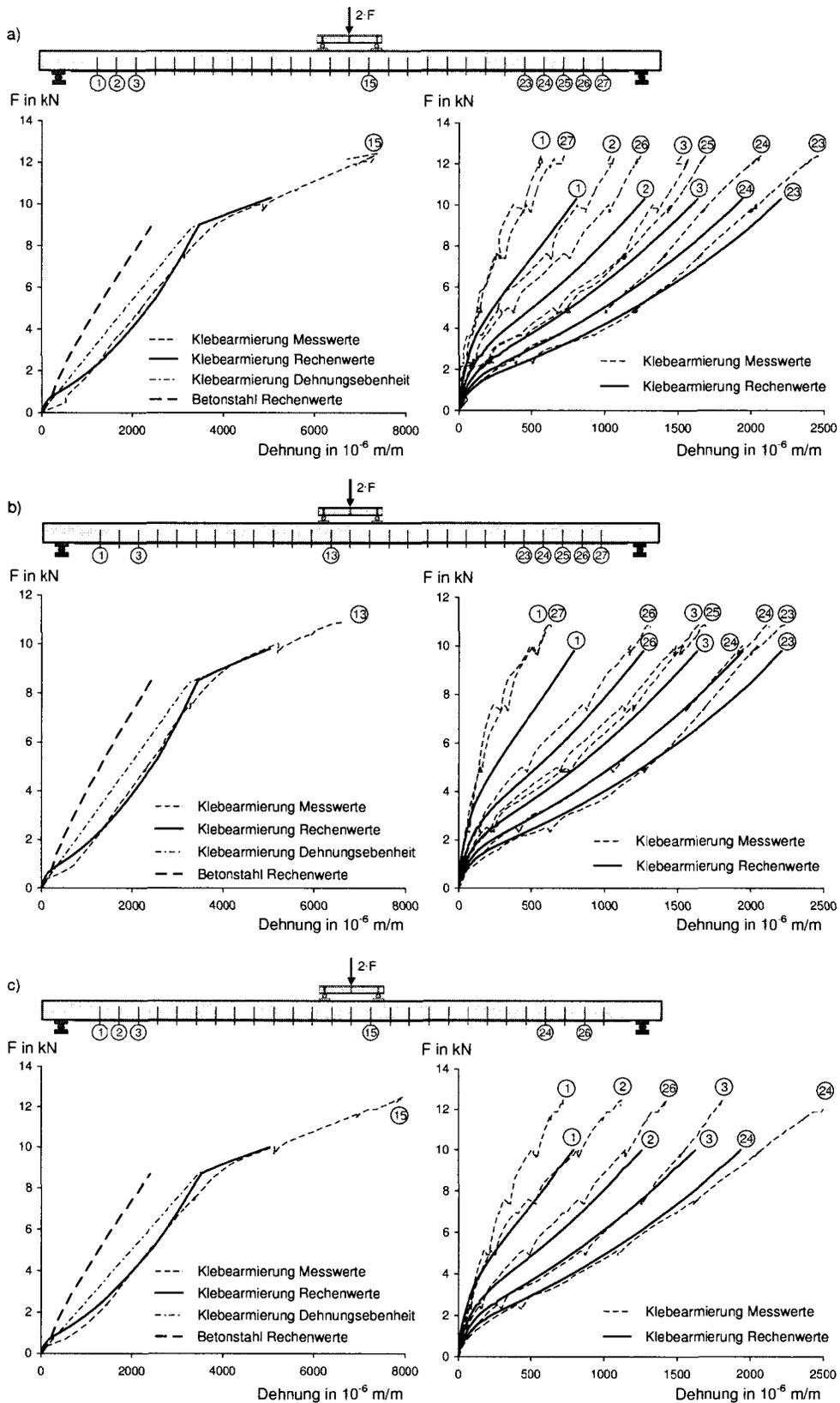


Abbildung C.8. Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen;

a) Versuch B2-07-B2C

b) Versuch B2-08-B2C

c) Versuch B2-09-B2C

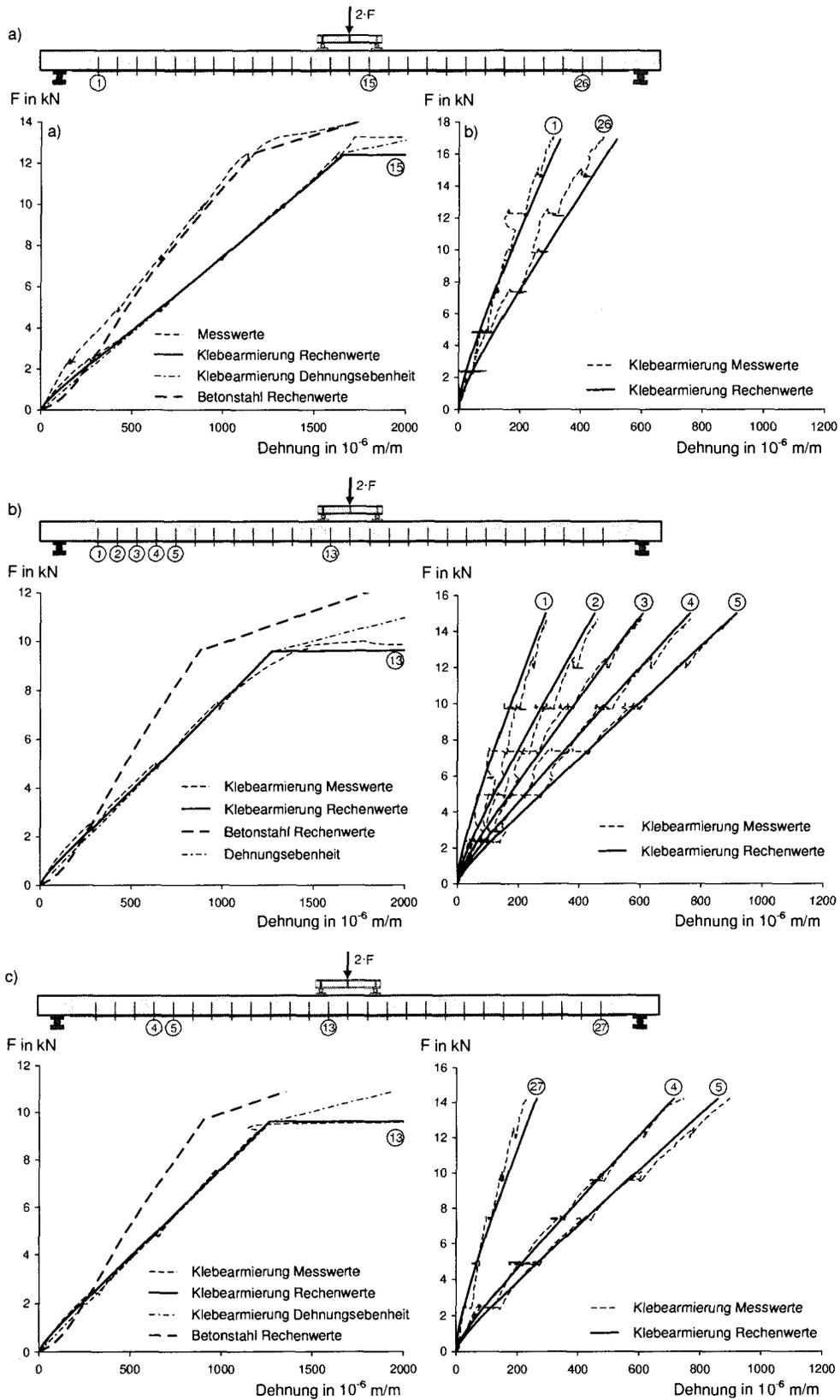


Abbildung C.9. Versuche an biegebeanspruchten Plattenstreifen;

- a) Versuch B2-10-B2S
- b) Versuch B2-11-B2S
- c) Versuch B2-12-B2S

# D

---

## Betonkenngrößen - Bezeichnungen, Umrechnung

### D.1 Betondruckfestigkeit

#### Kenngößen

$\beta_{w,200}$	Betondruckfestigkeit, ermittelt an einem Würfel der Kantenlänge 200 mm; Lagerung und Prüfung nach (DIN 1048-5 1996) (7 Tage Feuchtlagerung, anschließend Lagerung in Normklima)
$\beta_{w,150}$	Betondruckfestigkeit, ermittelt an einem Würfel der Kantenlänge 150 mm; Lagerung und Prüfung nach (DIN 1048-5 1996) (7 Tage Feuchtlagerung, anschließend Lagerung in Normklima)
$f_{c,cube}$	Betondruckfestigkeit, ermittelt an einem Würfel der Kantenlänge 150 mm; Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001) (Feuchtlagerung bis zur Prüfung)
$f_{c,dry}$	Betondruckfestigkeit, ermittelt an einem Würfel der Kantenlänge 150 mm; Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001, Anhang NA) (7 Tage Feuchtlagerung, anschließend Lagerung in Normklima)
$f_{c,cyl}$	Betondruckfestigkeit, ermittelt an einem Zylinder mit $d/h = 150 \text{ mm}/300 \text{ mm}$ ; Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001) (Feuchtlagerung bis zur Prüfung)
$f_{ck}$	charakteristischer Wert (5%-Quantil) der an einem Zylinder mit $d/h = 150 \text{ mm}/300 \text{ mm}$ ermittelten Druckfestigkeit; Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001) (Feuchtlagerung bis zur Prüfung)
$f_{ck,cube}$	charakteristischer Wert (5%-Quantil) der an einem Würfel der Kantenlänge 150 mm ermittelten Druckfestigkeit; Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001) (Feuchtlagerung bis zur Prüfung)

#### Einflussgrößen und Umrechnung

- Einfluss der Probekörpergröße auf die Würfeldruckfestigkeit nach (Schickert 1981) bzw. (DIN 1045 1988):

$$\beta_{w,200} = 0,95 \cdot \beta_{w,150} \quad \text{bzw.} \quad f_{c,cube,200} = 0,95 \cdot f_{c,cube,150} \quad (\text{D.1})$$

- Einfluss der Lagerungsart auf die Würfeldruckfestigkeit nach (DIN-FB 100 2001) bzw. (DIN 1045-2 2001) in Verbindung mit (DIN EN 206-1 2001):

$$f_{c,cube} = 0,92 \cdot f_{c,dry} \quad (\text{D.2})$$

- Einfluss der Probekörpergestalt; Umrechnung von Würfel- auf Zylinderdruckfestigkeiten nach (Bonzel 1959) bzw. (Feix 1993) unter Voraussetzung der Lagerung nach (DIN EN 12390-2 2001):

$$f_{c,cube} = 1,20 \cdot f_{c,cyl} \quad (D.3)$$

- Beziehung zwischen dem charakteristischen Wert der Druckfestigkeit und dem Mittelwert nach (DIN 1045-1 2001):

$$f_{cm,cyl} = f_{c,cyl} = f_{ck} + \Delta f \quad \text{mit} \quad \Delta f = 8 \text{ MPa} \quad (D.4)$$

### Umrechnung von Kenngrößen zur Auswertung von Versuchen

Für einen Vergleich von Druckfestigkeitskenngrößen bzw. für den Vergleich von Versuchsergebnissen im Rahmen einer Auswertung von Versuchsdaten ist unter der Voraussetzung, dass die Probekörper in gleicher Weise wie die Versuchskörper gelagert wurden, eine Berücksichtigung unterschiedlicher normenspezifischer Lagerungsverhältnisse nicht erforderlich. Die Umrechnung verschiedener Kennwerte kann nach folgenden Zusammenhängen erfolgen.

$$\beta_{w,200} \rightarrow f_{c,cube} \quad \text{nach Gl. (D.1)} \quad f_{c,cube} = 1,05 \cdot \beta_{w,200}$$

$$\beta_{w,200} \rightarrow f_{c,cyl} \quad \text{nach den Gln (D.1)(D.3)} \quad f_{c,cyl} = 0,87 \cdot \beta_{w,200}$$

$$\beta_{w,150} \rightarrow f_{c,cube} \quad f_{c,cube} = 1,00 \cdot \beta_{w,150}$$

$$\beta_{w,150} \rightarrow f_{c,cyl} \quad \text{nach Gl. (D.3)} \quad f_{c,cyl} = 0,83 \cdot \beta_{w,150}$$

### Umrechnung von Kenngrößen zum Vergleich von Bemessungsansätzen

Sofern Bemessungsansätze auf Kenngrößen aufbauen, die an gesondert hergestellten Probekörpern nach (DIN 1048-5 1996) bzw. (DIN EN 12390-2 2001) ermittelt werden, müssen für die Umrechnung der Kennwerte im Rahmen eines Vergleichs von Bemessungsansätzen neben Größen- und Gestaltabhängigkeiten auch die Einflüsse unterschiedlicher Lagerungsbedingungen berücksichtigt werden. Folgende Beziehungen werden angenommen:

$$\beta_{w,200} \rightarrow f_{c,cube} \quad \text{nach den Gln. (D.1)(D.2)} \quad f_{c,cube} = 0,97 \cdot \beta_{w,200}$$

$$\beta_{w,200} \rightarrow f_{c,cyl} \quad \text{nach den Gln. (D.1)(D.2)(D.3)} \quad f_{c,cyl} = 0,81 \cdot \beta_{w,200}$$

$$\beta_{w,150} \rightarrow f_{c,cube} \quad \text{nach Gl. (D.2)} \quad f_{c,cube} = 0,92 \cdot \beta_{w,150}$$

$$\beta_{w,150} \rightarrow f_{c,cyl} \quad \text{nach den Gln. (D.2)(D.3)} \quad f_{c,cyl} = 0,77 \cdot \beta_{w,150}$$

Werden die genannten Faktoren zur Umrechnung von Quantilwerten der Druckfestigkeitskenngrößen ( $\beta_{WN} \rightarrow f_{ck}$ ) verwendet, ergeben sich die in (Hartz 2002) angegebenen Beziehungen zwischen Betongütern nach (DIN 1045 1988) und Festigkeitsklassen nach (DIN 1045-2 2001).

## D.2 Betonzugfestigkeit

### Kenngrößen

$\beta_{oz}$	Oberflächenzugfestigkeit; ermittelt nach (DIN 1048-2 1991); Bezeichnung nach (DIN 1045 1988)
$\beta_z$	zentrische Zugfestigkeit; Bezeichnung nach (DIN 1045 1988)
$\beta_{bz}$	Biegezugfestigkeit; ermittelt im Vierpunkt-Biegezugversuch an Betonprismen nach (DIN 1048-5 1996)
$f_{ct}$	einachsiale, zentrische Zugfestigkeit; Bezeichnung nach (DIN 1045-1 2001)
$f_{ctm}$	Mittelwert der einachsialen zentrischen Zugfestigkeit; Bezeichnung nach (DIN 1045-1 2001)
$f_{ct,sp}$	Spaltzugfestigkeit; ermittelt an Zylindern $d/h = 150 \text{ mm}/300 \text{ mm}$
$f_{ct,fl}$	Biegezugfestigkeit; ermittelt im Vierpunkt-Biegezugversuch an Betonprismen nach (DIN 1048-5 1996)

### Ableitung der Zugfestigkeit aus Druckfestigkeitskenngrößen

Die Umrechnungsbeziehungen zwischen den Kenngrößen der Zugfestigkeit werden in 4.1.2 erläutert. Spezifische Beziehungen zwischen den Kenngrößen nach (DIN 1045 1988) und (DIN 1045-1 2001) erübrigen sich.

Dem allgemeinen Sprachgebrauch folgend, wird der als Eingangsgröße der Verbundmodelle für aufgeklebte Bewehrung verwendete Mittelwert der Oberflächenzugfestigkeit nach (DIN 1048-2 1991) mit  $f_{ctm}$  bezeichnet.