

# Auflagerverdrehungen im Stahlbetonbau für die Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau

**T 3136**

T 3136

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2007

ISBN 978-3-8167-7354-2

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69

70504 Stuttgart

Nobelstraße 12

70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00

Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

**Universität Dortmund**  
**Fakultät Bauwesen**  
**Lehrstuhl für Betonbau**  
**Univ.-Prof. Dr.-Ing. R. Maurer**

## **DIBt-Forschungsvorhaben:**

# **Auflagerverdrehungen im Stahlbetonbau für die Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau**

Bearbeiter:

Dipl.-Ing. Gudrun Djouahra

M. Sc. Seung-Jin Choi

Stand: 29.12.2006

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Sicherheitskonzept und Einwirkungen</b>	<b>5</b>
3.1	Sicherheitskonzept	5
3.2	Einwirkungen	6
<b>4</b>	<b>Verfahren zur Verformungsberechnung und Durchbiegungs-begrenzung</b>	<b>11</b>
4.1	Begrenzung der Biegeschlankheit	11
4.2	Vereinfachte Verfahren	13
4.3	Durchbiegungsberechnung mit dem Arbeitssatz (Integration der Momenten-Krümmungsbeziehung)	17
4.4	Vergleich der Berechnungsmethoden anhand eines Beispiels	19
<b>5</b>	<b>Materialgesetze und Rechenmodell</b>	<b>21</b>
5.1	Numerischer Algorithmus	21
5.2	Materialeigenschaften des Betons	22
5.2.1	Kriechen des Betons	22
5.2.2	Schwinden des Betons	25
5.2.3	Spannungsdehnungslinie des Betons	30
5.2.4	Zugfestigkeit des Betons	31
5.3	Materialeigenschaften des Betonstahls	32
5.4	Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug	33
5.5	Verifikation des Rechenmodells	38
<b>6</b>	<b>Untersuchungen von Stahlbetonplatten</b>	<b>39</b>
6.1	Bezugssystem Einfeldplatte	39
6.2	Parameterstudie Bewehrungsgrad	45
6.3	Parameterstudie Systemlänge	50
6.4	Parameterstudie Schlankheit	52
6.5	Erstellung der Diagramme mit dem ‚Vereinfachten Verfahren‘	54
<b>7</b>	<b>Untersuchungen von Stahlbetonbalken mit Rechteckquerschnitt</b>	<b>56</b>
7.1	Bezugssystem Einfeldbalken	56
7.2	Parameterstudie Bewehrungsgrad	60

7.3	Parameterstudie Schlankheit	65
<b>8</b>	<b>Untersuchungen von Stahlbetonplattenbalken</b>	<b>67</b>
8.1	Beispiel Plattenbalken	67
8.2	Variation des Bewehrungsgrades	69
<b>9</b>	<b>Auswertung der Untersuchungen</b>	<b>71</b>
9.1	Verformungen aus äußeren Lasten	71
9.2	Schwinden	74
9.3	Einfluss einer Überhöhung	75
9.4	Diagramme zur Ermittlung von Bauteilverformungen	76
9.5	Vorschlag zur Ermittlung der Auflagerverdrehung aus Bauteilverformung	78
9.5.1	Oberer Grenzwert der Auflagerverdrehung	78
9.5.2	Ermittlung der Auflagerverdrehung mit Diagrammen	78
9.5.3	Berechnung der Auflagerverdrehung	79
9.5.4	Bemessung des Lagers	79
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>80</b>
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>81</b>

## 1 Einleitung und Zielsetzung

Unbewehrte Elastomerlager im Hochbau werden in der Regel neben der Auflagerkraft durch eine Verdrehung und eine Verschiebung am Endauflager beansprucht. Der Nachweis der Verdrehung wurde bisher in der Praxis – insbesondere bei den Nachweisen für die Lagerungsklasse 2 – nicht immer konsequent geführt. Häufige Fehlerquelle war die Nichtberücksichtigung der Verdrehung aus Imperfektionen. Der Nachweis war lediglich für die Lagerungsklasse 1, nach DIN 4141 (Teil 3 und Teil 15) klar geregelt.

### **Bisheriges Nachweiskonzept nach DIN 4141**

Der Nachweis der Verdrehung des Lagers erfolgte für die Lagerungsklasse 1 gemäß DIN 4141-T3 und T15 auf Gebrauchslastniveau. Die Beanspruchung des Lagers durch Verdrehung war begrenzt auf:

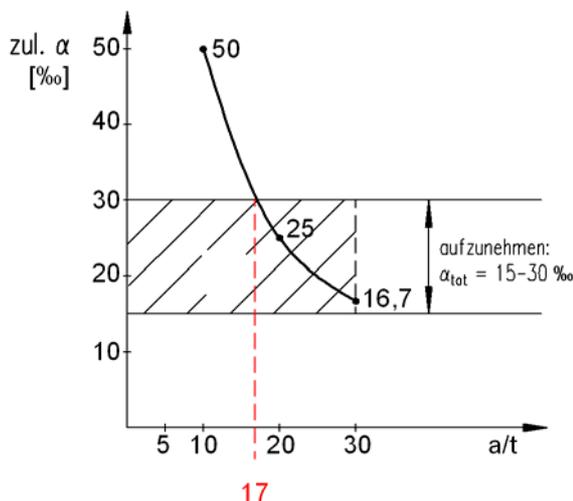
$$\alpha_{\text{tot}} = \alpha_{\text{Bauteil}} + \alpha_{\text{Imperfektion}} = \alpha_{\text{Bauteil}} + 10\text{‰} + \frac{0,625}{a} \leq \text{zul. } \alpha$$

$$\text{zul. } \alpha = 0,5 \cdot \frac{t}{a}$$

Die Beanspruchung durch Verdrehung setzt sich aus folgenden Einflüssen zusammen:

- Bauteilverdrehung
- Schiefwinkligkeit: (10‰) als Abweichung von der Planparallelität
- Unebenheit:  $0,625/a$  (mit  $a$  = Breite des Lagers)

Der auftretende Bauteilverdrehwinkel unter Gebrauchslasten liegt in etwa im Bereich von  $\alpha_{\text{Bauteil}} = 2$  bis  $15$  ‰. Dies ergibt sich bei Einhaltung der Verformungsbedingungen  $w \leq l/250$  gemäß DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.1 (8). Wie aus Bild 1 deutlich wird, ist dieses Kriterium bei einem Verhältnis  $a/t < 17$  immer erfüllt. Gedrungene Lager können demnach die Auflagerverdrehung  $\alpha_{\text{tot}}$  einschließlich der Imperfektionen gut aufnehmen.



**Bild 1:** Nachweis der Auflagerverdrehung gemäß DIN 4141, Teil 15 für LK 1

### Auflagerdrehwinkel unter Gebrauchslasten

Insbesondere für dünnere Lager  $a/t > 17$  ist die Kenntnis des auftretenden Winkels aus Bauteilverformung  $\alpha_{\text{Bauteil}}$  wichtig. Dieser ist insbesondere bei Stahlbetonbauteilen wegen des teilweisen Übergangs der Bauteile in den gerissenen Zustand II, sowie auf Grund der zeitabhängigen Einflüsse aus dem Kriechen und Schwinden des Betons nicht ohne weiteres mit elementaren Mitteln abschätzbar. Eine wirklichkeitsnahe Berechnung kann mit einem nichtlinearen numerischen Verfahren unter Berücksichtigung der genannten Einflüsse erfolgen.

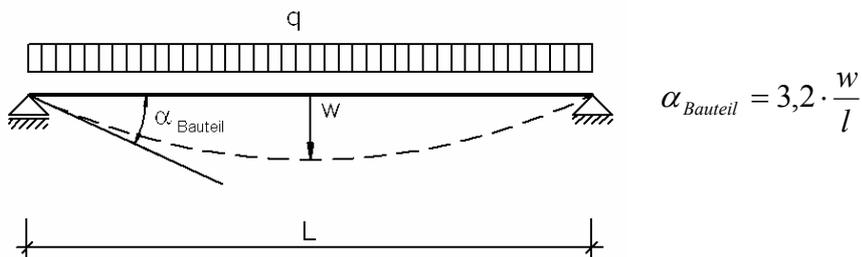
Der Auflagerdrehwinkel ist proportional zur Durchbiegung, welche in der Regel begrenzt ist. So ist gemäß DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.1 (8) der zulässige Durchhang unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination (unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens) auf  $l/250$  (allgemein) bzw. auf  $l/500$  (bei Einbau verformungsempfindlicher Einbauteile und Trennwände) begrenzt.

$$w(\text{Durchhang}) \leq l/250 \quad \text{bzw.} \quad l/500$$

Dieser Nachweis wird in der Regel mit vereinfachten Verfahren über die Begrenzung der Biegeschlankheit geführt. Bei Deckenplatten des üblichen Hochbaus über:

$$l_i/d \leq 35 \quad \text{bzw.} \quad l_i/d \leq 150/l_i.$$

Bei Einfeldträgern mit konstanter Biegesteifigkeit längs der Stabachse ergibt sich der Zusammenhang zwischen Auflagerverdrehung und Durchbiegung in Feldmitte unter Gleichlast aus der linear-elastischen Berechnung zu:



Damit können die in Praxis auftretenden Auflagerdrehwinkel in Abhängigkeit von der Durchbiegung für den Einfeldträger mit konstanter Biegesteifigkeit unter Gleichlast näherungsweise wie folgt eingegrenzt werden:

$w = l/250$	$\alpha_{\text{Bauteil}} = 12,8 \text{ ‰}$	oberer Grenzwert
$w = l/300$	$\alpha_{\text{Bauteil}} = 11 \text{ ‰}$	
$w = l/500$	$\alpha_{\text{Bauteil}} = 6,4 \text{ ‰}$	
$w = l/1500$	$\alpha_{\text{Bauteil}} = 2,2 \text{ ‰}$	unterer Grenzwert

**Ziel**

*Ziel des Forschungsvorhabens ist die wirklichkeitsnahe Ermittlung von auftretenden Bauteilverdrehungen  $\alpha_{\text{Bauteil}}$  insbesondere an Endauflagern unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten für typische Stahlbetonbauteile des Hochbaus. Die Berechnung erfolgt mittels nichtlinearer Verfahren unter Berücksichtigung des Stahlbetonwerkstoffverhaltens.*

*Die wesentlichen Zusammenhänge und Einflüsse auf die Größe der Verformungen werden herausgearbeitet.*

*Die aufbereiteten Ergebnisse der Untersuchungen können eine wertvolle Hilfe bei der Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau darstellen, indem sie eine vereinfachte und ausreichend genaue Abschätzung der tatsächlich zu erwartenden Bauteilverformungen ermöglichen.*

## 2 Stand der Forschung

Ziel des Forschungsvorhabens ist es, primär die Verformungen bzw. insbesondere die Auflagerverdrehungen von Stahlbetonbauteilen unter Ansatz wirklichkeitsnaher Stoffgesetze zu ermitteln. Auf dieser Grundlage werden Diagramme entwickelt, mit denen sich die für die Lagerbemessung benötigten Verformungen mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden können. Die Berechnungen erfordern die Anwendung nichtlinearer Verfahren, siehe DIN 1045-1, Abschnitt 8.5.

Als Alternative zur nichtlinearen Berechnung werden die bekannten ‚Vereinfachten Verfahren‘ analysiert (Abschnitt 4.2). Diese können anstatt aber auch allgemeiner als die Diagramme angewendet werden.

In jüngerer Zeit entstanden einige Forschungsarbeiten, die das Verformungsverhalten von Stahlbetonbauteilen unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten zum Gegenstand hatten, beispielsweise *Donaubauer* [Don 10], *Krüger/Mertsch* [Krü 19].

Wie diese Arbeiten gezeigt haben können heute mit den zur Verfügung stehenden Materialmodellen und mit Hilfe numerischer Simulation die Verformungen von Stahlbetonbauteilen in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen berechnet werden.

Dabei hat sich auch gezeigt, dass die Methode der Begrenzung der Biegeschlankheit nicht immer zu ausreichenden Verformungsbegrenzungen führt [Fri 13].

### 3 Sicherheitskonzept und Einwirkungen

#### 3.1 Sicherheitskonzept

Zur DIN EN 1337-3 ‚Lager im Bauwesen‘ Teil 3: Elastomerlager (Ausgabe 07/2005) ist eine nationale Anwendungsnorm ‚Lager und Lagerung im Hochbau‘ in Vorbereitung, welche zusätzlich den Anwendungsbereich auf Lager mit ‚Allgemeiner Bauaufsichtlicher Zulassung‘ mit deutlich höheren Lagerpressungen erweitert. Für die Lager und Lagerung werden zusätzlich Festlegungen getroffen, welche vorher in der alten Normenreihe DIN 4141-3 und -15 geregelt waren. Wesentlich bei der neuen Normenreihe ist die Umstellung auf das Sicherheitskonzept mit Teilsicherheitsbeiwerten. Die Nachweise für die Lager werden im Grenzzustand der Tragfähigkeit geführt. Nachfolgend einige Auszüge aus dem derzeitigen Entwurf für die Anwendungsnorm [DIN 7].

#### Abschnitt 4 - Sicherheitskonzept

- (1) Für die Anwendungsnorm gilt das in DIN 1055-100 festgelegte Sicherheitskonzept. Nachfolgend werden zusätzlich Lager und lagerungsspezifische Festlegungen getroffen. Angaben zu den Einwirkungen enthalten die Normen der Reihe DIN 1055.

#### Abschnitt 5 – Ermittlung der Lagerkräfte und Lagerbewegungen:

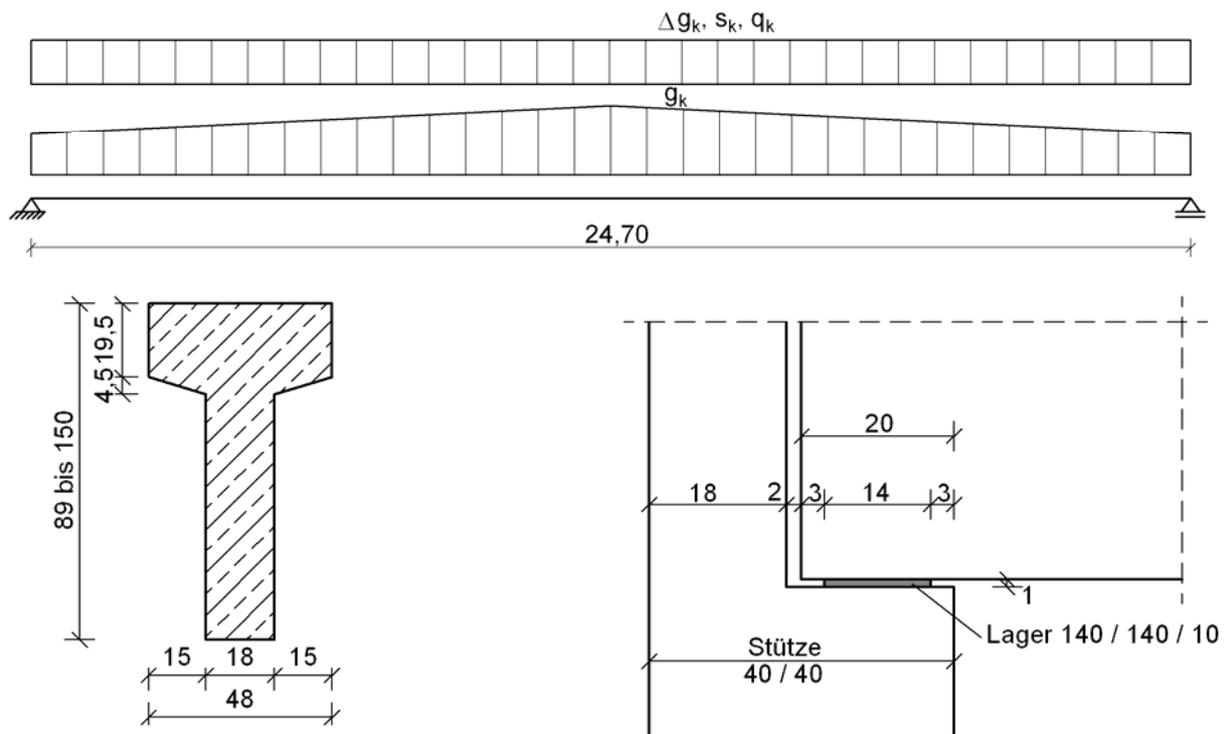
- (1) Die charakteristischen Werte der Kräfte und Bewegungen sind mit der charakteristischen (seltenen) Einwirkungskombination nach DIN 1055-100 zu ermitteln. Für die Ermittlung der daraus resultierenden Bemessungswerte der Bewegungen (Verschiebungen und Verdrehungen) und der Kräfte im Grenzzustand der Tragfähigkeit gelten die nachfolgenden Regelungen.
- (2) Die Bemessungswerte der Kräfte und Bewegungen ergeben sich aus der Einwirkungskombination nach (1), wobei jedoch die aus den einzelnen Einwirkungen resultierenden Lagerkräfte und Bewegungen mit dem Teilsicherheitsbeiwert für die jeweilige Einwirkung zu vergrößern sind. Für die Ermittlung der Bemessungswerte aus klimatisch bedingten Temperatureinwirkungen ist zusätzlich 5.2 zu beachten.
- (3) Bei der Berechnung der Bewegungen aus Kriechen und Schwinden werden die Mittelwerte der Endkriechzahlen  $\varphi(\infty, t_0)$  und der Schwinddehnungen  $\varepsilon_{cs, \infty}$  nach DIN 1045-1 mit dem Faktor 1,35 multipliziert. Die Bauteilverformungen aus dem Kriechen des Betons dürfen mit der quasi-ständigen Einwirkungskombination ermittelt werden. Etwaige Bewegungen infolge einer Vorspannung sind mit dem Mittelwert der Vorspannkraft nach DIN 1045-1 zu ermitteln.

### 3.2 Einwirkungen

Die auf das Lager einwirkende Auflagerverdrehung  $\alpha_{Bauteil}$  entsteht in der Regel bei der Lagerung von Biegebauteilen des üblichen Hochbaus durch Bauteilverformungen infolge von:

- äußeren Lasten aus Eigengewicht, Verkehr, Wind und Schnee
- Schwinden des Betons
- Kriechen des Betons (in Abhängigkeit von den ständigen äußeren Lasten  $q_{perm}$ )

Dabei treten die größten Auflagerdrehwinkel an den Endauflagern auf.



**Bild 2:** Beispiel für die Lagerung eines Biegebauteils

Die Nachweise in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit (GZT) sowie in den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit erfolgen unter unterschiedliche ‚Beanspruchungsniveaus‘. Bei einer veränderlichen Einwirkung ergeben sich folgende Beanspruchungsniveaus:

$$\text{GZT: } q_{Ed} = 1,35 \cdot g_k + 1,5 \cdot q_k$$

$$\text{GZG: } q_{rare} = 1,0 \cdot g_k + 1,0 \cdot q_k$$

$$q_{perm} = 1,0 \cdot g_k + \psi_2 \cdot q_k$$

Bei der linear elastischen Berechnung ist im GZT die Beanspruchung  $M_{Ed}$  gleich oder kleiner als die Biegetragfähigkeit  $M_{Rd}$  des Querschnitts:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} = \mu_{Ed} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd}$$

Für einen Einfeldträger mit Gleichstreckenlast ergibt sich somit:

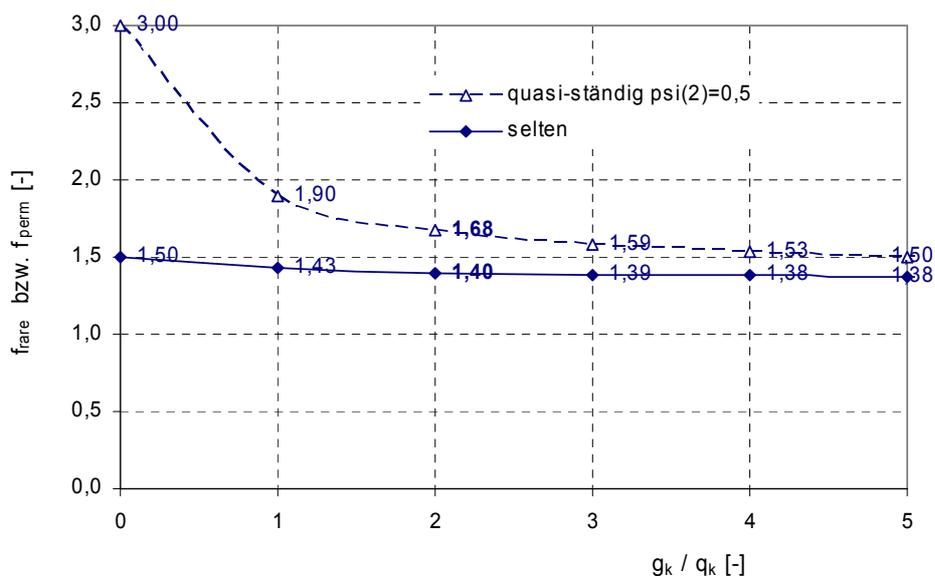
$$q_{Ed} \leq \frac{M_{Rd} \cdot 8}{L^2}$$

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wird davon ausgegangen, dass im Querschnitt mindestens die Bewehrung aus der Bemessung nach linear elastischer Berechnung im GZT vorhanden ist. Wird etwas mehr Bewehrung eingelegt, als für die Tragsicherheit benötigt wird, wirkt sich dies günstig auf die tatsächlichen Durchbiegungen aus.

Ausgehend vom Beanspruchungsniveau  $q_{Ed}$  wird mit Hilfe von Lastfaktoren auf die Lastniveaus der Gebrauchszustände geschlossen (selten und quasi-ständig):

$$f_{rare} = \frac{q_{Ed}}{q_{rare}} \qquad f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}}$$

Die Faktoren sind vom Verkehrslastanteil ( $g_k / q_k$ ) sowie von der Art der Belastung (Kombinationsbeiwert  $\psi_2$ ) abhängig. Da sich diese Parameter in der Regel in gewissen Grenzen bewegen, ergibt sich auch für die Faktoren nur eine begrenzte Bandbreite. In Bild 3 sind die Zusammenhänge für  $\psi_2 = 0,5$  dargestellt.



**Bild 3:** Lastfaktoren  $f_{rare}$  und  $f_{perm}$

Im Betonbau ist das Verhältnis  $g_k / q_k$  im Allgemeinen relativ groß, d. h. der Verkehrslastanteil ist i. d. R. kleiner als die Eigenlast. Der Parameter  $\psi_2$  variiert zwischen 0,3 und 0,8 und hat nur einen Einfluss auf die den Faktor  $f_{perm}$ .

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden folgende Faktoren angenommen, die die üblichen Verhältnisse im Mittel gut beschreiben:

$$f_{rare} = \frac{q_{Ed}}{q_{rare}} = 1,4 \quad \text{bzw.} \quad q_{rare} = \frac{q_{Ed}}{1,4}$$

$$f_{perm} = \frac{q_{Ed}}{q_{perm}} = 1,7^*) \quad \text{bzw.} \quad q_{perm} = \frac{q_{Ed}}{1,7}$$

\*)  $f_{perm} = 1,35$  für Bauteile, die nur durch Eigengewicht beansprucht werden  $g_k / q_k \rightarrow \infty$

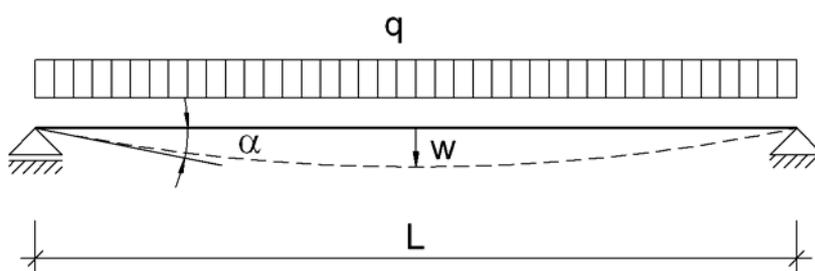
Bei großem Eigengewichtsanteil sind die Verformungen unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination größer als hier berechnet.

### Einwirkung auf das Lager

Für die Lagerbemessung ist der Auflagerdrehwinkel der seltenen Einwirkungskombination maßgebend. Dabei ist jedoch nur der Anteil aus der quasi-ständigen Einwirkungskombination kriecherzeugend. Die Verformungen infolge Kriechens unter  $q_{perm}$  betragen:

$$w_{c,perm} = w_{perm}(t = \infty) - w_{perm}(t = 0)$$

$$\alpha_{c,perm} = \alpha_{perm}(t = \infty) - \alpha_{perm}(t = 0)$$



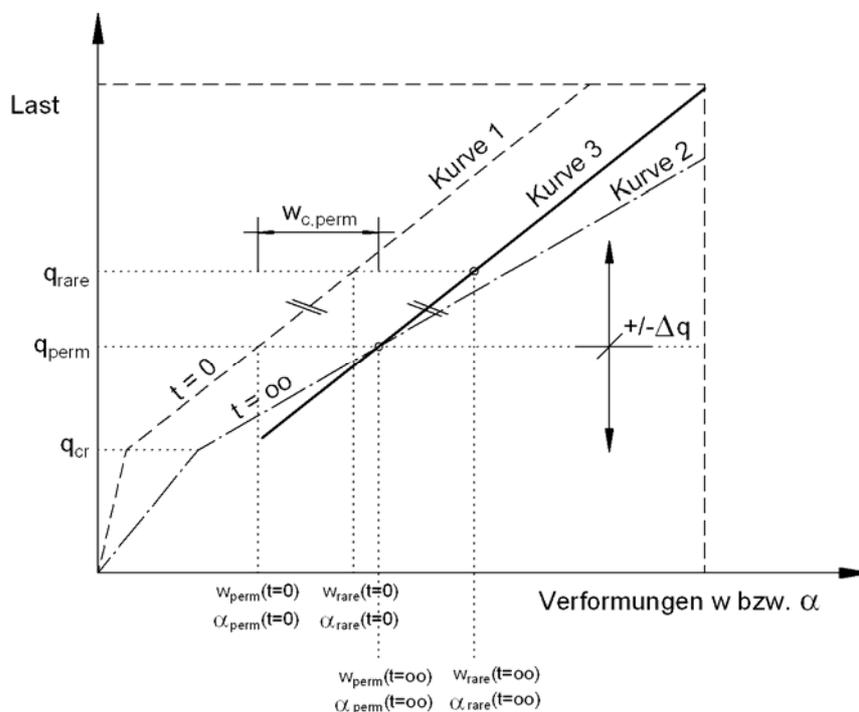
$$w_{rare}(t = \infty) = w_{rare}(t = 0) + [w_{perm}(t = \infty) - w_{perm}(t = 0)]$$

$$\alpha_{rare}(t = \infty) = \alpha_{rare}(t = 0) + [\alpha_{perm}(t = \infty) - \alpha_{perm}(t = 0)]$$

**Bild 4:** Bauteilverformungen infolge äußerer Last q

Bei den hier durchgeführten nichtlinearen Berechnungen werden die Verformungen ausreichend viele Laststufen berechnet, so dass sich die in Bild 5 dargestellten Last-Verformungsdiagramme ergeben.

- Kurve 1: Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t = 0$ , d. h. ohne die Einflüsse aus Kriechen und Schwinden des Betons
- Kurve 2: Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  unter Berücksichtigung der Kriechverformungen des Betons. Dabei wird die jeweilige Laststufe als kriecherzeugend berücksichtigt
- Kurve 3: In Wirklichkeit ist jedoch nur der quasi-ständige Lastanteil  $q_{perm}$  kriecherzeugend. Das heißt für die Schwankungen der Belastung um  $q_{perm}$  entsprechen die Verformungen der Kurve 3.



**Bild 5:** Ermittlung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  aus der äußeren Last  $q$

Die Berechnung der Verformungen unter der Belastung  $q_{rare}$  kann vereinfacht auch in einem Schritt erfolgen, indem eine effektive Kriechzahl verwendet wird.

$$\varphi_{eff} = \varphi \cdot \frac{M_{perm}}{M_{rare}} = \varphi \cdot \frac{q_{perm}}{q_{rare}}$$

Damit ergibt sich in guter Näherung:

$$w_{rare}(t = \infty) = w_{rare}(\varphi_{eff}) \quad \alpha_{rare}(t = \infty) = \alpha_{rare}(\varphi_{eff})$$

Die Beziehung, die für den Zustand I exakt gilt, kann in guter Näherung auch für den Zustand II angewendet werden.

Die Schwindverformungen werden separat ermittelt und dazu addiert.

## 4 Verfahren zur Verformungsberechnung und Durchbiegungsbegrenzung

### 4.1 Begrenzung der Biegeschlankheit

Nach DIN 1045-1, Abschn. 11.3.2. gilt für Deckenplatten des üblichen Hochbaus das Schlankheitskriterium  $l_i/d \leq 35$ . Im Falle höherer Anforderungen sollte  $l_i^2/150$  gewählt werden. In einer Studie von *Mayer/Rüsch* [May 24] von 1967 wurde dieser Grenzwert zur Vermeidung von Schäden in rissgefährdeten Trennwänden empirisch durch die Auswertung von Schadensfällen festgelegt. Die Ersatzstützweite  $l_i = \alpha \cdot l$  kann nach Tabelle 22 bestimmt werden. Dabei wird nicht zwischen einachsig gespannten und zweiachsig gespannten Platten unterschieden. Für Balken gilt diese Regelung nicht.

Auch der Eurocode 2 gibt zur Begrenzung der Durchbiegungen Grenzwerte für die zulässige Biegeschlankheit an. Das Nachweisverfahren ist gegenüber der DIN 1045-1 etwas verfeinert und basiert auf rechnerischen Untersuchungen.

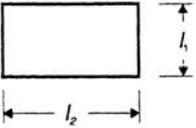
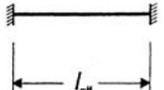
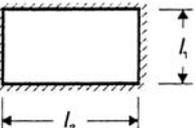
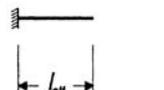
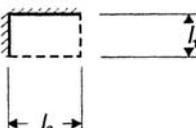
Die angegebenen Grenzwerte (siehe Tabelle 1) sind vom statischen System und vom Beanspruchungsgrad abhängig. Der Beanspruchungsgrad wird über den Bewehrungsgrad definiert (niedrig ( $\rho_s = 0,5\%$ ) oder hoch ( $\rho_s = 1,5\%$ )).

Die Tabellenwerte dürfen bzw. müssen noch mit Korrekturbeiwerten multipliziert werden. So ist z. B. der Tabellenwert für Plattenbalken mit einem Verhältnis  $b_{\text{eff}}/b_w > 3$  mit dem Faktor  $k=0,8$  zu multiplizieren.

Im Gegensatz zur DIN 1045-1 beziehen sich die Angaben nicht nur auf Platten, sondern generell auf biegebeanspruchte Stahlbetonbauteile (Platten, Plattenbalken, Balken). Auch hier wird nicht zwischen einachsig und zweiachsig gespannten Platten unterschieden.

Es fällt auf, dass der Eurocode auf kleinere Biegeschlankheiten führt als die DIN 1045-1. Dies gilt insbesondere, wenn hohe Bewehrungsgrade vorliegen (Grenzwert für den Einfeldträger mit  $\rho_s=1,5\%$ :  $l_i/d \leq 18$ ). Die Unterschiede bei den erforderlichen Bauteildicken sind beachtlich.

**Tabelle 1:** Grenzwerte der zulässigen Biegeschlankheit nach Eurocode 2 und DIN 1045-1

System		zul. (L/d)		
Stabtragwerk	Platte	Eurocode 2		DIN 1045-1
		$\rho_s = 1,5\%$	$\rho_s = 0,5\%$	
		<b>18</b>	<b>25</b>	<b>35</b>
		<b>23</b> $\approx 18/0,8$	<b>32</b> $\approx 25/0,8$	<b>44</b> $= 35/0,8$
		<b>25</b> $= 18/0,64$	<b>35</b> $= 25/0,71$	<b>58</b> $= 35/0,6$
		<b>7 =</b> $\approx 18/2,4$	<b>10</b> $\approx 25/2,4$	<b>15</b> $= 35/2,4$

## 4.2 Vereinfachte Verfahren

Es gibt eine Reihe von vereinfachten Verfahren zur Berechnung der Durchbiegungen [Don 10] unter Berücksichtigung des Stahlbetonwerkstoffverhaltens.

[May 23] Mayer DAFStb Heft 194

[Gras 14] Grasser/Thielen DAFStb Heft 240

[DIN 9] Eurocode 2

[DIN 8] DIN Fachbericht 102

[CEB 2] Modell Code 90

[Krü 19] Krüger/Mertzsch

[Kön 16] König/Tue

Allen Verfahren liegen im Prinzip als Eingangsparameter folgende Durchbiegungen als Grenzwerte zu Grunde:

$w^I$  unterer Grenzwert der Durchbiegung mit ungerissenen Querschnitten (Zustand I) über die ganze Bauteillänge

$w^{II}$  oberer Grenzwert der Durchbiegung mit gerissenen Querschnitten (Zustand II) über die ganze Bauteillänge

Die Grenzwerte der Durchbiegungen werden nach linear-elastischer Berechnung mit konstanter Steifigkeit über die Bauteillänge ermittelt. Bei der Berechnung der Durchbiegungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  werden jeweils die Biegesteifigkeiten  $EI^I$  und  $EI^{II}$  unter Berücksichtigung des Kriechens und der ideellen Querschnittswerte verwendet:

$$EI^I = \frac{E_{c0m}}{(1 + \varphi)} \cdot I_{ideell}$$

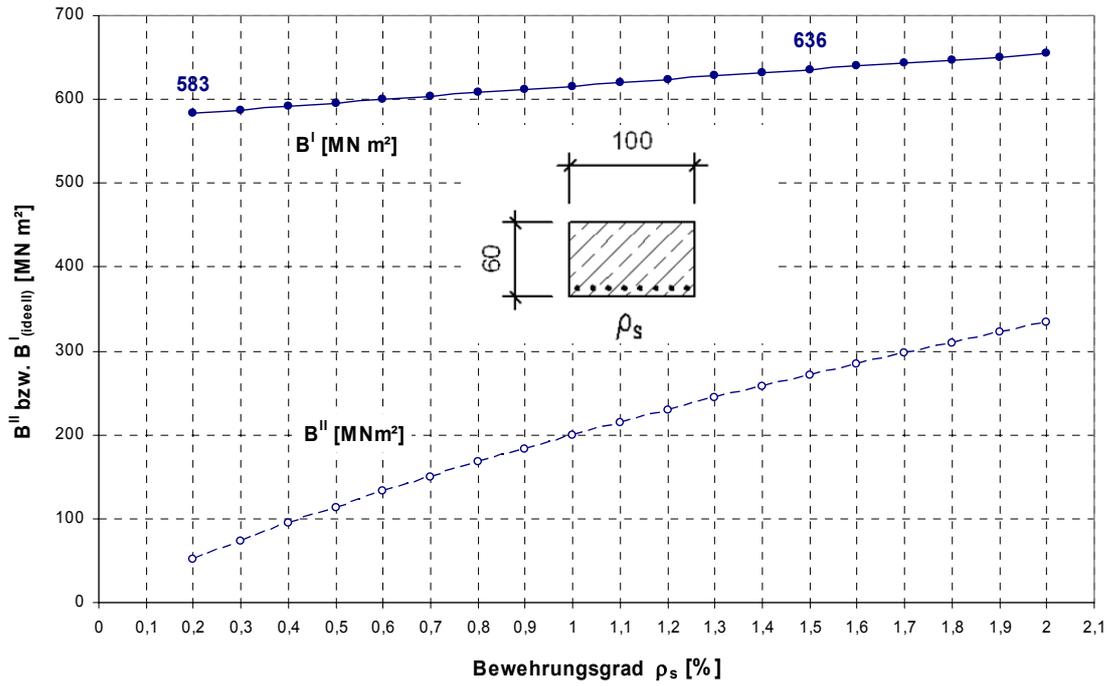
$$EI^{II} = E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)$$

$$x = \xi \cdot d \quad \xi = -\alpha_E \cdot \rho_s + \sqrt{[\alpha_E \cdot \rho_s + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho_s]} \quad \alpha_E = E_s / E_{c,eff} = E_s / (E_{c0m} / (1 + \varphi))$$

Bei Verwendung von Bruttoquerschnittswerten werden den Steifigkeiten im Zustand I sowie das Rissmoment unterschätzt. Bild 6 zeigt den Einfluss des Bewehrungsgrades auf die Biegesteifigkeiten im Zustand I ( $t=0$ ) unter Berücksichtigung von ideellen Querschnittswerten und im Zustand II ( $t=0$ ). Die Steifigkeit des Bruttoquerschnitts im Zustand I beträgt:

$$B_0^I = E_{c0m} \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} = 31900 \cdot \frac{1,0 \cdot 0,6^3}{12} = 574,2 \text{ MNm}^2$$

Bei einem Bewehrungsgrad von beispielsweise  $\rho_s = 1,5\%$  wird die Biegesteifigkeit im Zustand I um ca. 10% unterschätzt. Bei den Steifigkeiten im Zustand II geht der Bewehrungsquerschnitt unmittelbar in die Biegesteifigkeit ein.



**Bild 6:** Biegesteifigkeiten eines Querschnitts  $b/h=100/60$ , C 30/37 im Zustand I und im gerissenen Zustand II im Rissquerschnitt (Zeitpunkt  $t=0$ )

**Eingangswerte für die ‚Vereinfachten Verfahren‘**

Die nachfolgend anhand eines Beispiels verglichenen ‚Vereinfachten Verfahren‘ a) bis c) verwenden die gleichen Eingangswerte. Für den in Bild 7 dargestellten Balken gehen folgende Werte in die Durchbiegungsberechnung ein:

$$EI^I(t = \infty) = 493 \text{ MNm}^2 \quad f^I(t = \infty) = 18,5 \text{ mm}$$

$$EI_{\text{sec}}^{II}(t = \infty) = 358 \text{ MNm}^2 \quad f^{II}(t = \infty) = 25,2 \text{ mm}$$

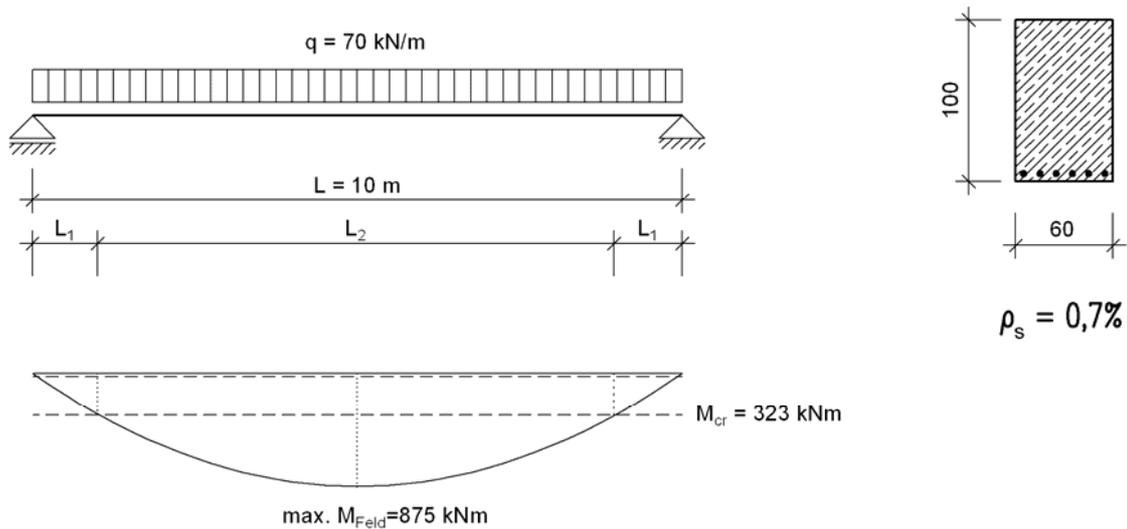
$$\frac{M_{cr}}{\max M_F} = \frac{323}{875} = 0,37$$

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot W_{ideell} = 2,9 \cdot 0,1116 = 323 \text{ kNm}$$

Beispiel: Balken

$b/h/d = 60/100/95$

C 30/37



**Systemparameter:**

Schlankheit:  $L/h = 10$

Bewehrungsgrad:  $\rho_s = 0,70\%$

**Belastungsniveau:**

$q = 70 \text{ KN/m}$

**Parameter für Verformungen:**

E-Modul:  $E_{c0m} = 31900 \text{ MN/m}^2$

Kriechen:  $\varphi_\infty = 2,5$

**Rissmoment:**

$M_{cr} = 323 \text{ kNm}$

$f_{ctm} = 2,9 \text{ MN/m}^2$

**Bild 7:** Beispiel: Balken für den Vergleich der verschiedenen ‚Vereinfachten Verfahren‘

Die Gesamtdurchbiegung des Bauteils ergibt sich dann als Zwischenwert, welcher mit Hilfe eines Rissbildungsfaktors errechnet wird. Der Rissbildungsfaktor berücksichtigt die Ausdehnung der gerissenen Bereiche, welche durch das Verhältnis Rissmoment zu maximalem Feldmoment  $\max. M_F$  abgeschätzt wird. Je nach Verfahren ergeben sich durch unterschiedliche Ansätze für den Rissbildungsfaktor etwas andere Werte.

a) DAFStb Heft 240

$$f_{\infty} = f_{\infty}^{\text{II}} - \frac{M_{cr}}{\max M_F} \cdot (f_{\infty}^{\text{II}} - f_{\infty}^{\text{I}})$$

b) DIN Fachbericht 102 ‚Betonbrücken‘ (entspricht ENV 1992)

$$f = \zeta \cdot f^{\text{II}} + (1 - \zeta) \cdot f^{\text{I}} \quad \zeta = 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2$$

c) König/Tue

$$f = \zeta \cdot f^{\text{II}} + (1 - \zeta) \cdot f^{\text{I}} \quad \zeta = \sqrt{1 - \frac{M_{cr}}{\max M_F}} \quad (\text{Einfeldträger mit Gleichlast})$$

Der Rissbildungsfaktor nach [Kön 16] ist die Länge  $L_2$  der gerissenen Bereiche nach linear elastischer Berechnung, welche man in Abhängigkeit von der Belastung herleiten kann. Die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird dabei nicht berücksichtigt.

Die Auswertung der vergleichenden Berechnungen am Beispiel des Balkens (Bild 7) erfolgt in Abschnitt 4.4.

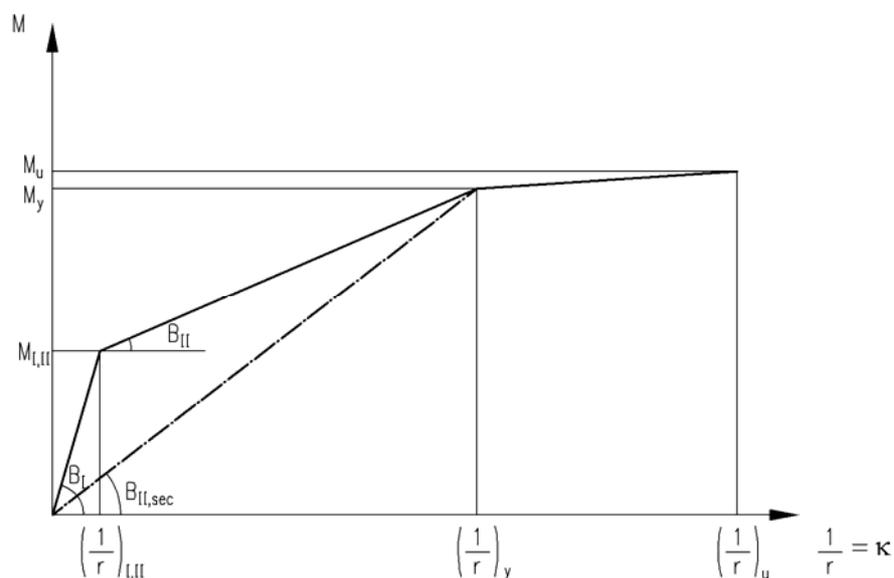
### 4.3 Durchbiegungsberechnung mit dem Arbeitssatz (Integration der Momenten-Krümmungsbeziehung)

Die Berechnung der Durchbiegung kann auch mit dem Arbeitssatz und einer bilinearen oder trilinearen Momenten-Krümmungsbeziehung erfolgen. Dabei werden unter der angesetzten Lastbeanspruchung in jedem Iterationspunkt die sich aus der Momenten-Krümmungsbeziehung ergebende Steifigkeit zugeordnet und aufintegriert. Der Bewehrungsgrad geht bei der Ermittlung der Sekantensteifigkeit im Zustand II in die Berechnung ein. Mit dem trilinearen Ansatz werden die ungerissenen Bereiche besser erfasst.

Das Kriechen des Betons wird bei der Steifigkeitsermittlung des Querschnitts (Zustand I, Zustand II) berücksichtigt. Im Zustand I wirkt sich das Kriechen über die ganze Querschnittshöhe aus und vermindert  $EI^I$  um den Faktor  $(1 + \varphi)$  während im Zustand II nur die Druckzone kriecht. Dies bei der Ermittlung der Druckzonenhöhe  $x$  über das Verhältnis  $\alpha_E = E_s / E_{c,eff}$  in die Berechnung ein. Dabei bleibt die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen unberücksichtigt. Mit dieser Vereinfachung liegt man bei der Verformungsberechnung auf der sicheren Seite.

$$EI^I = E_{c,eff} \cdot I_{ideell} = \frac{E_{com}}{(1 + \varphi)} \cdot I_{ideell}$$

$$EI_{sec}^{II} = E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)$$

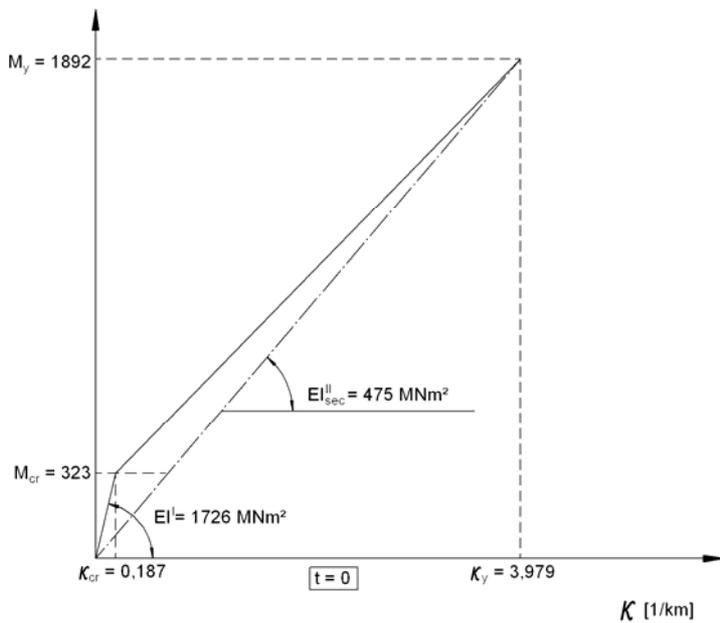


**Bild 8:** Vereinfachte Trilineare Momenten-Krümmungsbeziehung

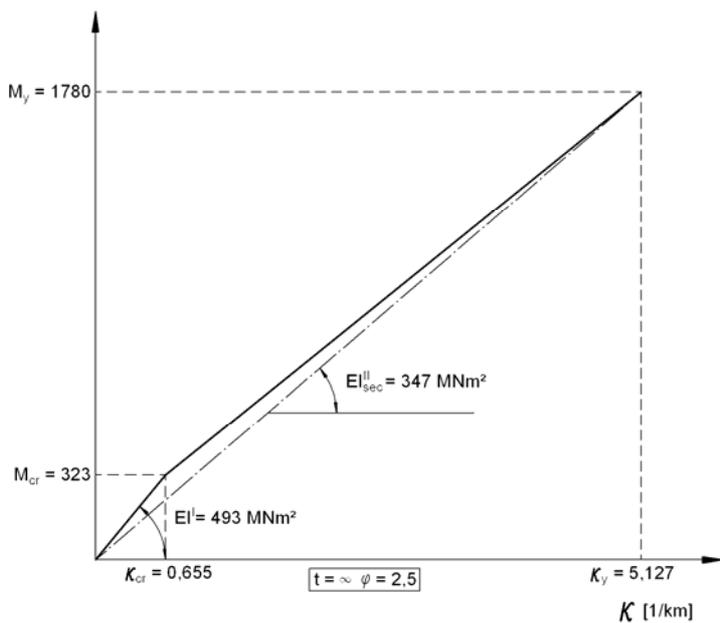
Für die Verformungsberechnung unter Gebrauchslasten ist nur der Bereich bis zum Fließen des Stahls von Interesse. Bei der Ermittlung des Fließmomentes und der zugehörigen Krümmung wird i. A. die gekrümmte Arbeitslinie des Betons nach Bild 22 der DIN 1045-1 im Gebrauchszustand angesetzt. Dies kann entweder mit Tafelwerten oder mit einem Programm erfolgen.

Näherungsweise kann die Druckzonenhöhe  $x$  auf der Grundlage einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung für den Beton ( $\sigma_c = E_{cm} \cdot \varepsilon_c$ ) abgeschätzt werden:

$$x = \xi \cdot d \quad \xi = -\alpha_E \cdot \rho_s + \sqrt{[\alpha_E \cdot \rho_s + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho_s]}$$



**Bild 9:** Momenten-Krümmungsbeziehung Zeitpunkt  $t = 0$  des Querschnitts 60/100/95,  $\rho_s = 0,7\%$

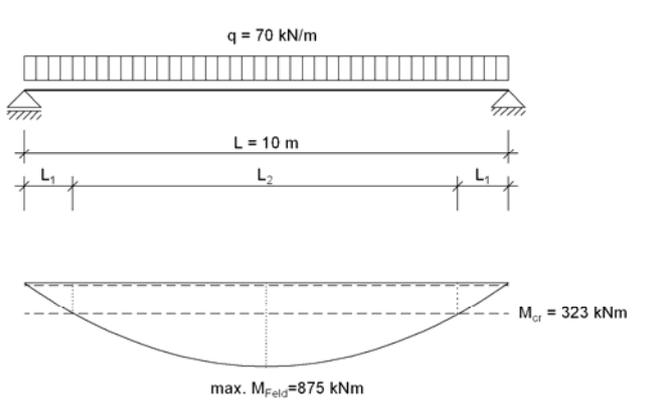
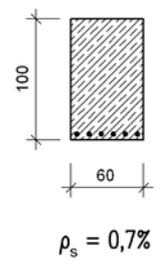


**Bild 10:** Momenten-Krümmungsbeziehung Zeitpunkt  $t = \infty$  des Querschnitts 60/100/95,  $\rho_s = 0,7\%$

### 4.4 Vergleich der Berechnungsmethoden anhand eines Beispiels

Anhand der berechneten Durchbiegungen für das nachfolgende Beispiel werden die Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Durchbiegungen verglichen. Dabei werden die Verformungen aus Schwinden zunächst noch nicht berücksichtigt.

**Beispiel: Balken**

<p>System: Balken <span style="margin-left: 50px;"><math>b/h/d = 60/100/95</math></span></p> 	<p>Material: C 30/37</p> <p><math>E_{c,0m} = 31900 \text{ MN} / \text{m}^2</math></p> <p><math>E_{c,eff} = 9114 \text{ MN} / \text{m}^2</math></p> <p><math>\varphi_0 = 2,5</math></p> <p><math>\rho_s = 0,7\%</math></p> 
--	--

**Tabelle 2:** Durchbiegungen nach vereinfachten Verfahren für das Beispiel Balken

	Durchbiegungen unter $q = 70 \text{ kN/m}$		
	$w_{Mitte}(t = 0)$	$w_{Mitte}(t = \infty)$	Vergleich ( $t = \infty$ )
	[mm]	[mm]	[%]
DAfStb Heft 240	13,7	22,9	92
DIN Fachbericht 102	16,8	25,0	101
König/Tue	15,9	24,0	98
Arbeitssatz – bilinear	19,5	26,7	108
Arbeitssatz - trilinear	14,9	24,2	98
(Sofistik)	(16,3)	(24,8)	<b>100</b>

Mit den Näherungsverfahren ergeben sich bei diesem Beispiel die Durchbiegungen mit ausreichender Genauigkeit. Zum Vergleich ist die mit Hilfe des im folgenden Abschnitt 5 beschriebenen numerischen Rechenmodells (Sofistik) nach nichtlinearem Verfahren mit wirklichkeitsnahen Stoffgesetzen als Bezugswert (100%) zusätzlich angegeben. Die mit den vereinfachten Verfahren ermittelten Durchbiegungen weichen um weniger als 10% von diesem Wert ab.

## 5 Materialgesetze und Rechenmodell

Die Ermittlung der Verformungen unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und unter Berücksichtigung des zeitabhängigen Verhaltens des Betons erfolgt rechnergestützt mit einem nichtlinearen Verfahren. Dieses berücksichtigt sowohl die Verformungen (geometrische Nichtlinearität) als auch die nichtlinearen Werkstoffgesetze des Betons und der Bewehrung. Zur Berücksichtigung der Rissbildung werden die Stoffgesetze modifiziert.

### 5.1 Numerischer Algorithmus

Für die vorliegenden Berechnungen wurde das Programmsystem Sofistik eingesetzt. Das zur Schnittgrößenermittlung verwendete Modul STAR2 arbeitet mit nichtlinearen Stabelementen nach dem Übertragungsmatrizenverfahren. Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, mit Hilfe von Übertragungsmatrizen die Zustandsgrößen vom Stabanfang bis zu einer beliebigen Stelle längs des Stabes zu übertragen. Die Ermittlung der Dehnungen und der damit verbundenen Steifigkeiten erfolgt iterativ.

$$\{z\}_e = [U]_i \cdot \{z\}_a + \{p\}_i$$

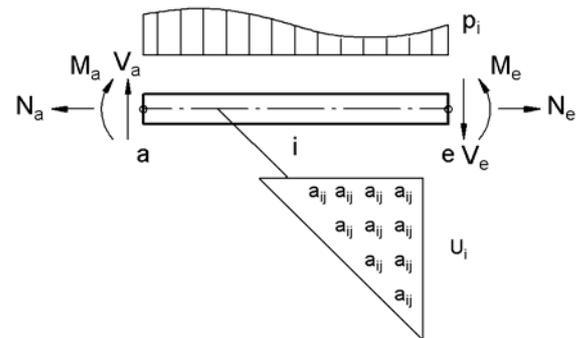
Dabei ist:

$\{z\}_e$  Zustandsvektor im Schnitt i+1

$\{z\}_a$  Zustandsvektor im Schnitt i

$[U]_i$  Übertragungsmatrix des Stababschnittes i

$\{p\}_i$  Lastvektor



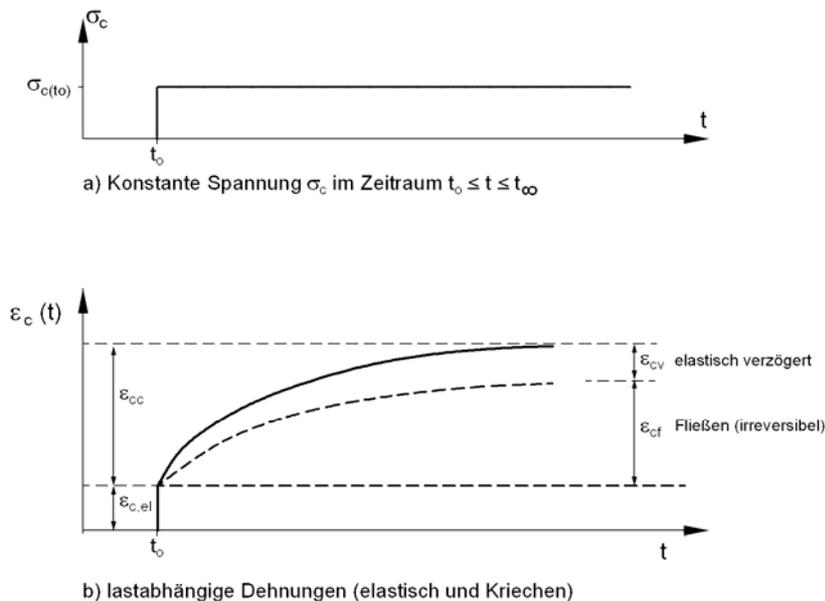
Für die Berechnungen werden folgende Annahmen und Voraussetzungen getroffen:

- Es gilt die Bernoulli Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte
- Dem Beton und dem Bewehrungsstahl werden einachsige, nichtlineare Werkstoffgesetze zugeordnet.
- Das Verbundverhalten, d. h. die versteifende Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird über modifizierte Stoffgesetze berücksichtigt.

## 5.2 Materialeigenschaften des Betons

### 5.2.1 Kriechen des Betons

Das Kriechen bezeichnet die zeitabhängige Dehnungszunahme des Betons infolge einer ständigen Belastung. Die lastabhängige elastische Dehnung  $\varepsilon_{c,el}$  vergrößert sich im Laufe der Zeit um den Kriechanteil  $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ .



**Bild 11:** Spannungen und Dehnungen infolge Last und Kriechen

Das Verhältnis von Kriechverformung zur elastischen Verformung wird im Bereich des linearen Kriechens als Kriechzahl  $\varphi(t, t_0)$  bezeichnet:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\varepsilon_{c,el}(t_0)}$$

Der dem Kriechen zu Grunde liegende Mechanismus ist komplex. Zur Beschreibung des Kriechens kann die Kriechverformung in additive Komponenten aufgespalten werden.

- verzögert elastische Dehnung + Fließen (irreversibel)
- Grundkriechen + Trocknungskriechen

Auf Gebrauchslastniveau wird das Kriechen des Betons fast ausschließlich durch das Kriechen der Zementsteinmatrix verursacht, da die Zuschläge keine nennenswerte zeitabhängige Verformungszunahme zeigen. Bis zu einer Spannung von ca.  $0,4 f_c$  sind die Kriechverformungen nahezu proportional zur angreifenden Belastung (lineares Kriechen). Oberhalb von ca.  $0,4 f_c$  nimmt das Kriechen durch fortschreitende Mikrorissbildung stark zu (nichtlineares Kriechen). Die Kriechverformung ist nach einer Entlastung teilweise reversibel (Rückkriechen des verzögert elastischen Anteils).

Zur Erfassung des Betonkriechens sind in der Vergangenheit verschiedene Modelle für das rheologische Verhalten entwickelt worden (Summationsansatz, Produktansatz, siehe auch [Mül 25]. Der in DIN 1045-1 und Heft 525 des DAfStb beschriebene Ansatz beruht auf einem Produktansatz. Das Kriechen wird über das Produkt einer Grundkriechzahl mit einer Zeitfunktion beschrieben.

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0)$$

Nach Heft 525 DAfStb berechnet sich die Grundkriechzahl zu:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0)$$

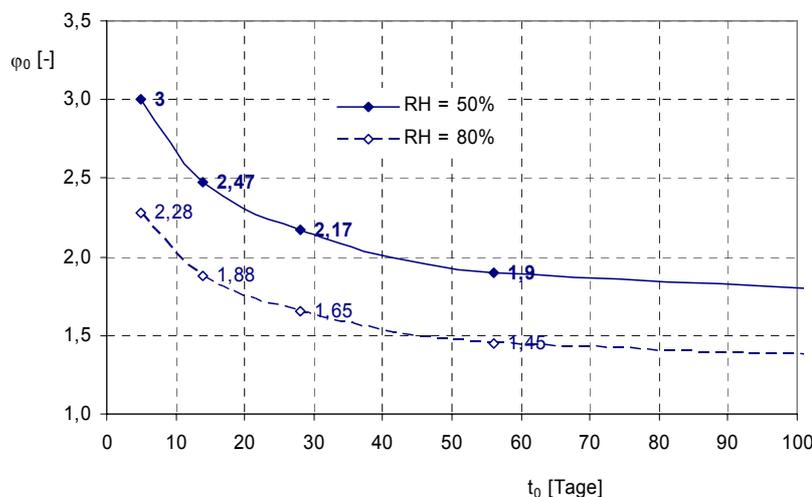
Mit: 
$$\varphi_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH / RH_0}{\sqrt[3]{0,1 \cdot h_0 / h_1}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad (h_1 = 100 \text{ mm})$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}}$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_{0,eff} / t_1)^{0,2}} \quad (t_{0,eff} = t_0 \text{ für Zementtyp 2, N, R})$$

Die Grundkriechzahl  $\varphi_0$  ist im Wesentlichen von nachfolgenden Parametern abhängig:

- RH relative Luftfeuchte [%]
- $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u}$  wirksame Bauteildicke in mm
- $f_{cm}$  mittlere Betondruckfestigkeit nach 28 Tagen
- $t_0$  Belastungszeitpunkt



**Bild 12:** Einfluss des Belastungsalters auf die Grundkriechzahl

Während die Betondruckfestigkeitsklasse und die wirksame Bauteildicke im Allgemeinen bekannt sind, ist die genaue Vorhersage der relativen Luftfeuchte, bei der das Kriechen stattfindet und insbesondere des Belastungszeitpunktes bei Fertigteilen mit gewissen Unsicherheiten behaftet. Die sich daraus ergebenden Abweichungen bei der Grundkriechzahl können – wie Bild 12 zeigt – groß sein. Die Querschnittsform hat – bei den hier untersuchten Beispielen nur eine untergeordnete Bedeutung. Daher wird als oberer Grenzwert für die Durchbiegungsberechnung angenommen:

$$\varphi_0 = \varphi_{0,t=\infty} = 2,5 \quad \text{oberer Grenzwert}$$

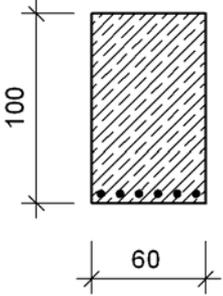
$$\varphi_0 = \varphi_{0,t=\infty} = 1,5 \quad \text{unterer Grenzwert (nur für Parameterstudie Kriechzahl)}$$

Des Weiteren sei noch darauf hingewiesen, dass auch der Elastizitätsmodul, welcher den Durchbiegungsberechnungen zu Grunde liegt, ebenso wie die Kriechzahl und die Schwinddehnungen von Haus aus schon gewissen, nicht unerheblichen Streuungen unterliegt (+/- 30%).

Die Zeitfunktion  $\beta_c(t, t_0)$  ist eine hyperbolische Funktion mit dem Grenzwert 1 für  $t \rightarrow \infty$ . Da der zeitliche Verlauf des Kriechens in den Betrachtungen eine untergeordnete Rolle spielt, wird in den nachfolgenden Untersuchungen zur Berechnung der maximalen Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t = \infty$  die Endkriechzahl  $\varphi(\infty, t_0)$  verwendet.

Als kriecherzeugende Last wird die quasi ständige Einwirkungskombination angesetzt. Obwohl die Ausbaulast und die Verkehrslast erst zu einem späteren Zeitpunkt aufgebracht werden wird für die Berechnung vereinfacht angenommen, dass die gesamte Last zum Zeitpunkt  $t_0$  aufgebracht wird und dann über die Zeit in konstanter Größe vorhanden ist.

### Endkriechzahl für Balkenquerschnitt:

<p>Querschnitt Q1: <math>b/h = 60/100</math></p> 	<p>Kriechparameter:</p> <p>C 30/37 <math>f_{cm} = 38 \text{ MN} / \text{m}^2</math></p> <p>RH = 50 %</p> <p>RH = 80 %</p> $h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = 375 \text{ mm}$ <p><math>t_0 = 14 \text{ Tage}</math></p>
<p>RH = 50%: <math>\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) = 1,627 \cdot 2,725 \cdot 0,557 \approx 2,5</math></p> <p>RH = 80%: <math>\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) = 1,241 \cdot 2,723 \cdot 0,557 \approx 1,9</math></p>	

### 5.2.2 Schwinden des Betons

Als Schwinden bezeichnet man die zeitabhängige und lastunabhängige Verformung des Betons. Dabei spielen eine Reihe von unterschiedlichen Mechanismen (Kapillarschwinden, Schrumpfen, Trocknungsschwinden, Karbonatisierungsschwinden) eine Rolle. Die beiden maßgeblichen Schwindkomponenten sind das Trocknungsschwinden und das autogene Schwinden. Während beim hochfesten Beton das autogene Schwinden einen großen Anteil hat, ist bei normalfestem Beton das Trocknungsschwinden um ein Vielfaches größer als das autogene Schwinden (Schrumpfen). Es ist bei einer Wiederbefeuchtung teilweise reversibel.

Für die Berechnungen des Schwindens werden die Ansätze nach DIN 1045-1 bzw. Heft 525 DAfStb verwendet. Die Grundwerte des Trocknungsschwindens und des Schrumpfens werden mit einer Zeitfunktion multipliziert und addiert.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cs}(t, t_s) &= \varepsilon_{cds}(t, t_s) + \varepsilon_{cas}(t) \\ &= \varepsilon_{cds0}(f_{cm}) \cdot \beta_{RH}(RH) \cdot \beta_{ds}(t - t_s) + \varepsilon_{cas0}(f_{cm}) \cdot \beta_{as}(t - t_s) \end{aligned}$$

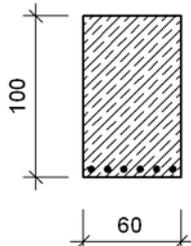
$$\varepsilon_{cs}(\infty) = \varepsilon_{cds}(\infty) + \varepsilon_{cas}(\infty)$$

Die wesentlichen Parameter, welche die Endschwinddehnung beeinflussen sind:

- $f_{cm}$     Betondruckfestigkeit
- RH    relative Luftfeuchte in %
- Zementart

Die Bauteildicke wirkt sich danach nur auf den zeitlichen Verlauf und nicht auf den Endwert des Trocknungsschwindens aus.

#### Endschwinddehnung für Querschnitt:

<p><b>Querschnitt Balken: 60/100</b></p> 	<p><b>Schwindparameter:</b></p> <p>C 30/37      <math>f_{cm} = 38 \text{ MN} / \text{m}^2</math></p> <p>RH = 50 %</p> <p>RH = 80 %</p> <p><math>h_0 = \frac{2 \cdot A_c}{u} = 375 \text{ mm}</math> (nur für zeitlichen Verlauf)</p>
<p>RH = 50%:    <math>\varepsilon_{cs}(\infty) = \varepsilon_{cds}(\infty) + \varepsilon_{cas}(\infty) = -0,569\text{‰} - 0,065\text{‰} = -0,63\text{‰}</math></p> <p>RH = 80%:    <math>\varepsilon_{cs}(\infty) = \varepsilon_{cds}(\infty) + \varepsilon_{cas}(\infty) = -0,316\text{‰} - 0,065\text{‰} = -0,38\text{‰}</math></p>	

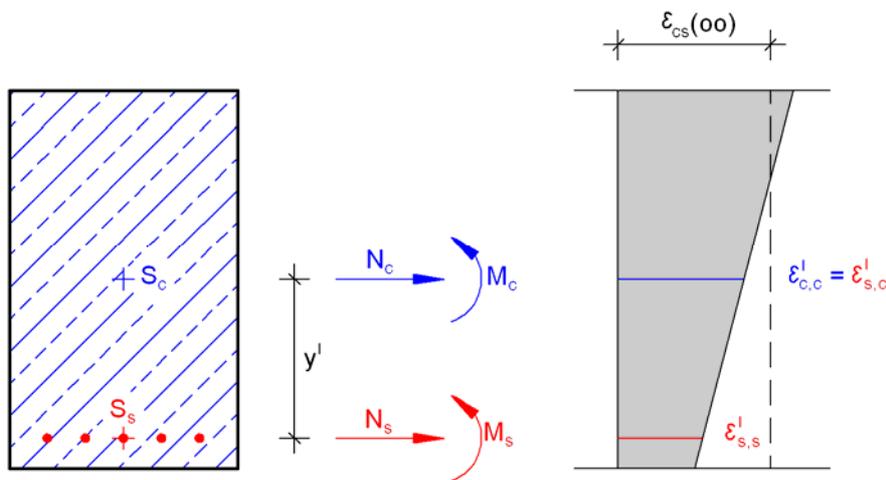
Die Analyse der Zeitfunktion  $\beta_{ds}(t-t_s)$  für eine 300 mm dicke Platte ergibt, dass das theoretische Endschwindmaß erst nach Jahrzehnten erreicht wird. Nach 10 Jahren ist erst ca. 75% des Endschwindmaßes erreicht. Für die nachfolgenden Berechnungen wird einheitlich folgendes Schwindmaß angesetzt:

$$\varepsilon_{cs}(\infty) = 0,5\text{‰} \quad (\text{Innenbauteile})$$

### Ermittlung der Schwindkrümmung

Die Schwindverkürzung erzeugt im Querschnitt einen Eigenspannungszustand. Die eingelegte Bewehrung behindert die Schwindverkürzung und erzeugt somit bei unsymmetrisch bewehrten Querschnitten sowie immer im gerissenen Querschnitt eine Schwindkrümmung. Zur Bestimmung der Krümmung infolge Schwinden kann der Querschnitt in zwei gedachte Teilquerschnitte aus Beton und Stahl zerlegt werden. Die Dehnungen der gedachten Teilquerschnitte werden durch innere Kräfte erzeugt. Da sie jedoch schubfest miteinander verbunden sind kann die Schwindkrümmung über das Kräfte- und Momentengleichgewicht sowie der Kompatibilitätsbedingung (Ebenbleiben des Querschnitts) bestimmt werden. Die Betrachtungsweise erfolgt am Querschnitt im Zustand I, und im Zustand II.

Zustand I:

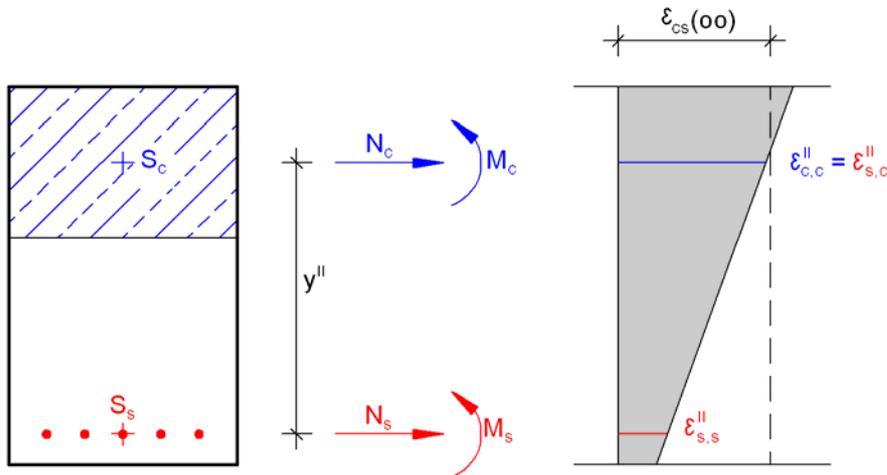


$$K_s^I = \frac{\varepsilon_{c,c}^I - \varepsilon_{s,s}^I}{y_I}$$

$$\varepsilon_{s,s}^I = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + y_I^2 \cdot \frac{A_s}{I_c} \right)}$$

$$\varepsilon_{c,c}^I = \varepsilon_{cs}(\infty) - \frac{\varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s \cdot \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s + y_I^2 \cdot \frac{A_s}{I_c} \right)}$$

Zustand II:



$$\kappa_s^{II} = \frac{\epsilon_{c,c}^{II} - \epsilon_{s,s}^{II}}{y_{II}}$$

$$\epsilon_{s,s}^{II} = \frac{\epsilon_{c0}}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s / \xi + y_{II}^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3} \right)}$$

$$\epsilon_{c,c}^{II} = \epsilon_{cs}(\infty) - \frac{\epsilon_{cs}(\infty) \cdot \rho_s / \xi \cdot \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi)}{1 + \alpha_E \cdot (1 + \rho \cdot \varphi) \cdot \left( \rho_s / \xi + y_{II}^2 \cdot \frac{A_s}{I_c \cdot \xi^3} \right)}$$

### Vereinfachte Ermittlung der Schwindkrümmung

Der Einfluss des Schwindens auf die mittlere Stahldehnung bei abgeschlossener Rissbildung ist gering [Mau 21]. Näherungsweise kann daher im Zustand II bei abgeschlossener Rissbildung die durch das Schwinden verursachte Krümmung in guter Näherung wie folgt abgeschätzt werden:

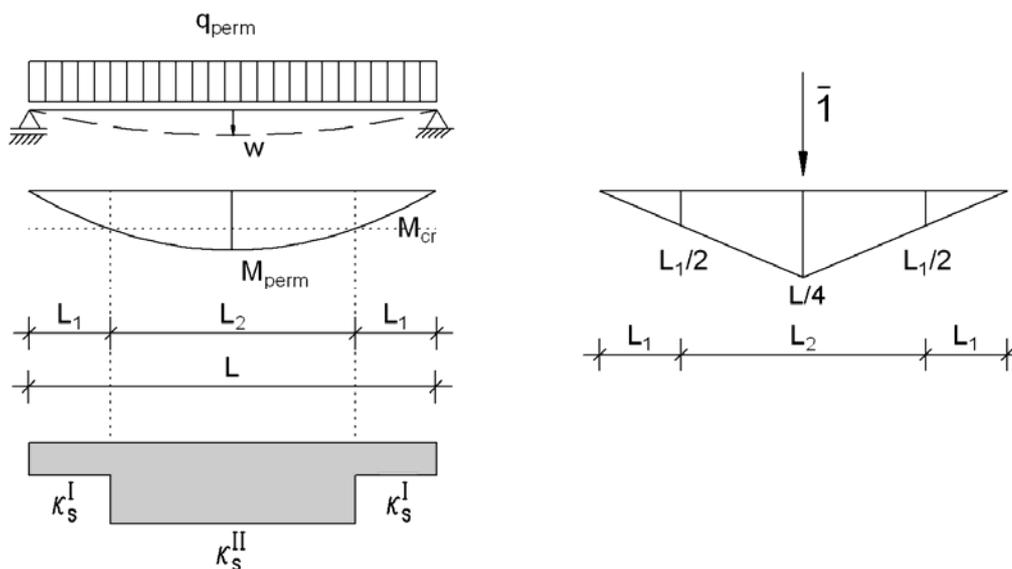
$$\kappa_{schwinden} = \frac{\epsilon_{cs}(\infty)}{d - x/2}$$

### Berechnung der Durchbiegung infolge Schwindens

Die Schwindverformungen können mit Hilfe des Arbeitssatzes berechnet werden (siehe Bild 13), indem die zuvor ermittelten Schwindkrümmungen  $\kappa_s^I$  und  $\kappa_s^{II}$  auf die ungerissenen Bereiche  $L_1$  bzw. auf die gerissenen Bereiche  $L_2$  angesetzt werden. Die Ausdehnung der gerissenen Bereiche hängt vom Lastniveau ab. Da das Schwinden unter der quasiständigen Lasteinwirkung stattfindet, erfolgt die Bestimmung der Bereiche  $L_1$  und  $L_2$  auf dem Lastniveau der quasiständigen Einwirkung. Für die Durchbiegung in Feldmitte eines Einfeldträgers mit Gleichstreckenlast ergibt sich somit:

$$w_{s,\infty}(\text{quasiständig}) = \kappa_s^I \cdot \frac{L_1^2}{2} + \kappa_s^{II} \cdot \left( \frac{L^2}{8} - \frac{L_1^2}{2} \right)$$

$w_{s,\infty}(\text{quasiständig})$  bezeichnet dabei die Durchbiegung aus Schwinden alleine, zu der die Verformung aus Last noch addiert werden muss. Der Index quasiständig bedeutet dabei, dass die Ausdehnung der gerissenen und ungerissenen Bereiche unter der quasiständigen Lasteinwirkung angesetzt wird.



$$w = \int_0^L \kappa_{\text{Schwinden}} \cdot \bar{M} dx$$

**Bild 13:** Ermittlung der Durchbiegung infolge Schwindens mit dem Arbeitssatz

Als oberer Grenzwert werden zusätzlich die Verformungen  $w$  und  $\alpha$  unter Ansatz der maximalen Schwindkrümmung  $\kappa_s^{II}$  über die gesamte Balkenlänge ermittelt. Der untere Grenzwert ergibt sich bei Ansatz der minimalen Schwindkrümmung  $\kappa_s^I$  über die gesamte Balkenlänge. Für die Durchbiegung in Feldmitte ergeben sich somit folgende Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \max w_s &= \kappa_s^{II} \cdot L^2 / 8 & \kappa_s^{II} &= \text{Schwindkrümmung Zustand II} \\ \min w_s &= \kappa_s^I \cdot L^2 / 8 & \kappa_s^I &= \text{Schwindkrümmung Zustand I.} \end{aligned}$$

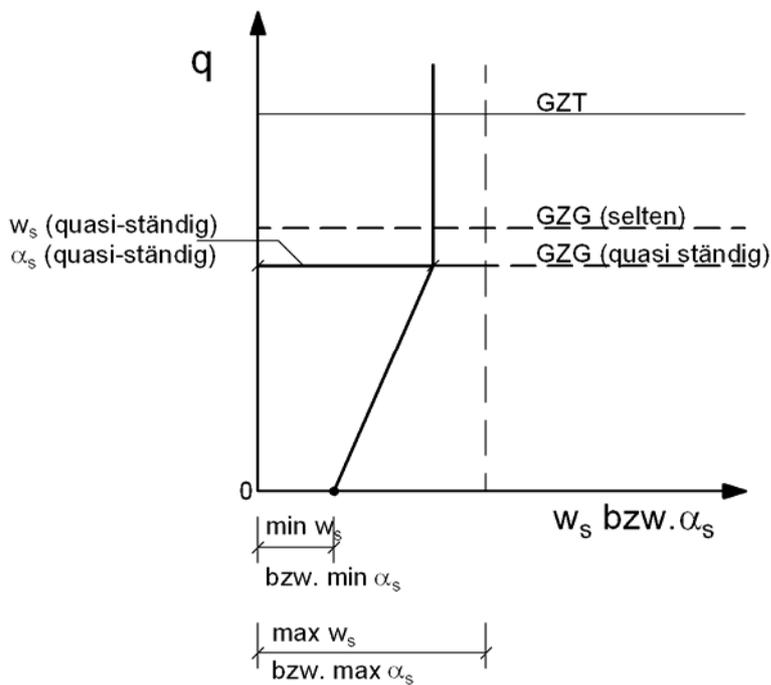
Da unter der quasiständigen Lasteinwirkung – je nach Bewehrungsgrad - die gerissenen Bereiche in der Regel groß sind (ca. 70 – 80% der Bauteillänge) ist der Fehler bei Ansatz des oberen Grenzwertes klein.

Für Balken-Bezugssystem:  $w_s(\text{quasiständig}) = 6,6 \text{ mm} = 0,66\text{‰} \cdot L$

$\max w_s = 7,5 \text{ mm} = 0,75\text{‰} \cdot L$

Für Platte-Bezugssystem:  $w_s(\text{quasiständig}) = 13,2 \text{ mm} = 1,76\text{‰} \cdot L$

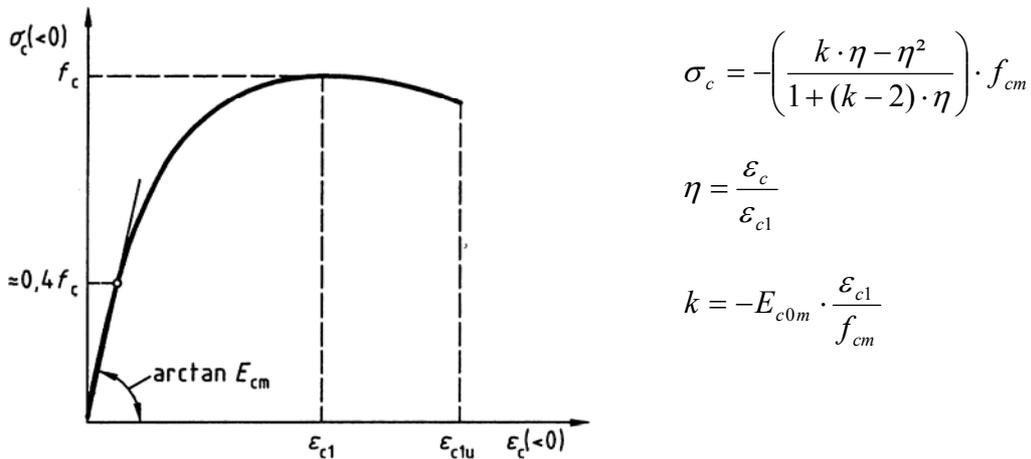
$\max w_s = 14,3 \text{ mm} = 1,91\text{‰} \cdot L$



**Bild 14:** Näherungsweise berechnete Schwindverformung in Abhängigkeit vom Belastungsniveau.

### 5.2.3 Spannungsdehnungslinie des Betons

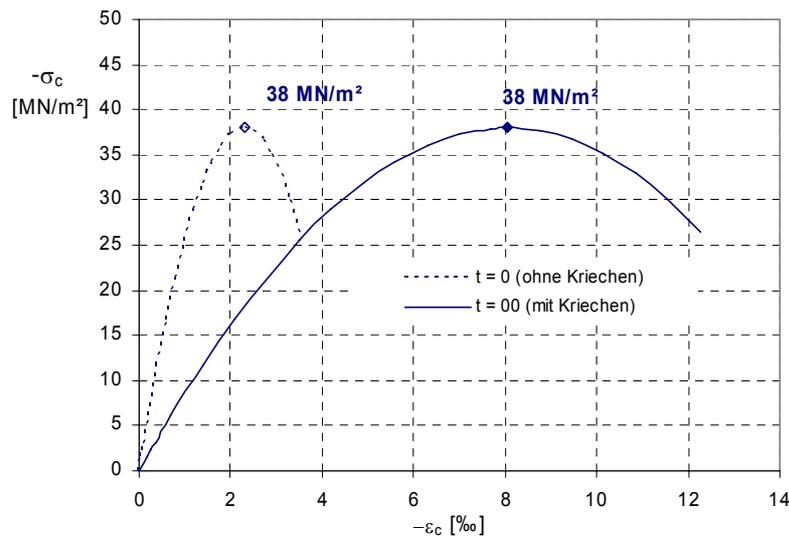
Für die rechnerische Untersuchung wird die in DIN 1045-1 vorgegebenen Spannungs-Dehnungslinien für den Beton (dort Bild 22) für Verformungsberechnungen angesetzt. Dieser Ansatz wurde aus Kurzzeitversuchen abgeleitet und beschreibt die das einachsige Verhalten des Betons mit Hilfe einer quadratischen Parabel. Die Anfangssteigung der Parabel entspricht dem Tangentenmodul  $E_{c0m}$  des Betons.



**Bild 15:** Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons unter Druckbelastung nach DIN 1045-1

### Kriechen

Zur Berücksichtigung des Langzeitverhaltens werden die Dehnungen mit dem Faktor  $(1 + \varphi)$  bzw.  $(1 + \varphi_{eff})$  multipliziert.



**Bild 16:** Spannungs-Dehnungsbeziehung für die Berechnung C 30/37 (mit und ohne Kriechen)  
Kriechzahl:  $\varphi = 2,5$

### 5.2.4 Zugfestigkeit des Betons

Die Zugfestigkeit des Betons wird bei der versteifenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen und bei der Bestimmung des Rissmomentes in Ansatz gebracht. Bezugswert ist die zentrische Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  gemäß DIN 1045-1, Tabelle 9.

z.B. C 30/37  $f_{ctm} = 2,9 \text{ MN} / \text{m}^2$

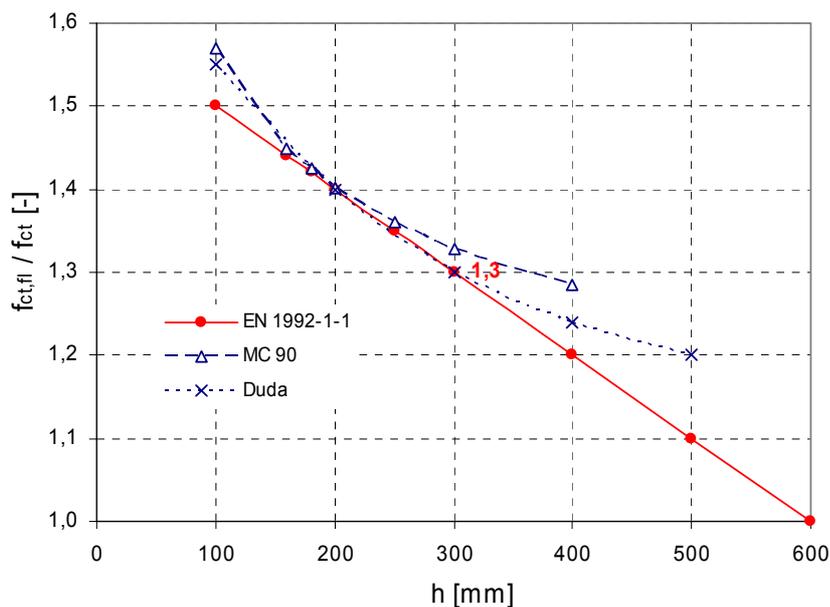
Bis zu ca. 90 % der Zugfestigkeit ist der Elastizitätsmodul des Betons für Zug- und Druckspannungen gleich. Daher kann für Zug- und Druckbeanspruchung der gleiche E-Modul angesetzt werden.

Durch den Maßstabseffekt kann die Biegezugfestigkeit insbesondere bei niedrigen Bauteilhöhen (Platten) deutlich höher sein als die zentrische Zugfestigkeit. Bild 17 zeigt unterschiedliche Ansätze im Vergleich. Für die nachfolgenden Berechnungen wird der Ansatz aus DIN EN 1992-1-1 verwendet:

$$f_{ctm,fl} = (1,6 - h/1000) \cdot f_{ctm} \geq f_{ctm}$$

mit  $h$  die Gesamthöhe des Bauteils in mm

$f_{ctm}$  Mittelwert der zentrischen Zugfestigkeit



**Bild 17:** Verhältnis zwischen Biegezug- und zentrischer Zugfestigkeit nach verschiedenen Ansätzen

z.B. für Bezugsplatte  $h = 300 \text{ mm}$  C 30/37:  $f_{ct,fl} = 1,3 \cdot 2,9 = 3,77 \text{ MN} / \text{m}^2$

Für  $h \geq 600 \text{ mm}$  gilt:  $f_{ct,fl} = f_{ctm}$

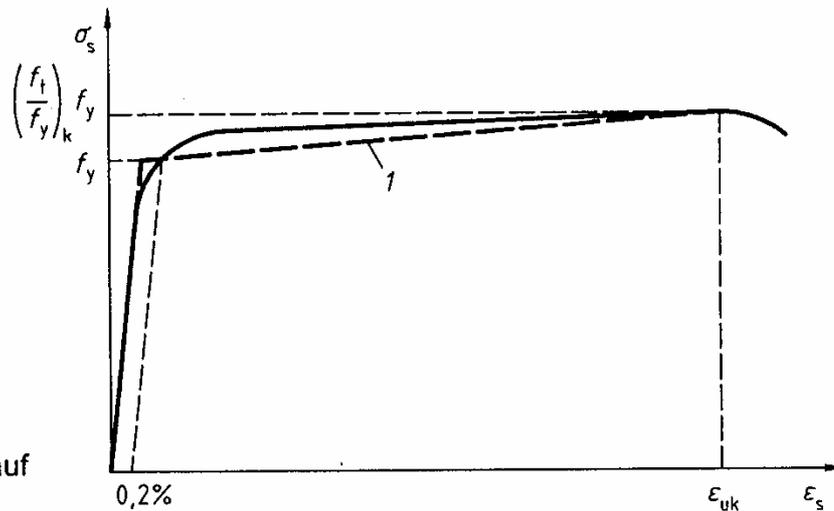
Die Biegezugfestigkeit spielt bei der Ermittlung des Rissmomentes  $M_{cr}$  eine Rolle. Für die versteifende Mitwirkung zwischen den Rissen ist die zentrische Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  maßgebend.

### 5.3 Materialeigenschaften des Betonstahls

Für den Betonstahl BSt 500 wird gemäß DIN 1045-1, Bild 26 die Spannungs-Dehnungslinie mit rechnerischen Mittelwerten angesetzt:

$$f_{yR} = 550 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$f_{tR} = 594 \text{ MN} / \text{m}^2$$



#### Legende

1 idealisierter Verlauf

**Bild 18:** Spannungs-Dehnungslinie des Betonstahls

Bei den Nachweisen im Gebrauchszustand wird die Streckgrenze in der Regel nicht erreicht, so dass im Wesentlichen der Elastizitätsmodul des Betonstahls Eingang in die Berechnung findet.

Elastizitätsmodul:  $E_s = 200\,000 \text{ MN} / \text{m}^2$

Die Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$  wird einheitlich für alle Berechnungen mit 25 ‰ angenommen. Dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse, da nur Beanspruchungsniveaus unterhalb des Fließens der Bewehrung betrachtet und ausgewertet werden.



**Rechenmodell für reine Biegung beim Rechteckquerschnitt**

a) ungerissener Bereich

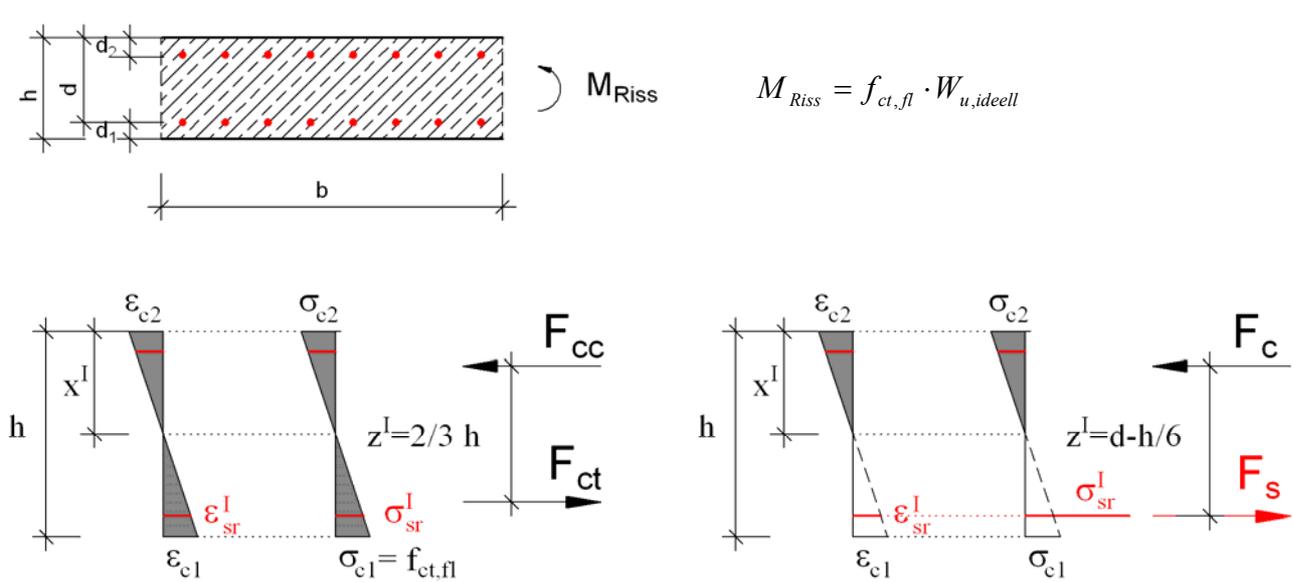
Da dem Beton keine Zugspannungen zugewiesen werden, reißt der Querschnitt im Rechenmodell unter Beanspruchung sofort auf. Um dennoch den Querschnitt entsprechend seiner Steifigkeit im ungerissenen Zustand abbilden zu können, wird die Stahlkennlinie so modifiziert, dass die Dehnungsebene für Beanspruchungen unterhalb der Risschnittgrößen möglichst wirklichkeitsnah abgebildet wird (Bild 20), d. h. die Dehnungen nehmen die Werte entsprechend dem ungerissenen Zustand an.. Die Modifizierung erfolgt im Rechenmodell mit

$$\sigma_{sr}^I = \frac{M_{Riss}}{A_s \cdot z} \quad \text{mit } z = d - \frac{h}{6} \quad z = 0,733 \cdot h \text{ (für } d = 0,9 \cdot h \text{)}$$

$$\varepsilon_{sr}^I = \frac{f_{ct,fl}}{E_{com}} \cdot \frac{d - h/2}{h/2} \quad \varepsilon_{sr} = 0,8 \cdot \frac{f_{ct,fl}}{E_{com}} \text{ (für } d = 0,9 \cdot h \text{)}$$

Der modifizierte Elastizitätsmodul für den Stahl beträgt im Rechenmodell:

$$E_{sm} = \frac{\sigma_{sr}^I}{\varepsilon_{sr}^I} = \frac{W_{u,ideell} \cdot h/2}{(d - h/6) \cdot A_s \cdot (d - h/2)} \cdot E_{com} \quad E_{sm} = 0,3156 \cdot \frac{b \cdot d}{A_s} \cdot E_{com} \text{ (für } d = 0,9 \cdot h \text{)}$$



a) ungerissener Zustand

$$x^I = h/2$$

$$z^I = \frac{2}{3} \cdot h = 0,6667 \cdot h$$

$$EI^I = E_{com} \cdot I_{ideell}$$

b) Rechenmodell

$$x^I \approx h/2$$

$$z^I \approx d - \frac{h}{6} \quad [\approx 0,733 \cdot h \text{ für } d = 0,9 \cdot h]$$

$$EI^I = \frac{M_{Riss}}{\kappa_{Riss}} \approx E_{com} \cdot I_{ideell}$$

**Bild 20:** Dehnungen und Spannungen unter dem Rissmoment (Zustand I)

Die im Rechenmodell ermittelte Dehnungsebene weicht mit diesem Ansatz nur geringfügig vom ungerissenen Zustand eines homogenen Querschnitts ab. Die sich aus der Dehnungsebene ergebende Krümmung  $\kappa^I$  und damit auch die Biegesteifigkeit sind nahezu identisch mit dem des homogenen Querschnittes mit ideellen Querschnittswerten.

Das Rissmoment  $M_{\text{Riss}}$  bei dem der Querschnitt in den gerissenen Zustand II übergeht, wird exakt getroffen. Da die Nachweise im Gebrauchszustand wesentlich davon beeinflusst sind, in wieweit Teile des Tragwerkes im Zustand I verbleiben, ist auf dieses Detail bei der Modellierung im Rahmen der numerischen Simulation besonders zu achten.

b) und c) Rissbildung und abgeschlossenes Rissbild

Reißt der Querschnitt auf, so wird die innere Zugkraft von der Bewehrung aufgenommen. Da jedoch der Beton infolge der Verbundspannungen zwischen den Rissen auf Zug mitwirkt, erhöht sich im Bereich zwischen den Rissen die Steifigkeit. Beim verschmierten Rissbild beträgt die mittlere Stahldehnung :

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_s^{\text{II}} - \Delta\varepsilon_{sm}$$

Der Abzugswert für den Bereich c) beträgt:

$$\Delta\varepsilon_{sm} = \beta_t \cdot (\varepsilon_{sr}^{\text{II}} - \varepsilon_{sr}^{\text{I}})$$

$$\text{Mit } \varepsilon_{sr}^{\text{II}} = \frac{M_{\text{Riss}}}{z^{\text{II}} \cdot A_s} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{sr}^{\text{I}} = \frac{f_{ct,fl}}{E_{c0m}} \cdot \frac{d-h/2}{h/2}$$

Man kann davon ausgehen, dass die Betonspannungen im Gebrauchszustand in der Regel im Anfangsbereich des Spannungs-Dehnungsdiagramms liegen wo der E-Modul nahezu konstant ist. Somit kann der Hebelarm  $z^{\text{II}}$  unter der Annahme einer linear-elastischen Spannungs-Dehnungslinie des Betons wie folgt ermittelt werden:

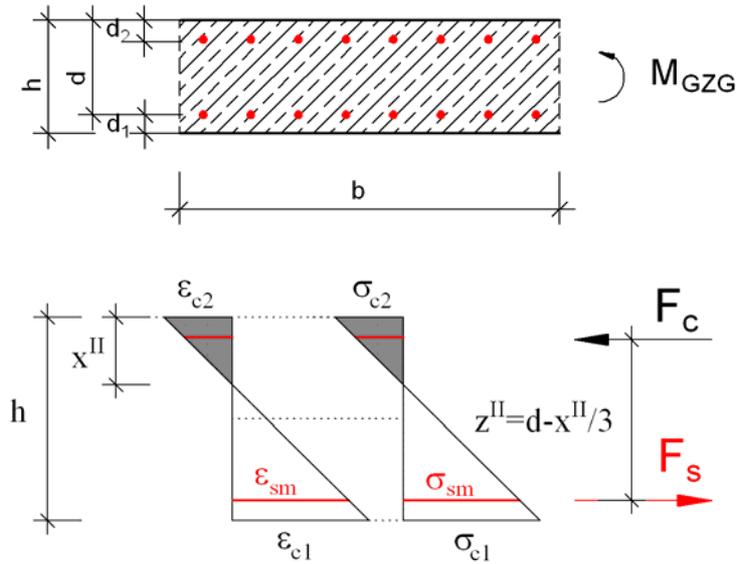
$$z^{\text{II}} = d - x^{\text{II}} / 3$$

$$\text{mit } x^{\text{II}} = \xi \cdot d$$

$$\xi = -\alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1}) + \sqrt{[\alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1})]^2 + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho_{s1} \cdot (1 + \rho_{s2} / \rho_{s1}) \cdot d_2 / d}$$

$$\alpha_E = E_s / E_{c0m}$$

In der Regel wird bei der Berechnung der Druckzonenhöhe  $x$  die Druckbewehrung vernachlässigt, da der Einfluss auf die Ergebnisse, wie Vergleichsrechnungen gezeigt haben, i. A. gering ist.



**Bild 21:** Dehnungen und Spannungen im gerissenen Bereich (Rechenmodell)

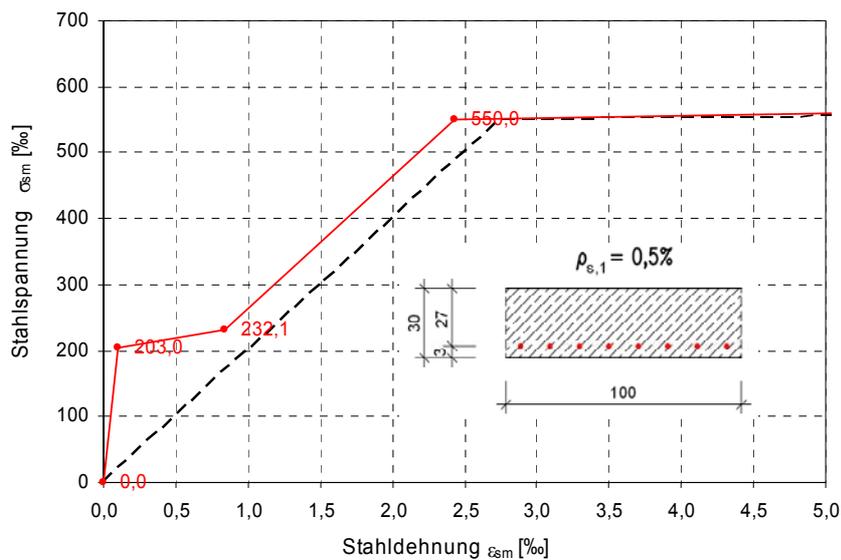
d) Fließen der Bewehrung

Im plastischen Bereich ergibt sich die mittlere Dehnung  $\epsilon_{sm}$  zu:

$$\epsilon_{sm} = \epsilon_{sy} - \beta_t \cdot (\epsilon_{sr}^{II} - \epsilon_{sr}^I) + \delta_d (1 - \sigma_{sr} / f_y) \cdot (\epsilon_s^{II} - \epsilon_{sy})$$

Bei den Untersuchungen im Gebrauchslastbereich spielt der plastische Bereich keine Rolle.

Bild 22 zeigt beispielhaft die im Rechenmodell verwendete modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Stahls für den Plattenquerschnitt 100/30/27.



**Bild 22:** Modifizierte Spannungs-Dehnungslinie für des Stahls (ohne Kriechen)

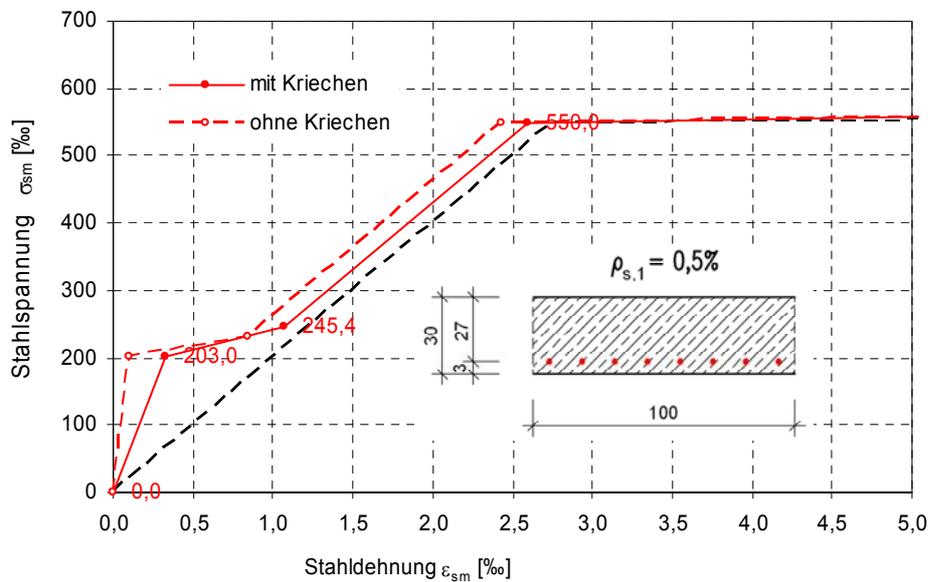
**Berücksichtigung des Kriechens bei der modifizierten Stahlkennlinie**

Im ungerissenen Bereich wird das Kriechen des Betons über eine Anpassung des Elastizitätsmoduls berücksichtigt. Das Rissmoment bleibt gleich, die zugehörigen Dehnungen vergrößern sich im ungerissenen Bereich um den Faktor  $(1 + \varphi)$ .

$$E_{c,eff} = \frac{E_{com}}{1 + \varphi}$$

Im gerissenen Bereich c) verringert sich die Mitwirkung des Betons durch das Verbundkriechen die Mitwirkung des Betons auf Zug ( $\beta_i = 0,25$ ). Im Zustand II wirkt sich das Kriechen nur auf die Betondruckzone aus. Die Druckzonenhöhe erhöht sich geringfügig und damit auch der Hebelarm z, so dass die Spannungen in der Bewehrung sich ebenfalls geringfügig erhöhen.

Bild 23 zeigt beispielhaft für den Plattenquerschnitt die verwendete modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Stahls.



Zeitpunkt t = 0			Zeitpunkt t = ∞		
	$\epsilon_{sm}$ [‰]	$\sigma_{sm}$ [MN/m <sup>2</sup> ]		$\epsilon_{sm}$ [‰]	$\sigma_{sm}$ [MN/m <sup>2</sup> ]
Punkt A	0,094	203,0	Punkt A	0,331	203,0
Punkt B	0,841	232,1	Punkt B	1,074	245,4
Punkt C	2,431	550,0	Punkt C	2,597	550,0
Punkt D	14,45	594,0	Punkt D	14,29	594,0
$\Delta\epsilon_{sm} = 0,4 \cdot (\epsilon_{sR}^{II} - \epsilon_{sR}^I) = 0,319$ ‰			$\Delta\epsilon_{sm} = 0,25 \cdot (\epsilon_{sR}^{II} - \epsilon_{sR}^I) = 0,153$ ‰		

**Bild 23:** Modifizierte Spannungs-Dehnungslinie des Stahls unter Berücksichtigung des Kriechens ( $\varphi = 2,5$ ), beispielhaft am Plattenquerschnitt

## **5.5 Verifikation des Rechenmodells**

Die Eignung des verwendeten Rechenmodells wurde durch die Nachrechnung zahlreicher Versuchsträger im Rahmen des Forschungsvorhabens [Mau 22] belegt. Insbesondere konnte die belastungsabhängige Steifigkeit der nachgerechneten Versuchsträger in guter bis sehr guter Übereinstimmung nachvollzogen werden. Damit ist eine wesentliche Grundvoraussetzung für die wirklichkeitsnahe Ermittlung der Verformungen gegeben.

## 6 Untersuchungen von Stahlbetonplatten

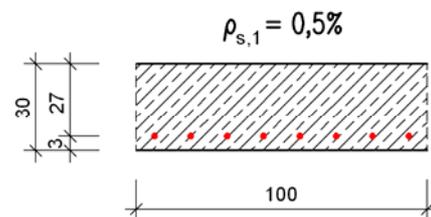
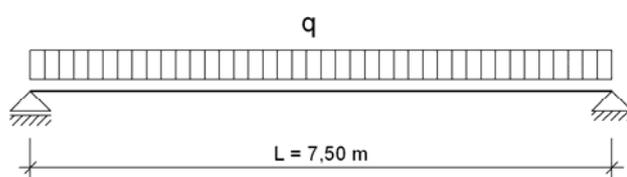
### 6.1 Bezugssystem Einfeldplatte

Für die Untersuchung von Stahlbetonplattensystemen wird das in Bild 24 dargestellte System als Bezugssystem gewählt. Dabei handelt es sich um ein verhältnismäßig schlankes System, wie es bei Platten – insbesondere bei großen Spannweiten nicht unüblich ist. Dabei wird vereinfacht von einer freien Verdrehbarkeit an den Auflagern ausgegangen.

Bezugssystem/Platte

$b/h/d = 100/30/27$

C 30/37



**Systemparameter:**

Schlankheit:  $L/h = 25$   
bzw.  $L/d = 27,8$

Bewehrungsgrad:  $\rho_s = 0,50\%$

Systemlänge:  $L = 7,50 \text{ m}$

**Belastungsniveaus:**

$$q_{Ed} = 21,2 \text{ kN / m}$$

$$q_{rare} = 15,1 \text{ kN / m}$$

$$q_{perm} = 12,5 \text{ kN / m}$$

**Parameter für Verformungen:**

E-Modul:  $E_{com} = 31900 \text{ MN / m}^2$

Kriechen:  $\varphi_{\infty} = 2,5$

Schwinden:  $\varepsilon_{s\infty} = 0,5 \text{ ‰}$

**Rissmoment:**

$$M_{cr} = 60,3 \text{ kNm}$$

$$f_{ct,fl} = 3,77 \text{ MN / m}^2$$

$$M_{cr} / M_{Ed} = 40\%$$

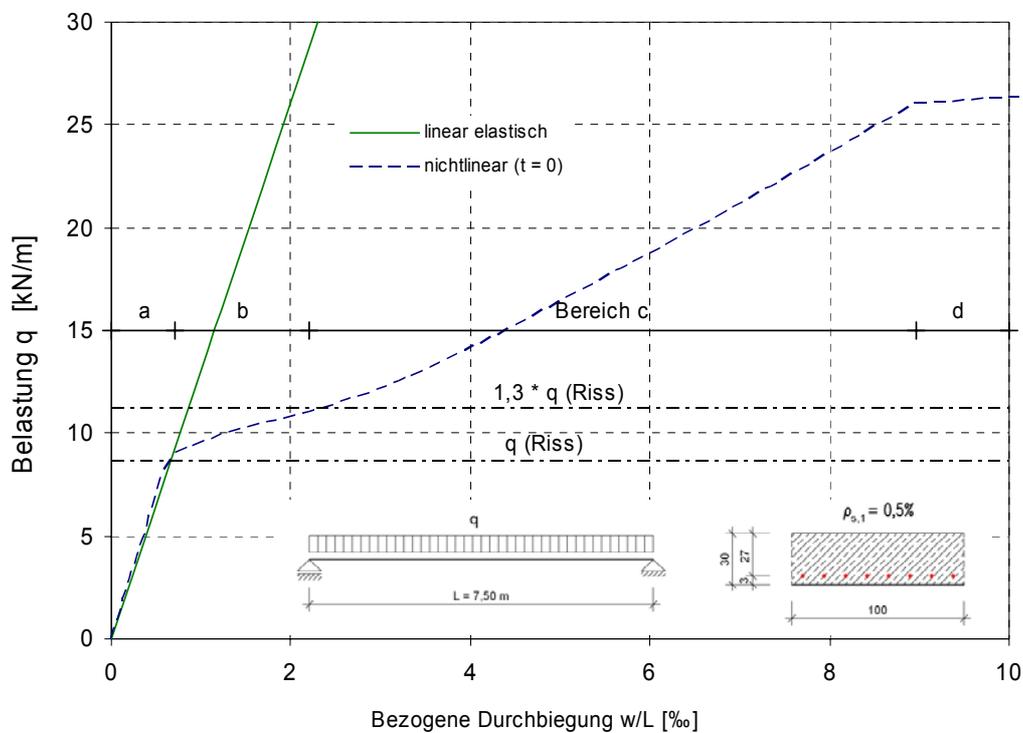
**Bild 24:** Bezugssystem für die Untersuchungen an Platten

Bei den nichtlinearen Berechnungen wird die Last schrittweise bis zum Beginn des Fließens der Bewehrung gesteigert. Die zugehörigen Verformungen ( $w$  = Durchbiegung in Feldmitte,  $\alpha$  = Auflagerverdrehung) werden ermittelt. Da sich die Untersuchungen auf den Gebrauchszustand beziehen, wird auf die genaue Berechnung der Traglast verzichtet. Die Auswertung erfolgt zum Zeitpunkt  $t = 0$  und zum Zeitpunkt  $t = \infty$ .

**Zeitpunkt  $t = 0$ :**

Die Last-Verformungsdiagramme zeigen die für den Stahlbeton typischen Verläufe mit den drei Bereichen: a) ungerissen, b) Rissbildung, c) abgeschlossenes Rissbild und d) Fließen (Bild 25). Dabei sind die Diagramme für die Auflagerverdrehung und Durchbiegung in Feldmitte affin. Das Verhältnis  $\alpha/(w/L) \approx 3,0$  ist bei der nichtlinearen Berechnung etwas kleiner als nach linear-elastischer Berechnung mit konstanter Biegesteifigkeit längs des Stabes  $\alpha/(w/L) = 3,2$ .

Die Biegesteifigkeit im Zustand I sowie das Rissmoment werden gut abgebildet. Durch die Anpassung des inneren Hebelarms  $z=d-h/6$  kommt es zu einer geringfügigen, aber unbedeutenden Überschätzung der Steifigkeit des ungerissenen Querschnitts, dafür wird aber das Rissmoment exakt getroffen.



**Bild 25:** Last-Durchbiegungs-Diagramm der Bezugsplatte zum Zeitpunkt  $t = 0$

**Zeitpunkt  $t = \infty$** 

Mit dem Rechenprogramm werden die Verformungen zum Zeitpunkt  $t = \infty$  unter Berücksichtigung des Kriechens ermittelt. Für ein Lastniveau  $\max. M_{\text{Feld}} \leq M_{\text{cr}}$  ergeben sich die gleichen Durchbiegungen wie nach linear-elastischer Berechnung mit  $E_{c,\text{eff}} = E_{c0m}/(1+\varphi)$ . Die Biegesteifigkeit im Anfangsbereich ist ca.  $(1+\varphi)$ -fach kleiner als die Biegesteifigkeit im Zustand I zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Die Knickpunkte der Kurve sind nicht mehr so ausgeprägt wie zum Zeitpunkt  $t = 0$ , da sich die Steifigkeiten des ungerissenen und des gerissenen Querschnitts annähern.

Kriecherzeugend ist nur der ständig vorhandene Lastanteil  $q_{\text{perm}}$ . Wird kurzzeitig eine höhere Last aufgebracht, so ist nur der Lastanteil aus  $q_{\text{perm}}$  kriecherzeugend. Die Verformungen infolge Kriechen des Betons unter quasi-ständiger Belastung betragen:

$$w_{c,\text{perm}} = w_{\text{perm}}(t = \infty) - w_{\text{perm}}(t = 0)$$

$$\alpha_{c,\text{perm}} = \alpha_{\text{perm}}(t = \infty) - \alpha_{\text{perm}}(t = 0)$$

Die so ermittelten Kriechverformungen werden zu den Verformungen zum Zeitpunkt  $t=0$  addiert:

$$w_q(t = \infty) = w_q(t = 0) + w_{c,\text{perm}}$$

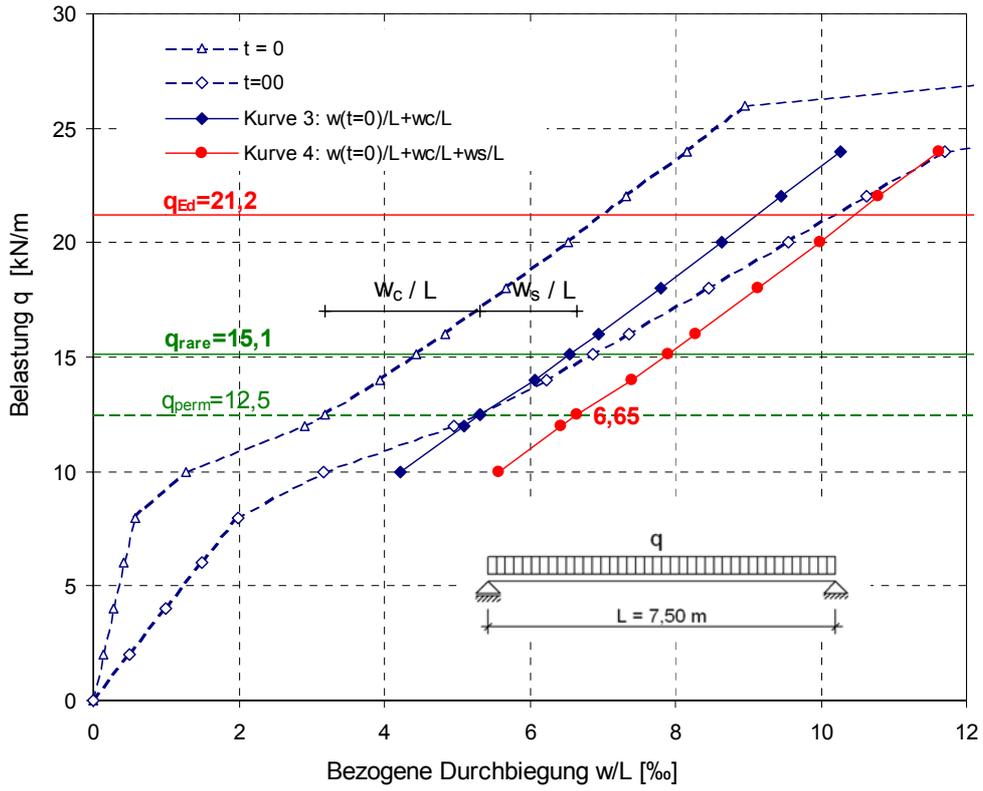
$$\alpha_q(t = \infty) = \alpha_q(t = 0) + \alpha_{c,\text{perm}}$$

**Schwinden**

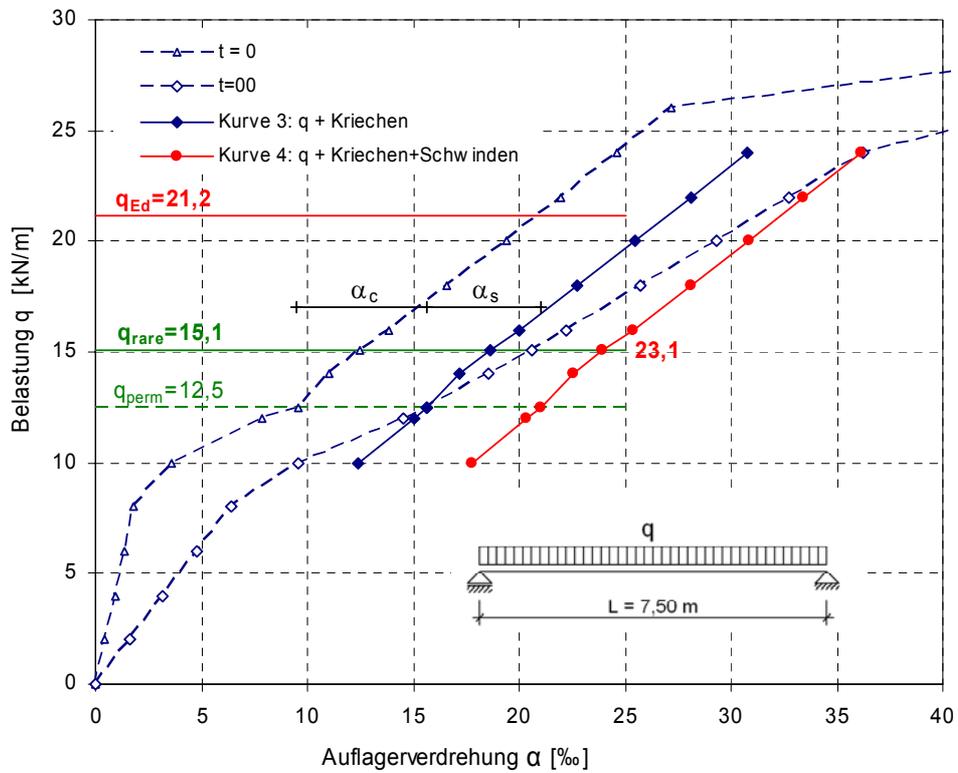
In einem weiteren Schritt werden die gemäß Abschnitt 5.2.2 ermittelten Schwindverformungen  $w_s$  bzw.  $\alpha_s$  zu den mit dem Rechenprogramm berechneten Verformung nach nichtlinearem Verfahren addiert.

$$w_q(t = \infty) = w_q(t = 0) + w_{c,\text{perm}} + w_s$$

$$\alpha_q(t = \infty) = \alpha_q(t = 0) + \alpha_{c,\text{perm}} + \alpha_s$$



**Bild 26:** Last-Durchbiegungs-Diagramm für den Zeitpunkt  $t = \infty$

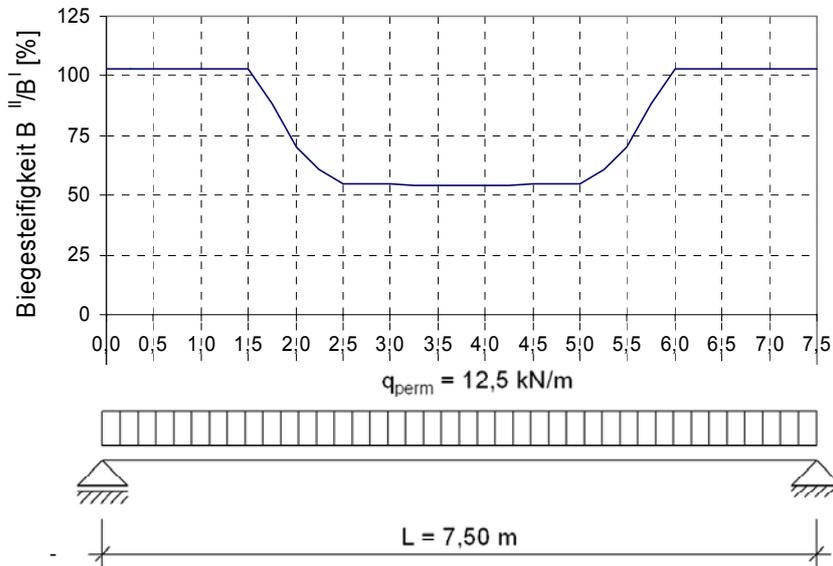


**Bild 27:** Auflagerverdrehung zum Zeitpunkt  $t = \infty$

**Biegesteifigkeiten und gerissene Bereiche unter der quasi-ständigen Belastung**

Bild 28 zeigt die Verteilung der Biegesteifigkeiten der Bezugsplatte über die Bauteillänge. Die Ausdehnung des gerissenen Bereichs der nichtlinearen Berechnung kann bestimmt werden zu:

$$t = \infty : \quad L_2 / L \approx 0,6$$



**Bild 28:** Biegesteifigkeiten der Bezugsplatte unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination

**Tabelle 3:** Ergebnisse Platte: Bezugssystem (L/H = 25, ρ<sub>s</sub> = 0,5%)

Einwirkungs-kombination	w	w / L	α	
	[mm]	[‰]	[‰]	
Quasiständig t = ∞	40	5,31	15,6	
Schwinden	10	1,34	5,36	
Quasiständig + Schwinden	50	<b>6,65 &gt; 4,0</b>	21,0	
Selten t = 0	33	4,44	12,5	
Quasiständig t = 0	24	3,19	9,54	
Selten*) t = ∞	49	6,56	18,5	
Selten*) + Schwinden t = ∞	59	7,90	<b>23,9</b>	23,9 = 3,6 * 6,65

\*) kriecherzeugend ist nur der quasi-ständige Lastanteil

Die Durchbiegung unter quasiständiger Einwirkungskombination ist **nicht** ohne weitere Maßnahmen (z.B. Überhöhung) kleiner als  $L/250 = 4 \text{ ‰}$ . Der auftretende Verdrehwinkel unter der seltenen Kombination beträgt ca. **24 ‰**.

Es fällt auf, dass der Anteil der Schwindverformungen an der Gesamtverformung relativ groß ist. (ca. 20 bis 25 %).

$$w_s / L(\text{quasiständig}) = 1,34 = 20\% \cdot w_{perm} / L = 20\% \cdot 6,65$$

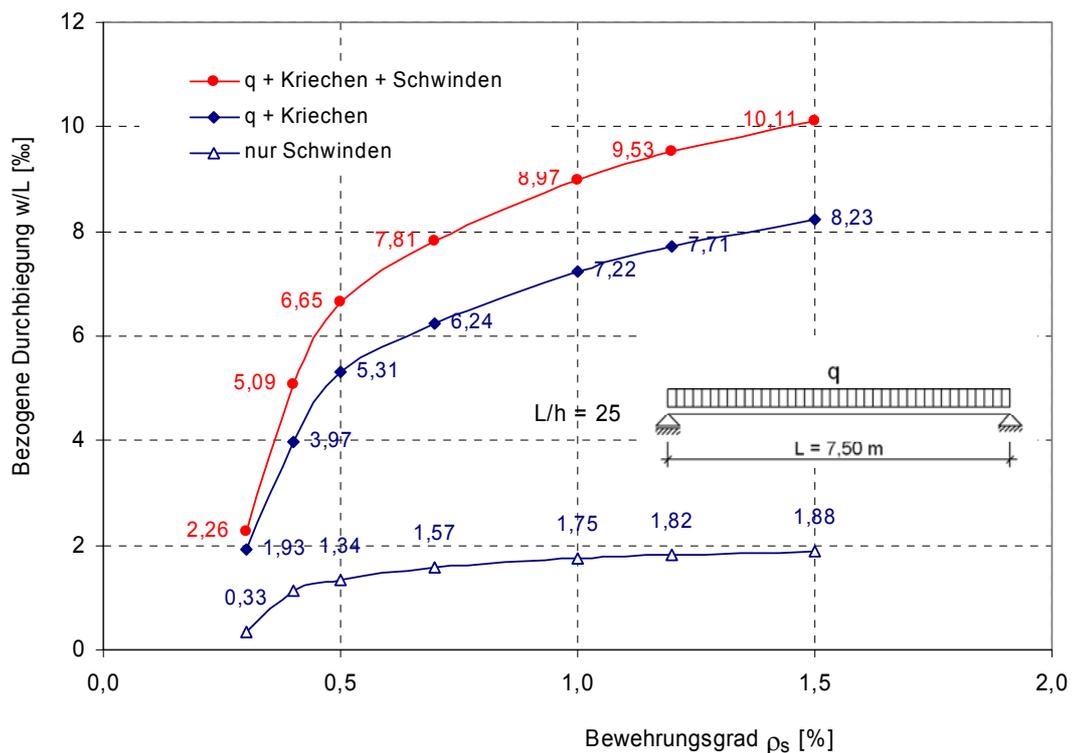
$$\alpha_s(\text{quasiständig}) = 5,36 \approx 25\% \cdot \alpha_{perm} = 25\% \cdot 20,97$$

Berechnet man zum Vergleich die Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t=0$  linear elastisch unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination, so ergibt sich diese zu 6,9 mm bzw.  $w/L=0,92 \text{ ‰}$

$$w_{perm}(t = \infty) = k \cdot w_{el,perm}(t = 0) \quad k \approx 7!$$

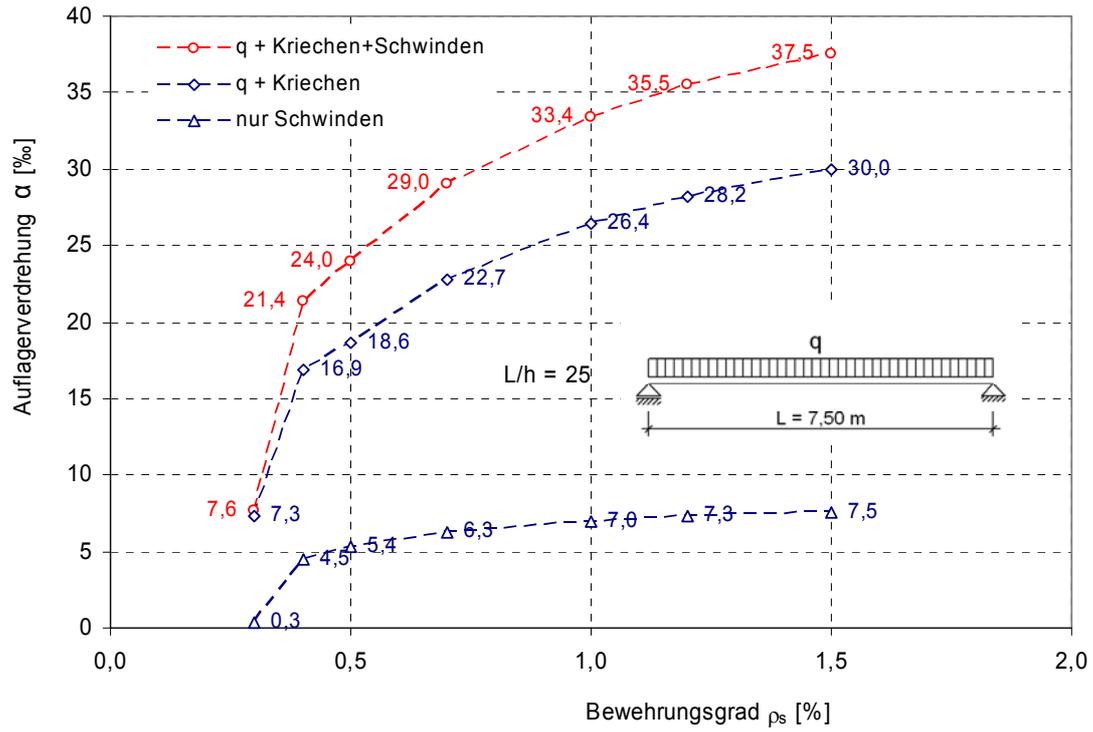
## 6.2 Parameterstudie Bewehrungsgrad

Setzt man voraus, dass die statisch erforderliche Bewehrung aus der Biegebemessung im GZT eingelegt wird, so steigt mit zunehmendem Bewehrungsgrad die aufnehmbare Last  $q_{Ed}$  des Systems an und damit die Belastungsniveaus der seltenen und quasiständigen Einwirkungskombination ( $f_{rare} = 1,4$ ,  $f_{perm} = 1,7$ ). Die Verformungen unter der quasiständigen bzw. seltenen Einwirkungskombination nehmen dementsprechend mit zunehmendem Bewehrungsgrad zu, u. a. da sich die Ausdehnung der gerissenen Bauteilbereiche vergrößert (Bild 29 und Bild 30). Der Kurvenverlauf ist durch einen steilen Ast (bis ca.  $\rho_s = 0,5\%$ ) und einen daran anschließenden flacher verlaufenden Ast gekennzeichnet. Beim Knickpunkt (ca.  $\rho_s = 0,5\%$ ) wird unter quasi-ständiger Belastung das abgeschlossene Rissbild erreicht.



**Bild 29:** Bezogene Durchbiegung,  $t = \infty$ , quasiständige Einwirkung

Die Auswertung der Auflagerverdrehung erfolgt unter der seltenen Einwirkungskombination, wobei nur die quasi-ständige Belastung kriecherzeugend ist. Der charakteristische Knick liegt bei einem Bewehrungsgrad von  $\rho_s = 0,4\%$ , da durch die seltene Einwirkungskombination schon bei einem Bewehrungsgrad  $\rho_s = 0,4\%$  das abgeschlossene Rissbild erreicht wird.



**Bild 30:** Auflagerverdrehung,  $t = \infty$ , seltene Einwirkungskombination

### Ausdehnung der gerissenen Bauteilbereiche

Die Ausdehnung der gerissenen Bereiche ist im Wesentlichen vom Bewehrungsgrad abhängig. Weitere Parameter sind der Belastungsgrad und die Betongüte.

- Bewehrungsgrad
- Belastungsgrad:  $f_{perm}$
- Betongüte  $f_{cm}$  und  $f_{ctm}$

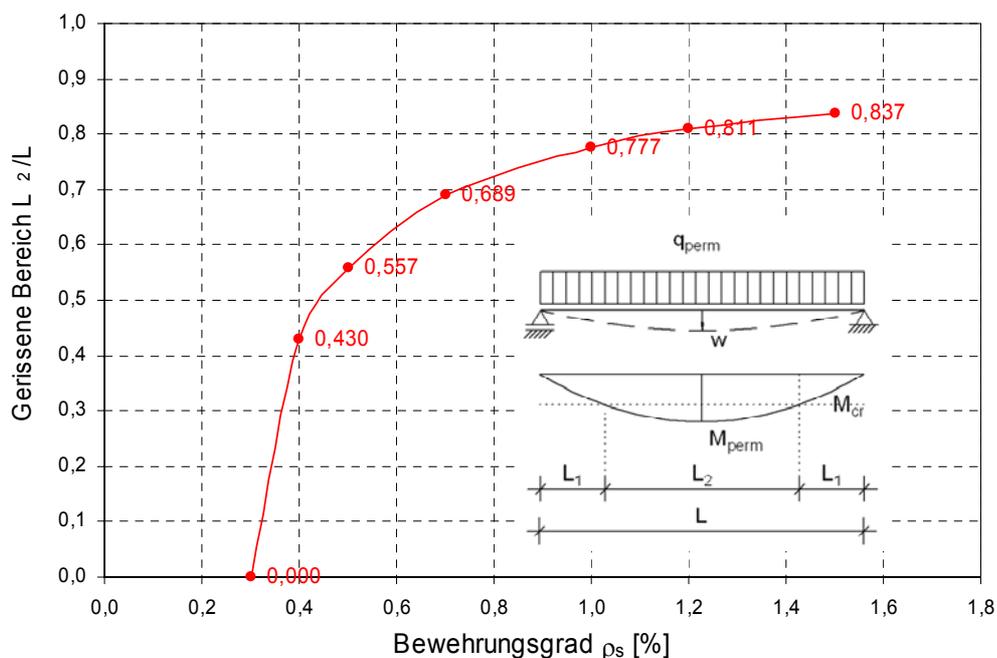
Unter Annahme von Bruttoquerschnittswerten und mit der Vereinfachung von  $d=0,9h$  kann man herleiten:

$$L_2 / L = \sqrt{1 - \frac{M_{cr}}{M_{perm}}} \quad \text{mit } M_{cr} = f_{ctm} \cdot \frac{b \cdot h^2}{6} \quad \text{und} \quad d = 0,9 \cdot h$$

$$L_2 / L = \sqrt{1 - \frac{f_{perm} \cdot f_{ctm}}{6 \cdot 0,81 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{\mu_{Ed}}}$$

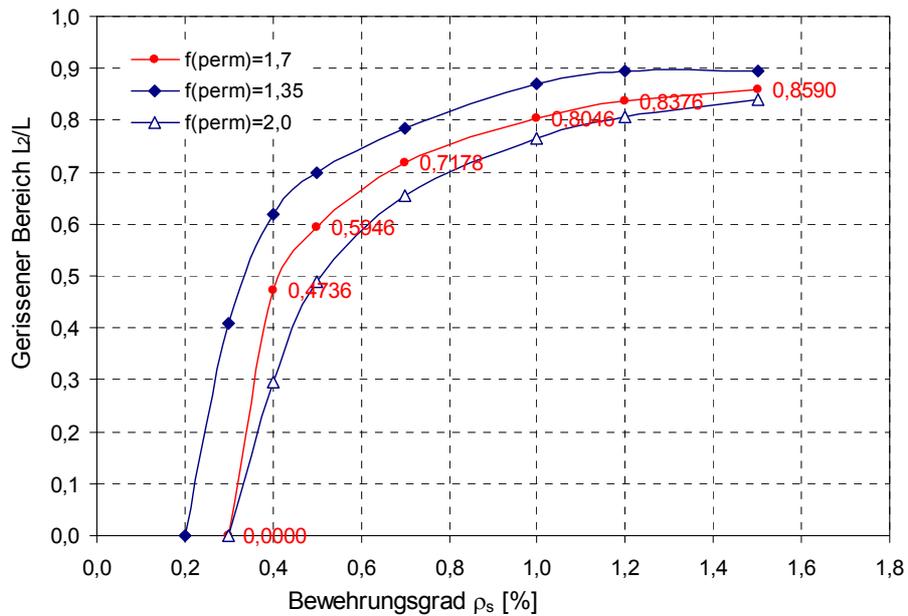
Bild 31 zeigt die Ausdehnung der gerissenen Bereiche unter quasi-ständiger Belastung nach nichtlinearer Berechnung mit dem Rechenmodell. Bei einem Bewehrungsgrad von  $\rho_s=0,3\%$  wird durch das Biegemoment aus der quasi-ständigen Belastung das Rissmoment nicht unterschritten.

$$L_1 : M \leq M_{cr} \qquad L_2 : M > M_{cr}$$



**Bild 31:** Ausdehnung der gerissenen Bereiche für C 30/37,  $f_{ct,fl}=3,77 \text{ MN/m}^2$ ,  $f_{perm} = 1,7$

Variiert man den Belastungsgrad, so ergeben sich gegenüber der Bezugskurve mit  $f_{\text{perm}}=1,7$  leicht verschobene Kurven. Mit  $f_{\text{perm}}=1,35$  liegt der Fall vor, dass nur Eigengewicht und keine Verkehrslast abzutragen ist. In dem Fall ist  $q_{\text{rare}} = q_{\text{perm}}$ . Man erkennt, dass unter der seltenen Einwirkungskombination die Ausdehnung der gerissenen Bereich größer ist.



**Bild 32:** Einfluss des Belastungsfaktors auf die Ausdehnung des gerissenen Bereichs

### Erhöhung der statisch erforderlichen Bewehrung

Die vorangegangene Betrachtungsweise gilt unter der Voraussetzung, dass die betrachteten Belastungsniveaus selten und quasi-ständig in Relation zur Bemessungslast stehen (Faktoren:  $f_{rare}=1,4$  und  $f_{perm} = 1,7$ ). Da mit dem Bewehrungsgrad der zugehörige Bemessungswert der Last  $q_{Ed}$  steigt, steigen auch die Belastungsniveaus der seltenen und quasi-ständigen Einwirkungskombination.

Betrachtet man hingegen zwei Systeme mit unterschiedlichem Bewehrungsgrad ( $\rho_s=0,5\%$  und  $\rho_s=1,0\%$ ) unter dem gleichen Belastungsniveau, so weist das System mit höherem Bewehrungsgrad deutlich geringere Verformungen auf. Die Verformungen können somit durch Anordnung von mehr Bewehrung als statisch erforderlich ist, vermindert werden. Wie Bild 33 zeigt kann bei dem Bezugssystem mit dem statisch erforderlichen Bewehrungsgrad von 0,5% durch Erhöhung der Bewehrung die Durchbiegung stark verringert werden. Durch die Bewehrungserhöhung ist das System im GZT stark überbemessen ( $q_{Ed} (1,0\%) = 38,3 \text{ kN/m} = 1,78 \cdot q_{Ed} (0,5\%) = 21,5 \text{ kN/m}$ ).

$$w / L_{\infty,perm} (\rho_s = 0,5\%) = 5,31 \quad (q + \text{Kriechen})$$

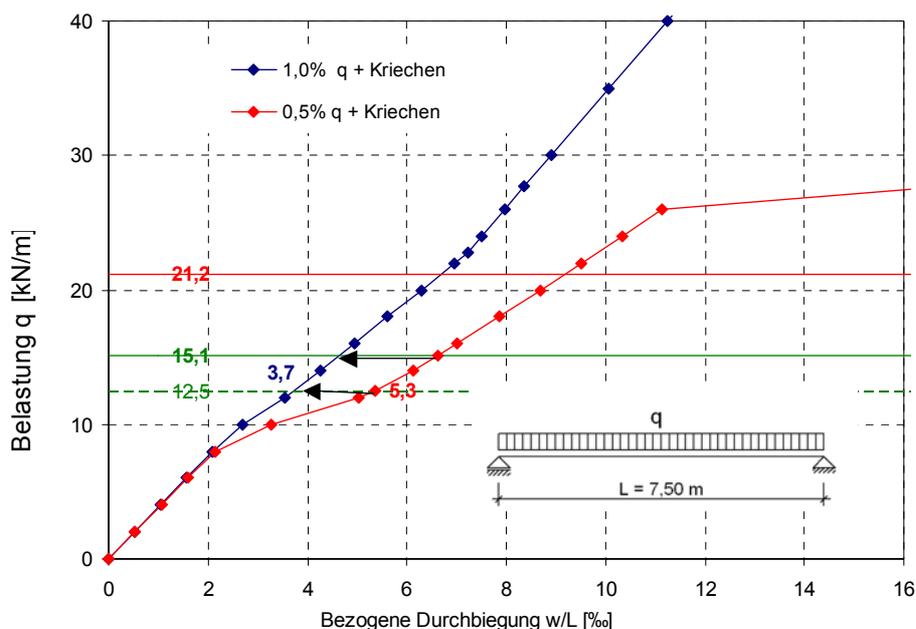
$$w / L_{\infty,perm} (\rho_s = 1,0\%) = 3,72 \quad (q + \text{Kriechen})$$

Die Durchbiegung infolge Schwinden ändert sich durch die Erhöhung des Bewehrungsgrades nicht wesentlich. Mit Schwinden ergäbe sich somit:

$$w / L_{\infty,perm} (\rho_s = 0,5\%) = 5,31 + 1,34 = 6,65 \quad (q + \text{Kriechen} + \text{Schwinden})$$

$$w / L_{\infty,perm} (\rho_s = 1,0\%) = 3,72 + 1,34 = 5,06 = 76\% \cdot 6,65 \quad (q + \text{Kriechen} + \text{Schwinden})$$

Zur Einhaltung der geforderten Beschränkung des Durchhangs auf  $w/L < 4$  ist in diesem Fall trotzdem noch eine Überhöhung des Bauteils erforderlich.



**Bild 33:** Bezogene Durchbiegung ( $t = \infty$ ) bei Erhöhung der Bewehrung von  $\rho_s = 0,5\%$  auf  $\rho_s = 1\%$

### 6.3 Parameterstudie Systemlänge

Um den Einfluss der absoluten Systemlänge auf die bezogenen Verformungen zu untersuchen werden nachfolgende Systeme untersucht und ausgewertet:

$$L = 5\text{ m} \quad \rho_s = 0,5\% \quad \rho_s = 1,0\%$$

$$L = 10\text{ m} \quad \rho_s = 0,5\% \quad \rho_s = 1,0\%$$

Die Schlankheit  $L/h = 25$  wurde bei allen Systemen beibehalten.

**L=7,50m h = 0,30m L/h=25**

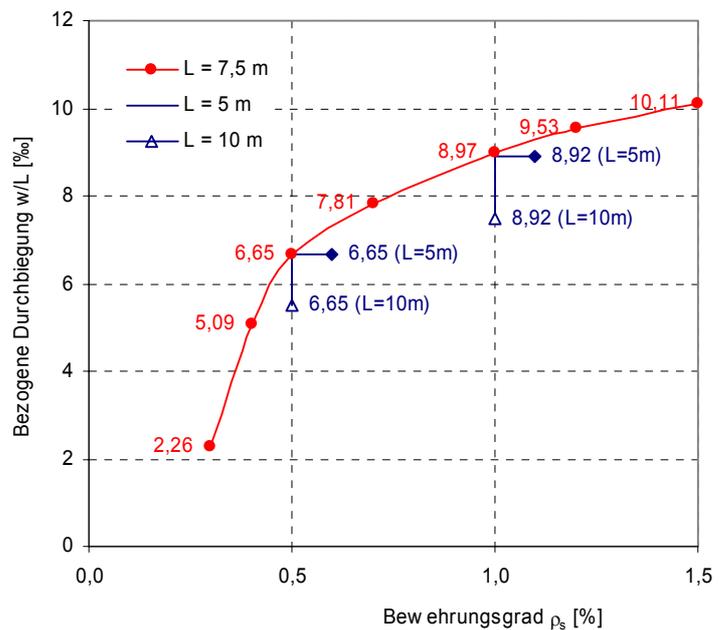
	quasiständig	Schwinden	quasiständig
	t = 00		+Schwinden
	w/L	w/L	w/L
$\rho_s$ [%]	[‰]	[‰]	[‰]
0,30	1,93	0,33	2,26
0,40	3,97	1,12	5,09
0,50	5,31	1,34	6,65
0,70	6,24	1,57	7,81
1,00	7,22	1,75	8,97
1,20	7,71	1,82	9,53
1,50	8,23	1,88	10,11

**L=5m h = 0,20m L/h=25**

0,50	5,31	1,34	6,65
1,00	7,17	1,75	8,92

**L=10 m h = 0,40m L/h=25**

0,50	5,31	1,34	6,65
1,00	7,17	1,75	8,92



**Bild 34:** Ergebnisse Variation Systemlänge

Die entsprechenden Punkte in Bild 34 fallen praktisch aufeinander. Die Systemlänge hat bei sonst gleichen Parametern ( $\rho_s$ ;  $L/h$ ) danach keinen Einfluss auf die bezogenen Verformungen infolge Last (inkl. Kriechen). Gleiches gilt für die Verformungen aus Schwinden.

Eine Schlankheit von  $L/h=25$  ist bei Platten durchaus nicht unüblich. Daher verwundert es zunächst, dass die Verformungen selbst bei einem Bewehrungsgrad von nur 0,5% und entsprechender zugehöriger Belastung relativ groß sind:

$$w_{perm} / L = 5,31\text{‰} + 1,34\text{‰} = 6,65\text{‰} \gg 4\text{‰}$$

D. h. das Bauteil ist nur mit einer Überhöhung herstellbar.

Daher werden im Folgenden zwei Systeme des Wohnungsbaus mit kleineren Spannweiten untersucht:

**Stahlbetondecke A:** C 30/37

System: Einfeldträger mit  $L = 5 \text{ m}$   $L/h=25$   $L/d \approx 29$

Querschnitt:  $b/h/d=100/20/17$

Belastung:  $g_k = 0,2 \cdot 25 + 1,5 = 6,5 \text{ kN/m}^2$

$$q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2 \quad \psi_2 = 0,3 \quad f_{perm} = 1,66$$

Die Bemessung für das maximale Moment in Feldmitte ergibt:

$$\mu_{Ed} = 0,0749 \quad \rho_s = 0,30\%$$

Die Ermittlung der bezogenen Durchbiegung in Feldmitte nach einem vereinfachten Verfahren (Abschnitt 4.2) ergibt:

$$w_{perm} / L = 1,90\text{‰} + 0,34\text{‰} = 2,24\text{‰} < 4\text{‰} \quad w_{perm} = L / 446$$

⇒ Die zulässigen Durchbiegungen sind eingehalten!

Dieses Ergebnis für  $L/h=25$  sowie  $\rho_s=0,3\%$  kann auch Bild 34 entnommen werden.

**Stahlbetondecke B:** C 30/37

System: Einfeldträger mit  $L = 6 \text{ m}$   $L/h=25$   $L/d \approx 29$

Querschnitt:  $b/h/d=100/24/21$

Belastung:  $g_k = 0,24 \cdot 25 + 1,5 = 7,5 \text{ kN/m}^2$

$$q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2 \quad \psi_2 = 0,3 \quad f_{perm} = 1,62$$

$$\mu_{Ed} = 0,0788 \quad \rho_s = 0,31\%$$

$$w_{perm} / L = 2,17\text{‰} + 0,30\text{‰} = 2,47\text{‰} < 4\text{‰} \quad w_{perm} = L / 405$$

⇒ Die zulässigen Durchbiegungen sind eingehalten!

In beiden Fällen sind die Anforderungen hinsichtlich der Durchbiegungsbegrenzung eingehalten. Dies liegt daran, dass der Beanspruchungsgrad der Systeme niedrig ist, was sich durch den niedrigen Bewehrungsgrad von  $\rho_s=0,3\%$  ausdrückt. Bei solch niedrigen Bewehrungsgraden befindet sich das Bauteil über die ganze Länge im Zustand I ( $M_{perm} < M_{cr}$ ).

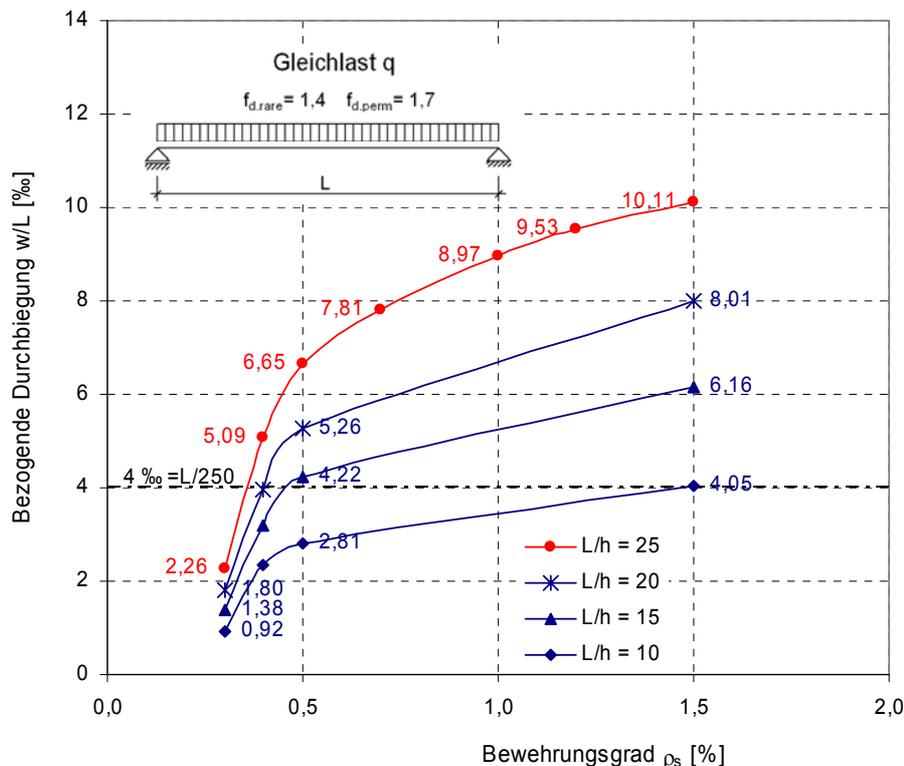
Ist dies nicht der Fall, so ergeben sich auch bei geringen Spannweiten große Verformungen. So wurde für die in [Fri 13] untersuchte Platte mit einer Spannweite von  $L = 4 \text{ m}$  eine bezogene Durchbiegung von  $w/L = 8,5 \text{ ‰}$  nachgewiesen, obwohl das Kriterium  $l_i/d \leq 150/l_i$  eingehalten war und  $l_i/d = 37$  nur geringfügig überschritten war. Der Bewehrungsgrad der untersuchten Platte lag bei  $\rho_s = 0,64\%$ .

## 6.4 Parameterstudie Schlankheit

Die Haupteinflussgrößen für die Beurteilung der zu erwartenden Verformungen sind die Parameter Schlankheit und Bewehrungsgrad. Bei der nachfolgend durchgeführten Variation der Schlankheit werden ebenfalls die Bewehrungsgrade variiert. Dadurch ergibt sich je Schlankheit eine Kurve.

Da die Systemlänge von untergeordneter Bedeutung ist, wird der untersuchte Querschnitt beibehalten und die Systemlänge  $L$  variiert. Untersucht werden:

$L = 3,0 \text{ m}$	$L/h = 10$	$L/d = 11,1$	
$L = 4,5 \text{ m}$	$L/h = 15$	$L/d = 16,7$	
$L = 6,0 \text{ m}$	$L/h = 20$	$L/d = 22,2$	
$L = 7,50 \text{ m}$	$L/h = 25$	$L/d = 27,8$	(Bezugssystem)

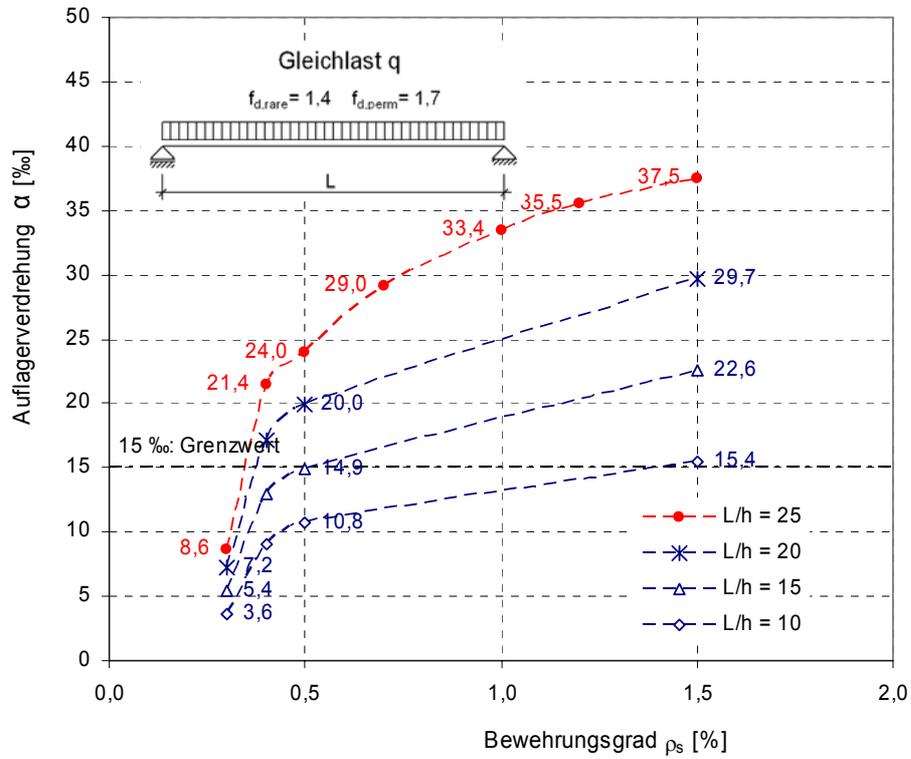


**Bild 35:** Bezogene Durchbiegung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und der Schlankheit  $L/h$  (quasi-ständige Einwirkungskombination)

Durch die Variation des Bewehrungsgrades ergibt sich der typische zunächst stark ansteigende und anschließend abknickende und flacher ansteigende Kurvenverlauf, als Folge der zugehörigen Ausdehnung der gerissenen Bereiche (Bild 31). Der Bewehrungsgrad ist proportional zur Belastung. Bei einem Bewehrungsgrad von 0,3% bleibt der Querschnitt über die gesamte Bauteillänge im Zustand I.

Die Werte der Einzelkurven sind unmittelbar von der Schlankheit abhängig. Die Höhe  $h$  bzw.  $d$  des Querschnittes geht sowohl in die Biegesteifigkeit des ungerissenen, als auch des gerissenen Querschnittes ein.

Die Auswertung der Auflagerverdrehung ergibt ähnliche Verläufe wie bei der Betrachtung der Durchbiegung in Feldmitte. Im Unterschied zur Durchbiegung, die unter der quasi-ständigen Einwirkung betrachtet wird, ergibt sich bei der Auflagerverdrehung (Auswertung unter der seltenen Einwirkung) der Knickpunkt beim Bewehrungsgrad von  $\rho_s = 0,4\%$ .

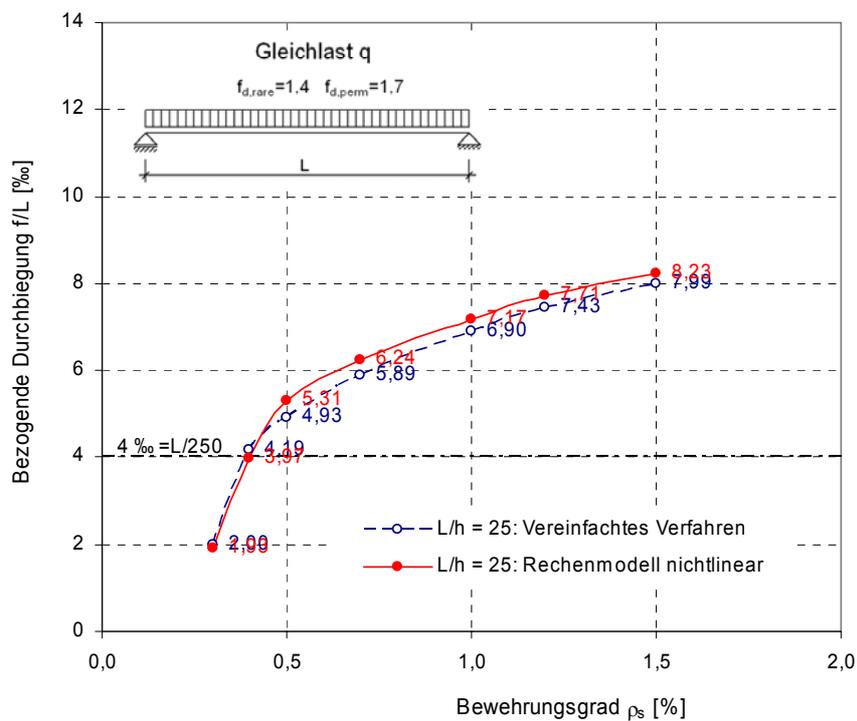


**Bild 36:** Auflagerverdrehung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und der Schlankheit  $L/h$  (seltene Einwirkungskombination)

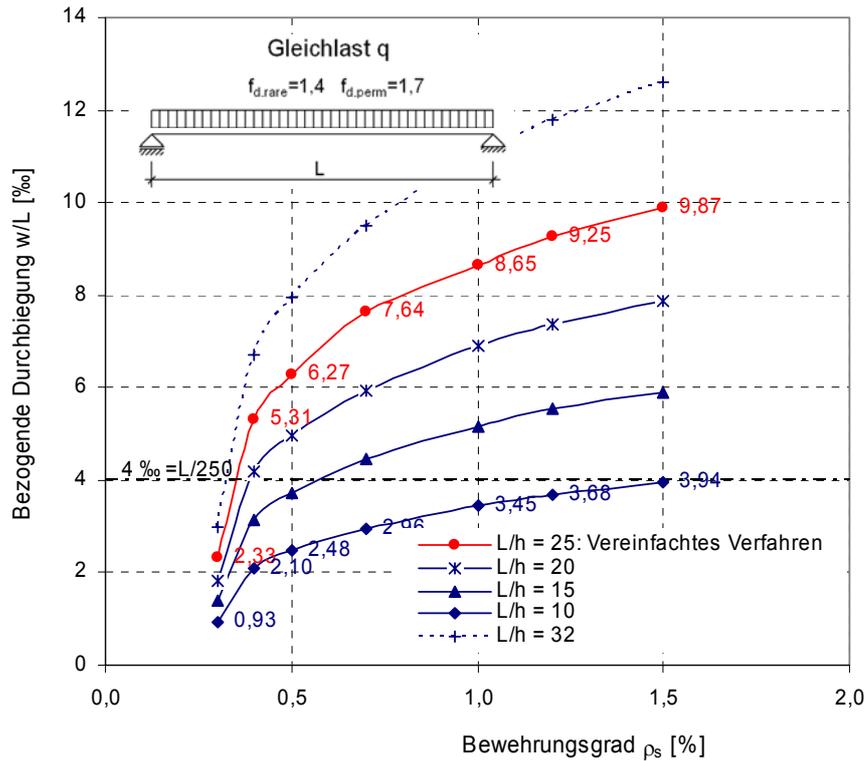
## 6.5 Erstellung der Diagramme mit dem ‚Vereinfachten Verfahren‘

Alternativ zur nichtlinearen Berechnung können die Durchbiegungen infolge äußerer Last beispielsweise mit dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen „Vereinfachten Verfahren“ c) berechnet werden (Bild 37). Dabei beeinflussen folgende Faktoren die Ergebnisse:

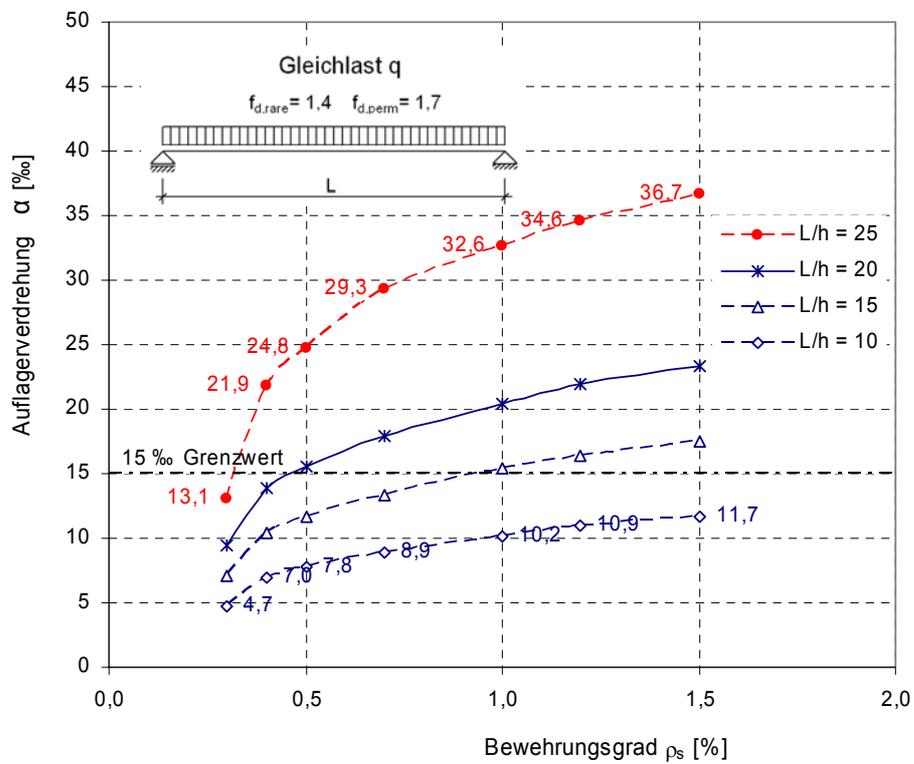
- Die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen wird vernachlässigt.
- Bei der Integration wird von bereichsweise konstanten Biegesteifigkeiten ausgegangen. Im gerissenen Bereich wird die Sekantensteifigkeit unter Berücksichtigung des Kriechens angesetzt.



**Bild 37:** Vergleich des Kurvenverlaufs mit unterschiedlichen Berechnungsmethoden



**Bild 38:** Bezogene Durchbiegung mit dem Vereinfachten Verfahren (quasi-ständige Einwirkungskombination mit Kriechen und Schwinden)



**Bild 39:** Auflagerverdrehung mit dem Vereinfachten Verfahren (seltene Einwirkungskombination mit Kriechen und Schwinden)

## 7 Untersuchungen von Stahlbetonbalken mit Rechteckquerschnitt

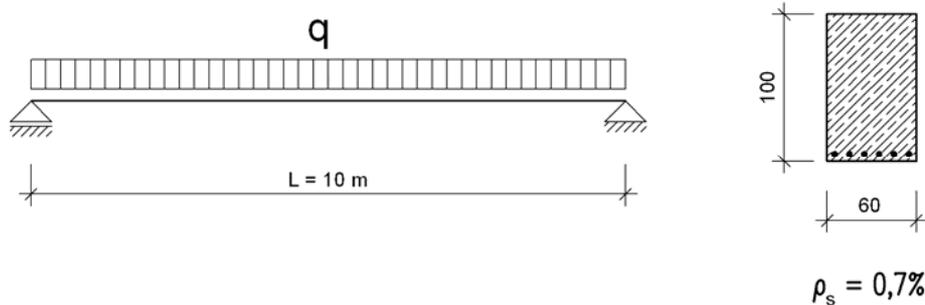
### 7.1 Bezugssystem Einfeldbalken

Als Bezugssystem für die Untersuchungen eines Balkenquerschnitts wurde der in Bild 40 dargestellte Einfeldbalken gewählt. Dabei handelt es sich um ein gedrungenes System mit  $L/h=10$  mit einem für Balken geringen bis mäßigen Bewehrungsgrad  $\rho_s=0,7\%$ .

Bezugssystem/Balken

$b/h/d = 60/100/95$

C 30/37



Systemparameter:

Schlankheit:  $L/h = 10$   
bzw.  $L/d = 10,5$   
Bewehrungsgrad:  $\rho_s = 0,70\%$   
Systemlänge:  $L = 10 \text{ m}$

Belastungsniveaus:

$q_{Ed} = 118 \text{ kN/m}$   
 $q_{rare} = 84 \text{ kN/m}$   
 $q_{perm} = 69 \text{ kN/m}$   
 $q_{cr} = 26 \text{ kN/m}$

Parameter für Verformungen:

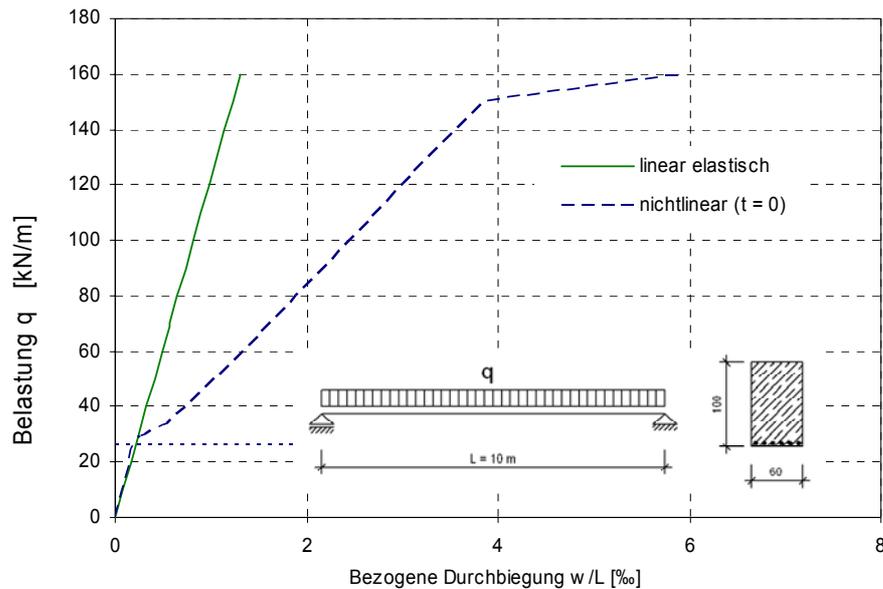
E-Modul:  $E_{com} = 31900 \text{ MN/m}^2$   
Kriechen:  $\varphi_{\infty} = 2,5$   
Schwinden:  $\varepsilon_{s\infty} = 0,5 \text{ ‰}$

Rissmoment:

$M_{cr} = 2,9 \cdot 0,1116 = 323 \text{ kNm}$   
 $f_{ct,fl} = 2,9 \text{ MN/m}^2$   
 $M_{cr} / M_{Ed} = 22\%$

**Bild 40:** Bezugssystem-Balken

Bei Balken variieren im Allgemeinen die Parameter Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und Belastungsfaktor  $f_{d,perm}$  stärker als bei Platten. So gibt es durchaus Systeme mit sehr hohem Bewehrungsgrad (z.B. Abfangeträger). Der Belastungsfaktor  $f_{perm}$  streut ebenfalls mehr, da er nicht mehr so stark im Bezug zum Eigengewicht des Trägers steht. Während die Platte zum großen Teil sich selber trägt, ist der Anteil des Konstruktionseigengewichts des Balkens an der Bemessungslast klein. Die Auflast des Balkens kommt z. B. aus der Auflagerung von Geschossdecken oder z.B. durch Wandlasten.



**Bild 41:** Last-Durchbiegungs-Diagramm des Bezugsbalkens zum Zeitpunkt  $t = 0$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ergibt sich der für Stahlbetonbalken typische Verlaufe. Das Rissmoment, sowie die Phase der Rissbildung ist gut erkennbar. Das Verhältnis von Risslast zur Bemessungslast ( $q_{cr}/q_{Ed}$  bzw.  $M_{cr}/M_{Ed}$ ) ist auf Grund des höheren Bewehrungsgrades und der kleineren Zugfestigkeit kleiner als bei der Platte.

Zum Zeitpunkt  $t = \infty$  sind die Last-Verformungs-Diagramme im Verlauf ähnlich denen der Platte. Da es sich um ein gedrungenes System handelt, sind die absoluten Werte für  $w/L$  und  $\alpha$  wesentlich kleiner.

Unter der Voraussetzung, dass nur  $q_{perm}$  kriecherzeugend ist, ergibt sich die Kurve 3 durch Addition der Durchbiegung bzw. dem Auflagerverdrehwinkel infolge Kriechens zur Verformung zum Zeitpunkt  $t=0$ :

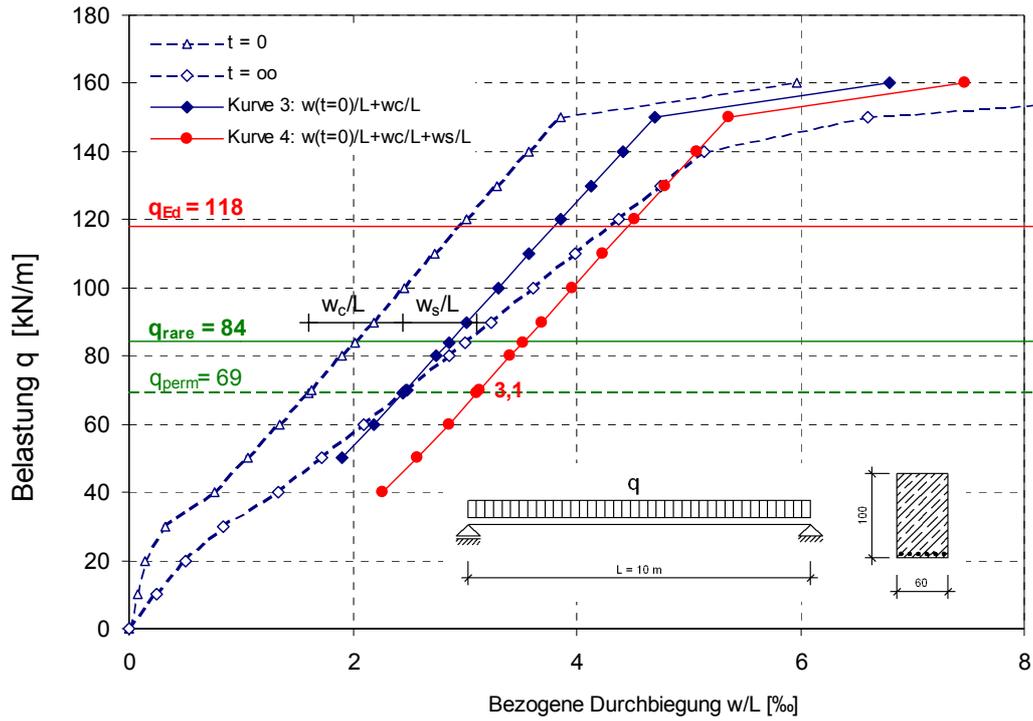
$$w_q(t = \infty) = w_q(t = 0) + w_{c,perm} = w_q(t = 0) + [w_{perm}(t = \infty) - w_{perm}(t = 0)]$$

$$\alpha_q(t = \infty) = \alpha_q(t = 0) + \alpha_{c,perm} = \alpha_q(t = 0) + [\alpha_{perm}(t = \infty) - \alpha_{perm}(t = 0)]$$

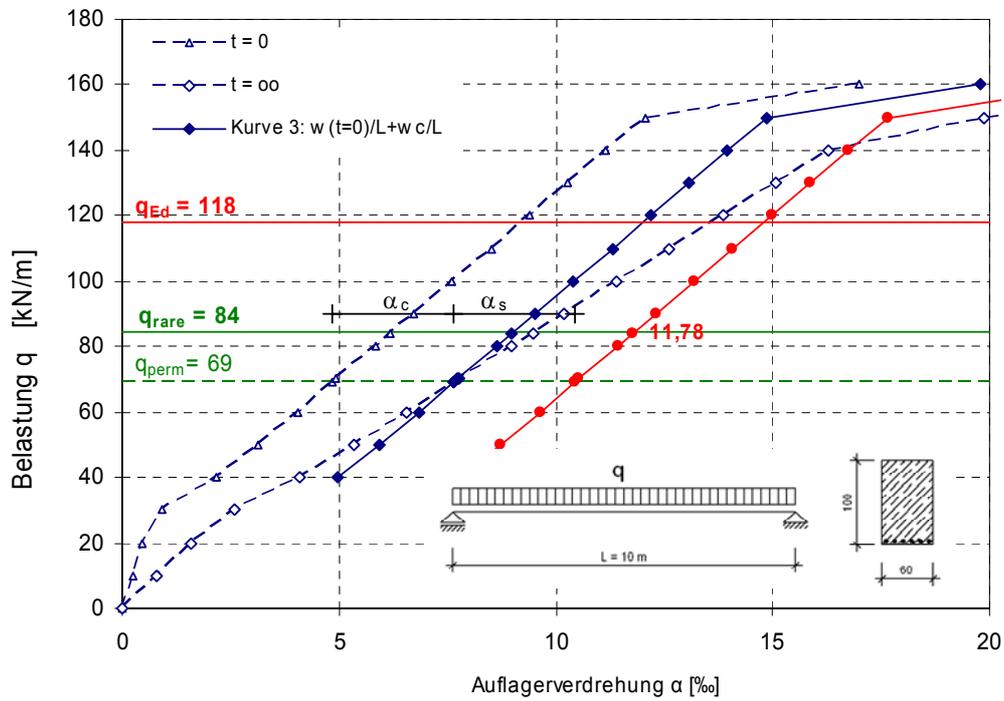
Die zusätzlich ermittelten Schwindverformungen  $w_s$  und  $\alpha_s$  werden anschließend zu der mit dem Rechenprogramm berechneten Verformung addiert (Kurve 4).

$$w_{perm}(t = \infty) = w_{perm}(t = 0) + w_{c,perm} + w_s$$

$$\alpha_{rare}(t = \infty) = \alpha_{rare}(t = 0) + \alpha_{c,perm} + \alpha_s$$



**Bild 42:** Last-Durchbiegungs-Diagramm für den Zeitpunkt  $t = \infty$



**Bild 43:** Auflagerverdrehung zum Zeitpunkt  $t = \infty$

**Tabelle 4:** Ergebnisse Balken: Bezugssystem ( $L/H = 10$ ,  $\rho_s = 0,7\%$ )

Einwirkungs- kombination	$w$	$w/L$	$\alpha$	
	[mm]	[‰]	[‰]	
Quasiständig $t = \infty$	24	2,44	7,66	
Schwinden	6,6	0,66	2,78	
Quasiständig + Schwinden	31	<b>3,10 &lt; 4,0</b>	10,44	
Selten $t = 0$	20	2,02	6,19	
Quasiständig $t = 0$	16	1,60	4,86	
Selten*) $t = \infty$	28,4	2,84	8,99	
Selten*) + Schwinden $t = \infty$	35	3,52	<b>11,77</b>	11,77 = 3,8 * 3,10

\*) kriecherzeugend ist nur der quasi-ständige Lastanteil

Die Durchbiegung unter quasiständiger Einwirkungskombination ist ohne weitere Maßnahmen (z.B. Überhöhung) kleiner als  $L/250 = 4$  ‰. Der auftretende Verdrehwinkel unter der seltenen Kombination beträgt ca. 12 ‰.

Der Anteil der Schwindverformungen an der Gesamtverformung ist wie bei der Platte relativ groß (ca. 25 %).

Die Länge des gerissenen Bereiches  $L_2$  ergibt sich im Verhältnis zur Gesamtlänge  $L$  zu:

$$L_2 / L(\text{perm}) = 0,79$$

$$L_2 / L(\text{rare}) = 0,83$$

Berechnet man zum Vergleich die Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t=0$  linear elastisch unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination, so ergibt sich diese zu 5,2 mm bzw.  $w/L=0,52$  ‰

$$w_{\text{perm}}(t = \infty) = k \cdot w_{\text{el,perm}}(t = 0) \quad k \approx 6$$

## 7.2 Parameterstudie Bewehrungsgrad

Wie bei der Platte geht die nachfolgende Untersuchung davon aus, dass die statisch erforderliche Bewehrung  $\rho_s$  eingelegt wird. Mit den Belastungsfaktoren  $f_{rare} = 1,4$  und  $f_{perm} = 1,7$  ergeben sich die in Bild 44 bis Bild 46 dargestellten Verformungen unter der quasi-ständigen und unter der seltenen Einwirkungskombination. Beim Balken ergeben sich hinsichtlich seines Verformungsverhaltens qualitativ vergleichbare Verläufe wie bei der Stahlbetonplatte. Durch den Ansatz einer niedrigeren Zugfestigkeit  $f_{ctm} = 2,9 \text{ MN/m}^2$  wird das Rissmoment des Querschnitts kleiner. Die Ausdehnung des gerissenen Bereiches unter quasi-ständiger Belastung ist größer als bei der Platte. Der Wendepunkt der Kurvenverläufe liegt bei ca.  $\rho_s = 0,4\%$ . Im Gegensatz zur Platte reißt der Balken bei einem Bewehrungsgrad  $\rho_s = 0,3\%$  unter quasi-ständiger Belastung auf. Erst bei Bewehrungsgraden kleiner als  $0,2\%$  verbleibt der Balken vollständig im ungerissenen Zustand I.

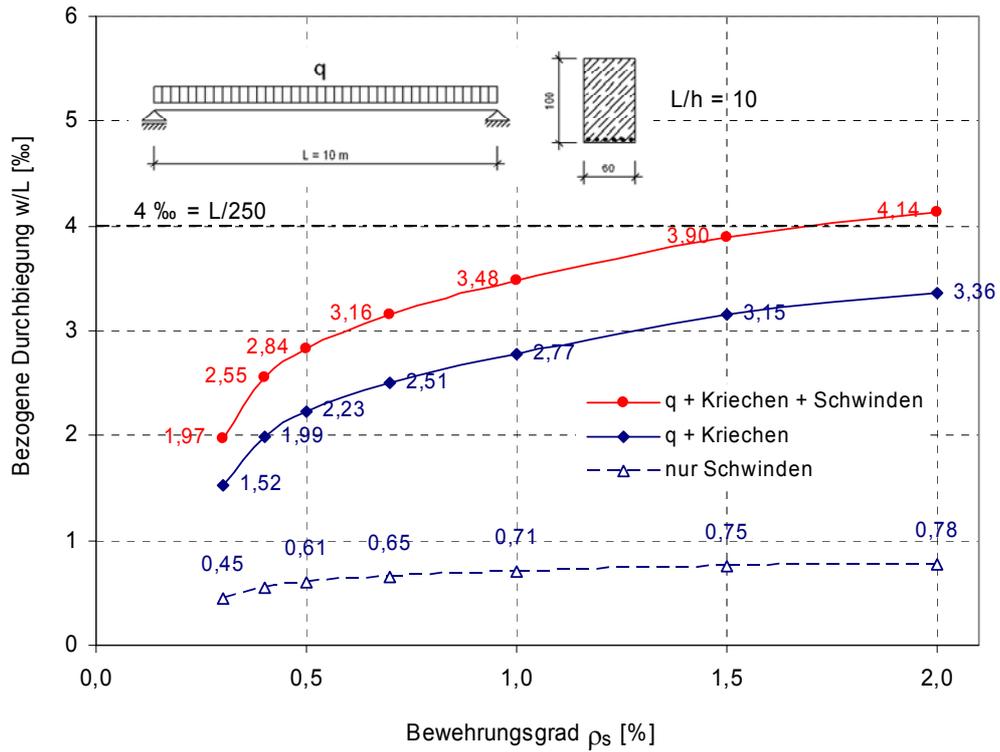
**Tabelle 5:** Ausdehnung der gerissenen Bereiche unter  $q_{perm}$

	Balken: $f_{ctm} = 2,9 \text{ MN/m}^2$	Platte: $f_{ct,fl} = 3,77 \text{ MN/m}^2$
$\rho_s = 0,2\%$	$L_2 = 0 \cdot L$ (ungerissen)	$L_2 = 0 \cdot L$ (ungerissen)
$\rho_s = 0,3\%$	$L_2 = 0,484 \cdot L$	$L_2 = 0 \cdot L$ (ungerissen)
$\rho_s = 0,4\%$	$L_2 = 0,651 \cdot L$	$L_2 = 0,501 \cdot L$
$\rho_s = 0,5\%$	$L_2 = 0,719 \cdot L$	$L_2 = 0,610 \cdot L$

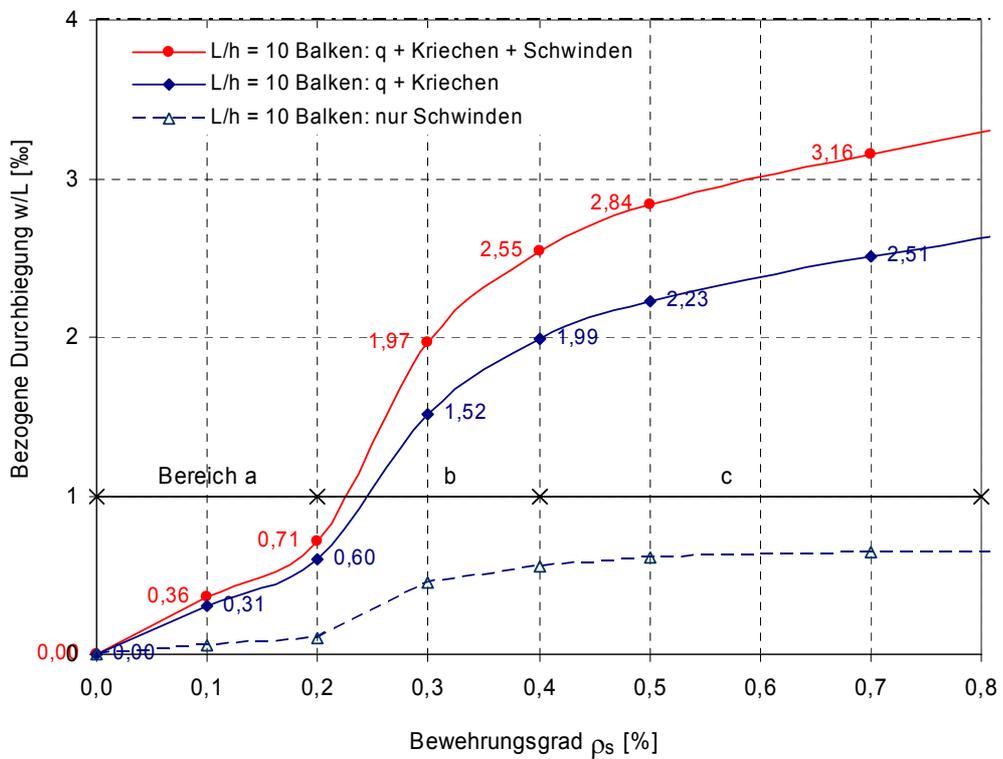
$$L_2 / L = \sqrt{1 - \frac{f_{perm} \cdot f_{ctm}}{6 \cdot 0,81 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{\mu_{Ed}}}$$

Somit ergeben sich für den Balken Bereiche:

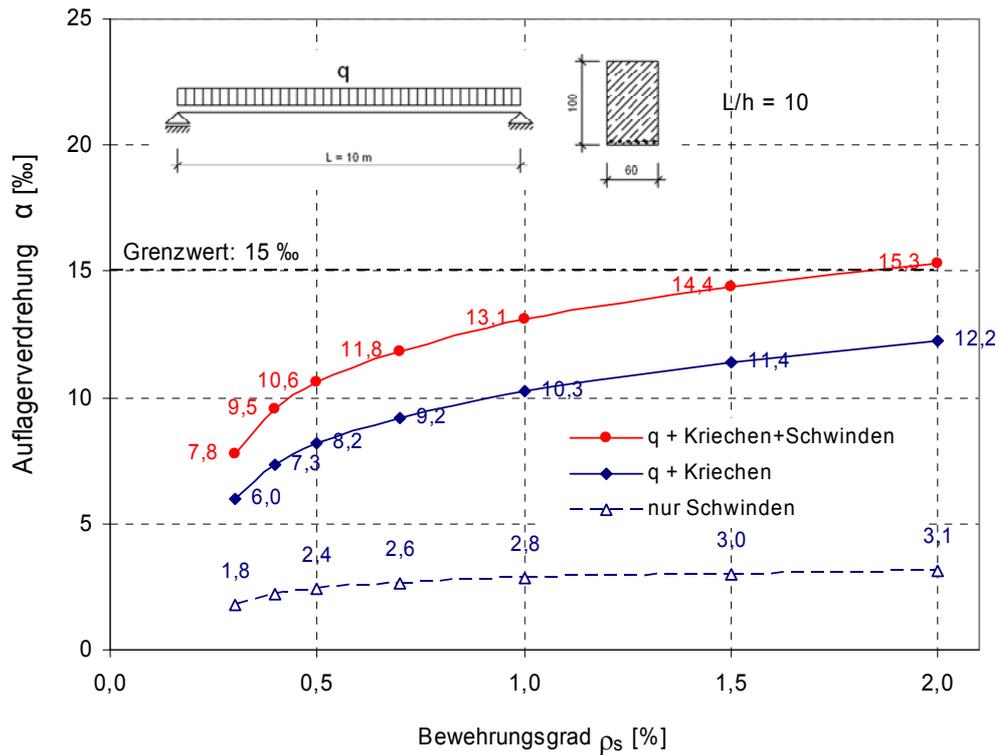
- Bereich a: ungerissen  $0 \leq \rho_s \leq 0,2\%$   
 Bereich b: Rissbildung  $0,2\% < \rho_s \leq 0,4\%$   
 Bereich c: abgeschl. Rissbild  $0,4 < \rho_s < 1,5\%$



**Bild 44:** Bezogene Durchbiegung,  $t = \infty$ , quasi-ständige Einwirkung



**Bild 45:** Bezogene Durchbiegung  $t = \infty$ , quasi-ständige Einwirkung, im Bereich niedriger Bewehrungsgrade



**Bild 46:** Auflagerverdrehung,  $t = \infty$ , seltene Einwirkungskombination

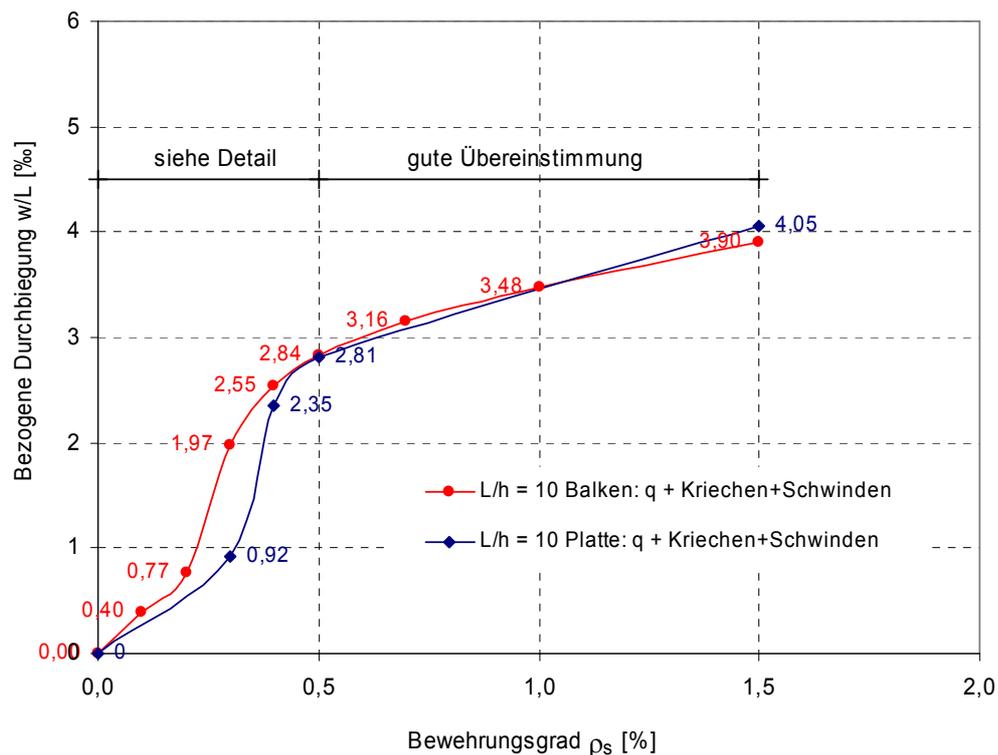
Die Auflagerverdrehung unter der seltenen Einwirkungskombination zeigt Bild 46. Mit einem Faktor von  $k = 3,7$  kann man näherungsweise von der bezogenen Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung auf den Auflagerdrehwinkel unter der seltenen Einwirkungskombination schließen:

$$w_{perm} / L \cdot 3,7 = \alpha_{rare}$$

### Vergleich Platte – Balken

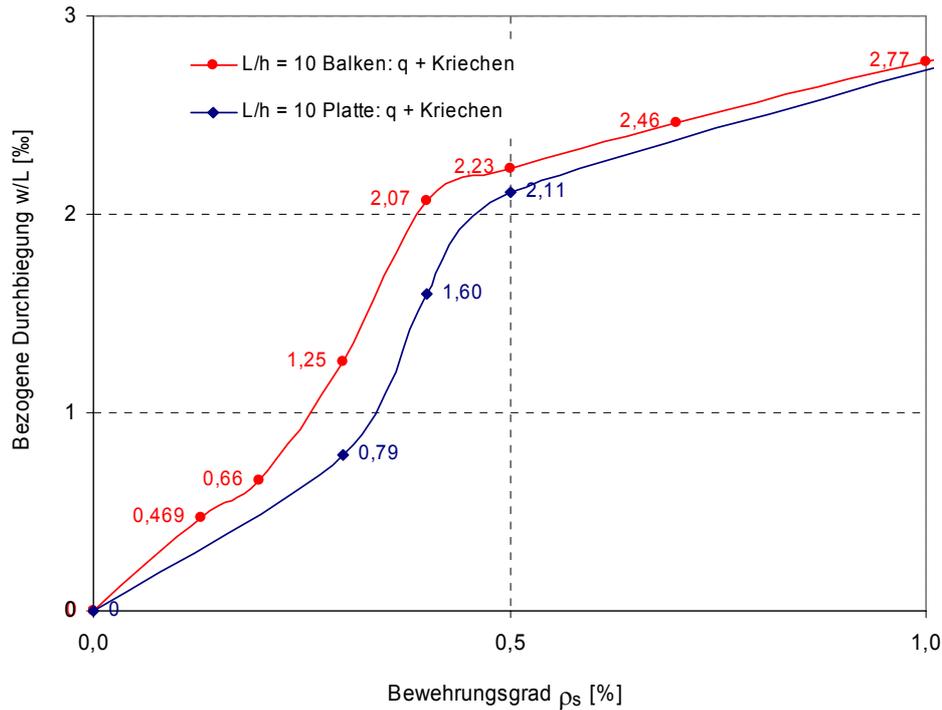
Für Bewehrungsgrade  $\rho_s > 0,5\%$  ergeben sich für die bezogenen Durchbiegungen beim Balken nahezu die gleichen Werte wie bei der Platte (Bild 47). Die bei der Platte höher angesetzte Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  macht sich im Zustand mit abgeschlossener Rissbildung nicht mehr bemerkbar, da in diesem Beanspruchungsbereich für die versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen nur  $f_{ctm}$  maßgebend ist.

Beim Balken verschiebt sich der bei der Platte festgestellte Wendepunkt von  $\rho_s = 0,5\%$  nach  $\rho_s = 0,4\%$  auf Grund der niedriger angesetzten Zugfestigkeit  $f_{ctm} = 2,9 \text{ MN/m}^2$ .



**Bild 47:** Vergleich: Platte-Balken: Bezogene Durchbiegungen

Bild 48 zeigt den Vergleich zwischen Platte und Balken bei niedrigen Bewehrungsgraden. Auf Grund des kleineren Rissmomentes sind die bezogenen Verformungen des Balkens größer. Auf der sicheren Seite liegend sollten für die Diagramme in diesem Bereich die Kurven der Balkenberechnung angesetzt werden.



**Bild 48:** Bezugene Durchbiegung im Bereich niedriger Bewehrungsgrade

### Niedrige Bewehrungsgrade

Im Falle, dass der Querschnitt über die ganze Bauteillänge ungerissen bleibt ( $\rho_s < 0,2\%$ ), ergibt sich für die bezogene Durchbiegung unter Ansatz von Bruttoquerschnitten und mit  $d=0,95h$  die Durchbiegung im Zustand I zu:

$$w_{perm} = \frac{5}{385} \cdot q_{perm} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{EI}$$

$$q_{perm} = \frac{M_{Ed} \cdot 8}{L^2 \cdot f_{perm}} = \frac{\mu_{Ed} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \cdot 8}{L^2 \cdot f_{perm}} = \frac{\mu_{Ed} \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd} \cdot 8 \cdot 0,9}{L^2 \cdot f_{perm}}$$

$$w_{perm} = \frac{5}{384} \cdot \frac{\mu_{Ed} \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd} \cdot 8 \cdot 0,9}{L^2 \cdot f_{perm}} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{EI}$$

$$w_{perm} / L = \frac{5 \cdot 8 \cdot 0,9 \cdot 12}{384} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{f_{cd}}{f_{perm}} \cdot \mu_{Ed} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)$$

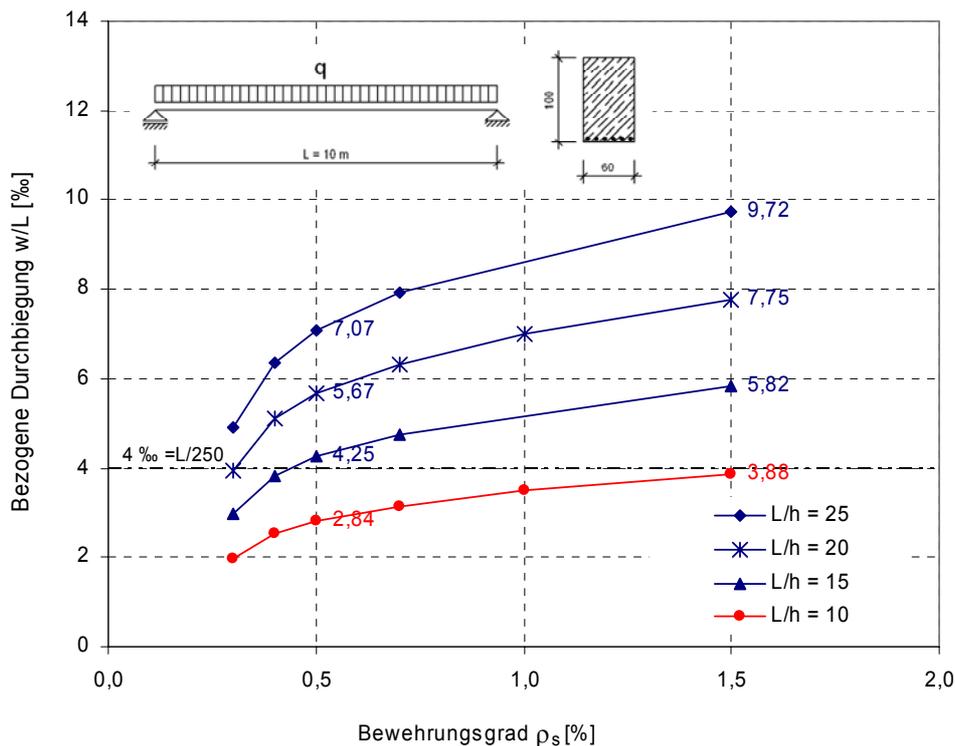
$$w_{perm} / L = 1,125 \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{f_{cd}}{f_{perm}} \cdot \mu_{Ed} \cdot \left(\frac{L}{h}\right)$$

Für  $\rho_s = 0\%$  ergibt sich:  $w_{perm} / L = 0$ .

### 7.3 Parameterstudie Schlankheit

Wie bei der Platte ergibt sich für jede Schlankheit  $L/h$  eine Kurve mit zunächst steil und anschließend flacher verlaufendem Ast. Der Wendepunkt liegt auf Grund der niedriger angesetzten Zugfestigkeit ( $f_{ctm} = 2,9 \text{ MN/m}^2$ ) bei  $\rho_s = 0,4\%$  anstatt wie bei der Platte bei  $\rho_s = 0,5\%$ .

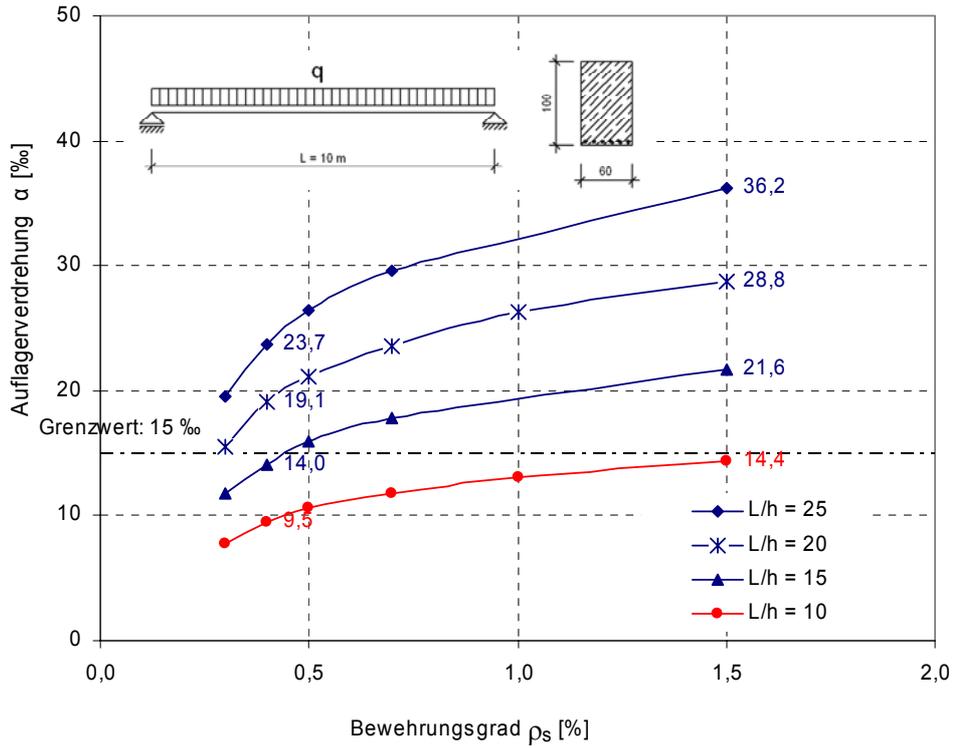
Auch für andere Schlankheiten ( $L/h=15 / 20 / 25$ ) ergeben sich für Bewehrungsgrade  $\rho_s \geq 0,5\%$  nahezu die gleichen Werte wie bei der Platte. In diesem Bereich ist der Einfluss der Zugfestigkeit gering.



**Bild 49:** Bezogene Durchbiegung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und der Schlankheit  $L/h$  (quasi-ständige Einwirkungskombination)

Für die Auflagerverdrehwinkel gilt im Prinzip das Gleiche. Um den Bereich zu fassen, in dem die auftretenden Auflagerverdrehwinkel unter der seltenen Kombination kleiner als 15 ‰ sind, ist eine genaue Analyse des Bereiches der niedrigen Bewehrungsgrade ( $\rho_s \leq 0,5\%$ ) notwendig. Da in diesem Bereich die Verformungen in Abhängigkeit der angesetzten Parameter stark schwanken, sind Abschätzungen mit Vorsicht vorzunehmen.

Im Bereich niedriger Bewehrungsgrade bietet es sich an zunächst zu überprüfen, ob sich das Bauteil über die ganze Länge im Zustand I befindet ( $M_{perm} < M_{cr}$ ). Die Durchbiegung kann dann rechnerisch mit den Steifigkeiten des ungerissenen Zustand I mit elementaren Mitteln bestimmt werden.



**Bild 50:** Auflagerverdrehung in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho_s$  und der Schlankheit  $L/h$  (seltene Einwirkungskombination)

## 8 Untersuchungen von Stahlbetonplattenbalken

### 8.1 Beispiel Plattenbalken

Zur Untersuchung von Plattenbalken wird ein Bezugssystem gewählt, welches sich an einer in der Praxis ausgeführten TT-Plattendecke anlehnt. Die Abmessungen und Parameter des gewählten Systems sind in Bild 51 dargestellt.

Die Definition des Bewehrungsgrades  $\rho_s$  ist bei Plattenbalken nicht einheitlich geregelt. Um den Querschnitt mit einem Rechteckquerschnitt vergleichen zu können, wird hier für den Plattenbalken unter positiver Momentenbeanspruchung definiert:

$$\rho_s = A_s / (b_{\text{eff}} \cdot d)$$

Bemessung im GZT:  $\omega_1 = \rho_s \cdot f_{yd} / f_{cd}$

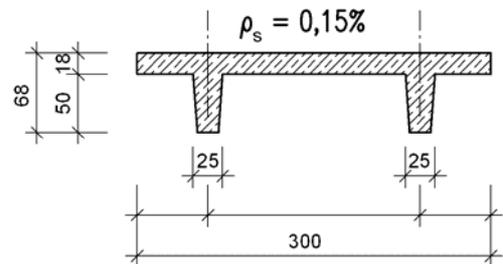
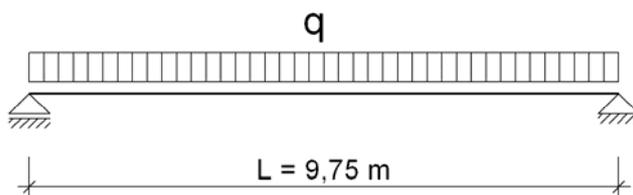
Biegesteifigkeiten im Zustand II:  $EI_{\text{sec}}^{\text{II}} = E_s \cdot A_s \cdot z \cdot (d - x)$  (Sekantensteifigkeit)

$$x = \xi \cdot d \quad \xi = -\alpha_E \cdot \rho_s + \sqrt{[\alpha_E \cdot \rho_s + 2 \cdot \alpha_E \cdot \rho_s]}$$

Bezugssystem/Plattenbalken

$$b_{\text{eff}}/h/d = 300/68/60$$

C 30/37



**Systemparameter:**

Schlankheit:  $L/h = 14,3$

bzw.  $L/d = 16,25$

Bewehrungsgrad:  $\rho_s = A_s / (b_{\text{eff}} \cdot d) = 0,15\%$

Systemlänge:  $L = 9,75 \text{ m}$

**Belastungsniveaus:**

$$q_{\text{Ed}} = 58 \text{ kN/m}$$

$$q_{\text{rare}} = 41 \text{ kN/m} \quad f_{\text{rare}} = 1,41$$

$$q_{\text{perm}} = 34 \text{ kN/m} \quad f_{\text{perm}} = 1,71$$

**Bild 51:** Bezugssystem: Plattenbalken

**Parameter für Verformungen:**

E-Modul:  $E_{\text{com}} = 31900 \text{ MN/m}^2$

Kriechen:  $\varphi_{\infty} = 2,5$

Schwinden:  $\varepsilon_{\text{sco}} = 0,5 \text{ ‰}$

**Rissmoment:**

$$M_{\text{cr}} = 145 \text{ kNm}$$

$$f_{\text{ctm}} = 2,9 \text{ MN/m}^2$$

$$M_{\text{cr}} / M_{\text{Ed}} = 21\%$$

Die Verformungen für den Plattenbalken wurden mit dem Vereinfachten Verfahren berechnet. Auf der sicheren Seite liegend wurde  $\kappa_s^{II}$  (Schwindkrümmung im Zustand II) über die ganze Bauteillänge angesetzt. Der Anteil der Schwindverformungen ist wie in den vorangehenden Beispielen relativ hoch:

$$w_s / L = 1,15 = 30\% \cdot 3,84 = 30\% \cdot (w_{perm} / L)$$

$$\alpha_s = 4,6 = 35\% \cdot 13,2 = 35\% \cdot \alpha_{perm}$$

**Tabelle 6:** Ergebnisse Plattenbalken: Bezugssystem (L/H = 14,3,  $\rho_s = 0,15\%$ )

Einwirkungskombination	w	w/L	$\alpha$	
	[mm]	[‰]	[‰]	
Quasi-ständig $t = \infty$	26,2	2,69	8,6	
Schwinden	11,2	1,15	4,6	
Quasi-ständig + Schwinden	37,4	<b>3,84 &lt; 4</b>	13,2	
Selten $t = 0$	25,5	2,62	8,4	
Quasiständig $t = 0$	20,5	2,10	6,7	
Selten*) $t = \infty$	31,0	3,18	10,3	
Selten*) + Schwinden $t = \infty$	42,4	4,35	<b>14,9</b>	14,9 = 3,88 * 3,84

\*) kriecherzeugend ist nur der quasiständige Lastanteil

Die Anforderung an die Durchbiegungsbeschränkung gemäß DIN 1045-1 unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination ist ohne weitere Maßnahmen erfüllt.

Berechnet man die Durchbiegung zum Zeitpunkt  $t = 0$ , linear elastisch unter quasi-ständiger Einwirkungskombination, so ergibt sich diese zu  $w=5,1$  mm bzw.  $w/L=0,52$ .

$$w_{perm}(t = \infty) = k \cdot w_{el,perm}(t = 0) \quad k \approx 7,4$$

$$L_2 / L(perm) = 0,80$$

Für das betrachtete Bezugssystem Plattenbalken ergeben sich ähnlich Werte wie beim Bezugssystem Balken mit Rechteckquerschnitt. Obwohl der Plattenbalken schlanker ist ( $L/h = 14,3$ ) und sich über weite Bauteilbereiche im Zustand II befindet, liegt die bezogene Durchbiegung unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination unter  $4\text{‰}=1/250$ .

Für einen Balken mit der Schlankheit  $L/h = 15$  ist bei einem Bewehrungsgrad von  $0,5\%$  die bezogene Durchbiegung als mit  $w/L=4,25\text{‰}$  größer  $4\text{‰}$  (Bild 49). Der Plattenbalken verhält

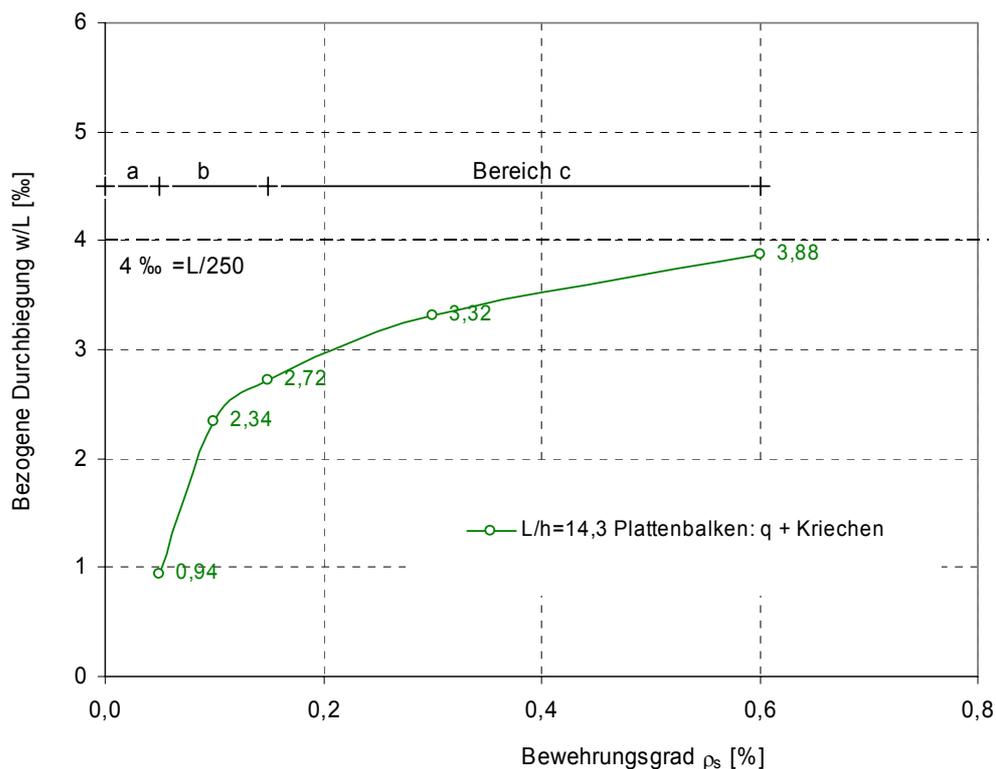
sich insgesamt steifer als der Balken. Beim Plattenbalken spielt die Steifigkeit im Zustand I eine untergeordnete Rolle, da selbst bei geringen Bewehrungsgraden (hier 0,15%) die Ausdehnung der gerissenen Bereiche groß ist. Im Zustand II ist die Sekantensteifigkeit  $EI_{\text{sec}}^{\text{II}}$  auf Grund des größeren Hebelarms  $z$  und der kleineren Druckzonenhöhe  $x$  größer als beim Balken.

Aufgrund der unterschiedlichen Definition des Bewehrungsgrades ist der Plattenbalkenquerschnitt nicht direkt mit dem Rechteckquerschnitt vergleichbar. In jedem Fall verhält sich der Plattenbalken steifer als ein Balkenquerschnitt mit gleicher Schlankheit. Für den Plattenbalken könnte das günstigere Verformungsverhalten durch einen Korrekturbeiwert für die Schlankheit erfasst werden.

## 8.2 Variation des Bewehrungsgrades

Beim Plattenbalken werden die Bewehrungsgrade im Bereich von 0,05 bis 0,6% variiert. Es ergeben sich wie beim Rechteckquerschnitt 3 Bereiche:

Bereich a:	ungerissen	$0 \leq \rho_s \leq 0,05\%$
Bereich b:	Rissbildung	$0,05\% < \rho_s \leq 0,12\%$
Bereich c:	abgeschl. Rissbild	$0,12 < \rho_s < 0,6\%$



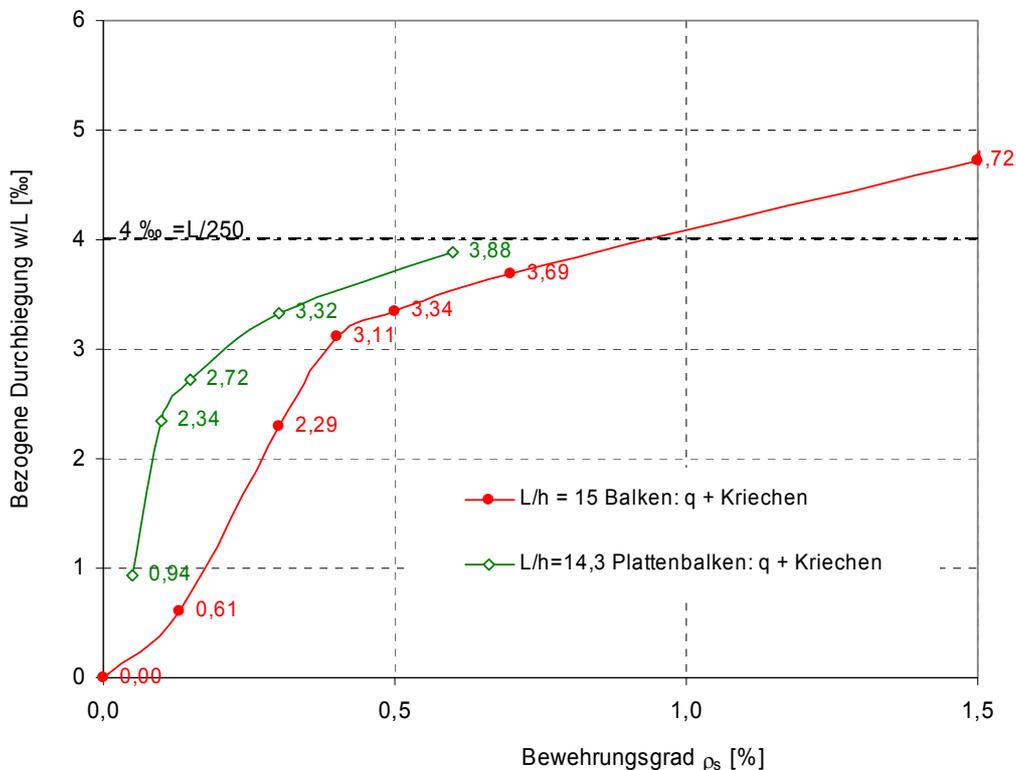
**Bild 52:** Bezogene Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung

Auf Grund der gewählten Definition sind die Bewehrungsgrade beim Plattenbalken vergleichsweise sehr niedrig, so dass bei einem Plattenbalken mit einem Bewehrungsgrad von  $\rho_s=0,6\%$  ein sehr hoher Belastungsgrad vorliegt. Die Druckzonehöhe  $x$  verbleibt nicht mehr im Bereich der Platte. Die erforderliche Bewehrung ( $9 \varnothing 28$ ) müsste bei der gewählten verhältnismäßig schmalen Stegbreite 3-lagig eingebaut werden, was sich wiederum auf die statische Höhe  $d$  auswirkt.

Das Rissmoment kann mit einem Bewehrungsgrad von  $\rho_s=0,03\%$  abgedeckt werden.

Beim Plattenbalken hat man es in der Regel immer mit einem gerissenen Querschnitt zu tun. Unter  $q_{perm}$  ist in der Regel  $M_{perm}$  kleiner als  $M_{cr}$ .

Beim Vergleich mit dem Rechteckquerschnitt (Bild 53) sieht man, dass die für den Plattenbalken relevanten Bereiche bei wesentlich niedrigeren Bewehrungsgraden liegen, so dass die Kurven nicht direkt miteinander vergleichbar sind.



**Bild 53:** Plattenbalken und Rechteckquerschnitt im Vergleich

## 9 Auswertung der Untersuchungen

### 9.1 Verformungen aus äußeren Lasten

Bei der nichtlinearen Berechnung ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Verdrehung am Auflager und der bezogenen Durchbiegung zu  $\alpha \approx 3 \cdot w/L$  unter äußerer Belastung. Es ergeben sich etwas kleinere Verdrehwinkel als nach linear elastischer Berechnung ( $\alpha = 3,2 \cdot w/L$ ).

Ausgehend von der statisch erforderlichen Bewehrung lassen sich die Lastniveaus der quasi-ständigen und der seltenen Einwirkungskombination über die Belastungsfaktoren  $f_{\text{rare}}$  und  $f_{\text{perm}}$  beschreiben. Der Faktor  $f_{\text{rare}}$  streut kaum und liegt bei ca.  $f_{\text{rare}} = 1,4$ . Der Faktor  $f_{\text{perm}}$  variiert je nach Verkehrslastanteil und quasi-ständig vorhandenem Lastanteil ( $\psi_2$ ) im baupraktischen Bereich zwischen 1,35 und 2,0. Der ungünstige Grenzwert  $f_{\text{perm}} = 1,35$  liegt vor, wenn das Bauteil nur durch Eigengewicht belastet ist. Für die Untersuchungen wurde zunächst einheitlich für mittlerer Verhältnisse  $f_{\text{perm}}=1,7$  angesetzt.

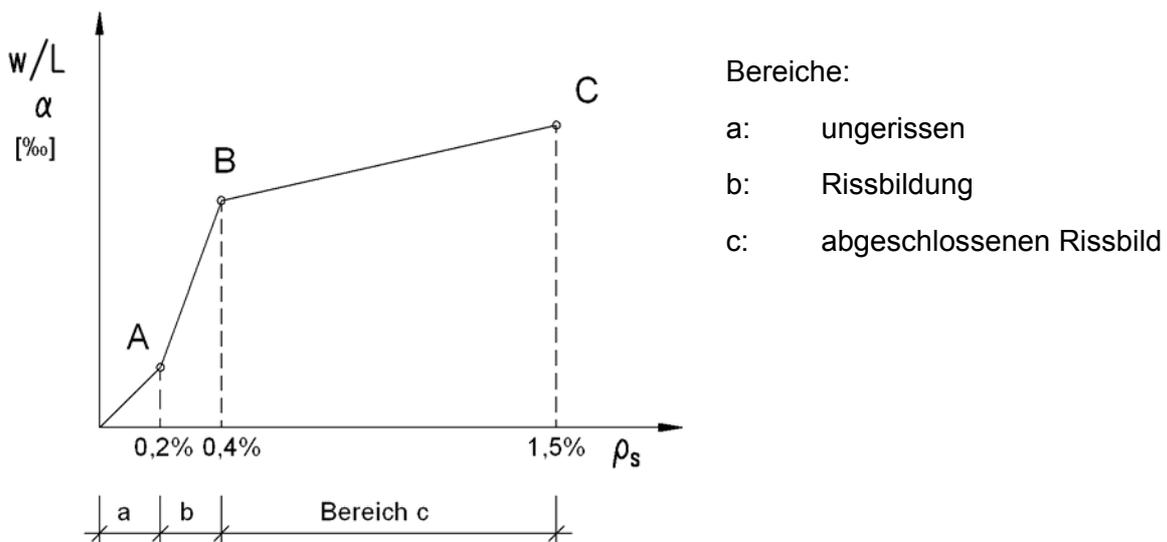
Die wesentlichen Parameter zur Beurteilung der zu erwartenden Verformungen sind die *Schlankheit* und der *statisch erforderliche Bewehrungsgrad*.

#### **Bewehrungsgrad**

Der statisch erforderliche Bewehrungsgrad spiegelt den Belastungsgrad des Balkens wider und findet seine Analogie in der Ausdehnung der gerissenen Bereiche. Die sich bei Variation des Bewehrungsgrades ergebenden Kurven weisen zwei charakteristische Wendepunkte auf:

Punkt A:  $\rho_s = 0,2\%$  Übergang in den gerissenen Zustand ( $M_{\text{perm}} > M_{\text{cr}}$ )

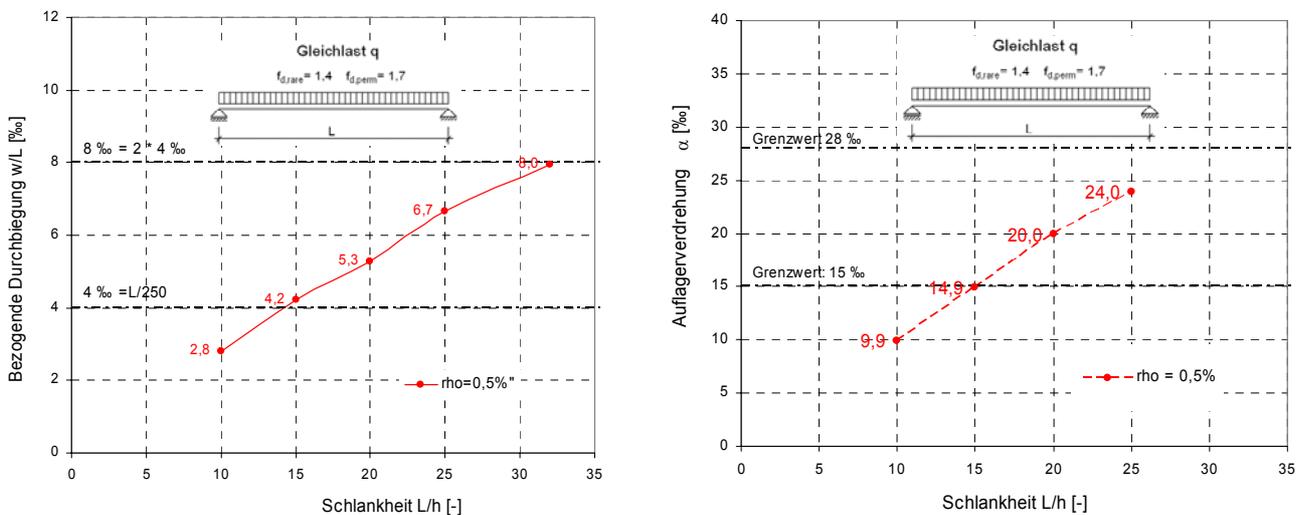
Punkt B:  $\rho_s = 0,4\%$  Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes.



Durch Erhöhung der Bewehrung über den statisch erforderlichen Querschnitt hinaus, können die Verformungen teilweise verringert werden (Bild 33). Bei dem in 6.2 untersuchten System konnte so durch Verdopplung der Bewehrung die Durchbiegung unter  $q_{\text{perm}}$  allerdings nur um ca. 25% verringert werden.

### Schlankheit

Die Größe der Verformungen wird sehr stark von der Schlankheit bestimmt. Mit zunehmender Schlankheit nehmen die Verformungen des Biegebauteils deutlich zu. Als Orientierungsgröße für die bezogene Durchbiegung kann der in DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.1 (8) formulierte Grenzwert für die Beschränkung des Durchhangs auf  $w/L = 4‰ = 1/250$  angesehen werden. Die Untersuchungen zeigen, dass dieser Wert schon bei Schlankheiten von  $L/h = 15$ , bzw.  $L/d = 16,7$  überschritten werden kann. In diesen Fällen ist eine Überhöhung der Bauteile bei der Herstellung erforderlich. Daraus folgt unmittelbar, dass ein größerer Wert als  $8‰$  für die bezogene Durchbiegung nach DIN 1045-1 nicht zulässig ist. Entsprechendes gilt für die Verdrehung am Auflager.



**Bild 54:** Einfluss der Schlankheit auf die Verformungen für  $\rho_s = 0,5\%$  ( $t = \infty$ )

Lediglich bei einer Schlankheit von  $L/h = 10$  bzw.  $L/h = 11,1$  ist der Grenzwert der Durchbiegungsbeschränkung auch ohne weitere Maßnahmen (Bewehrungserhöhung, Überhöhung der Schalung) auch bei hohen Bewehrungsgraden eingehalten.

### Systemlänge

Bei den Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass die Systemlänge keinen Einfluss auf die bezogenen Verformungen hat. Die in DIN 1045-1 angegebene Beschränkung der Durchbiegung über die Begrenzung der Biegeschlankheit ( $l_i/d \leq 35$  bzw.  $l_i/d \leq 150/l_i$ ) gilt nur für Platten mit niedrigen Bewehrungsgraden ( $\rho_s \leq 0,3\%$ ). Niedrige statisch erforderliche Bewehrungsgrade liegen nur bei Platten mit geringen Spannweiten und entsprechend kleinen Verkehrslasten vor.

**Balken mit Rechteckquerschnitt**

Bei den Untersuchungen an Balken mit Rechteckquerschnitt ergeben sich nahezu die gleichen bezogenen Werte für die Verformungen wie bei den Platten. Die auftretenden Unterschiede, insbesondere im Bereich niedriger Bewehrungsgrade, liegen an der beim Balken geringer angenommenen zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}=2,9 \text{ MN/m}^2$  gegenüber der Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}=3,77 \text{ MN/m}^2$  bei den Platten.

**Plattenbalken**

Der Plattenbalken - als gegliederter Querschnitt - ist nicht direkt mit einem Balken mit Rechteckquerschnitt vergleichbar. Durch die Variation des Bewehrungsgrades ergeben sich ebenfalls drei charakteristische Bereiche. Die Wendepunkte liegen bei niedrigeren Bewehrungsgraden als beim Rechteckquerschnitt:

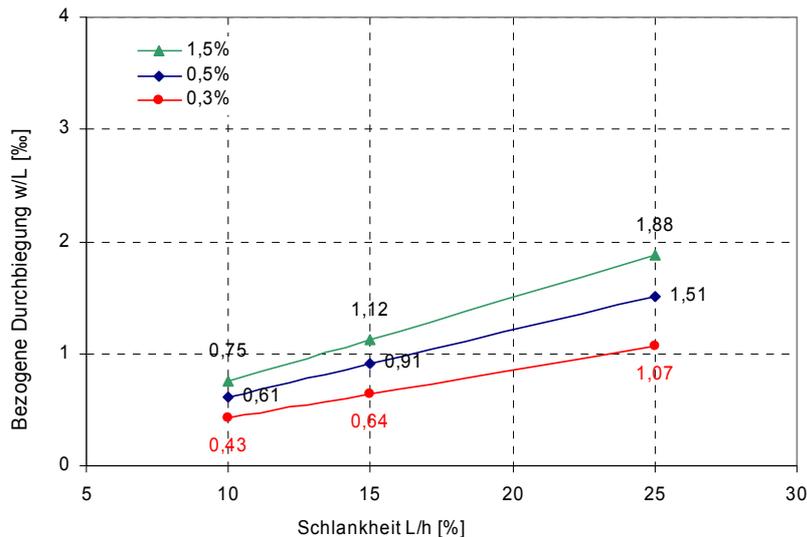
Punkt A:  $\rho_s = 0,05\%$  Übergang in den gerissenen Zustand ( $M_{perm} > M_{cr}$ )

Punkt B:  $\rho_s = 0,12\%$  Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes.

Die Anzahl der Parameter bezüglich der Querschnittsform machen die Entwicklung von Diagrammen zur Abschätzung der bezogenen Verformungen unter quasi-ständiger oder unter seltener Belastung jedoch wesentlich aufwändiger als beim Rechteckquerschnitt. Auf Grund der Vielzahl der erforderlichen Diagramme wird dieser Weg nicht weiter verfolgt.

## 9.2 Schwinden

Das Schwinden hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Durchbiegungen und die Auflagerverdrehwinkel eines Biegeträgers und muss deswegen bei der Verformungsberechnung berücksichtigt werden. Bei den hier untersuchten Systemen betrug für  $\varepsilon_{cs}(\infty) = -0,5 \text{ ‰}$  die Schwindverformung 20 bis 35% der Gesamtverformung unter quasi-ständiger Belastung. Die Verformungen aus Schwinden nehmen ebenfalls mit zunehmender Schlankheit zu (Bild 55).



**Bild 55:** Einfluss des Schwindens auf die Verformungen

Die Schwindverformungen können vereinfacht wie folgt berechnet werden:

- Ermittlung der Krümmung infolge Schwindens im Zustand II:

$$\kappa_s^{II} = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{d - x/2} \quad \text{Mit } x \approx 0,35 \cdot d \text{ und } d \approx 0,9 \cdot h$$

$$\kappa_s^{II} \approx \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{0,75 \cdot h}$$

- Ermittlung der maximalen Schwindverformung:

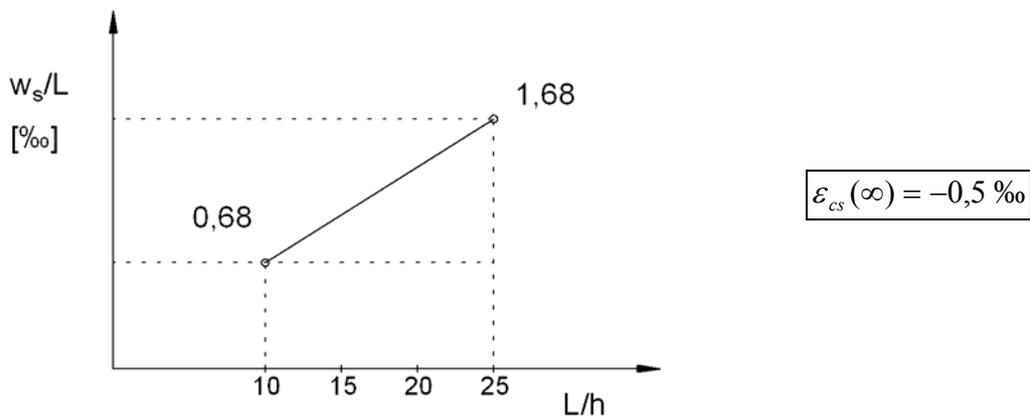
$$\max w_s / L = \kappa_s^{II} \cdot \frac{L}{8} \quad (\text{Einfeldbalken})$$

$$\max w_s / L = \frac{\varepsilon_{cs}(\infty)}{0,75 \cdot h} \cdot \frac{L}{8} = \frac{1}{6} \cdot \varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \frac{L}{h}$$

Die ungerissenen Bereiche mit entsprechend kleinen Krümmungen infolge Schwindens können näherungsweise dadurch berücksichtigt werden, dass die nach Zustand II ermittelte Durchbiegung mit  $k = 0,8$  abgemindert wird.

$$\boxed{\max w_s / L = k \cdot \frac{1}{6} \cdot \varepsilon_{cs}(\infty) \cdot \frac{L}{h}}$$

Damit ergeben sich in Abhängigkeit von der Schlankheit  $L/h$  die in Bild 56 dargestellten vereinfachten bezogenen Durchbiegungen infolge Schwindens.



**Bild 56:** Vereinfachter Ansatz für die Ermittlung der bezogenen Durchbiegung infolge Schwindens

### 9.3 Einfluss einer Überhöhung

Durch eine Überhöhung können die Bauteilverformungen teilweise kompensiert werden. Nach DIN 1045-1 beträgt der max. Grenzwert für eine Überhöhung:

$$\ddot{u} \leq \frac{l}{250}$$

Bei einer Überhöhung mit  $\ddot{u}$  kann der Verdrehwinkel infolge Überhöhung wie folgt angenommen werden:

$$\alpha_{\ddot{u}} = 3,2 \cdot \ddot{u} / L$$

Für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit (GZT) müssen die Verdrehungen der seltenen Einwirkungskombination mit den Teilsicherheitsbeiwerten ( $\gamma_G = 1,35$ ;  $\gamma_Q = 1,5$ ) für die Verformungsanteile der jeweiligen Einwirkungen multipliziert werden. Auf Grund der nichtlinearen Berechnungen wird der Teilsicherheitsbeiwert für alle Einwirkungen pauschal mit  $\gamma_F = 1,4$  angenommen. Unter Berücksichtigung der Überhöhung ergibt sich somit für die Verdrehung aus der Bauteilverformung:

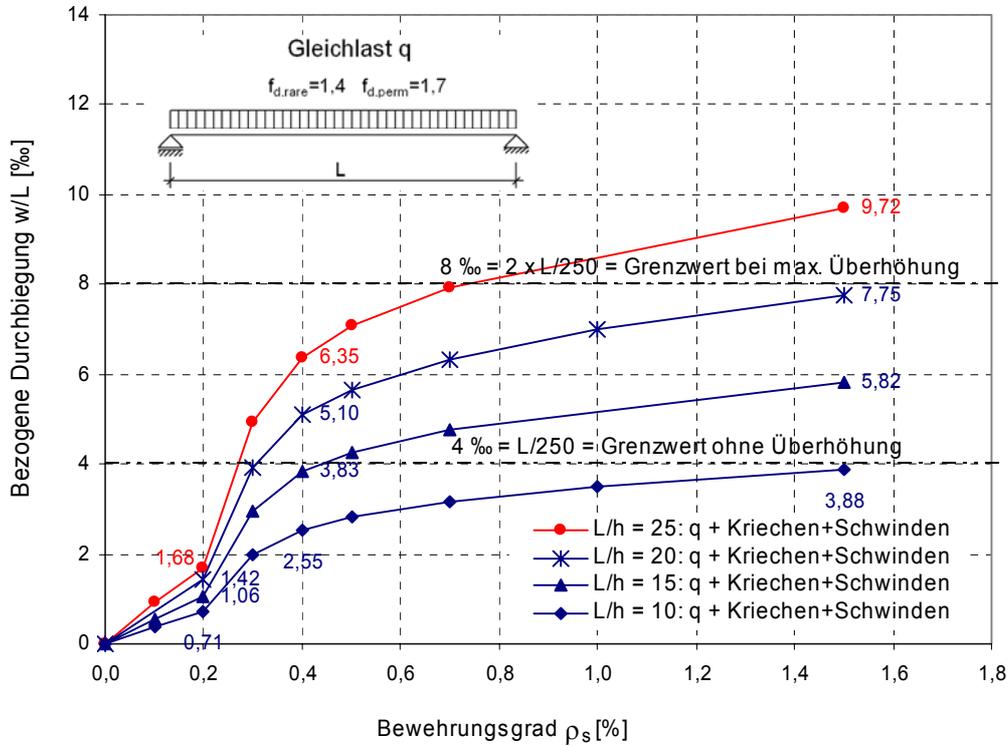
$$\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot \alpha_{rare} - \alpha_{\ddot{u}}$$

Und für den Nachweis des Lagers im GZT:

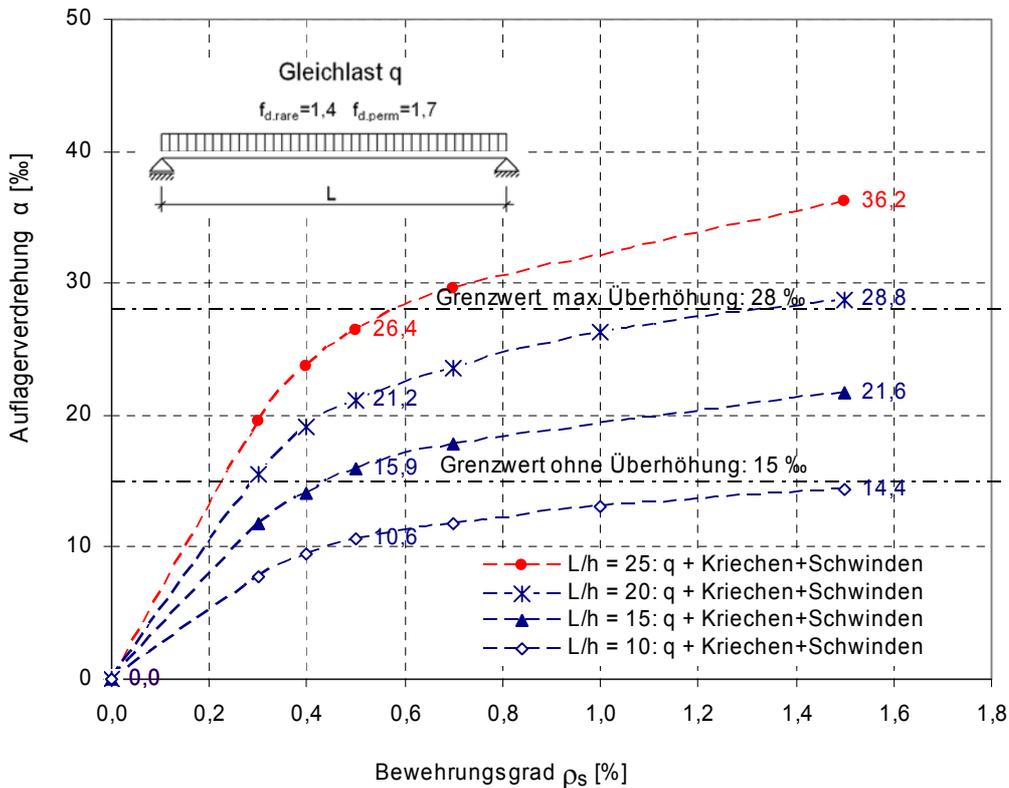
$$\alpha_{tot} = \alpha_{Bauteil} + \alpha_{Imperfektion} = 1,4 \cdot \alpha_{rare} - \alpha_{\ddot{u}} + 10\%$$

### 9.4 Diagramme zur Ermittlung von Bauteilverformungen

Für Bauteile mit Rechteckquerschnitt lassen sich die Verformungen unter  $q_{perm}$  und unter  $q_{rare}$  vereinfacht mit Hilfe von Diagrammen in guter Näherung ermitteln.

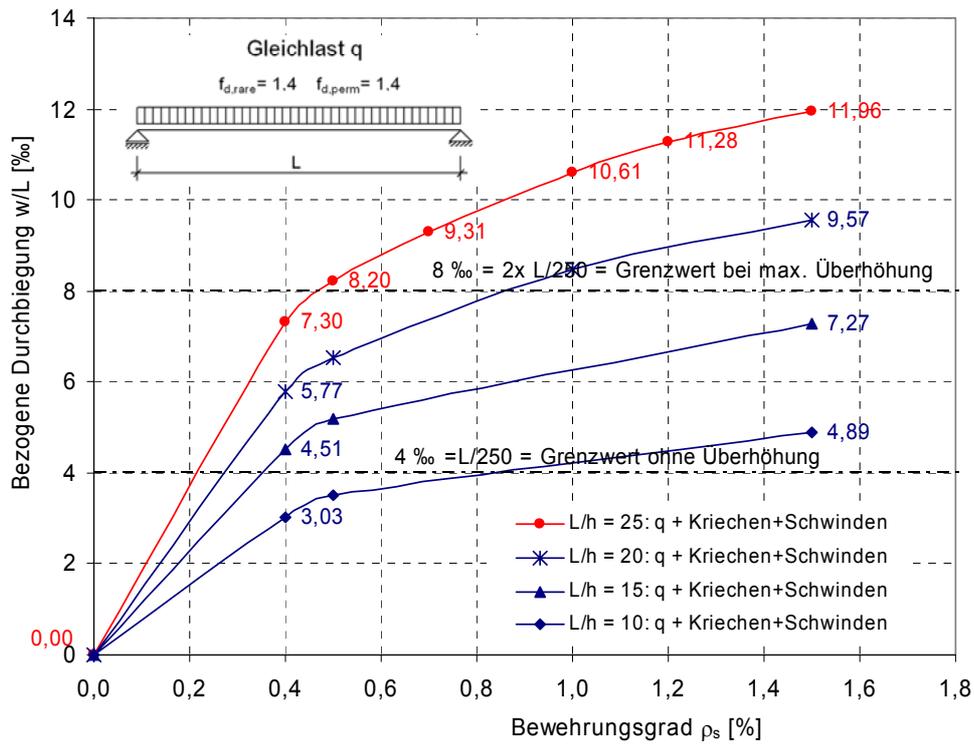


**Bild 57:** Bezogene Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung, C 30/37,  $f_{rare}=1,4$  ;  $f_{perm}=1,7$

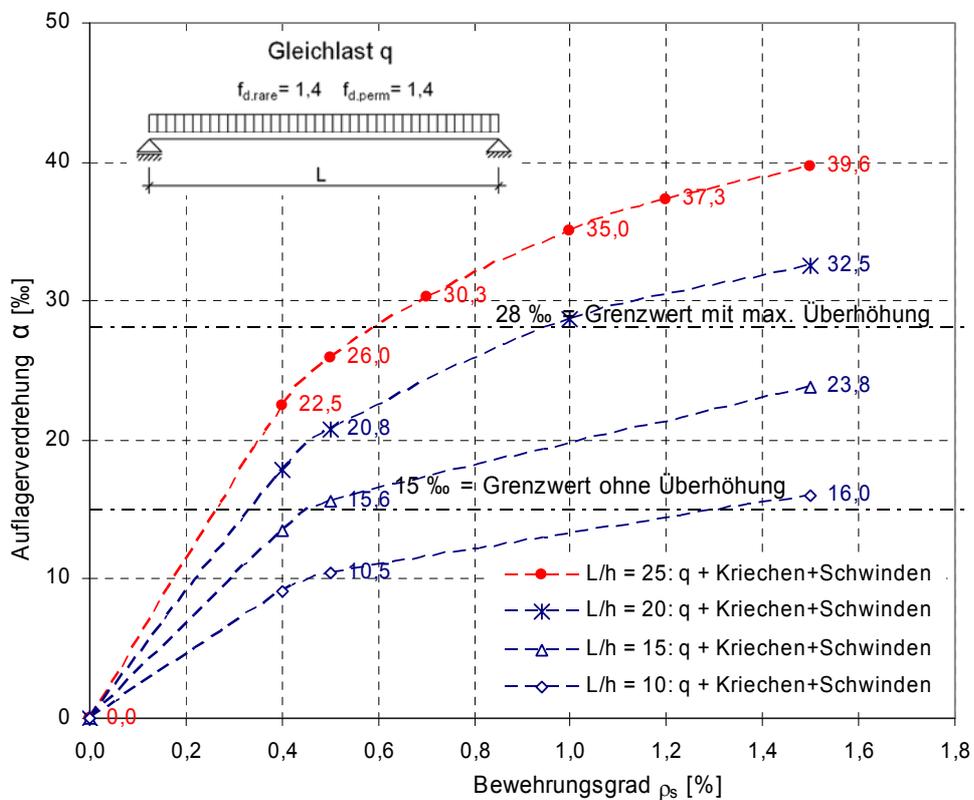


**Bild 58:** Auflagerverdrehung unter seltener Belastung, C 30/37,  $f_{rare}=1,4$  ;  $f_{perm}=1,7$

Für die Belastungsfaktor  $f_{rare} = f_{perm} = 1,4$  (nur Eigengewicht, ungünstigster Fall):



**Bild 59:** Bezogene Durchbiegung unter quasi-ständiger Belastung, C 30/37,  $f_{rare}=1,4$  ;  $f_{perm} = 1,4$



**Bild 60:** Auflagerverdrehung unter seltener Belastung, C 30/37,  $f_{rare}=1,4$  ;  $f_{perm} = 1,4$

## 9.5 Vorschlag zur Ermittlung der Auflagerverdrehung aus Bauteilverformung

Die Ermittlung der Auflagerverdrehung kann in 3 Stufen mit zunehmender Genauigkeit und damit verbundenem steigendem Aufwand ermittelt werden.

### 9.5.1 Oberer Grenzwert der Auflagerverdrehung

Eingangs wurde auf Grundlage der Forderungen der DIN 1045-1 nach einer Begrenzung des Durchhangs auf  $L/250$  für die Auflagerverdrehung ein oberer Grenzwert von ca. 13 ‰ angegeben. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass dieser Grenzwert bei vielen Bauteilen in der Praxis durchaus erreicht werden kann. Da für die Lagerbemessung die seltene Einwirkungskombination maßgebend ist, ist der Grenzwert noch um ca. 10 – 20 ‰ zu erhöhen.

$$\max \alpha_{perm} \approx 13\text{‰}$$

$$\max \alpha_{rare} \approx 15\text{‰}$$

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt:

$$\max \alpha_{Bauteil} \approx 1,4 \cdot 15\text{‰} \approx 20 \text{‰}$$

Der obere Grenzwert beinhaltet schon eine eventuell vorgenommene Erhöhung des Bauteils.

### 9.5.2 Ermittlung der Auflagerverdrehung mit Diagrammen

In vielen Fällen wird der obere Grenzwert der Auflagerverdrehung jedoch nicht erreicht. Liegt ein Rechteckquerschnitt vor, so kann der Auflagerverdrehwinkel  $\alpha_{rare}$  unter der seltenen Einwirkungskombination in ausreichender Genauigkeit mit Diagrammen ermittelt werden.

Eingangswerte für das Diagramm:

- Belastungsgrade:  $f_{rare}, f_{perm}$
- Schlankheit:  $L/h$
- statisch erforderlicher Bewehrungsgrad:  $\rho_s$

mit dem Diagramm:  $\Rightarrow \alpha_{rare}$

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt:  $\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot \alpha_{rare} - \alpha_{ii}$

Beispielsweise kann für die in Abschnitt 6.3 untersuchte Stahlbetondecke A ( $f_{perm} = 1,66$ ,  $L/h=25$ ,  $\rho_s = 0,3\%$ ) die Auflagerverdrehung unter der seltenen Einwirkungskombination aus Bild 58 abgelesen werden:

$$\alpha_{rare} = 19,5\text{‰}$$

Mit einer Überhöhung von  $\ddot{u}/L=2\text{‰}$  ergäbe sich dann für die Lagerbemessung im GZT:

$$\alpha_{ii} = 3,2 \cdot 2\text{‰} = 6,5 \text{‰}$$

$$\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot 19,5\text{‰} - 6,5\text{‰} = 13\text{‰}$$

### 9.5.3 Berechnung der Auflagerverdrehung

Die Ermittlung der Auflagerverdrehung infolge Bauteilverformung kann auch mit Hilfe eines geeigneten Programms oder mit dem in Abschnitt 4.2 dargestellten Näherungsverfahren erfolgen. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass die Verformungen mit den Näherungsverfahren ausreichend genau ermittelt werden können.

Die Ermittlung der Auflagerverdrehung unter Berücksichtigung des Kriechens des Betons kann für die Belastung  $q_{rare}$  mit der in Abschnitt 3.2 (Einwirkungen) angegebenen effektiven Kriechzahl erfolgen. Dadurch wird berücksichtigt, dass nur der Lastanteil  $q_{perm}$  kriecherzeugend ist.

$$\varphi_{eff} = \varphi \cdot \frac{M_{perm}}{M_{rare}} = \varphi \cdot \frac{q_{perm}}{q_{rare}}$$

Damit ergibt sich in guter Näherung:

$$w_{rare}(t = \infty) = w_{rare}(\varphi_{eff})$$

$$\alpha_{rare}(t = \infty) = \alpha_{rare}(\varphi_{eff})$$

Die Auflagerverdrehung infolge Schwindens muss in jedem Fall zusätzlich berücksichtigt werden.

Im Grenzzustand der Tragfähigkeit gilt:

$$\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot \alpha_{rare} - \alpha_{\ddot{u}}$$

### 9.5.4 Bemessung des Lagers

Für die Lagerbemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit ergibt sich dann für die Beanspruchung aus der Bauteilverdrehung:

$$\alpha_{tot} = \alpha_{Bauteil} + \alpha_{Im\ perfection}$$

$$\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot \max. \alpha_{rare} \quad (\text{nach Abschnitt 9.5.1})$$

$$\alpha_{Bauteil} = 1,4 \cdot \alpha_{rare} - \alpha_{\ddot{u}} \quad (\text{nach Abschnitt 9.5.2 bzw. 9.5.3})$$

## 10 Zusammenfassung

Bei der Bemessung von Elastomerlagern im Hochbau ist neben der zentrischen Auflagerpressung auch der Verdrehwinkel nachzuweisen. Der dabei einfließende Verdrehwinkel für Bauteile aus Stahlbeton wurde durch numerische Simulation unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten berechnet. Die Eignung des verwendeten Rechenmodells wurde im Rahmen eines anderen Forschungsvorhabens durch umfangreiche Versuchsnachrechnungen verifiziert.

Die Untersuchungen haben gezeigt, dass der obere Grenzwert der Auflagerverdrehung von Stahlbetonbiegebauteilen  $\alpha_{\text{rare}} = 15 \text{ ‰}$  (abgeleitet aus der Begrenzung der Durchbiegung gemäß DIN 1045-1, Abschnitt 11.3.1) durchaus erreicht werden kann.

Der Zusammenhang zwischen bezogener Durchbiegung und Auflagerverdrehung beim Einfeldträger unter Gleichstreckenlast ergab sich bei nichtlinearer Berechnung im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen zu:

$$\text{- Gleichstreckenlast: } \alpha \approx 3,0 \cdot w/L \quad \text{Schwinden: } \alpha \approx 4,0 \cdot w/L$$

Die bezogenen Durchbiegungen  $w_{\text{perm}}/L$  und  $\alpha_{\text{rare}}$  werden maßgeblich von der Schlankheit und vom statisch erforderlichen Bewehrungsgrad  $\rho_s$  bestimmt. Mit zunehmender Schlankheit nehmen die Verformungen des Biegebauteils *deutlich* zu. Somit ist die Schlankheit das wichtigste Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Verformungen.

Der statisch erforderliche Bewehrungsgrad spiegelt den Belastungsgrad wider und kann als weiteres Kriterium zur Beurteilung der zu erwartenden Verformungen herangezogen werden. Bei niedrigen Bewehrungsgraden verbleibt das Bauteil ganz oder zum großen Teil im Zustand I. Bei Rechteckquerschnitten kann als niedriger Bewehrungsgrad  $\rho_s < 0,5\%$  angesehen werden.

Das Schwinden des Betons hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf die Durchbiegung und Auflagerverdrehung eines Stahlbetonbiegeträgers und muss deswegen bei der Ermittlung der Verformungen immer berücksichtigt werden. Eine vereinfachte Abschätzung der Verformungen infolge Schwindens kann nach Abschnitt 9.2 erfolgen.

Durch eine Überhöhung können die Bauteilverformungen teilweise kompensiert werden. Der Verdrehwinkel  $\alpha_{\text{ü}}$  aus Überhöhung kann gemäß Abschnitt 9.3 von  $\alpha_{\text{Bauteil}}$  abgezogen werden.

Die Ermittlung der Auflagerverdrehung  $\alpha_{\text{rare}}$  unter der seltenen Einwirkungskombination kann auf 3 Arten und mit zunehmender Genauigkeit erfolgen:

- Vereinfacht: Annahme eines oberen Grenzwertes für die Auflagerverdrehung
- Ermittlung der Auflagerverdrehung mit den in Abschnitt 9.4 angegebenen Diagrammen
- Berechnung der Auflagerverdrehung mit einem geeigneten Programm oder mit einem der in Abschnitt 4 dargestellten ‚Vereinfachten Verfahren‘

Der Nachweis der Verdrehung des Lagers erfolgt mit dem Gesamtdrehwinkel  $\alpha_{\text{tot}}$  im GZT gemäß der Anwendungsnorm zur DIN 1337 ‚Lager und Lagerung im Hochbau‘:

$$\alpha_{\text{tot}} = \alpha_{\text{Bauteil}} + \alpha_{\text{Imperfektion}} \quad \text{mit: } \alpha_{\text{Bauteil}} = 1,4 \cdot \max .\alpha_{\text{rare}} \quad \text{bzw. } \alpha_{\text{Bauteil}} = 1,4 \cdot \alpha_{\text{rare}} - \alpha_{\text{ü}}$$

## 11 Literaturverzeichnis

- [Ala 1]** Alavizadeh-Farhang, A.: Concrete Structures Subjected to Combined Mechanical and Thermal Loading, Doctoral Theses, Stockholm 2000
- [CEB 2]** Comité Euro-International du Béton (CEB) (Hrsg.): CEB-FIP Model Code 1990 – Final Draft, Lausanne: CEB-Bulletin d'Information, 1991
- [Dud 3]** Duda, H.: Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 419 der Schriftenreihe, Ernst & Sohn, 1991
- [DIN 4]** DIN 1045-1 [07.2001]: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [DIN 5]** DIN 1055-100 [03.2001]: Einwirkungen auf Tragwerke, Teil 100 Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept, Beuth Verlag, Berlin, 2001
- [DIN 6]** DIN EN 1337-3 [07.2005]: Lager im Bauwesen – Teil 3: Elastomerlager, Beuth Verlag, Berlin, 2005
- [DIN 7]** Entwurf zur Anwendungsnorm zur DIN EN 1337-3, Stand: 18.9.2006
- [DIN 8]** DIN Fachbericht 102: Betonbrücken, Beuth Verlag, Berlin, 2003
- [DIN 9]** DIN ENV 1992-1: Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1 Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag, Berlin 2005
- [Don 10]** Donaubaue, U.: Rechnerische Untersuchung der Durchbiegung von Stahlbetonplatten unter Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten und Lagerungsbedingungen und unter Berücksichtigung zeitabhängiger Verformungen, Diss. TU München, 2002
- [Eli 11]** Eligehausen R., Fabritius, E.: Grenzen der Anwendung nichtlinearer Rechenverfahren bei Stabtragwerken und einachsig gespannten Platten, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 484 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1997
- [Fis 12]** Fischer, M.: Rissbreiten- und Verformungszunahme bei Stahlbeton- und Spannbetontragwerken infolge wiederholter Last- und Zwangbeanspruchung, Forschungsbericht 1998
- [Fri 13]** Fricke, K.-L.: Durchbiegungsberechnung an Stahlbetonträgern oder Schlankheitsnachweis, Beton- und Stahlbetonbau 99 (2004), Heft 1, Verlag Ernst und Sohn, 2004
- [Gras 14]** Grasser, E.; Thielen, G.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 240 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1991

- [Ker 15]** Kersten, R. Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Verfahren der Übertragungsmatrizen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1982
- [Kön 16]** König, G.;Tue, M.-V.: Grundlagen des Stahlbetonbaus, B. G. Teubner Stuttgart Leipzig Wiesbaden, 2003
- [Kön 17]** König, G., Pommerening, D. Tue, N-V.: Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrößenermittlung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 492 der Schriftenreihe, Beuth Verlag, Berlin, 1999
- [Kre 18]** Kreller, H.: Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangeinwirkungen, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1989
- [Krü 19]** Krüger, W., Mertzsch, O.: Beitrag zur Verformungsberechnung von Stahlbetonbauteilen, Beton- und Stahlbetonbau (1998), Hefte 10 und 11, S. 300-303, 330-336, Verlag Ernst und Sohn, 1998
- [Küh 20]** Kersten, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Verfahren der Übertragungsmatrizen, Springer-Verlag
- [Mau 21]** Maurer, R.: Grundlagen zur Bemessung des Betongurtes von Stahlverbundträgern, Diss, TU Darmstadt, 1992
- [Mau 22]** Maurer, R.; Arnold, A.; Djouahra G.: Einfluss der Zwangsschnittgrößen aus Temperatur im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei Tragwerken aus Konstruktionsbeton mit und ohne Vorspannung, DAfStb-Forschungsvorhaben V 438, 2006
- [May 23]** Mayer, H.: Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 194 der Schriftenreihe, Ernst & Sohn, Berlin, 1967
- [May 24]** Mayer, H.; Rüscher, H.: Bauschäden als Folge der Durchbiegung von Stahlbeton-Bauteilen, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb), Heft 193 der Schriftenreihe, Ernst & Sohn, Berlin, 1967
- [Mül 25]** Müller, H. S.; Kvitsel, V.: Grundlagen der neuen Vorhersagemodelle für das Kriechen und Schwinden von Beton nach DIN 1045, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStb)
- [Pfe 26]** Pfeiffer, U.: Die nichtlineare Berechnung ebener Rahmen aus stahl- und Spannbeton mit Berücksichtigung der durch das Aufreißen bedingten Achsendehnung, Diss., TU Hamburg-Harburg, Cuvillier Verlag Göttingen, 2004
- [Sof 27]** SOFiSTiK Statikprogramme Version 21.0 (Handbuch), Sofistik AG, Oberschleißheim, 2005
- [Woi 28]** Woideko, E.-O.: Zum Tragverhalten nach Traglastverfahren bemessener Stahlbetonplattenbalken