

**Ersatz oder Teilersatz von Versuchen
durch Finite Elemente
Berechnungen im Beton- und
Verbundbau – Anforderungen,
Bewertungskriterien und Grenzen**

T 3225

T 3225

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2009

ISBN 978-3-8167-8196-7

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69

70504 Stuttgart

Nobelstraße 12

70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00

Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

Abschlussbericht

Institutsbericht-Nr. 220/2008

des Instituts für Massivbau der RWTH Aachen

Gegenstand: „Ersatz oder Teilersatz von Versuchen durch Finite Elemente Berechnungen Beton- und Verbundbau – Anforderungen, Bewertungskriterien und Grenzen“

Auftraggeber: Deutsches Institut für Bautechnik – DIBt
10829 Berlin
Kolonnenstraße 30 L
ZP 52-5- 7.226-1054/03

erstattet von: Prof. Dr.-Ing. Josef Hegger (IMB, RWTH Aachen)
Dipl.-Ing. Alexander Karakas (IMB, RWTH Aachen)
Dr.-Ing. Naceur Kerkeni (H+P Ingenieure)

Datum: Aachen, den 02.08.2008

Projekt-Nr. IMB: F-2002-016

Dieser Bericht umfasst 126 Seiten Text und 3 Anhänge

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Bezeichnungen und Begriffe	I
Einheiten:	I
Große lateinische Buchstaben	I
Kleine lateinische Buchstaben	I
Griechische Buchstaben	II
Indizes	II
1 Einleitung	1
1.1 Gliederung	2
1.2 Grundlagen	2
1.2.1 Grundlegende Aussagen zur FEM	2
Lineare und nicht-lineare FEM	2
2 Elemente	4
2.1 Allgemeines	4
2.2 Stabelemente	5
2.2.1 Fachwerkelement (1D)	5
2.3 Balkenelement (2D)	5
2.3.1 Schubstarre Balken nach BERNOULLI	6
2.3.2 Schubweiche Balken nach TIMOSHENKO	8
2.4 Plattenelemente	8
2.4.1 Allgemeines	8
2.4.2 Fazit	9
2.5 Schalenelemente	10
2.5.1 „Degeneriertes“ Konzept	10
2.5.2 „Resultant-Based Formulations“	11
2.5.3 Reduzierte Integration mit Stabilisierung (<i>Hourglass</i> -Kontrolle)	11
2.5.4 Ansatz über nicht-kompatible Zustände	12
2.5.5 Ansatz der „Erweiterten Dehnung“	12
2.5.6 Elemente mit Rotations-Freiheitsgraden	13
2.5.7 „Korotations-Rahmenwerk“ zur Schalenanalyse	13
2.5.8 Verbund-Schalenelemente	14
2.6 Flächenelemente	14
2.6.1 Dreieckelemente	14
2.6.2 Rechteckelemente ...	15
2.7 Spezielle Kontinuumsselemente	17
2.7.1 Reduzierte Integration und Stabilisierung	19
2.7.2 Stabilisierung	20
2.7.3 Hybride oder gemischte Variationsprinzipien	20
2.7.4 Angereicherte („ <i>enhanced</i> “) Verzerrungen auf Basis des HU-WASHIZU-Prinzips	20
2.7.5 Gemischte Variationsprinzipien für Felder mit Rotationsfreiheitsgraden	21
2.7.6 Gemischte Variationsprinzipien für ausgewählte Größen	21
2.8 Volumenelemente	22
2.8.1 Tetraeder-Elemente	22

2.8.2 Hexaeder-Elemente ...	23
3 Materialmodelle	25
3.1 Allgemeines	25
3.2 Versagenstheorien	27
3.2.1 Einführung	27
3.2.2 Ein-Parameter-Modelle	29
Versagenstheorie nach RANKINE (1876)	29
Fließbedingungen nach TRESCA und VON MISES	31
3.2.3 Zwei-Parameter-Modelle	32
Fließbedingungen nach MOHR-COULOMB	32
Kombination des MOHR-COULOMB-Kriteriums mit der Fließbedingung nach RANKINE	33
Fließbedingung nach DRUCKER-PRAGER	34
3.2.4 Mehr-Parameter-Modelle	35
3.3 Werkstoffmodelle	39
3.3.1 Einführung	39
3.3.2 Nicht-lineare Elastizitätstheorie	39
3.3.3 Betonmodell nach OTTOSEN	39
3.3.4 <i>Microplane</i> -Modell	41
Entwicklungsstufen des <i>Microplane</i> -Modells	41
Aktuelles <i>Microplane</i> -Modell M4	45
3.3.5 Plastizitätstheorie	47
3.3.6 Elasto-Plastische Modelle	48
Fließfläche vom DRUCKER-PRAGER-Typ	49
<i>Cap-Modell</i> der Plastizitätstheorie	50
3.4 Elasto-Plastische Schädigungsmodelle	52
3.4.1 Verzerrungsbasierte Kontinuumsschädigungstheorie	52
4 Pre- und Postprocessing	56
4.1 Netzgenerierung	56
4.1.1 Grundlagen	56
4.1.2 Unstrukturierte Netzgenerierung	57
Dreieck-/Tetraeder-Vernetzung	58
Viereck-/Hexaeder-Vernetzung	61
4.2 Lösungsverfahren	68
4.2.1 Allgemeines	68
4.2.2 Inkrementallösungen	68
4.2.3 Iterative Verfahren	70
(Standard) NEWTON-RAPHSON-Methode	70
Modifizierte NEWTON-RAPHSON-Methode	72
Sekanteniteration	74
Quasi-NEWTONsche Verfahren	76
BROYDEN-Verfahren	78
Optimierungsalgorithmen	79
4.2.4 Verformungsgesteuerte Berechnung	82
4.2.5 Bogenlängenverfahren	84

4.2.6 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	87
4.3 Konvergenzkriterien	89
4.3.1 Verschiebungskriterium	90
4.3.2 Kräftekriterium	91
4.3.3 Energiekriterium	92
5 Verwendete FE-Programme	93
5.1 LIMFES	93
5.1.1 Allgemeines	93
5.1.2 Zur Diskretisierung (geometrische Abbildung) in LIMFES	93
Fachwerkstäbe	93
Biegestäbe	94
Spannglieder	95
Volumenelemente	95
GAP-Elemente	95
Interface-Elemente	96
Verbund-Elemente	96
Netzgenerierung	96
5.1.3 Materialgesetze (physikalische Abbildung) in LIMFES	96
Räumliche Materialmodelle	97
Eindimensionale Materialeigenschaften	102
Abbildung des zeitabhängigen Materialverhaltens in LIMFES	105
5.2 ABAQUS	109
5.2.1 Allgemeines	109
5.2.2 Zur Diskretisierung	109
5.2.3 Materialmodelle	111
Allgemeines	111
Verbund	111
Betonstahl	112
Beton (*CONCRETE)	114
5.3 MASA	119
6 Schlussfolgerungen – Anforderungen an ein wissenschaftliches Finite- Elemente-Programm	120
7 Literaturverzeichnis	121
Anhänge: Beispiele für FE-Berechnungen	127

Bezeichnungen und Begriffe

Einheiten:

Dehnung:	‰ bzw. $\mu\text{m}/\text{m}$
Kraft:	kN
Spannung:	N/mm^2 , MN/m^2
Verformung:	mm, μm
Zeit:	h bzw d

Große lateinische Buchstaben

A	Querschnittsfläche
A_c	Querschnittsfläche des Betons
A_p	Querschnittsfläche der Spannglieder
A_s	Querschnittsfläche des Betonstahls
E	Elastizitätsmodul
E_c	Elastizitätsmodul des Betons
$E_{c,m}$	mittlerer Elastizitätsmodul des Betons
E_g	Elastizitätsmodul des Einpressmörtels
E_p	Elastizitätsmodul des Spannstahls
E_s	Elastizitätsmodul des Betonstahls
F	Einwirkung, Kraft, Last
F_R	Risskraft

Kleine lateinische Buchstaben

c	Betondeckung
c_1	Beiwert zur Berücksichtigung unterschiedlicher Stabdurchmesser
c_2	Beiwert zur Berücksichtigung der Beton- und Einpressmörtelfestigkeiten
c_3	Beiwert zur Berücksichtigung des zeitabhängigen Verbundverhaltens
d	Durchmesser, Alter der Versuchskörper bzw. Versuchsdauer in Tagen
d_p	Durchmesser des Spannstahls
d_s	Durchmesser des Betonstahls
f	Längenzunahme der Versuchskörper
f_c	Druckfestigkeit des Betons
f_{ck}	charakteristische Druckfestigkeit des Betons
f_{cm}	mittlere Druckfestigkeit des Betons
f_{ct}	Zugfestigkeit des Betons
f_{ctm}	mittlere Zugfestigkeit des Betons
f_g	Druckfestigkeit des Einpressmörtels
f_R	bezogene Rippenfläche
f_{up}	auf Zustand II bezogene Spannstahlspannungen
f_{us}	auf Zustand II bezogene Betonstahlspannungen
l	Länge, Stützweite
l_e	Krafteinleitungslänge

l_{ep}	Krafteinleitungslänge des Spannstahls
l_{es}	Krafteinleitungslänge des Betonstahls
s_r	Rissabstand
s_m	mittlerer Rissabstand
t	Zeit, Wandstärke von Hüllrohren
u	Verbundumfang
w	Rissbreite an der Sollrissstelle
w_m	mittlere Rissbreite

Griechische Buchstaben

α_s	Verhältnis der Elastizitätsmoduli von Betonstahl zu Beton
ε	Dehnung
ε_c	Betondehnung
ε_p	Spannstahldehnung
ε_{pm}	mittlere Spannstahldehnung
$\Delta\varepsilon$	Dehnungsdifferenz infolge Mitwirkung des Betons auf Zug
η	Beiwert zur Berücksichtigung des Verbundumfangs von Bündelspanngliedern
ξ	Verbundkennwert
ρ_p	geometrischer Bewehrungsgrad des Spannstahls
ρ_s	geometrischer Bewehrungsgrad des Betonstahls
ρ_{tot}	gesamter geometrischer Bewehrungsgrad
σ	Spannung
σ_c	Betondruckspannung
σ^{II}	Spannung im reinen Zustand II
σ_p	Spannstahlspannung
σ_s	Betonstahlspannung
$\Delta\sigma_{pR}$	Zunahme der Spannstahlspannung im Rissquerschnitt
$\Delta\sigma_{sR}$	Zunahme der Betonstahlspannung im Rissquerschnitt
τ	Verbundspannung
τ_m	mittlere Verbundspannung
τ_{mp}	mittlere Verbundspannung des Spannstahls
τ_{ms}	mittlere Verbundspannung des Betonstahls

Indizes

95%	95%-Fraktilwert
<i>I</i>	Zustand I
<i>II</i>	Zustand II
<i>c</i>	Beton
<i>g</i>	Einpressmörtel
<i>m</i>	mittel
<i>p</i>	Spannstahl
<i>R</i>	Riss, Rippenfläche des Stahls
<i>s</i>	Betonstahl
<i>t</i>	Zug

1 Einleitung

1.1 Gliederung

Ziel dieses Forschungsvorhabens ist die Findung und Festlegung von Kriterien, welche zur Beurteilung von Finite-Elemente-Programmen herangezogen werden können, um diese im Hinblick auf die realitätsnahe Durchführung numerischer Simulationen, die dem Ersatz oder Teilersatz von Versuchen dienen sollen, einordnen zu können. Dies soll der Rationalisierung und Kostensenkung bei der Entwicklung neuer Produkte im Bausektor dienen, wofür heute noch aufwändige und teure Aufbauten für Versuche und deren Durchführung notwendig sind.

Im Rahmen dieses Forschungsvorhabens soll eine Übersicht über die gegenwärtig in der Fachwelt diskutierten Materialmodelle und Elemente gegeben werden, welche den heute am Markt verfügbaren FE-Programmen zugrunde liegen. Die Vor- und Nachteile der verschiedenen Theorien werden in diesem Zusammenhang erläutert und diskutiert.

Eine Bewertung der Realitätsnähe und Konsistenz in der Abbildung des Materialverhaltens von Beton und Stahl ist in diesem Zusammenhang erforderlich, sowie die Beurteilung von möglichen Modellierungen einzelner Bauteile oder komplexer Systeme innerhalb der Programme hinsichtlich ihrer realistischen Wiedergabe des statischen oder dynamischen Tragverhaltens der abzubildenden, realen Bauteile oder -werke.

1.2 Grundlagen

1.2.1 Grundlegende Aussagen zur FEM

Um nur einen groben Überblick über die Berechnung und die Simulation von Bauteilen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (*FEM*) zu geben, sollen im Folgenden einige Grundlagen der FEM beschrieben, sowie die verschiedenen, auftretenden Problemstellungen und zugehörigen Lösungsansätze kurz dargestellt werden.

Auf eine ausführliche Herleitung und Beschreibung der FEM muss aufgrund des Umfangs verzichtet werden. Es sei diesbezüglich an dieser Stelle auf die einschlägige Fachliteratur und besonders die klassischen Werke der FEM [8] [94] verwiesen.

Es muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass entgegen der laienhaften Meinung die FEM grundsätzlich **immer eine Näherungslösung** für die Berechnungen von gesamten Tragwerken oder Einzelbauteilen darstellt. Natürlich gibt es in der Qualität der Lösungen, welche auf verschiedenen Ansätzen und Theorien beruhen, –zum Teil gravierende– Unterschiede. Welche Auswirkungen die Wahl „des einen Berechnungsverfahrens“ oder „des anderen Element- bzw. Materialmodells“ auf die FEM bzw. die Lösung des betreffenden FE-Systems hat, wird an geeigneter Stelle noch deutlich gemacht werden. Es wird hier nur eindringlich darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse einer FE-Berechnung ohne die Kenntnis der zugrunde gelegten Modelle und Theorien nicht ausreichend hinsichtlich ihrer Realitätsnähe und Genauigkeit bewertet werden können.

1.2.2 Lineare und nicht-lineare FEM

Die Unterscheidung in die beiden Varianten der „linearen“ und „nicht-linearen“ FEM bezieht sich auf unterschiedliche Aspekte der zugrunde liegenden Theorien und Ansätze. So gibt es zum einen den Begriff der „geometrischen Nicht-Linearität“, welche die Berücksichtigung von Tragwerksverformungen beschreibt, sowie die „physikalische Nicht-Linearität“, die sich auf das nicht-lineare Verhalten eines Werkstoffes bezieht, sich damit also ein nicht-elastisches Materialverhalten in die FEM integrieren lässt.

Grundlegend bezieht sich der Begriff „geometrisch linear“ auf die aus der Stabstatik bekannte *Theorie I. Ordnung*, während „geometrisch nicht-linear“ die *Theorie II. (bzw. III.) Ordnung* meint. Die Nicht-Berücksichtigung der auftretenden Verformungen kann weitreichende Folgen auf die FE-Berechnung eines Systems haben, vor allem hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit eines Tragwerks.

Eine dritte Nicht-Linearität existiert bei Systemen mit so genannter „Systeminvarianz“. Hier wäre zum Beispiel die elastische Bettung einer Fundamentplatte zu nennen, die allein durch ein System beschrieben werden kann, welches für den anstehenden Boden Feder Elemente vorsieht, die ausschließlich Druck übertragen können, aber keine Zugkräfte, da sich die Bodenplatte im letzteren Falle vom Boden lösen würde. Derartige Systeme werden auch „Systeme mit veränderlicher Gliederung“ genannt.

In der Vergangenheit war die linear-elastische Berechnung, je nach Bauteil unter Berücksichtigung der geometrischen Nicht-Linearität, für eine Berechnung vor allem im baupraktischen Bereich ausreichend. Während physikalisch nicht-lineare Berechnungsverfahren vorwiegend im Forschungsbereich entwickelt und eingesetzt wurden, wurden in jüngster Zeit nicht-lineare Materialmodelle vermehrt auch in kommerzielle FE-Programme implementiert. Meist lässt sich dadurch der wichtige Aspekt der Ausnutzung und somit der Wirtschaftlichkeit eines Tragwerks besser berücksichtigen bzw. beurteilen.

Im Bereich der Forschung besteht die Notwendigkeit der Verwendung von geometrisch und physikalisch nicht-linearen Berechnungsverfahren darin, dass sie die Realität prinzipbedingt besser abbilden können.

An dieser Stelle muss auf ein aus der Verwendung nicht-linearer Modelle resultierendes, grundlegendes Merkmal der FEM hingewiesen werden, welches sich auf den oben erwähnten Begriff der „Näherungslösung“ bezieht: Da in einem nicht-linearen System auch die Beziehung der Kräfte und Verschiebungen des Systems nicht-linear ist, kann es nur durch „näherungsweise Rückführung“ auf ein *System linearer Abhängigkeit* gelöst werden. Man spricht dabei von „Linearisierung“ eines (nicht-linearen) Systems. Die bekanntesten Verfahren werden jedoch in Kapitel 4 noch näher behandelt.

Die grundsätzliche Unterscheidung erfolgt in drei Gruppen: die **inkrementellen**, die **iterativen** und die **gemischten** Verfahren.

Während Erstere die Belastung in einzelnen Stufen aufbringen und keine Überprüfung des Gleichgewichts durchführen, was dazu führt, dass die FE-Lösung von der tatsächlichen Kurve „wegdrif-

tet“, verwenden die iterativen Verfahren eine konstante Steifigkeit (Anfangs-, Tangenten- oder Sekantensteifigkeit) und bringen die Last in einem Schritt auf.

Die letztgenannten Verfahren sind Kombinationen aus den beiden zuvor genannten. Die Aufbringung der Last erfolgt in einzelnen Inkrementen; innerhalb jedes Lastschrittes wird dann mit konstanter Steifigkeit die Gleichgewichtsiteration durchgeführt. Besonders für die Berechnung nicht-linearer Probleme im Stahlbetonbau werden die gemischten Verfahren bevorzugt verwendet, da hierbei eine Gleichgewichtsiteration unbedingt erforderlich ist. Des Weiteren ist dort oftmals eine wirklichkeitsnahe Erfassung der Lastgeschichte notwendig.

2 Elemente

2.1 Allgemeines

Dieses Kapitel befasst sich mit dem grundlegendsten Bestandteil der Finite-Elemente-Methode, welcher sich bereits aus deren Namen ergibt: den Elementen. Es gibt auf Basis der zugrunde liegenden, nicht ursprünglich für den FE-Einsatz entwickelten Theorien, wie beispielsweise der Balkentheorie von TIMOSHENKO, zahlreiche Elementformulierungen und Ansätze. Es soll daher nur ein Überblick über die Elemente gegeben werden, die in vorhandenen FE-Anwendungen häufig Verwendung finden.

Die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Erweiterungen und Ergänzungen zu den ursprünglichen Theorien sollen dargelegt und diskutiert werden. Es existieren im Bereich der Elementformulierungen viele Einschränkungen und unerwünschte Nebeneffekte, die sich auf die Lösungsmöglichkeit und -geschwindigkeit von FE-Berechnungen unmittelbar auswirken. Darauf wird im Folgenden an geeigneter Stelle ebenfalls hingewiesen.

In Ergänzung zu der im vorangegangenen Kapitel gemachten Aussage, dass es sich bei FE-Berechnungen lediglich um eine Näherungslösung handelt, ist zu erwähnen, dass die wesentliche Ursache dafür aus der Formulierung der Elemente folgt. Die der FEM zugrunde liegende „Deformationsmethode“ der Technischen Biegelehre erfüllt die Randbedingungen eines Systems exakt, während das Verschiebungsfeld sowohl im Elementinneren als auch im Gesamtsystem nur approximiert wird. Ausnahmen bestehen nur bei Elementen, welche auf Theorien beruhen, für die eine exakte Lösung existiert, wie z.B. Stab- oder Balkenelemente. Als Konsequenz sind die Gleichgewichtsbedingungen in den Knotenpunkten erfüllt, im Elementinneren jedoch nur im Mittel.

Als „hybrid“ bezeichnet man Elemente, welche – im Gegensatz zum Verschiebungsansatz auf dem Rand – im Inneren einen Spannungsansatz verwenden, wobei der Vorteil darin besteht, dass die Spannungsansätze eine größere Genauigkeit besitzen. Allerdings besteht bei deren Verwendung die Notwendigkeit, kinematische Mechanismen im Element zu eliminieren, was sich in der Regel als sehr aufwändig erweist.

Unter dem Begriff „Verschiebungen“ sind in diesem Zusammenhang sowohl Translationen als auch Rotationen eines Knotens gemeint.

Zur näherungsweise Berechnung von Balken, Platten und Schalen unterstellt man die so genannte „Dünne-Hypothese“:

$$\lambda = \frac{h}{l} \gg 1 \quad \text{mit } l = \min [L, R] \quad (2.1)$$

Für derartige Tragwerke treffen die folgenden Annahmen recht gut zu:

Eine Gerade senkrecht zur Mittelfläche (Mittellinie bei Balken) bleibt auch während der Deformation geradlinig und senkrecht zur Mittelfläche (-linie).

Diese Annahme wird bei Balken mit BERNOULLI, bei Platten mit KIRCHHOFF und bei Schalen mit LOVE in Verbindung gebracht. Diese Restriktion wurde für Balken von BRESSE und TIMOSHENKO,

für Platten von MINDLIN und REISSNER sowie für Schalen von NAGHDI aufgehoben. Die Annahme lautet daher nur noch:

Eine Gerade durch die Mittelfläche (Mittellinie bei Balken) bleibt auch während der Deformation geradlinig.

Diese Lockerung erlaubt es, Schubverzerrungen näherungsweise zu erfassen. Etwas dickere Strukturen, z.B. auch Gitterträger, lassen sich dann korrekter berechnen. Eine dritte Annahme, die häufig zur Herleitung von Balken-, Platten- oder Schalen-Theorien verwendet wird, besagt:

Normalspannungen in Dickenrichtung sind vernachlässigbar.

Sämtliche Annahmen treffen sowohl für Balken als auch für Platten sowie für Schalen zu. Folglich können Balken (zweidimensional) und Platten als Sonderfälle von Schalen betrachtet werden. Probleme und Schwierigkeiten bei der Berechnung von Balken und Platten treten somit ebenfalls bei Schalen auf.

2.2 Stabelemente

2.2.1 Fachwerkelement (1D)

Die eindimensionalen Stabelemente stellen die einfachsten Formulierungen in der FEM dar. Das Attribut „einfach“ bezieht sich in diesem Zusammenhang jedoch keineswegs auf die dahinter stehende Theorie, sondern vielmehr auf die Komplexität der Verschiebungs- bzw. Verdrehungsansätze der Elemente entsprechend ihren Freiheitsgraden. Je nach Art der Belastung unterscheidet man, analog der klassischen Stabwerkstheorie, zwischen zwei Arten von Stabelementen, den Fachwerkelementen, welche nur Normalkräfte (Zug oder Druck) aufnehmen können, und den Balkenelementen zur Aufnahme von Querkraft- und Momentenbeanspruchungen, wobei Letztere in der Regel als zweidimensionale Elemente ausgelegt sind.

Für den eindimensionalen Stab mit zentrischer Belastung existiert eine exakte Lösung der zugehörigen Differentialgleichung. Ein Vergleich solcher Elemente, also der finiten Näherungslösung mit der theoretischen, ist somit leicht möglich. Die Qualität einer Implementierung ist demnach einfach zu bewerten.

2.3 Balkenelement (2D)

Man unterteilt Balkenelemente in zwei Gruppen:

- **Balken ohne Berücksichtigung der Schubverformung (schubstarre Balken) nach BERNOULLI**
- **Balken mit Berücksichtigung der Schubverformung (schubweiche Balken) nach TIMOSHENKO**

2.3.1 Schubstarre Balken nach BERNOULLI

Die Geometriegleichungen ergeben sich zu:

$$\gamma = w' + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -w' \Rightarrow \kappa = \beta' = -w'' \quad (2.2)$$

Diskretisierung

Die Anforderungen an die Ansatzpolynome ergeben sich zu (s.u. Abbildung 2-1):

höchste (n -te) vorkommende Ableitung muss existieren

$$u' \Rightarrow \text{mindestens linearer Ansatz für } u$$

$$w'' \Rightarrow \text{mindestens quadratischer Ansatz für } w$$

($n-1$)-te Ableitung soll über alle Elemente hinweg stetig sein, Rand- bzw. Übergangsbedingungen sollen vorgebar sein

$$u \Rightarrow \text{mindestens linearer Ansatz für } u$$

$$w' \Rightarrow \text{mindestens kubischer Ansatz für } w$$

Der kubische Ansatz für w ist erforderlich, da den beiden Rändern eines Balkenelementes w und w' vorzugeben sein müssen. Es wird also ein Polynom mit vier unabhängigen Parametern benötigt. Gewählt werden dafür HERMITE-Polynome, deren Stützwerte die Funktionswerte sowie deren Ableitungen an den Rändern sind.

2.3.2 Schubweiche Balken nach TIMOSHENKO

Die Geometriegleichungen lauten:

$$\kappa = \beta' , \quad \gamma = w' + \beta \quad (2.3)$$

Diskretisierung

Die Anforderungen an die Ansatzfunktionen sind (s.u. Abbildung 2-2):

höchste (n -te) vorkommende Ableitung muss existieren

$$w' \Rightarrow \text{mindestens linearer Ansatz für } w$$

$$\beta'' \Rightarrow \text{mindestens linearer Ansatz für } \beta$$

($n-1$)-te Ableitung soll über alle Elemente hinweg stetig sein (nicht zwingend notwendig, führt zu kompatiblen Elementen)

„*Shear Locking*“¹

Für das Element mit linearen Ansatzfunktionen kann der Zustand $\gamma = const$ nicht dargestellt werden, falls β nicht konstant ist. Die Ansatzfunktionen passen nicht zusammen, so dass insbesondere der Zustand $\gamma = 0$, welcher näherungsweise bei allen dünnen Tragwerken eintritt, nicht abgebildet werden kann. Erst mit sehr feiner Diskretisierung strebt die FE-Berechnung gegen die exakte Lösung, allerdings mit sehr langsamer Konvergenzrate. Dieses Phänomen wird als „*locking*“ bezeichnet. Da im vorliegenden Fall durch Schubverformungen hervorgerufen, spricht man von „*shear locking*“. Um die Konvergenz wieder zu beschleunigen, gibt es eine Reihe von Verbesserungsmaßnahmen:

- reduzierte / selektive Integration
- hybride / gemischte Elemente
- diskrete KIRCHHOFF-Theorie-Elemente
- „*(enhanced) assumed strain*“-Methoden

Reduzierte Integration

Von **reduzierter Integration** spricht man, wenn die gesamte Steifigkeitsmatrix nicht exakt, sondern unterintegriert wird. **Selektive Integration** bezeichnet die Vorgehensweise, dass Teile der Matrix exakt, andere jedoch unterintegriert werden. Mathematisch sind diese Arten der Integration noch nicht begründet. Für einige Elemente lässt sich jedoch eine Verwandtschaft bzw. Übereinstimmung mit hybriden/gemischten Elementen zeigen. Daraus resultierend kann die Unterintegration gerechtfertigt werden, welche einen Informationsverlust bewirkt, der wiederum zu singulären Systemen führen kann. Es treten dann innere Elementkinematiken auf, so genannte „*zero energy modes*“².

Es ist allgemein festzustellen, dass höherwertige Ansatzfunktionen prinzipiell die Eigenschaften eines Elementes verbessern. Quadratische Formfunktionen erfordern ebenfalls eine Unterintegration, um das – nicht mehr ganz so starke – *Locking* zu mildern. Allerdings sind erst kubische Elemente nahezu *lockingfrei*. Dabei ist zur Verminderung der Rechenzeit eine Unterintegration dennoch anzuraten.

Weiterführende Anmerkungen zu den oben genannten Maßnahmen sind in Abschnitt 2.7 zu finden.

¹ **shear** (engl.) - Schub, Scherung; **locking** (engl.) - Verriegeln, Verriegelung

² **zero energy modes** (engl.) - „Null-Energie-Zustände“

2.4 Plattenelemente

2.4.1 Allgemeines

Plattenelemente sind die in der Ingenieurpraxis wohl am häufigsten verwendeten Elemente. Sie können im Wesentlichen in zwei Gruppen eingeteilt werden:

- **schubstarre Elemente: Platten ohne Berücksichtigung der Schubverzerrung**

Diese Elemente sind von KIRCHHOFF für dünne Platten entwickelt worden. Für Balken von BERNOULLI und Schalen von LOVE.

Für diese Elemente sind Ansatzfunktionen notwendig, deren zweite Ableitungen existieren (so genannte C^1 -Stetigkeit). Dazu eignen sich insbesondere HERMITE-Polynome. Durch die geforderte C^1 -Stetigkeit wird das Finden konformer Ansätze erschwert. Hinzu kommt, dass die Verdrehungen über die Randlänge veränderlich sind, so dass das Anschreiben der Randbedingungen ebenfalls erschwert wird.

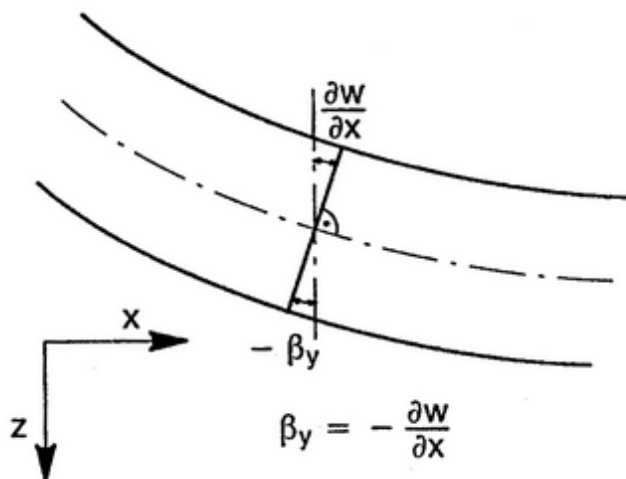


Abbildung 2-1 - KIRCHHOFF-Kinematik

- **schubweiche Elemente: Platten mit Berücksichtigung der Schubverformungen**

sind von REISSNER [67][68] und MINDLIN [52] entwickelt worden.

Für das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix sind Ansatzfunktionen erforderlich, deren erste Ableitungen existieren (so genannte C^0 -Stetigkeit), so dass bereits beispielsweise ein bilinearer Ansatz ausreicht. Weiterhin wird das Anschreiben der Lagerungsbedingungen unproblematisch.

Hier stellt jedoch die numerische Realisierung die Schwierigkeiten dar. Bei dünnen Platten wird die Schubsteifigkeit gegenüber der Biegesteifigkeit überschätzt (s. 2.3.2.2). Dies führt zu einer Beeinträchtigung der Ergebnisse.

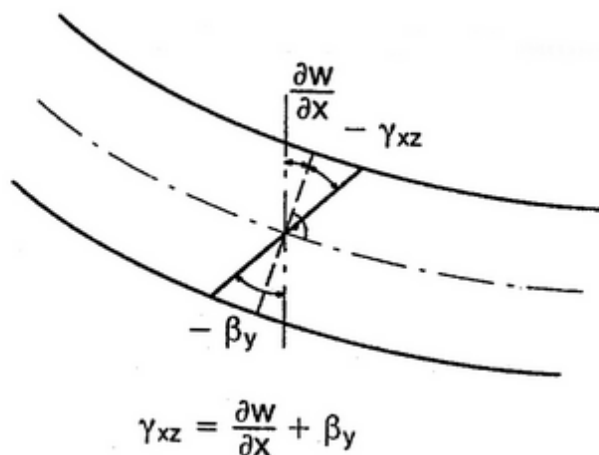


Abbildung 2-2 - REISSNER-Kinematik

2.4.2 Fazit

Bei KIRCHHOFF-Platten ist die Rotation β_y senkrecht zum Plattenrand gleich Null, da sie als Ableitung der Verschiebungen ermittelt wird. Bei der Theorie nach REISSNER und MINDLIN jedoch ist β_y ein unabhängiger Freiheitsgrad. Es stellt sich daher die Frage, ob man diesen am Plattenrand festhalten soll oder nicht.

Für Finite-Elemente-Berechnungen ist die Theorie mit der Berücksichtigung der Schubverzerrungen besser geeignet, da die Anforderungen an die Ansätze einfacher zu erfüllen sind. Bei der Berechnung der gelenkig gelagerten Platten mit „*hard support*“³-Randbedingungen ($\beta_y = 0 \rightarrow m_{xy} \neq 0$) treten am Rand Drillmomente auf, welche die Platte zwar im Gleichgewicht halten, jedoch physikalisch nicht sinnvoll sind, da sie in der Wirklichkeit nicht festgehalten werden können. Die Querkräfte wirken hier der abhebenden Kraft der Platte nicht entgegen, so dass eine Bemessung für diese Querkräfte dort zu Schäden führen würde.

Eine Berechnung mit „*soft support*“⁴ ($\beta_y \neq 0 \rightarrow m_{xy} = 0$) ist physikalisch sinnvoller, da keine künstliche Drilleinspannung angenommen wird. Konsequenterweise entstehen daraus in der Plattenecke negative Querkräfte, also abhebende Kräfte, die als eine „verschmierte“ Einzelkraft der Kirchhoff-Theorie interpretiert werden kann. Bei einer schlanken Platte können die zugehörigen Schubspannungen jedoch sehr groß werden, was jedoch physikalisch einer künstlichen Singularität entspricht, so dass es ausreichend ist, an einer solchen Stelle auf die resultierende Kraft zu bemessen.

³ *hard support* (engl.) – Starre Lagerung (hier: der Ränder einer Platte)

⁴ *soft support* (engl.) – Weiche Lagerung

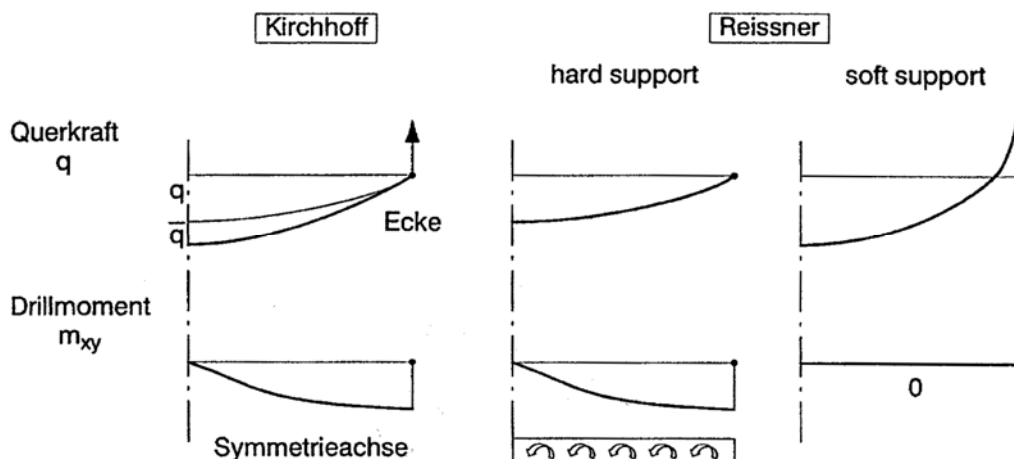


Abbildung 2-3 – Quadratische Platte unter Gleichlast: Vergleich von Querkraft- und Drillmomentenverlauf

2.5 Schalenelemente

In der Fachliteratur sind unzählige Artikel über neue oder erweiterte Schalenelemente zu finden. Eine vollständige Wiedergabe aller diskutierten, entwickelten Elemente ist daher in diesem Rahmen nicht möglich. Um nur einen Überblick über die zugrunde liegenden Theorien geben zu können, sei an dieser Stelle vor allem auf [90] verwiesen, worin Verweise auf weiterführende Literatur zu finden sind. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass ein Schalenelement gute Ergebnisse erzielt, wenn es auf einer Kombination von mehr als einer der genannten Theorien basiert. Konsequenterweise ist festzustellen, dass die verschiedenen Ansätze untereinander abhängig sind, so dass sie nicht vollkommen getrennt voneinander diskutiert werden können.

Grundsätzlich sind sowohl Scheiben- als auch Plattenelemente sowie Balkenelemente (2D) Sonderfälle der Schalenelemente. Bei Platten und Balken werden die in Dickenrichtung auftretenden Spannungen vernachlässigt. Im Folgenden werden die verschiedenen Konzepte und Theorien, die für Schalenelemente existieren, kurz erläutert.

2.5.1 „Degeneriertes“ Konzept

Das so genannte „degenerierte“ Konzept ist einer der ersten und lange Zeit dominierenden Ansätze. Die Popularität dieses Ansatzes liegt in der Einfachheit seiner Formulierung, in welcher die klassischen Schalentheorien [87] umgangen werden. Das entsprechende Element ist direkt von den fundamentalen Gleichungen der Kontinuumsmechanik abgeleitet, wodurch das zugrunde liegende Konzept, wie erwähnt, sehr einfach ist. Aufgrund dieser Tatsache jedoch sind diese Elemente sehr aufwändig in der Berechnung und ihr Einsatz im nicht-linearen Bereich ist beschränkt.

2.5.2 „Resultant-Based Formulations“

Leistungsfähige Elemente können formuliert werden ausgehend von dem direkten Ansatz durch das Betrachten der Schale als eine Oberfläche mit ausgerichteten „Direktoren“. Diese Entwicklung wurde inspiriert durch das Konzept des COSSERAT-Kontinuums [29], in welchem jedem Teilchen in diesem Kontinuum als Ergänzung zum Verschiebungsfeld davon unabhängige Rotationsfreiheitsgrade zugewiesen werden. Die resultierenden Gleichungen allerdings sind sehr unterschiedlich zu den ursprünglich von COSSERAT [29] formulierten.

Betrachtet man die „Ein-Direktoren-Formulierung“ ist diese äquivalent und kann abgeleitet werden zu dem GREENSchen Spannungstensor der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, wenn das Verschiebungsfeld als linear veränderlich über die Schalendicke angenommen wird. Die SHEBA-Elementfamilie [6][7] und deren Verallgemeinerungen gehören beispielsweise zu dieser Gruppe.

2.5.3 Reduzierte Integration mit Stabilisierung (*Hourglass-Kontrolle*)

Elemente dieses Typs verwenden Polynomansätze niedriger Ordnung, vornehmlich zur Vereinfachung der Netzgenerierung und wegen der Robustheit in komplizierten nicht-linearen Problemen. Sie machen Gebrauch vom Konzept der reduzierten und selektiv reduzierten Integrationstechniken zum Zweck einer effizienten Berechnung.

Ein vierseitiges 4-Knoten-Schalenelement mit einem Integrationspunkt in der Mitte (Ifläche) wurde entwickelt von BELYTCHKO und TSAY [13]. Ziel der Entwicklung war die Formulierung eines stabilen, konvergenten Elementes mit einem minimalen Berechnungsaufwand. Aus diesem Grund beinhaltet das Element bilineare, isoparametrische Ansätze mit einem Integrationspunkt in der Mittelfläche bei elastischem Material. Für nicht-lineare Materialien wurden mehrere Integrationspunkte entlang der Dicke senkrecht zu dem Mittelpunkt der Fläche verwendet. Da dieses Element mit einem Integrationspunkt „rank-deficient“⁵ war, wurde eine Kontrolle der so genannten „Hourglass-Modes“⁶, die auch „Zero-Energy-Modes“⁷ genannt werden, eingeführt. Zusammenfassend ist zu sagen, dass die Leistung des Elementes in der Summe gut ist, jedoch zwei Unzulänglichkeiten existieren:

- Es liefert schlechte Leistungswerte, sobald es verformt/verzerrt wird, insbesondere ist das Problem eines verdrillten Balkens damit nicht korrekt zu lösen.
- Es erfüllt nicht den quadratischen KIRCHHOFF-Patch-Test (bei Beschränkung auf dünne Schalen).

Des Weiteren wurde in [13] ein Hexaeder- (3D) und ein vierseitiges (2D) Element mit orthogonaler *Hourglass-Kontrolle* für gleichförmige Dehnung entwickelt. Zur Stabilisierung der *Hourglass-Zustände* wurden dem bilinearen, vierseitigen 4-Knoten-Element verallgemeinerte Dehnungen

⁵ *deficient* (engl.) - mangelhaft, unzureichend; *rank* (engl.) - Rang (einer Matrix); \Rightarrow „Rang-Unterdeckung“ = Rang der Steifigkeitsmatrix ist kleiner als die Gesamtzahl der Freiheitsgrade abzüglich der Starrkörperzustände eines Elements.

⁶ *hourglass* (engl.) - Sanduhr; *mode* (engl.) - Zustand; \Rightarrow „Sanduhr-Zustände“ = kinematische Zustände, in welchen in den Knoten zwar Verschiebungen auftreten, die Spannungen, und somit die Formänderungsenergie, aber gleich Null ist.

⁷ „Null-Energie-Zustände“: s.o.

hinzugefügt, die von den kinematischen Zuständen aktiviert werden, nicht jedoch von den Starrkörperverschiebungen (unabhängig von der Form des vierseitigen Elements).

2.5.4 Ansatz über nicht-kompatible Zustände

Eine Vielzahl von Anwendungsgebieten beinhaltet Verformungen, die verbunden sind mit großen Dehnungen. Weiterhin sind Probleme, die große, elastische Verformungen aufweisen eingeschränkt durch das Vorhandensein der Inkompessibilität des Materials. Wegen ihrer einfachen Geometrie werden besonders vierseitige 4-Knoten-Elemente häufig in diesen Anwendungsbereichen verwendet.

Das Vorhandensein der Inkompessibilität führt bekanntermaßen zum Auftreten von *Locking*-Effekten im Falle von Diskretisierungen mit Hilfe standardmäßiger Verschiebungselemente. Es wurden mehrere Methoden zur Umgehung dieses Phänomens entwickelt, darunter die Techniken der reduzierten Integration und die gemischten Methoden.

Es wurde eine Elementfamilie für den linearen [77] und nicht-linearen [78] Fall entwickelt, die auf dem HU-WASHIZU-Variationsprinzip basiert und deren Elemente eine Erweiterung des inkompatiblen Elements *QM6* [83] darstellen. Diese Elemente scheinen keinerlei „Rang-Unterdeckung“ aufzuweisen und arbeiten gut sowohl in Biegeproblemen als auch im Falle von Inkompessibilität. Des Weiteren existiert eine ähnliche Elementformulierung [88], genannt *QS6*, die es auch in einer weiterführenden Formulierung für große Verformungen gibt [89].

Die Methode der inkompatiblen Zustände wurde in [86] als ein Ansatz zur Verbesserung des Verhaltens von Elementen niedriger Ordnung in Problemen mit vorwiegender Biegebeanspruchung eingeführt. Die praktischen Vorteile der Methode liegen in der höheren Genauigkeit für ein grobes Elementnetz, Unabhängigkeit von Netzverzerrungen und sehr guter Leistung in der Analyse von nahezu inkompessiblen und nicht-linearen Materialien.

Die verformungsbasierte Formulierung der inkompatiblen Zustände besitzt definitive Vorteile, wenn es um nicht-lineare konstitutive Materialmodelle geht. Viele konstitutive Gleichungen in Ratenform werden natürlicherweise integriert mit einem verschiebungsbasierten Algorithmus, beispielsweise dem *Return-Mapping*-Algorithmus für J_2 -Plastizität, oder mit konstitutiven Gleichungen, welche direkt in einer dehnungsbasierten Formulierung gegeben sind.

2.5.5 Ansatz der „Erweiterten Dehnung“

Elemente nach dem Ansatz der „*Erweiterten Dehnung*“ erzielen sehr gute Leistungswerte bei Beschränkung auf inkompessible Materialien und bei Biegeproblemen, so dass sie verwendet werden, um geometrisch und materiell nicht-lineare Probleme zu lösen. Sie sind ein robustes Hilfsmittel, um numerische Simulationen in der Festkörpermechanik durchzuführen. Wegen der Konstruktion dieser Elemente mittels erweiterter Dehnungsansätze zeigen diese Formulierungen eine sehr hohe Genauigkeit in groben FE-Netzen. Zudem ist die Implementierung unelastischer (starrer) Materialmodelle direkt möglich.

2.5.6 Elemente mit Rotations-Freiheitsgraden

Membran-Elemente mit Rotations-Freiheitsgraden in der Ebene besitzen praktische Vorteile in der Analyse von Schalenstrukturen und Faltwerken. Beispielsweise lässt sich durch Kombination eines Platten-Biege-Elements und eines Membran-Elements mit Rotations-Freiheitsgraden ein Schalenelement erzeugen, welches in jedem seiner Knoten sechs Freiheitsgrade besitzt, drei Verschiebungen und drei Rotationen.

Typische Membran-Elemente besitzen den Rotations-Freiheitsgrad in der Ebene nicht, so dass sie im Falle ihrer Kombination mit einem Plattenelement ein Schalenelement mit nur fünf Freiheitsgraden je Knoten bilden. Die daraus entstehenden Schwierigkeiten in der Programmierung und der Modellbildung werden durch die Membran-Elemente mit Rotations-Freiheitsgrad umgangen.

Die einfachste und meist genutzte Abhilfe ist das Einfügen einer fiktiven Torsionsfedersteifigkeit an jedem Knoten. Dies jedoch macht die numerische Lösungsmethode inkonsistent und setzt die Konvergenzeigenschaften herab.

In der mathematischen Fachliteratur wurden auch Ansätze diskutiert, welchen Variationsformulierungen, die unabhängige Rotationsfelder verwendeten, zugrunde lagen. Diese Ideen gehen zurück auf REISSNER [66].

2.5.7 „Korotations-Rahmenwerk“ zur Schalenanalyse

Die Erfordernis, auch komplexe Schalenträgerwerke gut im nicht-linearen Bereich bemessen zu können, führte zur Entwicklung von Verbesserungen, die es erlauben, Schalen zu modellieren, die große Verdrehungen (/Rotationen) erfahren, beispielsweise während großer Verbiegungen oder Nachbeulen. Viele der existierenden Balken- und Schalenelemente sind ineffektiv bei Problemen mit großen Verdrehungen (/Rotationen), da sie auf der Annahme von gemäßigten Rotationen basieren.

In [14] wurde ein elementunabhängiger Ansatz für kleine Dehnungen und große Verdrehungen vorgeschlagen, der auf „konvektierten“ Koordinaten⁸ basiert. Der Gebrauch dieser konvektierten Koordinaten zerlegt die Bewegung des Elements in ihren Deformations- und einen Starrkörperanteil. Später wurde ein Verfahren entwickelt, um basierend auf der oben genannten Zerlegung mittels „Korotations“-Koordinaten die Dehnungen von beliebig großen Verformungen und Verdrehungen zu berechnen. Diese Methode bietet den Vorteil, dass aus einem gegebenen Verschiebungsfeld die reinen Verformungen, also Verschiebungen, die frei jeglicher Starrkörperbewegungen sind, herausgeholt werden können, so dass die Implementierung unabhängig von der Elementformulierung geschehen kann. Eine vorhandene Formulierung für kleine Verschiebung und Verdrehung kann so sehr einfach auf große Verschiebung und Verdrehung erweitert werden.

⁸ „konvektierte“ Koordinaten muss man sich als in eine (Ober-)Fläche *eingeritzte* Koordinaten vorstellen

2.5.8 Verbund-Schalenelemente

Der Vollständigkeit halber seien zum Abschluss kurz die Modelle für laminierte Schalenelement erwähnt. Sie basieren zumeist auf der klassischen Verbund-Theorie⁹, welche wiederum eine direkte Erweiterung der klassischen Plattentheorie darstellt mit der bekannten kinematischen KIRCHHOFF-LOVE-Hypothese, welche besagt, dass ebene Bereiche eben bleiben, und dass eine Normale auf der Mittelfläche vor der Deformation gerade und normal zur Mittelfläche nach der Deformation bleibt. Um die hauptsächlichsten Schwächen und Unzulänglichkeiten der *CLT* zu umgehen, wurden zahlreiche, verfeinerte Verbundtheorien entwickelt. Ein Überblick über diese Theorien mit den entsprechenden kinematischen Beziehungen ist in [38] zu finden.

2.6 Flächenelemente

Im Folgenden sollen zur Vervollständigung der in den vorangegangenen Abschnitten gemachten allgemeinen Erläuterungen die grundlegenden Prinzipien der zweidimensionalen Elementformulierungen vorgestellt werden.

2.6.1 Dreieckelemente

Verschiebungsansätze für dreiecksförmige Elemente basieren auf dem PASCALSchen Dreieck. Die Terme der Ansatzpolynome werden dort gemäß Abbildung 2-4 je nach Knotenzahl entnommen.

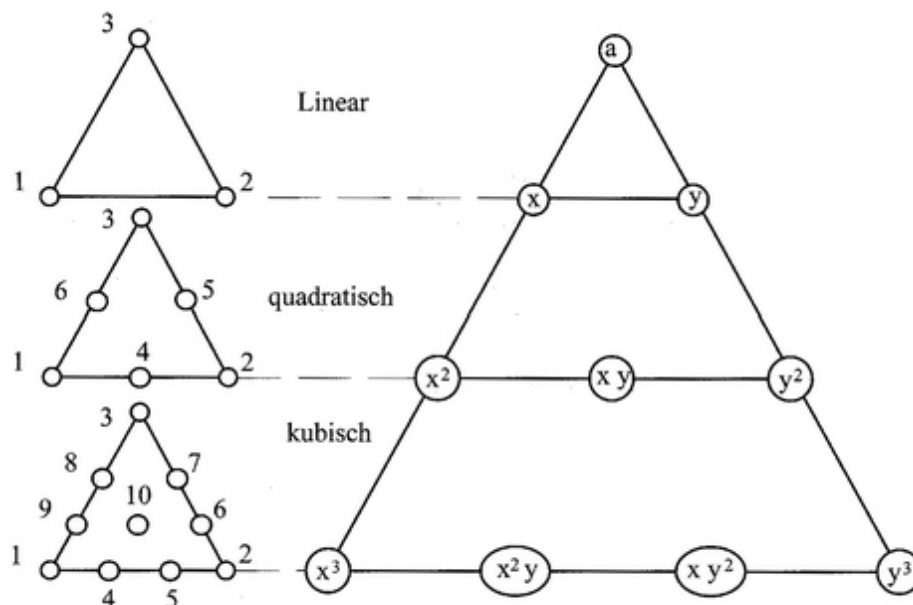


Abbildung 2-4 – PASCALSches Dreieck

⁹ „Classical Laminate Theory“ (*CLT*)

Die Anzahl der Polynomterme stimmt daher grundsätzlich mit der Knotenzahl überein. Zwischen der Zahl der Knoten und dem Polynomgrad besteht der folgende Zusammenhang:

$$n = (p + 1)(p + 2) \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

Allgemein lassen sich die beiden Verschiebungsanteile in der folgenden Form darstellen:

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

oder in Kurzform:

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)] \{\alpha\} \quad (2.6)$$

wobei die Verschiebungsfunktion $f(x, y)$ den gewählten Verschiebungsansatz beschreibt.

2.6.2 Rechteckelemente ...

Während für Dreieckelemente (im PASCALSchen Dreieck) vollständige Ansätze verwendet werden, gibt es bei den Rechteckelementen zwei Klassen: die LAGRANGE- und die SERENDIPITY¹⁰-Klasse. Die jeweiligen Ansätze unterscheiden sich im Wesentlichen in der Vollständigkeit der Polynomterme des Verschiebungsansatzes und der daraus resultierenden Anzahl der Knoten eines Elements.

... der LAGRANGE-Klasse

Analog zur LAGRANGE-Klasse der Dreieckelemente gibt es diese Klasse auch für Rechteckelemente. Wie in Abbildung 2-5 dargestellt, werden für die jeweiligen Ansatzfunktionen stets alle Polynomterme verwendet. Der Polynomgrad steht mit der Knotenzahl in folgender Beziehung:

$$n = (p + 1)^2 \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

Für Rechteckelemente p -ter Ordnung mit n Knotenpunkten gilt der verallgemeinerte Ansatz:

$$u(x, y) = \sum_{\lambda, \mu=0}^p \phi_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu := \sum_{k=1}^n u_k N_k \quad (2.8)$$

Darin gilt der Zusammenhang aus Gleichung (2.7).

¹⁰ „serendipity“ (engl.) - glücklicher Zufall (bezieht sich auf die (Er-)Findung dieser Elementklasse)

Die zweidimensionalen Formfunktionen lassen sich aus den eindimensionalen LAGRANGESchen Interpolationsfunktionen durch Multiplikation erzeugen:

$$f_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \cdots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \cdots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \cdots (\xi_i - \xi_n)} \quad (2.9)$$

$$g_i(\eta) = \frac{(\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \cdots (\eta - \eta_{i-1})(\eta - \eta_{i+1}) \cdots (\eta - \eta_n)}{(\eta_i - \eta_1)(\eta_i - \eta_2) \cdots (\eta_i - \eta_{i-1})(\eta_i - \eta_{i+1}) \cdots (\eta_i - \eta_n)} \quad (2.10)$$

Für die 2D-Formfunktionen folgt:

$$N_i(\xi, \eta) = f_i(\xi) g_i(\eta) \quad (2.11)$$

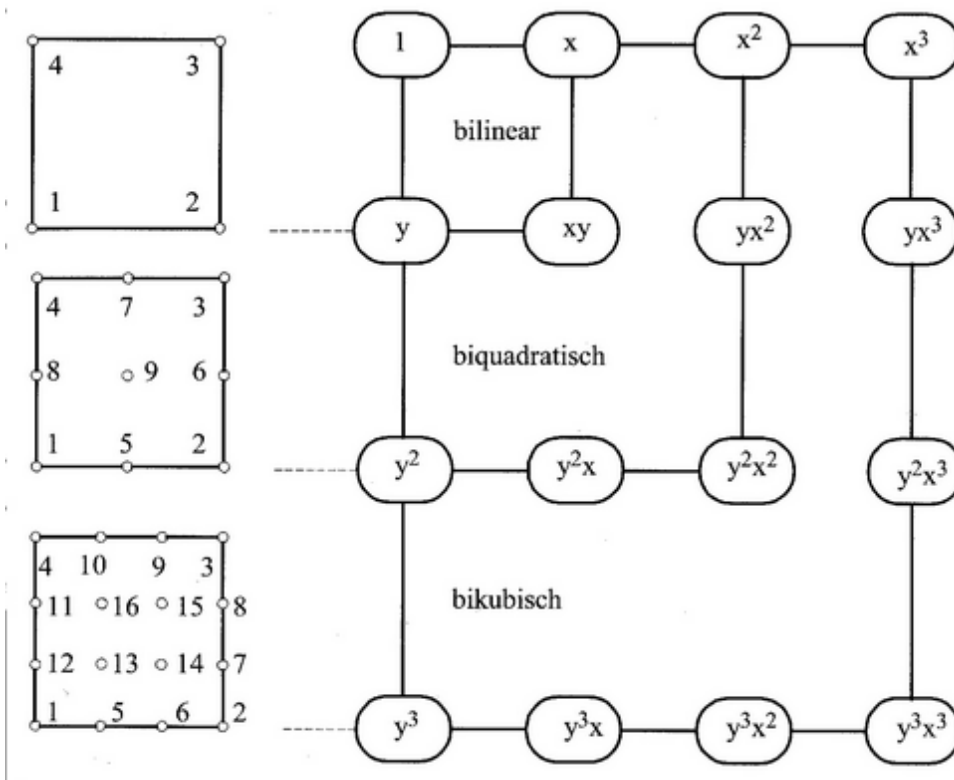


Abbildung 2-5 – Bilineares, biquadratisches und bikubisches Rechteckelement der LAGRANGE-Klasse

... der SERENDIPITY-Klasse

Der Unterschied zur LAGRANGE-Klasse besteht im Wesentlichen darin, dass bei den SERENDIPITY-Elementen die Knoten im Elementinneren fehlen. Dies ergibt sich aus den fehlenden Polynomtermen in der Ansatzfunktion der SERENDIPITY-Elemente im Gegensatz zu den vollbesetzten Polynomen der LAGRANGE-Elemente. Allerdings gilt der Unterschied nur ab einem Polynomgrad von $n > 2$, da bilineare Elemente beider Klassen mit ihren vier Knoten identisch sind. Dies ist Abbildung 2-6 zu entnehmen.

Der Zusammenhang zwischen Knotenzahl und Polynomgrad ergibt sich zu:

$$n = 4 \cdot p \quad (2.12)$$

Die LAGRANGE-Elemente benötigen hingegen $\Delta n = (p - 1)^2$ **mehr** Knoten. Allerdings können die Formfunktionen der SERENDIPITY-Elemente **nicht** durch Produktbildung aus den eindimensionalen LAGRANGESchen Interpolationsfunktionen (s. Gl. (2.9) – (2.11)) erzeugt werden.

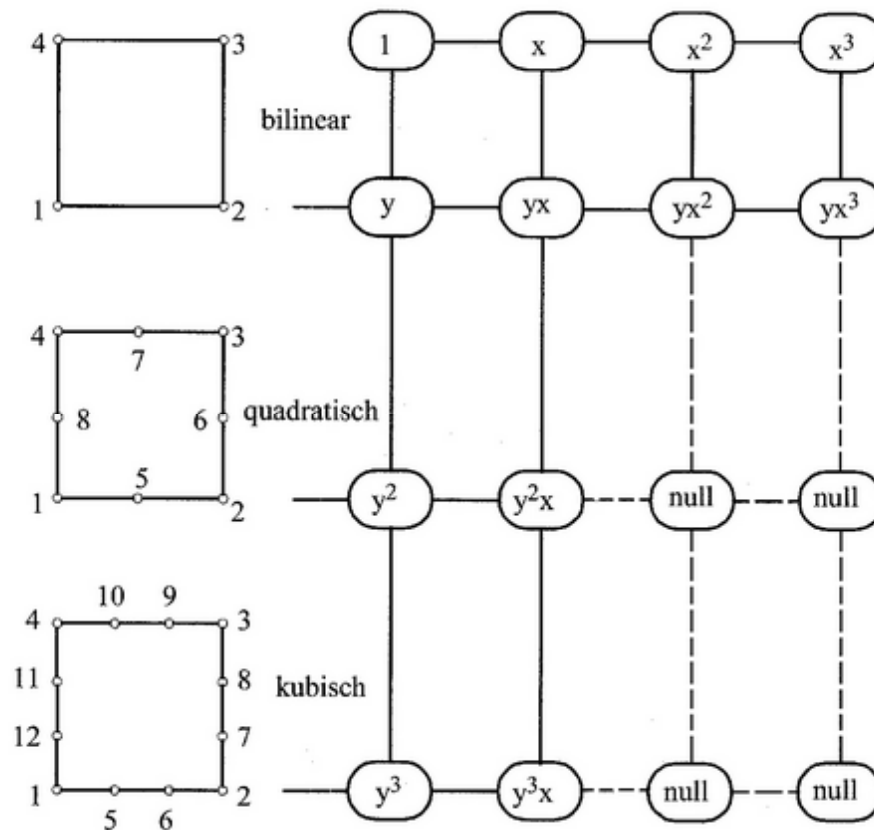


Abbildung 2-6 – Bilineares, quadratisches und kubisches Rechteckelement der SERENDIPITY-Klasse

2.7 Spezielle Kontinuumselemente

Die Suche nach 3D-Element-Formulierungen, welche ein allgemeines Werkzeug zur Lösung beliebiger Probleme der Festkörpermechanik darstellen, hat das hauptsächliche Ziel, die folgenden Anforderungen zu erfüllen:

1. Kein *Locking* für inkompressible Materialien,
2. gutes Verhalten und gute Eigenschaften bei Biegung,
3. kein *Locking* bei Beschränkung auf (sehr) dünne Elemente,

4. Verzerrungsunabhängigkeit,
5. hohe Genauigkeit bei groben Netzen,
6. einfache Implementierung nicht-linearer konstitutiver Gleichungen,
7. (Berechnungs-)Effizienz.

Der erste Punkt ergibt sich aus Anforderungen bei der Behandlung spezieller Probleme, die gummiartige und elasto-plastische Materialien im Rahmen der J_2 -Plastizität beinhalten. Die klassischen Verschiebungselemente, wie in den Abschnitten 2.6 (2D) und 2.8 (3D) beschrieben, können komplexes Materialverhalten nicht hinreichend beschreiben.

Die Punkte zwei und drei sind bedeutend bei der Berechnung von Balken- und Schalenproblemen im dreidimensionalen Raum, wie zum Beispiel bei Kontaktproblemen von Schalen. Der vierte Punkt wird maßgebend, wenn moderne Methoden der Netzgenerierung Verwendung finden sollen, wobei im Allgemeinen unstrukturierte Netze erzeugt werden, die oft verzerrte Elementgeometrien aufweisen. Des Weiteren betrifft dies auch Elemente, die bei einer FE-Berechnung stark verzerrt werden.

Punkt fünf steht im Zusammenhang mit der Analyse von sehr komplexen, dreidimensionalen Bauteilen, die bei feiner Auflösung des Finite-Elemente-Netzes auch die heutige Computer-Generation noch an die Grenzen der Leistungsfähigkeit bringt. Daher sollten die Elemente auch bei grober Auflösung noch gute Ergebnisse liefern. Allerdings verliert dieser Punkt mit Zunahme der Rechenleistung konsequenterweise an Bedeutung.

Aus der Notwendigkeit immer genauere, mathematisch-physikalische (Material-)Modelle zur Berechnung von Bauteilen und Strukturen heranziehen zu müssen, ergibt sich unter Punkt sechs, dass diese Berücksichtigung finiter Deformationen und nicht-linearer Materialgleichungen auch möglichst einfach implementiert werden kann.

Siebter und letzter Punkt richtet sein Augenmerk auf eine Elementimplementierung, die sich durch Effizienz und sparsamen Umgang mit den Ressourcen, hauptsächlich dem Speicherplatz, eines Rechners auszeichnet. Bei den heute verwendeten, modernen iterativen Lösungsverfahren entspricht nämlich der Zeitaufwand des Aufstellens der tangentialen Steifigkeitsmatrix und der rechten Seite schon dem Aufwand, den gute Löser treiben müssen.

Besonders Elemente mit Ansätzen niedriger Ordnung haben sich gerade für nicht-lineare Berechnungen als sehr robust erwiesen. Dies liegt vorwiegend an der Tatsache, dass diese niedrige Ansatzordnung zu einer schwachen Besetztheit der globalen tangentialen Steifigkeitsmatrizen führt, als es für Elemente höherwertiger Ansatzfunktionen der Fall ist. Die Lösung des sich daraus ergebenden linearen Gleichungssystems kann folglich schneller erfolgen, so dass die Berechnung insgesamt effizienter durchgeführt wird. Dies bietet insbesondere bei umfangreicheren Diskretisierungen Vorteile.

Ein weiterer Vorteil ergibt sich für Probleme mit inelastischen Materialien, da dabei notwendigerweise die *Geschichtsvariablen* für jeden GAUSS-Punkt gespeichert werden müssen. Bei Elementen mit geringer Ansatzordnung verringert sich der Bedarf an Speicherplatz für diese *Geschichtsvari-*

ablen allerdings erheblich. Diesbezüglich sollte man jedoch nicht außer Acht lassen, dass die höherwertigen Elemente natürlich ein besseres Konvergenzverhalten aufweisen. Insofern ist dies nicht als direkter Vergleich zu betrachten, sondern es muss je nach Anforderung entschieden werden, welcher Ansatz für ein vorhandenes Problem besser geeignet ist.

Um eine Elementformulierung zu erhalten, die im Idealfall alle der sieben genannten Anforderungen erfüllt, sind verschiedene Vorgehensweisen entwickelt worden:

- Techniken der Unterintegration der Elemente
- Stabilisierungsmethoden
- Hybride oder gemischte Variationsprinzipien (basierend auf der in Spannungen geschriebenen Komplementärenergie)
- gemischtes Variationsprinzip nach HU-WASHIZU
- gemischte Variationsprinzipien für Rotationsfelder
- gemischte Variationsprinzipien für ausgewählte Größen

2.7.1 Reduzierte Integration und Stabilisierung

Bei der reduzierten oder auch Unterintegration werden weniger GAUSS-Punkte bei der Integration der Tangentenmatrizen und Residualvektoren verwendet als für den vorhandenen Polynomgrad des Verschiebungsansatzes des Elementes eigentlich notwendig wären. Wie unter 2.3.2.2 bereits erwähnt, wird diese Art der Integration auch zur Vermeidung des *Lockings* – vor allem bei InkompRESSIBILITÄTSproblemen – durchgeführt. Teilweise auch oft selektiv nur für den Druckanteil. Es existieren viele Varianten der Unterintegration, die sich aus der Tatsache ergeben, dass dabei grundsätzlich ein *Rangabfall*¹¹ der tangentialen Steifigkeitsmatrix auftritt, der durch zusätzliche Maßnahmen behoben werden muss. Letztgenannte werden unter dem Begriff *Stabilisierungstechniken* zusammengefasst und im nachfolgenden Abschnitt kurz erläutert.

Elemente, die mit einer reduzierten Integration unter Verwendung von Stabilisierungstechniken implementiert sind, erfüllen die meisten der Anforderungen (\Rightarrow Punkte 1, 4, 5, 6 und 7):

Sie ...

- ... weisen kein *Locking* bei InkompRESSIBILITÄT auf.
- ... sind ziemlich genau bei groben FE-Netzen.
- ... sind unanfällig gegenüber Netzverzerrungen.
- ... erlauben die Implementierung von allgemeinen Materialgesetzen.

¹¹ *Rangabfall* =

- ... sind effizient:

Die reduzierte Integration liefert die effizienteste Möglichkeit, die tangentiale Steifigkeitsmatrix und das Elementresiduum zu berechnen. So wird zum Beispiel für das 8-Knoten-Element nur ein GAUSS-Punkt benötigt.

2.7.2 Stabilisierung

Das Ziel der Unterintegration, numerisch effiziente Elemente zu formulieren, die dazu noch wenig Speicherplatz benötigen, führt zum erwähnten Rangabfall der tangentialen Steifigkeitsmatrix als gänzlich unerwünschtem Nebeneffekt. Aufgrund dessen ist es erforderlich, die unterintegrierten Elemente zu stabilisieren.

Zunächst ist herauszufinden, welche *Zustände*¹² im Element zu stabilisieren sind. Dies geschieht mittels einer Spektralzerlegung der Steifigkeitsmatrix zum Zweck der Bestimmung, ob dabei Null-eigenwerte auftreten. Ist dies der Fall, müssen die zu den Nulleigenwerten gehörenden Eigenvektoren stabilisiert werden.

Um zu verhindern, dass die *Hourglass-Modes* auftreten, werden diese für eine beliebige Elementgeometrie in der Ausgangskonfiguration bestimmt und ihnen eine Steifigkeit zugewiesen, welche die Aktivierung dieser Zustände verhindert. Dieses Verfahren ist jedoch keineswegs trivial. Da man aus dem Variationsprinzip direkt keinen Hinweis auf die Wahl der zugehörigen Steifigkeit erhält, ist es notwendig weitere Schritte durchzuführen.

Zum Einen ist es möglich, nach der Berechnung mit unterintegrierten Elementen eine globale Projektion auszuführen, um die unerwünschten *Modes* herauszufiltern. Zum Anderen gibt es die Möglichkeit, den Verschiebungsansatz des finiten Elementes in einen linearen und den dazu orthogonalen Anteil zu zerlegen. Letzterer wird dann dazu verwendet, die Stabilisierungsmatrix zu berechnen.

2.7.3 Hybride oder gemischte Variationsprinzipien

Es existiert bei dieser Vorgehensweise eine Vielzahl von Ansätzen zur Verwendung von gemischten Variationsfunktionalen. In der Regel erfüllen finite Elemente dieser Gattung alle Anforderungen bis auf Punkt 6.

2.7.4 Angereicherte („*enhanced*“) Verzerrungen auf Basis des HU-WASHIZU-Prinzips

Die *enhanced strain*-Elemente erfüllen die Anforderungen von Punkt 1 bis 6. Sie stellen eine Weiterentwicklung der Elemente mit inkompatiblen Zuständen dar. Sie haben den entscheidenden Nachteil, dass sie auf Elementebene eine so genannte „statische Kondensation“ erfordern, was

¹² *modes* (engl.)

der Invertierung einer 4×4 -Matrix im zweidimensionalen und einer 9×9 -Matrix (auch 12×12) im dreidimensionalen Fall entspricht. Daher besitzen diese Elemente keine hohe Effizienz in der Berechnung der Elementmatrizen. Die inkompatiblen Zustände machen es notwendig, Speicherplatz für die zugehörigen, zusätzlichen Freiheitsgrade zur Verfügung zu stellen. Des Weiteren wurde in neueren Untersuchungen festgestellt, dass die *enhanced strain*-Elemente *hourglass-Zustände* bei großen Deformationen im Druckbereich aufweisen.

Elemente, die dieser Formulierung entsprechen, werden *enhanced strain*- oder *enhanced assumed strain (EAS)*-Elemente genannt.

2.7.5 Gemischte Variationsprinzipien für Felder mit Rotationsfreiheitsgraden

Im Falle, dass man neben der Gleichgewichtsbedingung zusätzlich noch die Momentengleichgewichtsbedingung schwach formuliert, müssen Rotationsfreiheitsgrade als unabhängige Feldvariablen eingeführt werden.

2.7.6 Gemischte Variationsprinzipien für ausgewählte Größen

Häufig müssen in einem numerischen Modell spezielle Zwangsbedingungen eingehalten werden. Bestes Beispiel ist das bereits mehrfach erwähnte Einhalten der Zwangsbedingungen infolge Inkompressibilität. Allgemein ist es in diesen Fällen von Vorteil, ein gemischtes Variationsprinzip einzuführen, das genau auf die einzuhaltende Zwangsbedingung ausgerichtet ist.

Oben genannte Inkompressibilität tritt bei gummiartigen elastischen Materialien und beim plastischen Fließen im Rahmen der J_2 -Theorie auf. Das zugehörige Variationsprinzip geht von einer Aufspaltung der kinematischen Variablen aus. Infolgedessen ist die Formulierung der Materialgleichungen deutlich schwieriger als bei der Standardformulierung. Die entsprechend formulierten, finiten Elemente erfüllen unter den Punkten 1, 4, 5 und 7 genannten Anforderungen.

Gemischte Elemente für Inkompressibilität basieren auf den folgenden Ansätzen:

- Methode der LAGRANGESchen Multiplikatoren
- Gestörte LAGRANGESche Methode
- HU-WASHIZU-Funktional

2.8 Volumenelemente

Im Folgenden sollen zur Vervollständigung die bereits angesprochenen klassischen Prinzipien der dreidimensionalen Elementformulierungen vorgestellt werden.

2.8.1 Tetraeder-Elemente

Tetraeder-Elemente können aufgrund ihres Aufbaus aus vier dreiecksförmigen Seitenflächen behandelt werden wie Dreieckelemente mit entsprechender Erweiterung. Konsequenterweise wird daher statt des PASCALSchen Dreiecks bei der Formulierung der Formfunktionen auf das PASCALSche Tetraeder zurückgegriffen (Abbildung 2-7).

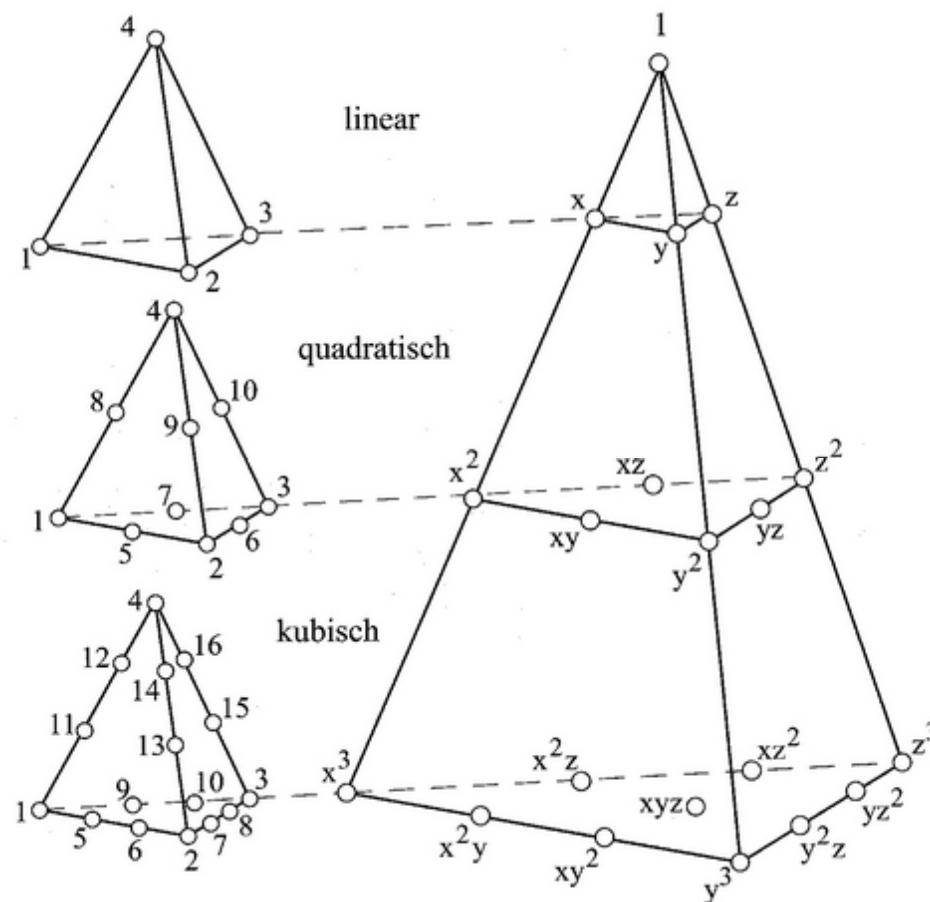


Abbildung 2-7 – PASCALSches Tetraeder

Man sieht auch hier, dass – wie im zweidimensionalen Raum für Dreieckelemente – die Knotenzahl mit der Anzahl der Polynomterme übereinstimmt. Des Weiteren besteht zwischen der Knotenzahl n und dem Grad p eines vollständigen Polynoms die folgende Abhängigkeit:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^p (r+1)(r+2) \equiv \frac{1}{6} (p+1)(p+2)(p+3) \quad (2.13)$$

2.8.2 Hexaeder-Elemente ...

Auch bei den Hexaeder-Elementen gibt es Parallelen zu den ebenen Elementen, aus denen diese dreidimensionalen Körper zusammengesetzt sind. Entsprechend den Rechteckelementen gibt es die beiden Klassen LAGRANGE und SERENDIPITY auch im räumlichen Fall.

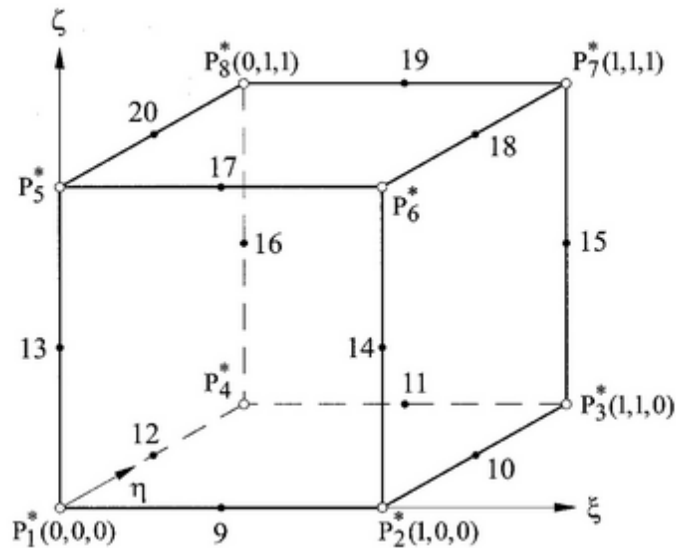


Abbildung 2-8 – 20-Knoten-Element der SERENDIPITY-Klasse

... der SERENDIPITY-Klasse

Der maßgebende Unterschied besteht auch hierbei darin, dass SERENDIPITY-Elemente die bei höheren Polynomgraden ($n > 2$) in der Regel auftretenden Knoten im Elementinneren entbehren, also folglich nur Knoten auf den Elementkanten besitzen.

Die Anzahl n der Knoten ergibt sich somit aus dem Polynomgrad p zu:

$$n = 8 + 12(p - 1) \quad (2.14)$$

... der LAGRANGE-Klasse

LAGRANGE-Volumenelemente verfügen analog zur Ebene über voll besetzte Polynome. Die Knotenzahl erhält man aus dem Grad des Polynoms mittels der Beziehung:

$$n = (1 + p)^3 \quad \text{mit } p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

Für die Erweiterung der Formfunktionen in die dritte Dimension wird zusätzlich zu den Gleichungen (2.9) und (2.10) die Funktion:

$$h_i(\zeta) = \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \cdots (\zeta - \zeta_{i-1})(\zeta - \zeta_{i+1}) \cdots (\zeta - \zeta_n)}{(\zeta_i - \zeta_1)(\zeta_i - \zeta_2) \cdots (\zeta_i - \zeta_{i-1})(\zeta_i - \zeta_{i+1}) \cdots (\zeta_i - \zeta_n)} \quad (2.16)$$

Die Formfunktionen der LAGRANGE-Klasse sind deutlich einfacher aufzustellen als die der SERENDIPITY-Klasse. Allerdings besteht ein sehr großer Unterschied in der Anzahl der Knoten, was sich entsprechend auf den Berechnungsaufwand erhöhend auswirkt. Für die angesprochene Differenz¹³ gilt:

$$\Delta n = (5 + p)(1 - p)^2 \quad (2.17)$$

Ein Rechteckelement der LAGRANGE-Klasse mit einem quadratischen Ansatz besitzt beispielsweise **27** Knoten (Abbildung 2-9), das SERENDIPITY-Element nur **20** Knoten. Letztere – besonders das genannte 20-Knoten-Element (Abbildung 2-8) – werden daher bevorzugt verwendet.

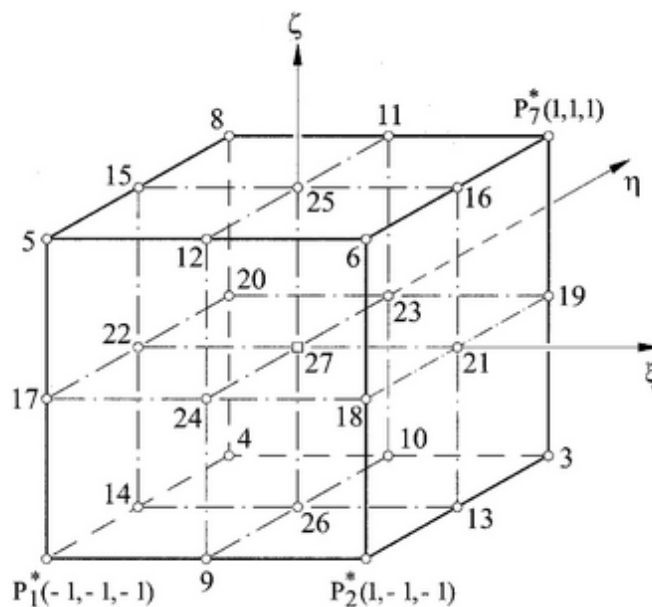


Abbildung 2-9 – 27-Knoten-Element der LAGRANGE-Klasse

¹³ $\Delta n = 0, 7, 32$ für $p = 1, 2, 3$

3 Materialmodelle

3.1 Allgemeines

Die Abbildung des Materialverhaltens mit linearen (bzw. linear-elastischen) Werkstoffgesetzen kann besonders bei der Simulation von Bauteilversuchen im Bereich der Forschung nicht als hinreichend genau und realitätsnah angesehen werden, da gerade der Werkstoff Beton schon früh ein stark nicht-lineares Verhalten aufweist. Auch die Beschränkung auf den ein-axialen Spannungszustand, wie er beispielsweise in den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Normen **DIN1045-1** und **EC2** angegeben wird, ist für die Beschreibung der Nicht-Linearität von Beton nicht ausreichend. Aus diesen Gründen wurden Materialmodelle mit mehraxialen Werkstoffgesetzen formuliert, welche dieses nicht-lineare Verhalten größtenteils korrekt abbilden können.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über einige Materialmodelle und beschreibt deren Vor- und Nachteile auch im Hinblick auf ihre mögliche oder erfolgte Integration in FE-Programme. Es zeigt sich, dass einige Theorien zwar eine sehr gute Abbildung des Verhaltens darstellen, ihre Eignung zur Implementierung in eine FE-Anwendung aber aufgrund von Problemen bezüglich der Konvergenz der iterativen Lösungsverfahren oder auch des Auftretens der bereits genannten „*Locking*“-Effekte nicht annähernd in gleichem Maße ausgeprägt ist.

Während im ingenieurpraktischen Bereich vorwiegend mit normalfesten Betonen gearbeitet wird, werden in der Forschung des Öfteren hochfeste und Hochleistungsbetone zu Versuchszwecken verwendet. Es ist hier daher nicht ausreichend, sich auf die Betrachtung der Normalbetone zu beschränken. Des Weiteren sind Einflüsse wie Kriechen und Schwinden im Forschungsbereich nicht ohne Weiteres vernachlässigbar, da es sich nicht ausschließlich um Bauteile handelt, die in Kurzzeitversuchen untersucht werden, sondern auch (z.T. dynamische) Langzeitversuche durchgeführt werden.

Im Allgemeinen sind die Materialkennwerte für Betone dem **Model Code 1990** [28] zu entnehmen. Zur Implementierung eines Materialmodells in ein Finite-Elemente-Programm gehören sowohl die im Allgemeinen als **Werkstoffgesetz** bezeichnete Spannungs-Dehnungsbeziehung, auch **konstitutive Gleichung** genannt, als auch ein Versagensmodell zur Festlegung und Überprüfung der Grenzwerte für die Festigkeiten des jeweiligen Materials. Bezüglich der Materialmodelle gibt es einige Unterscheidungskriterien, die hier kurz genannt werden sollen. Man unterscheidet hinsichtlich der konstitutiven Beziehungen, welche den Bezug zwischen Spannungen und Dehnungen im Material herstellen, zwischen Mikro- und Makromodellen. Auch mikroskopische und makroskopische Modelle genannt.

In Ersteren wird die Materialstruktur auf der mikromechanischen Ebene modelliert, so dass diese vom physikalischen Standpunkt aus gesehen einen sehr viel versprechenden Ansatz darstellen. Allerdings bedeuten diese Modelle einen sehr hohen Rechenaufwand, was sie für den praktischen Einsatz unwirtschaftlich macht.

Die Makromodelle beschreiben das Materialverhalten als die durchschnittliche Antwort eines komplexen Spannungsübertragungsmechanismus auf der Mikrostrukturebene. Ein solches Modell muss auf der Makrostrukturebene korrekt die mikrostrukturellen Phänomene, Kohäsion, Reibung

und „**aggregate interlock**¹⁴“, welche den Verbrauch der Energie möglich machen, die als Konsequenz des Materialbruchs und -versagens auftritt. Diese Phänomene sind, wie gesagt, mikrostrukturelle Eigenschaften und **keine** Materialpunkteigenschaften. Konsequenterweise müssen sie sich auf ein charakteristisches Volumen eines Materials beziehen, in welchem sie auftreten (können). Daher müssen die Makromodelle **nichtlokal** formuliert sein, während diese **Nichtlokalität** für Mikromodelle keinerlei Bedeutung besitzt.

Traditionellerweise basieren Makromodelle auf der Spannungs-Dehnungs-Invariantentheorie, das heißt, sie sind formuliert als totale oder inkrementelle Beziehungen zwischen den σ_{ij} und ε_{ij} Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors. Im Rahmen dieser Theorie sind verschiedene Ansätze für die Modellierung von Beton möglich, wie die Plastizitätstheorie, die plastische Bruchtheorie, die Kontinuumsmechanik, „*endochronic theory*“ und Kombinationen der genannten Theorien.

Es existiert wegen der Komplexität des (heterogenen) Materials Beton jedoch zur Zeit kein umfassendes, allgemeingültiges Modell, welches in der Lage ist, das Verhalten von Beton sowohl für die monotone, dreiaxiale Belastung als auch die allgemeine dreidimensionale, dynamische Beanspruchung abzubilden. Beispielsweise haben die Invarianten basierten Modelle Schwierigkeiten mit der Beschreibung der Ausdehnung von Beton unter triaxialer Druckbeanspruchung, wobei diese Ausdehnung meist den Versagensmechanismus bestimmt.

Diese Modelle basieren auf der Kontinuumsmechanik und sind im Allgemeinen nicht in der Lage komplexe Spannungs-Dehnungszustände abzubilden, bei denen Risse auftreten. Darüber hinaus ist es aufgrund der plastischen Formulierung der Fließgesetze, die meist in diesen Modellen verwendet werden, schwierig, das komplexe Antwortverhalten von Beton unter triaxialer, zyklischer Belastung zu simulieren.

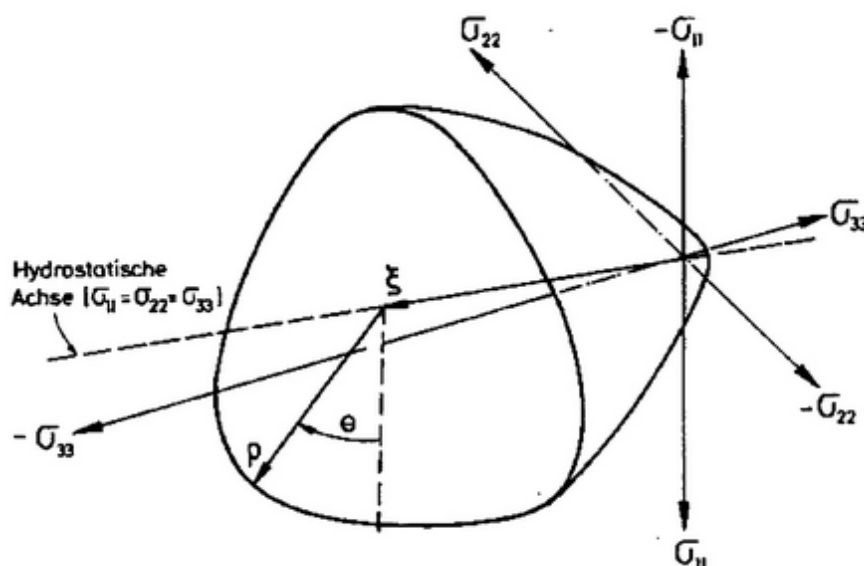


Abbildung 3-1 - Bruchhülle des Betons im dreidimensionalen Spannungsraum

¹⁴ **aggregate interlock** (engl.) - Zustand der Verkantung von Zuschlagkörnern im Beton gegeneinander

3.2 Versagenstheorien

3.2.1 Einführung

Für die Beschreibung der einaxialen Betonfestigkeit ist die Angabe von Zug- und Druckfestigkeit ausreichend.

Die Definition der zweiaxialen Festigkeit ist dagegen schon deutlich komplizierter, da die Bruchfestigkeit vom Verhältnis der Hauptspannungen abhängig ist. Die zweiaxiale Bruchumhüllende kann durch analytische Funktionen der Hauptspannungen σ_{11} und σ_{22} oder durch die Invarianten des Spannungszustandes beschrieben werden.

Zur geometrischen Beschreibung der Bruchumhüllenden des Betons für dreiaxiale Spannungszustände werden meist die Spannungsinvarianten herangezogen, da eine Darstellung als Funktion der Hauptspannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} einen hohen Aufwand bedeutet. Im Folgenden werden nun die Invarianten eines allgemeinen Spannungstensors σ_{ij} kurz dargestellt:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (3.1)$$

$$I_2 = (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \quad (3.2)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Wird das Koordinatensystem so gedreht, dass die Koordinatenachsen mit den Richtungen der Hauptspannungen übereinstimmen, erhält man eine vereinfachte Schreibweise für die drei Invarianten:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (3.4)$$

$$I_2 = (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) \quad (3.5)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} \quad (3.6)$$

Zur Beschreibung der Bruchumhüllenden sind jedoch noch Invarianten erforderlich, die von den deviatorischen Spannungen abhängen. Der Spannungstensor σ_{ij} kann ausgedrückt werden durch die hydrostatische Spannung σ_m und den deviatorischen Spannungstensor s_{ij} :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (3.7)$$

Das *Kronecker-Delta* δ_{ij} nimmt den Wert 1 an, wenn der Index i gleich dem Index j ist, und ist gleich 0 für alle anderen Kombinationen, wobei gilt: $i, j = \{1, 2, 3\}$.

Die hydrostatische Spannung σ_m , die auch als Oktaederspannung σ_m bezeichnet wird, ergibt sich aus

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (3.8)$$

und der deviatorische Spannungstensor folgt aus

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (3.9)$$

Die Richtung der Hauptspannungen von σ_{ij} und s_{ij} sind identisch.

Die Invarianten des deviatorischen Spannungstensors lauten für übereinstimmende Hauptspannungs- und Koordinatenrichtungen demnach:

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} \quad (3.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2) = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] \quad (3.11)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(s_{11}^3 + s_{22}^3 + s_{33}^3) = s_{11}s_{22}s_{33} \quad (3.12)$$

In Abbildung 3-2 sind die so genannten HAIGH-WESTERGAARD-Koordinaten dargestellt, welche durch die Spannungsinvarianten ausgedrückt werden können. ξ misst den Abstand eines Spannungspunktes auf der hydrostatischen Achse vom Ursprung:

$$\xi = \sqrt{3}\sigma_m = \frac{\sqrt{3}}{3}I_1 = \sqrt{3}\sigma_{okt} \quad (3.13)$$

ρ gibt den Abstand eines Punktes von der hydrostatischen Achse in einer **normal** zu dieser angeordneten Ebene an:

$$\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3}\tau_{okt} \quad (3.14)$$

während der Winkel θ in allen deviatorischen Querschnitten gleich ist:

$$\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}J_3}{\tau_{okt}^3} \quad (3.15)$$

Hinsichtlich der in den folgenden Abschnitten dargestellten Theorien ist zuvor eine Anmerkung bezüglich der verwendeten Bezeichnungen zu machen. Es handelt sich beim Begriff *n-Parametermodell* nicht um eine Beschreibung der Anzahl der freien Parameter eines Modells durch n , sondern um die Angabe der n voneinander unabhängigen Versuche, welche zur Parameterbestimmung erforderlich sind.

Im Allgemeinen lassen sich die Modelle zur Beschreibung der Versagensfläche von Beton in 1-bis 5-Parameter-Modelle einteilen. Je mehr Parameter verwendet werden, desto genauer lassen sich die dreidimensionalen Versagenszustände von Beton beschreiben.

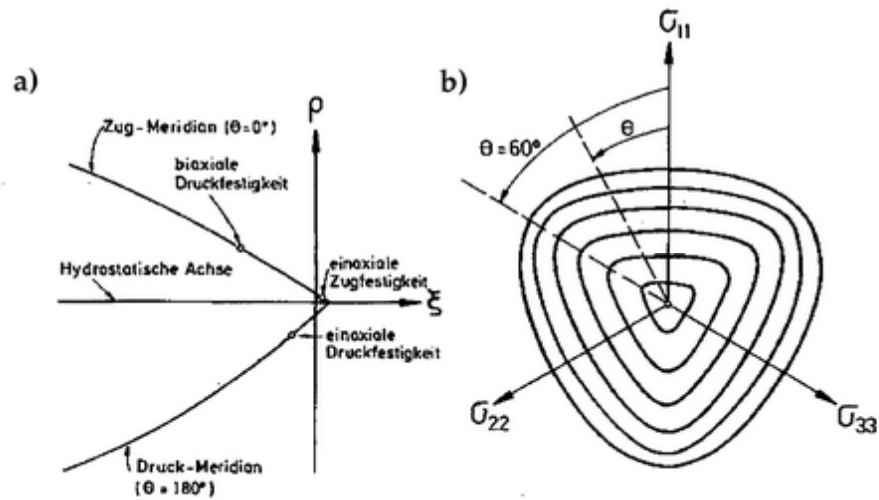


Abbildung 3-2 - Bruchumhülle des Betons: a) Meridianschnitte für die Ebene mit $\theta = 0^\circ$ und b) deviatorische Querschnitte

3.2.2 Ein-Parameter-Modelle

Versagenstheorie nach RANKINE (1876)

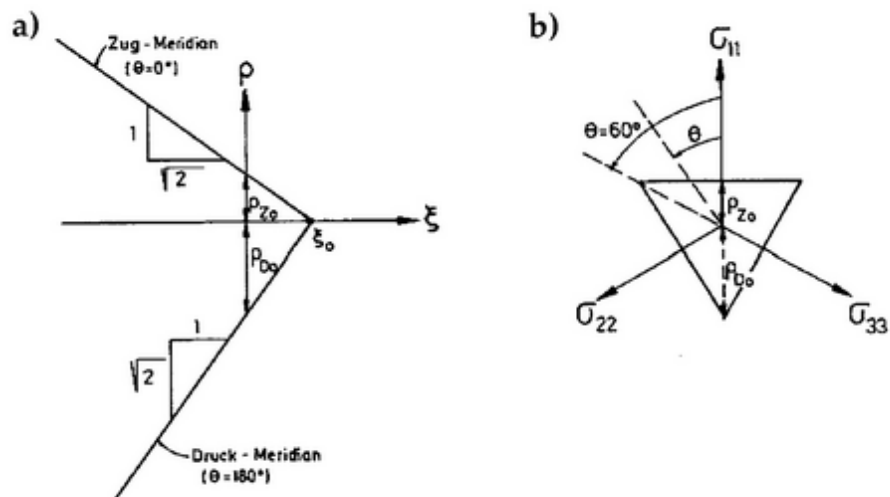


Abbildung 3-3 – Versagenstheorie nach RANKINE: a) Meridianschnitte für die Ebene mit $\theta = 0^\circ$ und b) π -Ebene

Die Bruchumhülle für Beton ist nach RANKINE definiert durch

$$\sigma_{11} = \beta_{bZ} \quad \sigma_{22} = \beta_{bZ} \quad \sigma_{33} = \beta_{bZ} \quad (3.16)$$

oder in der Invariantenformulierung als

$$f(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}\sqrt{J_2} \cos \theta + I_1 - 3\beta_{bZ} = 0 \quad (3.17)$$

sowie in den HAIH-WESTERGAARD-Koordinaten durch

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\rho \cos \theta + \xi - \sqrt{3}\beta_{bZ} = 0 \quad (3.18)$$

wie in Abbildung 3-3 graphisch dargestellt, wobei gilt

$$\rho_{Z0} = \sqrt{\frac{3}{2}}\beta_{bZ} \quad \text{und} \quad \rho_{D0} = \sqrt{6}\beta_{bZ} \quad (3.19)$$

und die hydrostatische Achse die Bruchumhülle bei $\xi_0 = \sqrt{3}\beta_{bZ}$ durchstößt.

Nach RANKINE ist also das Tragvermögen eines Werkstoffes erschöpft, wenn die größte Hauptzugspannung die Zugfestigkeit erreicht. Sie ist daher hauptsächlich für Beton anwendbar, der vorwiegend mit Zugspannung oder Zug mit niedrigen Druckspannungen in den anderen Richtungen belastet wird.

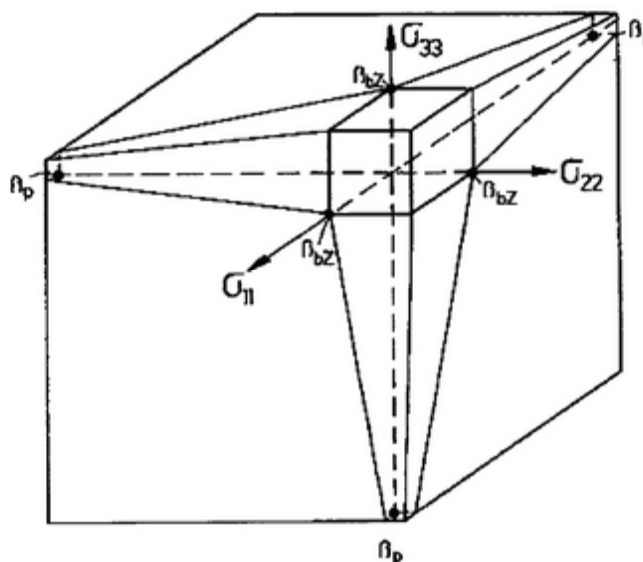


Abbildung 3-4 – Versagenstheorie nach RANKINE für Beton im Zug-Zug-Zug-Bereich und Erweiterung für den Zug-Zug-Druck-Bereich

Fließbedingungen nach TRESCA und VON MISES

Diese beiden Fließbedingungen beschreiben zutreffend das Verhalten von Werkstoffen, welche einen ausgeprägten Fließbereich besitzen, und werden somit folgerichtig oft für Metalle verwendet.

Die von TRESCA (1864) entwickelte Theorie besagt, dass das Fließen eines Werkstoffes beginnt, sobald die maximale Schubspannung einen kritischen Wert k erreicht. Die Konstante k kann durch einen einaxialen Zug- oder Druckversuche bestimmt werden. Sie entspricht der Hälfte der einaxialen Festigkeit.

Das Versagenskriterium nach TRESCA wird ausgedrückt durch

$$\max\left(\frac{1}{2}|\sigma_{11} - \sigma_{22}|, \frac{1}{2}|\sigma_{22} - \sigma_{33}|, \frac{1}{2}|\sigma_{33} - \sigma_{11}|\right) = k \quad (3.20)$$

$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - k = 0 \quad (3.21)$$

$$f(\rho, \theta) = \rho \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{2}k = 0 \quad (3.22)$$

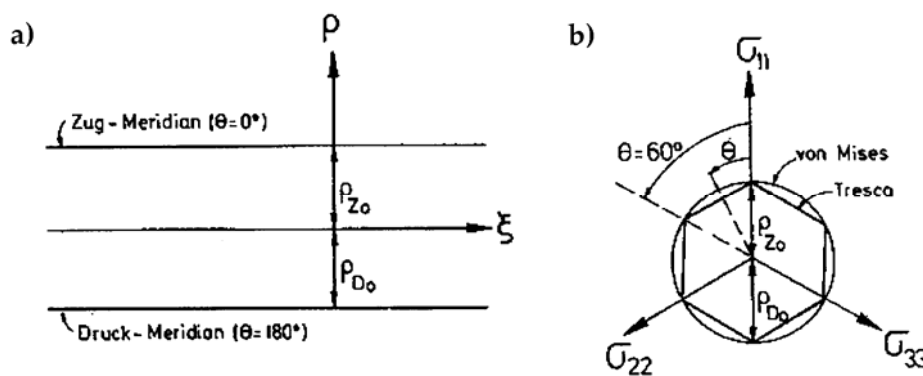


Abbildung 3-5 – Fließbedingung nach TRESCA und VON MISES: a) Meridianschnitte für die Ebene mit $\theta = 0^\circ$ und b) π -Ebene

Fließen des Werkstoffes tritt nach VON MISES (1913) ein, wenn die Oktaederspannung einen kritischen Wert erreicht:

$$\tau_{okt} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}k \quad (3.23)$$

oder ausgedrückt durch die Spannungsinvariante vereinfacht sich die Bedingung zu

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (3.24)$$

k erhält man aus einem einaxialen Zugversuch ($\sigma_{11} = \beta_s, \sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = 0$) aus Gleichung 3.24

$$k = \beta_s / \sqrt{3} \quad (3.25)$$

wobei diese etwas größer ist als die nach der TRESCA-Fließbedingung

$$k = \beta_s / 2 \quad (3.26)$$

Werden die Konstanten nach VON MISES und TRESCA so bestimmt, dass sich in beiden Fällen die gleiche Festigkeit im einaxialen Zugversuch ergibt, so erhält man Unterschiede von **2 : $\sqrt{3}$** für reine Schubbelastung, was Abweichungen von 15% entspricht.

Die Gleichungen sind unabhängig von der hydrostatischen Spannung bzw. der Spannungsinvarianten I_1 . Die Fließbedingungen entsprechen daher im dreidimensionalen Raum einem Zylinder (VON MISES) und einem Prisma mit sechseckigem Grundriss (TRESCA).

3.2.3 Zwei-Parameter-Modelle

Fließbedingungen nach MOHR-COULOMB

Die Kombination der MOHRschen Versagensbedingung (1900)

$$|\tau| = f(\sigma) \quad (3.27)$$

und der COULOMBSchen Gleichung (1773)

$$|\tau| = c - \sigma \tan \phi \quad (3.28)$$

wobei c die Kohäsion und ϕ den inneren Reibungswinkel eines Materials beschreiben, wird als Fließbedingung nach MOHR-COULOMB bezeichnet.

Nach dieser Bedingung beginnt ein Werkstoff zu fließen, wenn die maximale Schubspannung einen von der Normalspannung u abhängigen Wert erreicht.

Abbildung 3-7 verdeutlicht die Darstellung eines Spannungszustandes durch die MOHRschen Kreise. Die größte (σ_{11}) und die kleinste (σ_{33}) Hauptspannung bestimmen den Eintritt des Fließens, das erfolgt, sobald der MOHRsche Kreis durch σ_{11} und σ_{33} die COULOMBSche Gerade tangiert. Das Schubversagen erfolgt auf einer Ebene, welche mit der Hauptdruckspannung einen Winkel von $(\pi/4 - \phi/2)$ einschließt.

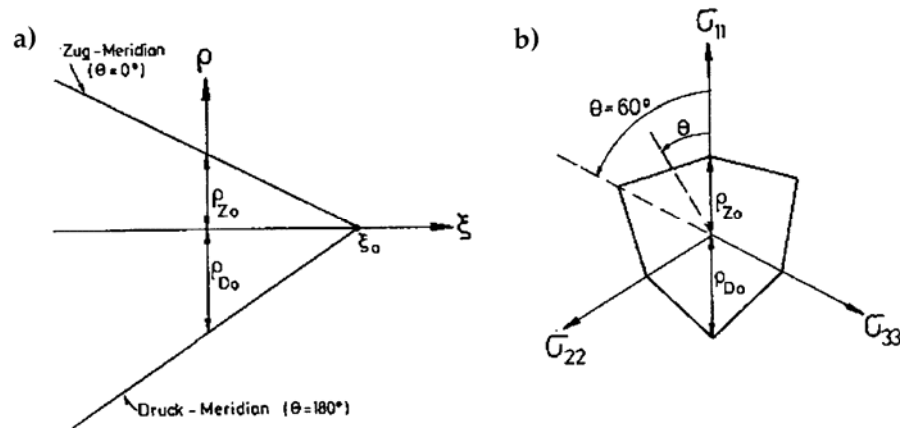


Abbildung 3-6 – Fließbedingung nach Mohr-Coulomb: a) Meridianschnitte für die Ebene mit $\theta = 0^\circ$ und b) π -Ebene

Im Gegensatz zu den Fließbedingungen des vorangegangenen Abschnitts ist das zweiparametrische Kriterium nach MOHR-COULOMB eine Funktion der ersten I_1 und der zweiten Spannungsinvarianten J_2 . Nach CHEN [23] lautet die Fließbedingung

$$f(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) + \frac{J_2}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (3.29)$$

$$f(\xi, \rho, \theta) = \sqrt{2}\xi \sin \phi + \sqrt{3}\rho \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) + \rho \cos\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) \sin \phi - \sqrt{6}c \cos \phi = 0 \quad (3.30)$$

Kombination des MOHR-COULOMB-Kriteriums mit der Fließbedingung nach RANKINE

Die um das Hauptspannungskriterium nach RANKINE erweiterte MOHR-COULOMB-Bedingung erlaubt die Unterscheidung zwischen duktilem Versagen (Fließen des Werkstoffes) und sprödem Versagen (Trennbruch). Das kombinierte Kriterium erfordert die Eingabe von drei Parametern: der Kohäsion c , dem inneren Reibungswinkel ϕ und der Zugfestigkeit β_{bz} .

Abbildung 3-7 zeigt die Kombination der beiden Kriterien, nach welcher im τ - σ -Diagramm ein Kreis beschrieben wird, für den die COULOMBSche Gerade eine Tangente ist (s. 3.2.3.1) und der den Punkt $\sigma = \beta_{bz}$ berührt.

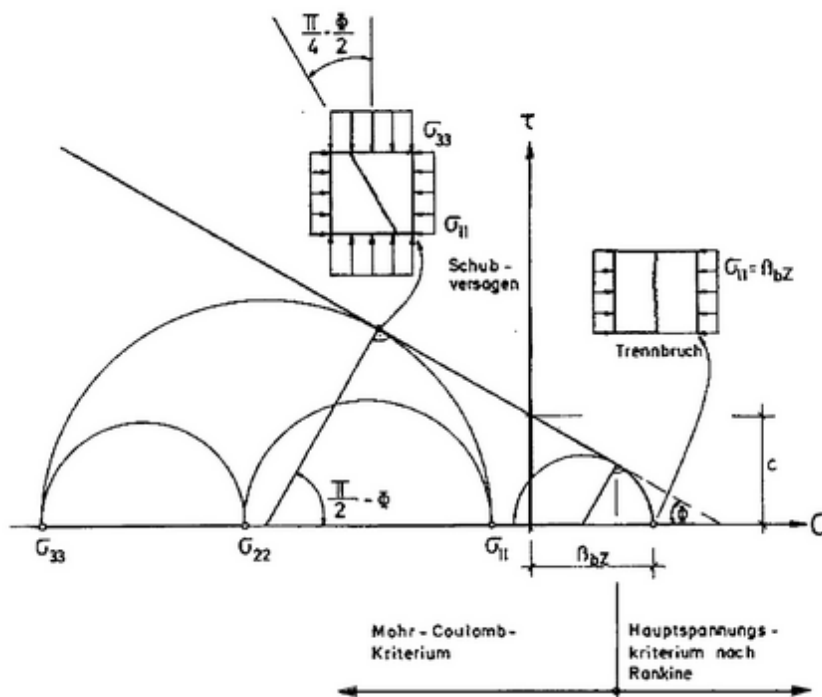


Abbildung 3-7 – Kombination des MOHR-COULOMB-Kriteriums mit der Versagenstheorie nach RANKINE

Fließbedingung nach DRUCKER-PRAGER

Die Definition dieser Bedingung mittels der Beziehungen

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (3.31)$$

$$f(\xi, \rho) = \sqrt{6}\alpha\xi + \rho - \sqrt{2}k = 0 \quad (3.32)$$

stellt eine Erweiterung der VON MISES-Fließbedingung um die Berücksichtigung des Einflusses des hydrostatischen Drucks (Spannungsinvariante I_1) dar. Durch die lineare Abhängigkeit der Fließbedingungen vom hydrostatischen Druck entsteht aus der zylinderförmigen Fließfläche nach VON MISES eine kegelförmige Fließfläche, wie in Abbildung 3-8 gezeigt.

Die Spitze des Kegels liegt bei

$$\xi_0 = \frac{k}{\sqrt{3}\alpha} \quad (3.33)$$

und der Radius in der π -Ebene beträgt

$$\rho_{Z0} = \rho_{D0} = \sqrt{2}k \quad (3.34)$$

oder

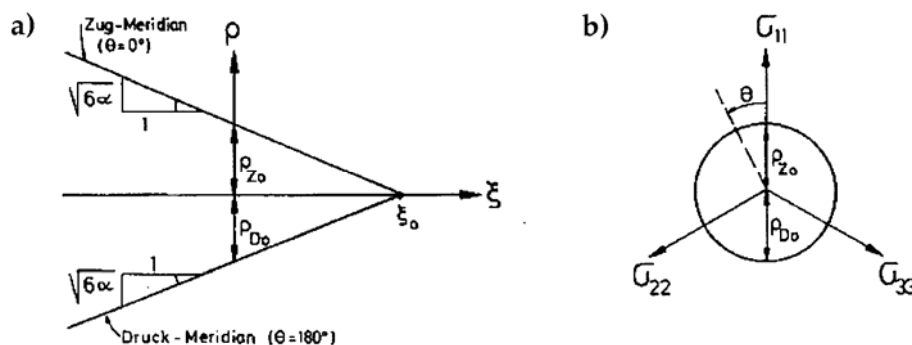


Abbildung 3-8 – Fließbedingung nach DRUCKER-PRAGER: a) Meridianschnitte für die Ebene mit $\theta = 0^\circ$ und b) π -Ebene

Die DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung enthält die beiden Parameter α und k . Aus den Bedingungen, dass die einaxiale Festigkeit gleich β_p ist und die Betonfestigkeit für biaxialen Druck mit dem von Kupfer ermittelten Wert von $1,16 \beta_p$ übereinstimmt, ergeben sich die Konstanten zu:

$$\alpha = 0,07035 \quad \text{und} \quad k = 0,507\beta_p$$

Abbildung 3-9 zeigt die sich ergebende zweiaxiale Betonfestigkeit. Für den Zug-Zug- und den Zug-Druck-Bereich wird die Fließbedingung durch das Hauptspannungskriterium nach RANKINE ersetzt.

Für Probleme mit vorwiegend zweiaxialen Spannungszustand liefert die mit einem Hauptzugspannungskriterium kombinierte DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung ausreichend genaue Ergebnisse (vgl. Abbildung 3-9). Allerdings ist die Darstellung der Bruchumhüllenden des Betons durch einen Kegel für Probleme mit dreiaxialen Druckspannungszuständen nur eine Näherung. Es hängt vom untersuchten Problem ab, ob die DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung ausreichend genaue Ergebnisse liefert oder ob auf höherwertige Modelle mit mehr Parametern zurückgegriffen werden muss.

3.2.4 Mehr-Parameter-Modelle

Die Modelle zur Beschreibung der Versagensfläche von Beton lassen sich, wie bereits erwähnt, in 1- bis 5-Parameter-Modelle einteilen. Die höherwertigen Modelle berücksichtigen die Krümmung der Meridiane und die Änderung der deviatorischen Querschnitte als Funktion des hydrostatischen Drucks σ_m und des Winkels θ (s. Abbildung 3-1 und Abbildung 3-2).

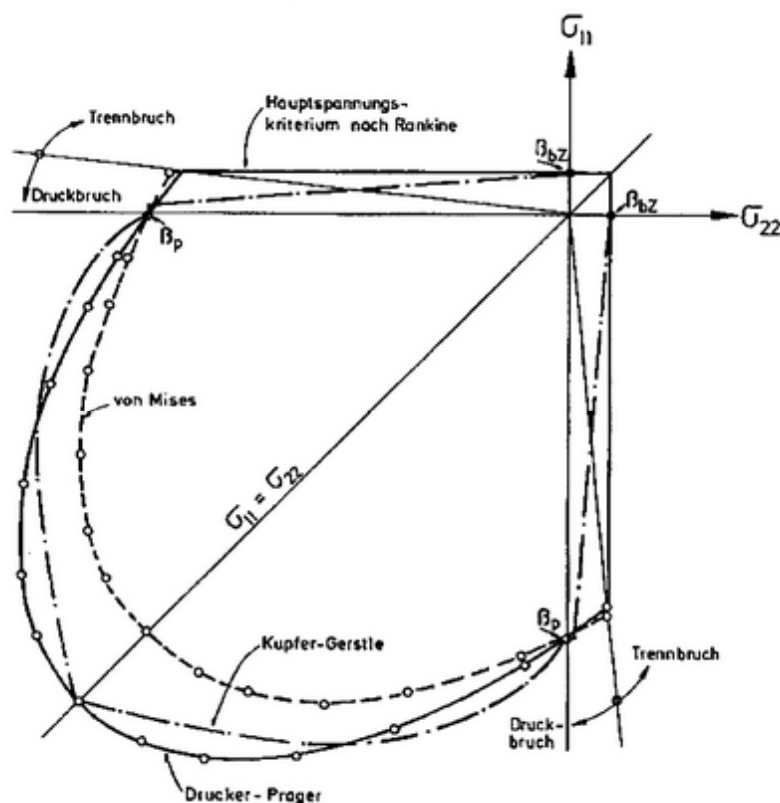


Abbildung 3-9 – Zweiaxiale Betonfestigkeit nach der DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung mit Hauptzugspannungskriterium im Vergleich mit der VON MISES-Fließbedingung und der Formulierung nach KUPFER-GERSTLE

Im Folgenden wird beispielhaft das 4-Parameter-Modell nach OTTOSEN [57] beschrieben.

Versagensfläche nach OTTOSEN (4-Parameter-Modell)

Der Verlauf der Versagensfläche von Beton nach OTTOSEN hat die folgende Form:

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = A \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda(K_1, K_2) \frac{\sqrt{J_2}}{|f_c|} + B \frac{I_1}{|f_c|} \quad (3.35)$$

Das Modell berücksichtigt die vier Parameter A , B , K_1 und K_2 . Diese sind so gewählt, dass die einaxiale Druckfestigkeit f_c , die einaxiale Zugfestigkeit f_t , die zweiaxiale Druckfestigkeit f_{2c} und ein beliebiger Versagenszustand auf dem Druckmeridian σ_{oct} , τ_{oct} des untersuchten Betons exakt berechnet werden können.

Zunächst normiert man die Materialkennwerte auf die einaxiale Druckfestigkeit:

$$k = \frac{f_t}{|f_c|} \quad a = \frac{|f_{2c}|}{|f_c|} \quad x = \frac{\sigma_{oct}}{|f_c|} \quad y = \frac{\tau_{oct}}{|f_c|} \quad (3.36)$$

Nach der Ermittlung des Beiwertes H über:

$$H = - \frac{\sqrt{2} \cdot x + y}{\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}} \quad (3.37)$$

lassen sich zunächst die Parameter A und B bestimmen. Diese legen den Kurvenverlauf der Meridiane fest:

$$B = - \frac{\sqrt{2} - \frac{3 \cdot y}{k \cdot a}}{H - \frac{9 \cdot y}{a - k}} > 0 \quad (3.38)$$

$$A = - \frac{1}{y} [H \cdot B - \sqrt{2}] > 0 \quad (3.39)$$

Für die Berechnung des Beiwertes K_2 werden die Hilfwerte λ_c und λ_t benötigt, die den Verlauf des Spannungszustandes in der Deviatorebene beschreiben:

$$\lambda_c = \left[1 - \frac{H}{3y} \right] \sqrt{3} \cdot B + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3y}} \quad (3.40)$$

$$\lambda_t = \left[2\sqrt{3} - \frac{a \cdot H}{\sqrt{3y}} \right] \cdot B + \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{3y}} + \frac{\sqrt{3}}{a} \quad (3.41)$$

Damit folgt K_2 zu:

$$K_2 = \cos \left[3 \arctan \frac{2\lambda_c - 1}{\lambda_t \sqrt{3}} \right] \quad \text{mit } 0 \leq K_2 \leq 1 \quad (3.42)$$

Abschließend kann nun der vierte Parameter ermittelt werden:

$$K_1 = \frac{\lambda_t}{\cos \left[\frac{1}{3} \arccos(K_2) \right]} > 0 \quad (3.43)$$

Im *Model Code 90* [28] werden einfachere Ausdrücke zur Bestimmung der Parameter A , B , K_1 und K_2 in Abhängigkeit vom Verhältnis der Mittelwerte der Zug- und Druckfestigkeit angegeben, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird.

Trotzdem zeigt Abbildung 3-10 die gute Übereinstimmung der Versuchswerte von SCHICKERT und WINKLER [71] mit dem Bruchkriterium nach OTTOSEN [57]. Auch der Vergleich mit dreiaxialen Versuchen von RICHART ET AL. und von BALMER nach [23] in Abbildung 3-11 liefert gute Übereinstimmung.

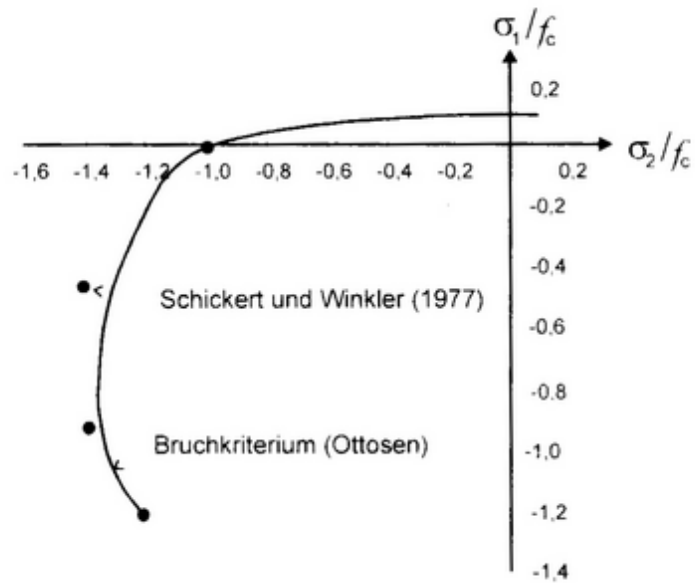


Abbildung 3-10 – Vergleich des Bruchkriteriums von OTTOSEN [36] mit Versuchswerten nach SCHICKERT und WINKLER [71]

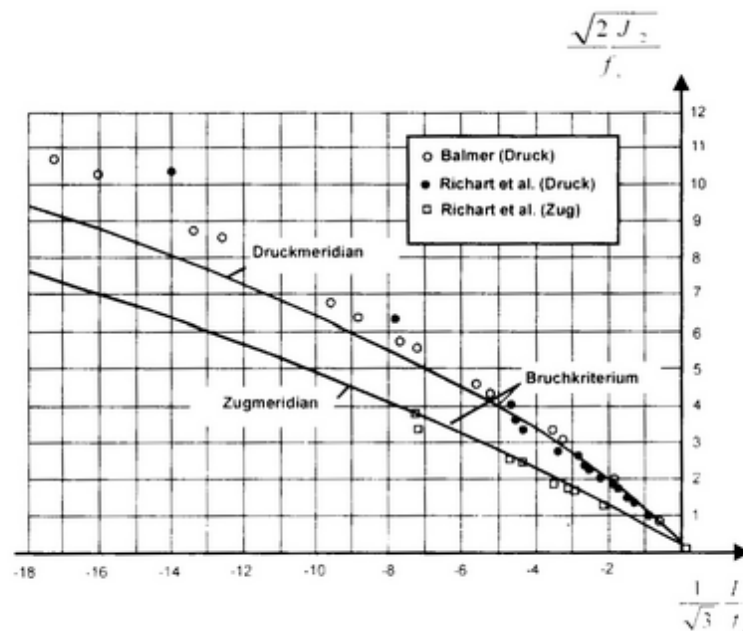


Abbildung 3-11 – Vergleich des Bruchkriteriums von OTTOSEN [36] mit den Werten aus dreiaxialen Versuchen von RICHART ET AL. und von BALMER nach [23]

3.3 Werkstoffmodelle

3.3.1 Einführung

Das nicht-lineare Verhalten von Beton wird bereits im einaxialen Druckversuch erkennbar und durch das Entstehen, Wachsen und Vereinigen von Mikrorissen zwischen Zuschlag und Mörtelmatrix hervorgerufen.

Mikrorisse können sich bei Entlastung teilweise wieder schließen, woraus sich eine Abnahme der Ausgangssteifigkeit des Betons ergibt, die im Rahmen von nicht-linearen Formulierungen der konstitutiven Beziehung berücksichtigt wird.

3.3.2 Nicht-lineare Elastizitätstheorie

Die nicht-linearen elastischen Materialmodelle werden in zwei Formulierungen unterschieden: die **totale** und die **inkrementelle** Formulierung. Erstere basiert auf Sekantenmodulen, wozu die CAUCHY-elastische und *hyperelastische* Formulierung zählen. Diese Art der Formulierung ist allerdings für Beton aufgrund der Pfadunabhängigkeit nicht gut geeignet. Plastische Verformungen werden nicht registriert und im Entlastungsfall stellt sich ein vollkommen reversibler Prozess dar.

Die inkrementellen Formulierungen stellen eine bessere Option dar, da sie das Betonverhalten mit Hilfe von Tangentenmodulen abbilden. Bei diesen auch als *hypoelastisch* bezeichneten Modellen kann der Einfluss der Belastungsgeschichte erfasst werden. Durch die Einführung von Be- und Entlastungskriterien werden sehr gute Ergebnisse für die realitätsnahe Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen erzielt. Im Folgenden wird exemplarisch das im Finite-Elemente-Programmsystem **LIMFES** [39] (leicht modifiziert) integrierte Betonmodell nach OTTOSEN dargestellt.

3.3.3 Betonmodell nach OTTOSEN

Neben der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Bruchhypothese sind Formulierungen zur Spannungs-Dehnungs-Beziehung unter der einwirkenden Belastung zur wirklichkeitsnahen Erfassung des Materialverhaltens notwendig. Die von OTTOSEN verwendete σ - ε -Beziehung gehört, wie bereits erwähnt, zur Kategorie der **hypoelastischen** Formulierungen. Dabei werden die elastischen Konstanten durch entsprechende Tangentenwerte E_T und ν_T ersetzt, welche ihrerseits vom aktuellen Spannungs- respektive Dehnungszustand abhängig sind.

Das OTTOSEN-Modell geht von der Vorstellung aus, dass eine zunehmende innere Schädigung des Betons die Steigung der einaxialen Spannungs-Dehnungslinie sowie die Querdehnzahl bestimmt. Als Gradmesser der Beanspruchung und damit der Nicht-Linearität führt OTTOSEN den Nicht-Linearitätsindex β ein, der sich aus dem Verhältnis der kleinsten Hauptspannung σ_3 zu der Versagensspannung σ_{3f} einer gewählten Versagensfläche ergibt, indem die vorhandenen Hauptspannungen σ_1 und σ_2 konstant gehalten werden und der Schnittpunkt mit der Versagensfläche durch Variation von σ_3 ermittelt wird.

$$\beta = \frac{\sigma_3}{\sigma_{3f}} \quad (3.44)$$

Da Beton sich bei vorhandenen Zugspannungen weniger nicht-linear verhält, ändert OTTOSEN den Spannungszustand für die Bestimmung des Nicht-Linearitätsindex:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_1 = 0 \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_1 \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_1 \quad (3.45)$$

Damit ergibt sich:

$$\beta = \frac{\sigma'_3}{\sigma'_{3f}} \quad (3.46)$$

wobei der Spannungszustand $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3\}$ das Versagenskriterium erfüllt.

Um einen für allgemeinen Spannungszustände gültigen Ausdruck für den Elastizitätsmodul in Abhängigkeit von β anzugeben, geht OTTOSEN von der Annahme aus, dass die Spannungs-Dehnungslinien unter beliebiger Beanspruchung affin zueinander verlaufen, wenn die Spannungen und Dehnungen auf den zugehörigen Bruchzustand normiert werden. Hierzu verwendet OTTOSEN die einaxiale Spannungs-Dehnungsbeziehung nach SARGIN [72]:

$$\sigma = - \frac{\frac{E_0}{E_c} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + (D - 1) \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{E_c} - 2\right) \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + D \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2} \cdot f_c \quad (3.47)$$

Mit:

E_0	Anfangs-Elastizitätsmodul
$E_c = f_c \epsilon_c$	Elastizitätsmodul im Bruchzustand (als Sekantenmodul)
ϵ_c	Dehnung im Bruchzustand
f_c	Betondruckfestigkeit
D	Parameter zur Steuerung des Nachbruchverhaltens

Der Parameter D ist beschränkt durch:

$$\left(1 - \frac{A}{2}\right) < D \leq 1 + A \cdot (A - 2) \quad \text{für } A < 2$$

$$0 \leq D \leq 1 \quad \text{für } A \geq 2$$

Mit:

$$A = E_0/E_c \leq 4/3$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (3.47) der Nicht-Linearitätsindex zu:

$$\beta = \frac{\sigma}{f_c} = - \frac{\frac{E_0}{E_c} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + (D - 1) \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_0}{E_c} - 2\right) \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon_c} + D \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^2} \quad (3.48)$$

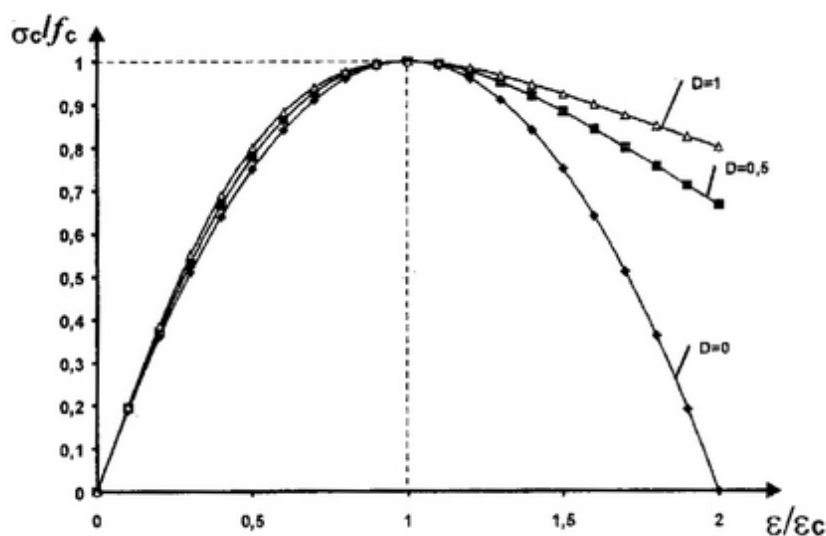


Abbildung 3-12 – Normierte Spannungs-Dehnungslinie von Beton nach SARGIN [72] für unterschiedliche Parameter D

3.3.4 Microplane-Modell

Der klassische Ansatz, welcher die konstitutiven Beziehungen für Beton auf Basis der direkten Formulierung von Spannungs- und Dehnungstensoren sowie deren Invarianten herstellt, führte zu Beginn der Computer-Ära zu wichtigen Fortschritten. Gegenwärtig jedoch ist die Weiterentwicklung dieses klassischen Ansatzes beinahe zum Stillstand gekommen, da nur noch (meist nicht zufriede-

den stellende) kleine Fortschritte erzielt werden, die aber trotzdem einen großen Entwicklungsaufwand bedeuten.

Im Hinblick auf die unter 3.1 bereits genannten Einschränkungen der (tensor-) invariantenbasierten Materialmodelle wurde das so genannte „*Microplane Material Model*“ als alternative Theorie für die makroskopische Abbildung von Beton entwickelt.

Dieser Ansatz wird als sehr viel versprechend erachtet, da er die konstitutiven Beziehungen nicht mit Hilfe von Tensoren, sondern Vektoren formuliert, indem der Zusammenhang von Spannungs- und Dehnungskomponenten auf einer Ebene beliebiger Orientierung in der Mikrostruktur des Materials, der so genannten „**microplane**“¹⁵, hergestellt wird. Es werden *Microplanes* in vielen räumlichen Ausrichtungen betrachtet, welche zu den Spannungs- und Dehnungstensoren über eine kinematische Beschränkung und ein Variationsprinzip in Relation stehen.

Der entwicklungsgeschichtliche Hintergrund des *Microplane*-Modellierungsansatzes geht zurück auf die als „**Slip Theory of Plasticity**“ bekannt gewordene Theorie [82], die als das realistischste konstitutive Modell zur Abbildung der plastischen Erhärtung¹⁶ von Metallen galt. Gleichermäßen erlaubte sie die einfache Modellierung von Anisotropie.

Um nur einen kurzen Überblick über die mittlerweile vier Generationen des *Microplane*-Modells zu geben, seien hier die Vorläufer des aktuellen Modells **M4** dargestellt, bevor Letzteres näher vorgestellt wird.

Entwicklungsstufen des *Microplane*-Modells

Microplane Model M1⁰:

Erstmalig im Jahre 1983 [10] vorgestellt, war die Hauptintention dieses Modells, den Effekt der Dehnungsentfestigung und die inelastische Volumenänderung, hier besonders die Scherverformung, zu erfassen. Dazu mussten vier neue Möglichkeiten berücksichtigt werden:

1. Die statische „Mikro-Makro“-Beschränkung rief eine Instabilität des *Microplane*-Systems im „postpeak“-Bereich¹⁷ der Dehnungsentfestigung hervor. Um dies zu beseitigen, war es nötig, eine kinematische „Mikro-Makro“-Beschränkung zu implementieren.
2. Aus der Notwendigkeit einer kinematischen Beschränkung heraus wurde es nötig, die elastischen Dehnungen in der Mikroebene zu berücksichtigen und nicht als zusätzliche Dehnungen im makroskopischen Kontinuum.
3. Anstelle der einfachen Überlagerung der inelastischen Dehnungen auf allen Gleitebenen, wie in den vorhergehenden Modellen geschehen, war es notwendig, ein Variationsprinzip zu implementieren, um die Spannungen auf den Mikroebenen (aller möglichen Orientierungen) mit den makroskopischen Spannungstensoren in Beziehung setzen zu können.

¹⁵ **microplane** (engl.) - „Mikroebene“

¹⁶ **plastic hardening** (engl.) – Vorgang der Verfestigung eines Werkstoffes nach Überschreitung der Fließgrenze

¹⁷ **postpeak** (engl.) – Bereich nach Überschreiten der (Zug- oder Druck-)Festigkeit eines Werkstoffes im σ - ϵ -Diagramm

4. Während die vorhergehenden Modelle nur plastisches Gleiten berücksichtigten, wurden mit **M1⁰** normale inelastische Dehnungen eingeführt, um nicht nur Plastizität sondern auch multidirektionales Zugversagen simulieren zu können.

Jede Mikroebene wurde im Model **M1⁰** mit einem zweidimensionalen inelastischen, konstitutiven Gesetz basierend auf einer Belastungsoberfläche, welche die Beziehung zwischen Normal- und Schubdehnungskomponenten in der *Microplane* herstellte, und einem Belastungspotential ausgestattet. Jedoch erwies sich die Verwendung von multidimensionalen Belastungsoberflächen auf der Stufe der Mikroebenen später als eine unnötige Verkomplizierung des Modellkonzeptes, welches gerade im Gegensatz dazu eigentlich auf einer einfachen Philosophie basierte.

Daher beinhalten alle folgenden Generationen und Entwicklungsstufen des *Microplane*-Modells nur Eins-zu-eins-Beziehungen zwischen genau einer Spannungs- und genau einer Dehnungskomponente, ohne jegliche gekreuzte Beziehungen.

Microplane Model M1:

Aufgrund der Erfolglosigkeit mit Modell **M1⁰** sowohl Zug als auch triaxialen Druck zu beschreiben, fokussierte sich die Entwicklung von **M1** auf das Zugversagen. Es simulierte multidirektionales Zugversagen und das Nachbruchverhalten (bzgl. der Spannungsentfestigung) von Beton so gut wie andere multidirektionale Modelle mit verschmierter Rissabbildung und Kontinuumsversagensmodelle.

M1 berücksichtigte nur die Normalspannungen der *Microplanes*, formuliert als nicht-lineare Verfestigungs-Entfestigungs-Funktionen ihrer Normaldehnungen. In Abwesenheit der Schubspannungen der Mikroebenen wird die Querdehnzahl ν zu $\frac{1}{4}$ (dreidimensional), respektive $\frac{1}{3}$ (zweidimensional) angenommen, wobei für Beton in der Regel gilt: $\nu \sim 0,18$.

Zur Berechnung der Makrospannungen aus den Spannungen der Mikroebenen wurde die GAUSS-Integration über eine Kugeloberfläche implementiert.

Im Zusammenspiel mit dem *Crack-Band-Konzept* war das Modell **M1** in der Lage, gute Ergebnisse bei der Nachrechnung von Bruchtests gekerbter Prüfkörper unter Berücksichtigung des Größeneffekts zu liefern. Des Weiteren zeigte sich gute Übereinstimmung mit den grundlegenden Daten über die (Schub-)Dilatanz.

Eine Obergrenze für die Normaldehnungen der Mikroebenen zur Beschreibung von Druckversagen konnte jedoch nicht eingeführt werden, da dies zu einem solchen Versagen auch unter hydrostatischem Druck oder einaxialer Dehnungsbelastung geführt hätte. **M1** zeigte zwar Versagen unter einaxialem Druck, allerdings war die Druckfestigkeit viel zu hoch und ein so genannter „Snapback“¹⁸ trat direkt nach Erreichen der Höchstbelastung ein. Ein daraufhin unternommener (erster) Versuch, den Einfluss der Schubspannungen in den Mikroebenen zu integrieren, lieferte jedoch keine Übereinstimmung mit den Testdaten der ein-, zwei- und triaxialen Druckversuche.

¹⁸ *snap back* (engl.) – „Zurückschnappen“; Vorgang des Zurückschnellens einer Messkurve im σ - ϵ -Diagramm

Microplane Model M2:

Zwischen 1988 und 1996 wurde die Modellstufe **M2** mit einigen Erweiterungen entwickelt. Im Verlauf der Entwicklung wurde das Ziel des gleichzeitigen Simulierens von Zug- und Druckversagen erreicht, indem die Normalspannungen und -dehnungen der Mikroebenen in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil aufgespaltet wurden.

Während nämlich das Zugversagen hauptsächlich ein einaxiales Verhalten darstellt, ist Versagen unter Druckbeanspruchung ein triaxiales Phänomen, wobei das Versagen durch Querdehnung und Gleiten auf schiefen Ebenen hervorgerufen wird. Das Aufspalten in volumetrischen und deviatorischen Anteil hilft, diesen triaxialen Aspekt zu kontrollieren. Damit kann Druckversagen nicht nur mittels Querdehnung infolge des POISSON-Effekts ausgelöst werden, sondern auch durch Querdehnung infolge großer inelastischer, deviatorischer Dehnungen in den Mikroebenen parallel zu der Kompressionsrichtung sowie durch Gleiten auf schrägen Mikroebenen. Ein weiterer Vorteil des volumetrisch-deviatorischen Aufspaltens ist, dass ν sich im Bereich von -1 bis 0,50 bewegen kann, während ohne das Aufspalten nur Bereiche von -1 bis 0,25 abgedeckt werden können.

M2 war in der Lage, die grundlegenden Testdaten von ein-, zwei- und dreiaxialen Druck-, (Axial-) Torsions- und Zugversuchen wiederzugeben. Allerdings wurden lange Entfestigungsäste (von Testkurven) nicht gut abgebildet. Auf eine kompliziertere Variante, genannt **M2^h** [Hasegawa and Bazant 1993], wird hier nicht näher eingegangen.

Microplane Model M3:

Nach 1996 wurde mit dem Typ **M3** das Konzept der Spannungs-Dehnungs-Grenzen auf den Microplanes eingeführt. Die entfestigende Spannungs-Dehnungs-Kurve für Schub aus Modell **M2** wurde ersetzt durch eine dehnungsunabhängige, lineare Reibungs-Kohäsions-Fließfläche, welche die Normal- und Schubspannungskomponenten einer Mikroebene zueinander in Beziehung setzte.

Die Einführung einer Spannungs-Dehnungs-Grenze für Zug korrigierte ein Problem mit der volumetrisch-deviatorischen Aufspaltung aus **M2**, welches in numerischen Simulationen aufgetreten war [37]. **M2** lieferte dabei ausufernd große, positive Querdehnungen im entfestigenden Ast unter einaxialer Zugspannung, was durch die Lokalisierung der Zugdehnungsentfestigung in die volumetrischen Dehnungen hervorgerufen wurde, während der deviatorische Anteil auf den dehnungsentfestigenden Mikroebenen in den Entlastungsbereich kam.

Des Weiteren wurde **M3** auf moderat große, endliche Verformungen ausgedehnt. Dies wurde durch eine Methode zur Skalierung der Modelparameter erreicht. Hierbei wurden die Parameter in zwei Gruppen, die (wenigen) *justierbaren* und (vielen) *nicht-justierbaren* unterteilt. Während Erstere sich für jede Betongüte ändern und angepasst werden müssen, sind Letztere allen Betonen gemeinsam. In diesem Zusammenhang wurde ein vereinfachter Weg formuliert, den Größeneffekt¹⁹ aus den Versuchsergebnissen herauszufiltern.

¹⁹ *size effect* (engl.)

Aktuelles *Microplane*-Modell M4

Grundgleichungen

Während die klassischen konstitutiven Modelle durch Gleichungen repräsentiert werden, die über Invariantengleichungen eine direkte Beziehung zwischen den Komponenten σ_{ij} und ε_{ij} der Spannungs- und Dehnungstensoren $\underline{\sigma}$ und $\underline{\varepsilon}$ herstellen, wird das konstitutive *Microplane*-Modell [11][12] definiert durch das Herstellen einer Beziehung zwischen den Spannungs- und Dehnungskomponenten einer Mikroebene, welche eine beliebige Ausrichtung haben kann. Die grundlegende Annahme, welche das *Strain-Softening*-Verhalten nach Erreichen der Höchstbelastung sicherstellt, besteht darin, dass der normale Dehnungsvektor ε_N eine Projektion des Dehnungstensors $\underline{\varepsilon}$ ist, wie in Abbildung 3-14 dargestellt.

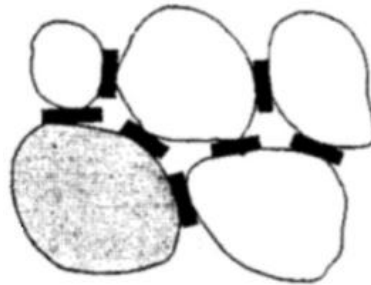


Abbildung 3-13 – *Microplanes* als Kontaktflächen zwischen den Zuschlagkörnern

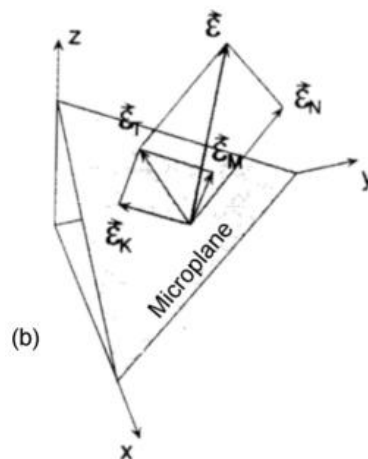


Abbildung 3-14 – Dehnungsvektor und zugehörige Komponenten in einer *Microplane*

Die Schubdehnungen werden in jeder *Microplane* durch ihre Komponenten der Richtungen *M* und *L* beschrieben, respektive den entsprechenden Einheitsvektoren \underline{m} und \underline{l} , wobei \underline{l} als Kreuzprodukt aus \underline{m} und \underline{n} definiert ist: $\underline{l} = \underline{m} \times \underline{n}$.

Aufgrund der oben genannten kinematischen Beschränkung, welche die Dehnungen auf dem Mikrolevel (*Microplane*) und dem Makrolevel (Kontinuum) in Beziehung setzt, kann das statische Gleichgewicht der Spannungen zwischen Mikro- und Makrolevel nur näherungsweise sichergestellt werden. Dies geschieht in der so genannten „schwachen Form“ (des Gleichgewichts) gemäß dem **Prinzip der virtuellen Arbeit**. Im konkreten Fall für die Oberfläche Ω einer Einheits-Halbkugel:

$$\frac{2\pi}{3} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} = \int_{\Omega} (\sigma_N \delta \epsilon_N + \sigma_L \delta \epsilon_L + \sigma_M \delta \epsilon_M) d\Omega \quad (3.49)$$

Diese Gleichung bedeutet, dass die virtuelle Arbeit der Makrospannungen (Kontinuumsspannungen) innerhalb einer Einheitskugel gleich sein muss der virtuellen Arbeit der Spannungen in den Mikroebenen (Mikrospannungen), welche als Zugkräfte auf der Oberfläche der (Einheits-)Kugel betrachtet werden.

Der Integralausdruck bedeutet physikalisch die Homogenisierung der verschiedenen Anteile aus den Ebenen unterschiedlicher Richtungen innerhalb des Materials (s. Abbildung 3-14). Insofern wird das Integral in numerischen Berechnungen angenähert durch eine optimale GAUSS-Integration über eine Kugeloberfläche. Eine effiziente Formel, die eine akzeptable Genauigkeit erreicht, verwendet, wie in Abbildung 3-15 gezeigt, 21 *Microplanes*.

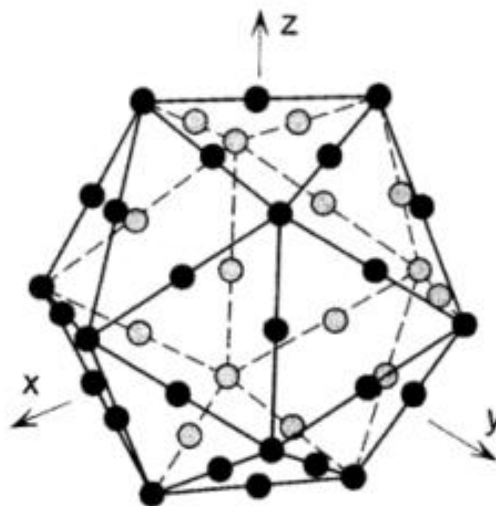


Abbildung 3-15 – Räumliche Diskretisierung der Einheitskugel mit 42 Integrationspunkten

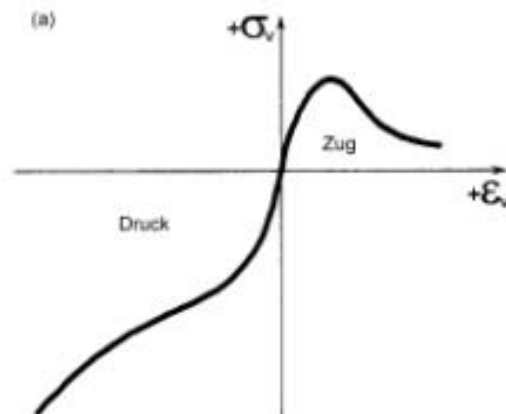


Abbildung 3-16 – Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Erstbelastung: (a) Volumetrischer Anteil

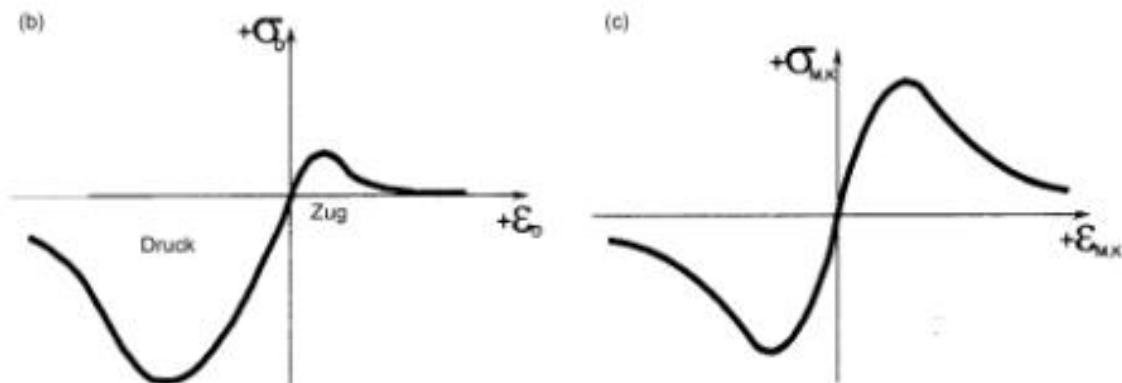


Abbildung 3-17 – Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Erstbelastung: (b) Deviatorischer Anteil und (c) Schubanteil (M und K)

3.3.5 Plastizitätstheorie

Es wird grundsätzlich unterschieden zwischen der klassischen Plastizitätstheorie und der Plastizitätstheorie, welche durch ein Schädigungsmodell ergänzt wurde. Während Erstere, die ursprünglich für das Verhalten von duktilen Materialien, wie Metallen, entwickelt wurde, Inelastizitäten des Werkstoffverhaltens grundsätzlich auf die Zunahme bleibender, plastischer Verformungen zurückführt, berücksichtigt Letztere den gleichen Sachverhalt durch eine Reduktion der Materialsteifigkeit infolge des Wachstums von Mikrorissen im Beton.

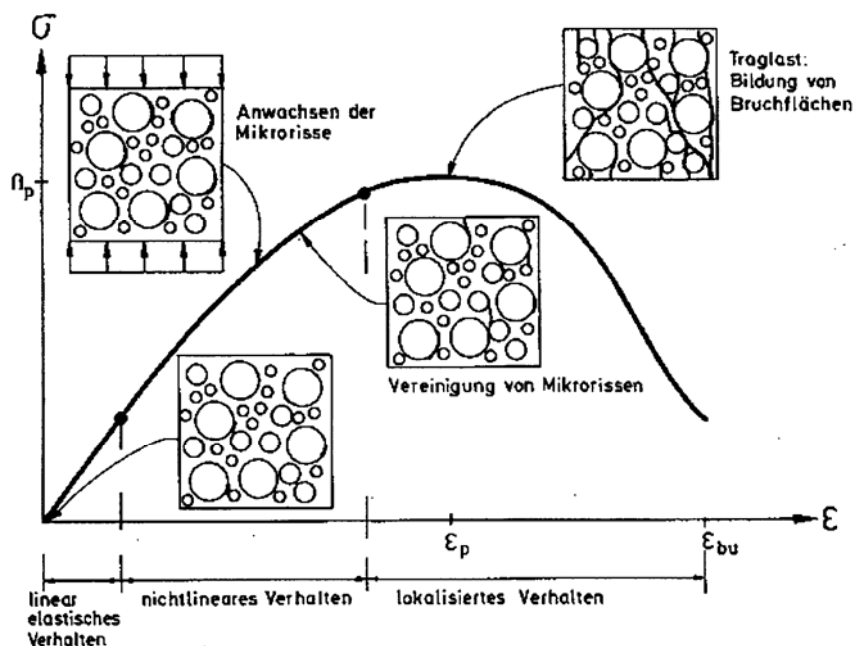


Abbildung 3-18 – Schematische Darstellung der fortschreitenden Rissbildung eines einaxial gedrückten Würfels

Dieser Unterschied zwischen den beiden Ansätzen beruht unter anderem auf der Tatsache, dass die bekannten Postulate der Plastizitätstheorie für den Werkstoff Beton nicht in so strenger Weise gelten, wie für Stahl. Beispielsweise zeigt Beton ein ausgeprägtes *Softening*-Verhalten nach Erreichen seiner Maximallast, was dem DRUCKERSchen Postulat ($\sigma \epsilon^{pl} > 0$) widerspricht.

3.3.6 Elasto-Plastische Modelle

In erster Näherung kann das nicht-lineare Verhalten von Beton durch ein elasto-plastisches Modell erfasst werden, um Be- und Entlastungspfade in unterschiedlicher Weise darstellen zu können. Die elasto-plastischen Modelle unterscheiden sich voneinander in der Form der Versagensfläche, der Fließbedingung, der Art der Verfestigung und der Verfestigungsbedingung. Sie haben gemeinsam, dass alle die (Wieder-)Be- und Entlastung auf Basis der Ausgangssteifigkeit des betrachteten Betons vorhersagen. Diese Tatsache repräsentiert die fundamentale Annahme der Plastizitätstheorie und ist angebracht, wenn das nicht-lineare Verhalten eines festen Werkstoffs durch plastische Verformungen auf spezifischen kristallinen Ebenen hervorgerufen wird.

Diese Annahme ist jedoch für spröde Materialien, wie Beton oder Geomaterialien, alleine nicht zutreffend, da die Nicht-Linearitäten, wie bereits erwähnt, auf der Entstehung, dem Wachstum und der Vereinigung von Mikrorissen im Material basieren. Des Weiteren wird in [X] davon ausgegangen, dass das Material wieder in einen Zustand zurückkehren kann, in dem keine Spannungen und keine Dehnungen mehr existieren.

Dies ist für Beton nicht der Fall, da sich während der Entstehung von Rissen im Gefüge einzelne Partikel von der Oberfläche lösen und somit das vollständige Schließen der Risse verhindern können. Dementsprechend entstehen plastische, da bleibende Verformungen. Darüber hinaus ist es aber notwendig eine Kombination aus Plastizitäts- und Schädigungstheorie zu berücksichtigen, um das in Experimenten beobachtete zyklische Verhalten von Beton erfassen zu können.

Zunächst sollen jedoch einige der elasto-plastischen Formulierungen im Folgenden näher vorgestellt werden.

Fließfläche vom DRUCKER-PRAGER-Typ

Die Erweiterung der klassischen VON MISES-Fließfläche (s.o. 3.2.2.2), welche häufig für Stahl verwendet wird, ist als Fließfläche vom DRUCKER-PRAGER-Typ bekannt (s.o. 3.2.3.3). Hier wird der Umstand berücksichtigt, dass das Verhalten des Betons von der hydrostatischen Komponente der Spannungen abhängig ist, welche ebenfalls die unterschiedliche Duktilität des Materials steuert.

Die Fließfläche weist Ecken (nicht glatte Normalenübergänge) auf, in welchen der Vektor des plastischen Fließens nicht eindeutig definiert ist. Ein großer Nachteil dieses Modells ist das unbegrenzte Ansteigen der Festigkeit mit ansteigendem hydrostatischen Druck. Dies wird durch das **Cap-Modell** begrenzt.

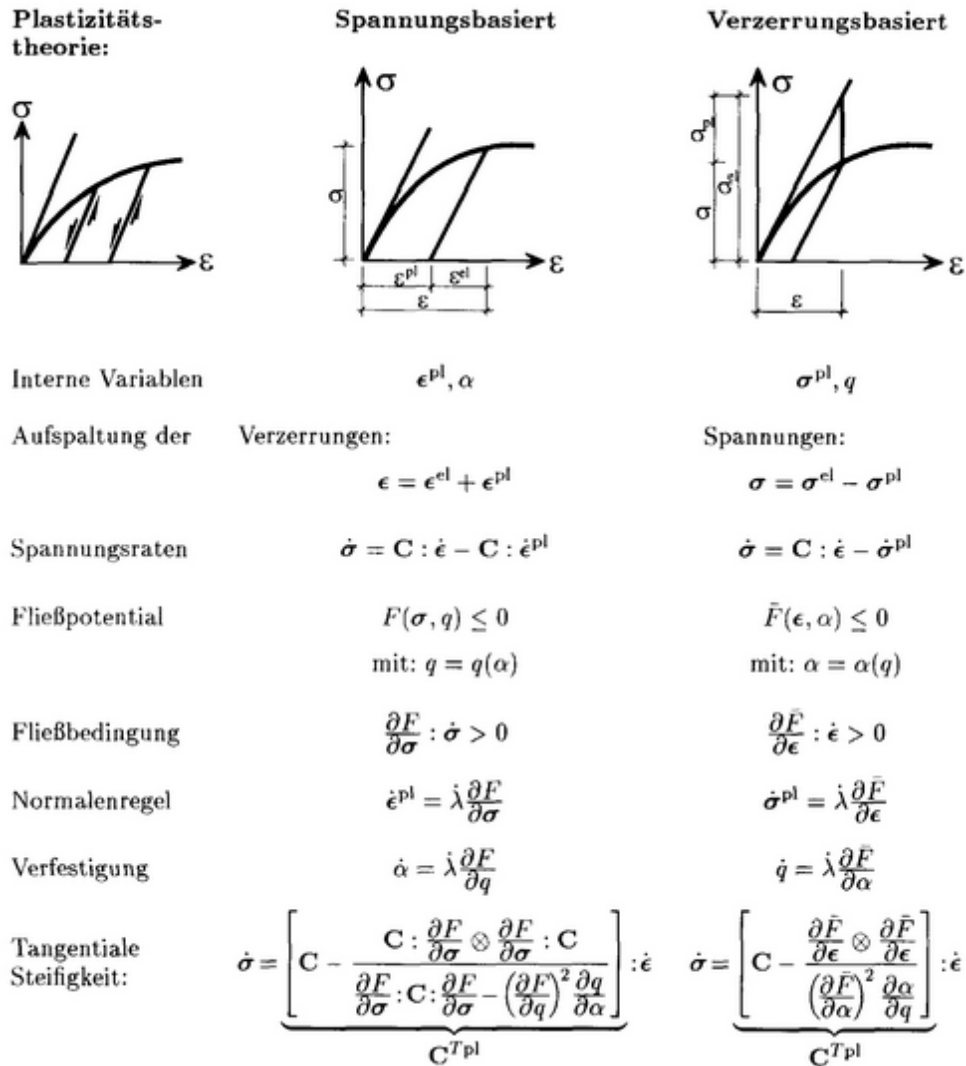


Abbildung 3-19 – Grundelemente der spannungs- und verzerrungsbasierten Plastizitätstheorie

Cap-Modell der Plastizitätstheorie

Ursprünglich von DIMAGGIO und SANDLER [32] zur Analyse von Geomaterialien aufgestellt wurde die Formulierung der Fließfläche mehrfach modifiziert, um sie dem *Return-Mapping*-Algorithmus zugänglich zu machen. Es ist ebenfalls in dem durch die erste Invariante und die Norm des Deviators aufgespannten Spannungsraum formuliert. Die Fließfläche setzt sich aus drei Teilflächen zusammen, die unstetig den elastischen Bereich abgrenzen (Druck positiv, s. Abbildung 3-20).

Neben den drei Teilbereichen ergeben sich noch zwei Kantenbereiche, in welchen gegebenenfalls die Spannungsaktualisierungen und der konsistente Tangentenoperator berechnet werden.

Die drei Teilflächen f_1 , f_2 und f_3 sind definiert als:

$$f_1(\sigma) = |s| - F_e(I_1) \quad f_t \leq I_1 \leq \kappa \quad (3.50)$$

$$f_2(\sigma, \kappa) = F_c(|s|, \kappa) - F_e(\kappa) \quad \kappa \leq I_1 \leq X_\kappa \quad (3.51)$$

$$f_3(I_1, \kappa_t) = f_t(\kappa_t) - I_1 \quad I_1 = f_t(\kappa_t) \quad (3.52)$$

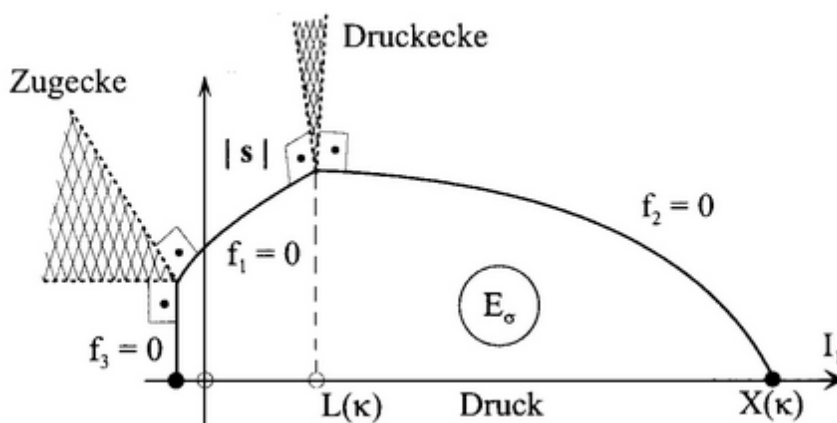


Abbildung 3-20 – Fließfläche des *Cap-Modells*

Die Versagenskurve stellt ein abgewandeltes DRUCKER-PRAGER-Kriterium dar, worin die Festigkeit des Betons mit wachsendem hydrostatischem Druck ansteigt, begrenzt durch eine „Kappe“²⁰, die sich mit Zunahme der plastischen volumetrischen Dehnungen öffnet.

Das Öffnen der Kappe wird durch den Verfestigungsparameter κ gesteuert.

$$\dot{\epsilon}_v^p = \begin{cases} \dot{I}_1^p & \dot{I}_1^p > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\bar{\epsilon}_v^p = W \left[1 - e^{-DX(\kappa)} \right] \quad (3.54)$$

Die Materialparameter W und D sind aus hydrostatischen Versuchen zu bestimmen. Darin besteht die qualitative Verbesserung der Modellierung, da der Zuwachs der Festigkeit nicht mehr unbegrenzt ist, wie beim DRUCKER-PRAGERSchen Modell. Auf der Zugseite wird der aufnehmbare Zug durch ein hydrostatisches Zugkriterium festgelegt, welches wie die Kappe der Druckseite experimentell ermittelt wurde.

²⁰ „cap“ (engl.)

In (3.50) – (3.53) sind die skalarwertigen Funktionen verwendet worden:

$$F_e(I_1) = \alpha - \lambda e^{-\beta I_1} + \theta I_1 \quad (3.55)$$

$$F_c(|s|, I_1, \kappa) = \sqrt{|s|^2 + \frac{1}{R^2} [I_1 - L(\kappa)]^2} \quad (3.56)$$

$$L(\kappa) = \langle \kappa \rangle = \begin{cases} \kappa & \kappa > 0 \\ 0 & \kappa \leq 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

$$X(\kappa) = \kappa + R F_e(\kappa) \quad (3.58)$$

Weiterführende Angaben zu den Materialparametern $\alpha, \beta, \lambda, \theta, \kappa_0, R, W, D$ sind in [48] zu finden.

Ein wesentlicher Nachteil der elasto-plastischen Modelle ist der Entlastungspfad, der modellgerecht, aber nicht wirklichkeitsgemäß, parallel zur Anfangssteifigkeit definiert sein muss. Somit können typische Phänomene für zyklische Belastung von Beton nicht wiedergegeben werden. Dazu bedarf es einer Schädigungskomponente, die im folgenden Kapitel vorgestellt wird.

3.4 Elasto-Plastische Schädigungsmodelle

3.4.1 Verzerrungsbasierte Kontinuumsschädigungstheorie

Da zyklische Experimente darauf hindeuten, dass im Beton sowohl irreversible, plastische als auch schädigende Deformationen auftreten, müssen die Plastizitäts- und die Kontinuumsschädigungstheorie miteinander in geeigneter Form kombiniert werden. In früheren Arbeiten wurden die plastische Komponente spannungsbasiert und die schädigende Komponente verzerrungsbasiert gekoppelt. Dies führte zu aufwändigen und komplexen Theorien, mit zu vielen Materialparametern, die sich einer anschaulichen Interpretation entziehen.

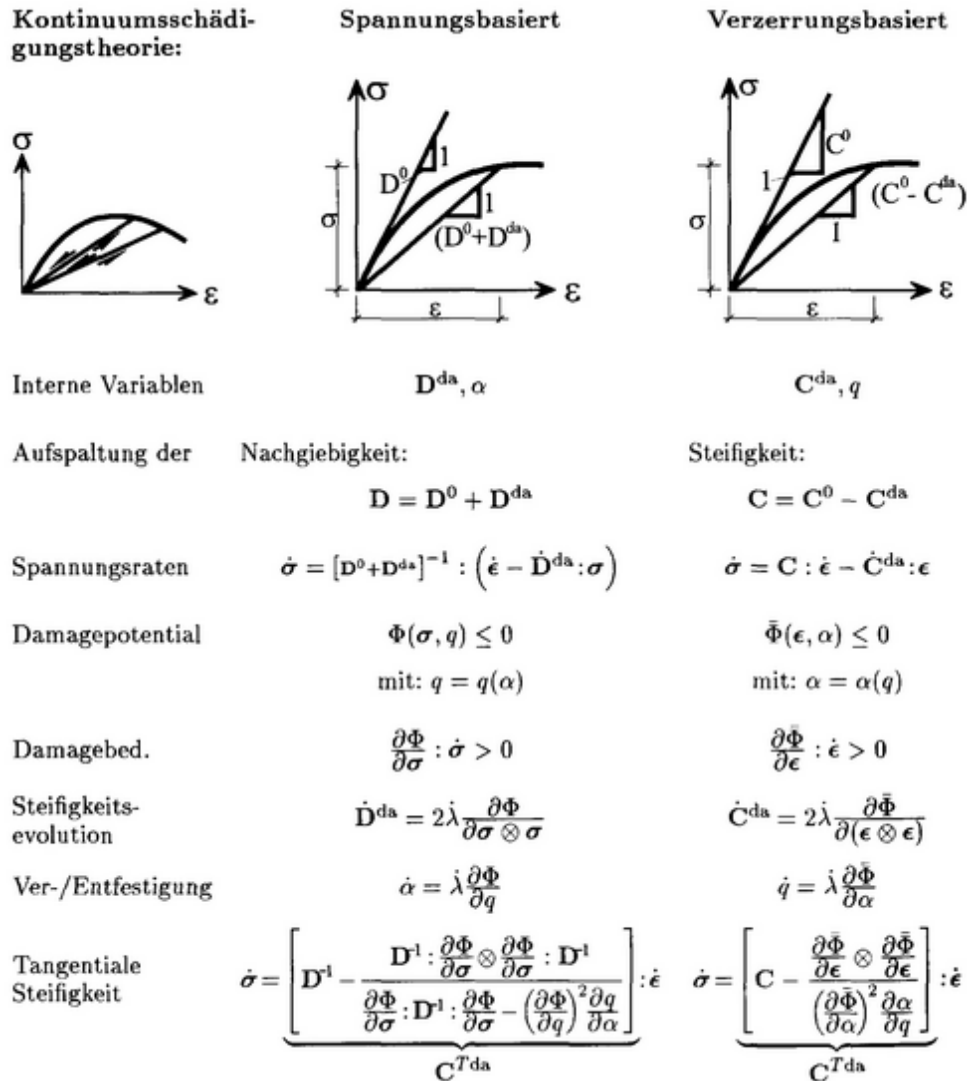


Abbildung 3-21 – Grundelemente der spannungs- und verzerrungsbasierten Kontinuumschädigungstheorie

Daher wurde in [41] eine verzerrungsbasierte Kopplung beider Theorien vorgestellt, die durch einen einzigen ingenieurmäßigen Materialparameter β zwischen plastischen und schädigenden Verzerrungen unterscheidet.

Die Kombination der Theorien bietet die folgenden Vorteile:

- Das Werkstoffgesetz enthält nur wenige Materialparameter, die alle ingenieurmäßig interpretiert werden können.
- Innerhalb eines inkrementell-iterativen Weggrößenverfahrens kann die Integration des in Raten formulierten Werkstoffgesetzes daher besonders effizient durchgeführt werden.

Da das nicht-lineare Spannungs-Dehnungsverhalten in diesem Modell im Wesentlichen von der Ver-/ Entfestigungsfunktion $\alpha(q)$ (vgl. Abbildung 3-19 und Abbildung 3-21) bestimmt wird, kann man diese Funktion auch stets so wählen, das eindimensional eine bestimmte vorgegebene Spannungs-Dehnungslinie durch das Modell wiedergegeben wird.

Das Resultat einer solchen Vorgehensweise ist in Abbildung 3-22 und Abbildung 3-23 für einen normalfesten Beton dargestellt. Man erkennt, dass die Spannungs-Dehnungslinien der Normen durchaus als Spezialfall in einem solchen Materialgesetz enthalten sein können. Darüber hinaus kann aber auch bei mehrachsigen Spannungszuständen das Verformungs- und Versagensverhalten wirklichkeitsnah wiedergegeben werden. Ebenso wird das zyklische Verhalten zutreffend beschrieben.

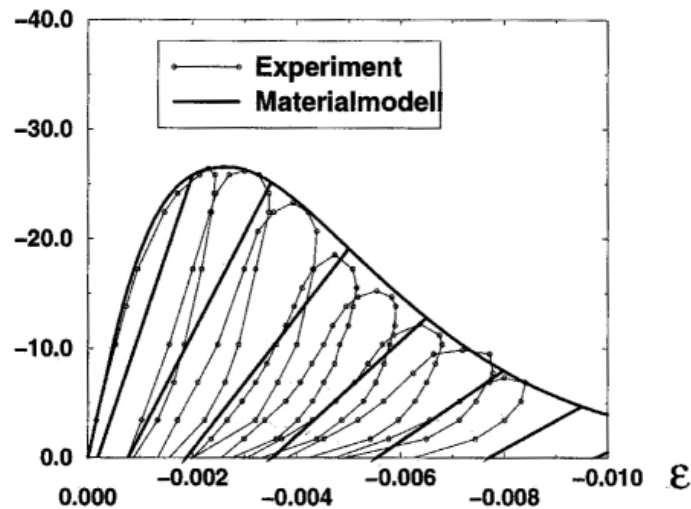


Abbildung 3-22 – Vergleich der vorgestellten elasto-plastischen Kontinuumsschädigungstheorie mit den Versuchen von SINHA, GERSTLE und TULIN (1964)

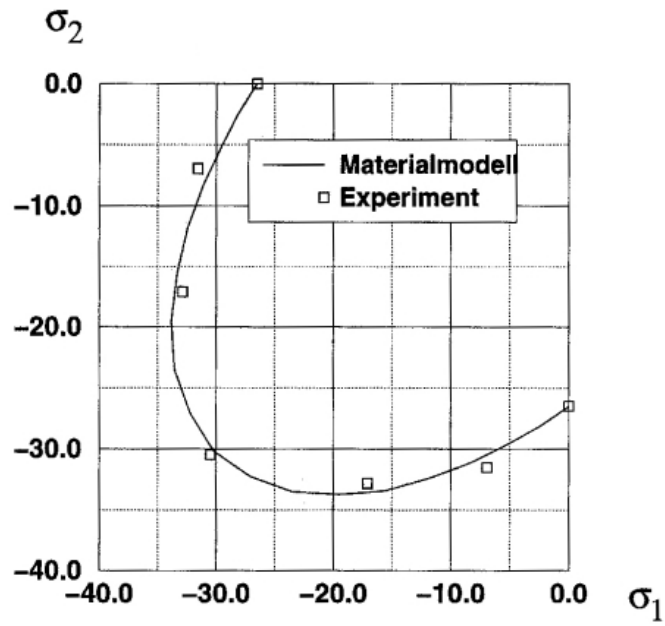


Abbildung 3-23 – Vergleich der vorgestellten elasto-plastischen Kontinuumsschädigungstheorie mit den biaxialen Versuchen von KUPFER (1973)

4 Pre- und Postprocessing

Ein entscheidender Faktor bei der Vorbereitung einer Finite-Elemente-Analyse eines Systems besteht darin, dieses System korrekt zu diskretisieren, also in für ein FE-Programm verarbeitbare Untereinheiten, die Finiten Elemente, zu zerlegen. Grundsätzlich handelt es sich dabei um das Problem, die vorgegebene Geometrie eines mehr oder weniger komplexen Systems, auf Ebene eben dieser Geometrie in zuerst rein geometrische Teilelemente aufzuteilen, die später jeweils einem Typ eines Finiten Elementes zugeordnet werden. Im Allgemeinen handelt es sich dabei um eine so genannte „1:n“-Zuordnung, also einem Finite-Elemente-Typ viele geometrische Elemente eines diskretisierten Systems zugeordnet werden. In diesem Kapitel werden einige Verfahren für die Zerlegung eines geometrischen Körpers – gleichgültig, ob räumlich oder in der Ebene – in einzelne (Finite) Elemente vorgestellt und erläutert.

Der Einfluss der physikalischen und geometrischen Nicht-Linearitäten auf die Finite-Elemente-Berechnung besteht darin, dass ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Kräften hergestellt wird. Die für einen solchen nicht-linearen Zustand aufzustellende Steifigkeitsmatrix eines Systems ist daher selbst von dem eigentlich gesuchten Verformungszustand abhängig, so dass eine direkte Lösung, wie sie für lineare Systeme existiert, hier nicht mehr möglich ist.

Es existiert ebenfalls auch keine exakte Lösung mehr, sondern es kann aufgrund des iterativen Charakters der Verfahren nur eine Näherungslösung gefunden werden. Auf den Näherungscharakter einer FE-Berechnung bzw. -Lösung wurde bereits hingewiesen. Die Qualität Letzterer hängt stark von dem gewählten Abbruchkriterium der Iteration ab.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich daher mit den verschiedenen Methoden zur Bestimmung und Berechnung des Fehlers und somit der Genauigkeit einer FE-Lösung. Grundsätzlich ist eine (fast) beliebige Genauigkeit denkbar, jedoch sollte diesbezüglich das Augenmerk auch auf die Effizienz des Lösungsverfahrens hinsichtlich der Rechenzeit gelenkt werden. Es würde beispielsweise keinen Sinn machen, eine Lösung mit viel Rechenaufwand zu suchen, die einen Fehler von nur einem Prozent aufweist, wenn die Berechnung des gleichen Systems mit einem Fehler von zwei Prozent nur ein Viertel der Rechenzeit beanspruchen würde, derer die Ein-Prozent-Lösung bedarf.

4.1 Netzgenerierung

4.1.1 Grundlagen

Netzgenerierung wird definiert als der Vorgang, eine zusammenhängende Fläche oder einen physikalischen Körper in kleinere Unterelemente zu unterteilen, um eine numerische Bearbeitung oder Lösung zu ermöglichen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Diskretisierung eines Bauteils. Diese Diskretisierung wird für eine breite Palette an Anwendungen herangezogen, jedoch stellt den führenden Anwendungsbereich die Finite Elemente Methode dar.

Die weite Verbreitung der *FEM* im ingenieurtechnischen Bereich der letzten Jahrzehnte und die Verwendung für immer größere und komplexere Bauteile und Strukturen führte zur Notwendigkeit, Algorithmen zu entwickeln, die möglichst selbsttätig die Zerlegung und somit Vernetzung der Strukturen durchführen konnten.

Das Problem der automatischen Netzgenerierung ist das des Versuchs, eine Anzahl von Knoten und Elementen in der Art zu definieren, dass ein geometrischer Bereich im besten Maße beschrieben und somit diskret abgebildet wird. Ein solcher geometrischer Körper besteht aus den Elementen Knoten²¹, Kurven²², Oberflächen²³ und (Fest-)Körpern²⁴.

Die meisten Algorithmen verwenden eine „auf dem Kopf stehende“ Herangehensweise: zu-erst werden die Knoten generiert, gefolgt von Kurven und (Ober-)Flächen und zuletzt den Körpern. Die Eingangsgrößen für den jeweiligen Schritt während der Netzgenerierung sind zwangsläufig immer diejenigen des vorhergehenden Schrittes niedrigerer Ordnung.

Grundsätzlich wird in der Literatur zwischen der strukturierten und der unstrukturierten Netzgenerierung unterschieden. Während Erstere als hauptsächliches Kriterium verlangt, dass (möglichst) jeder Knoten in einem Netz die gleiche Anzahl an angrenzenden Elementen besitzt, trifft diese Bedingung für die unstrukturierte Methode nicht zu. Aus diesem Grund wird von der strukturierten Methode auch oftmals als „**Gittererzeugung**“ gesprochen. Typischerweise besteht ein strukturiertes Gitternetz meist aus Viereck- (2D), respektive Hexaeder-Elementen (3D) (mit regelmäßiger Kantenlänge).

Da im Rahmen der nicht-linearen FEM meist so genannte „**adaptive Verfahren**“, welche in einem der folgenden Kapitel noch näher erläutert werden, notwendig sind, bei denen wiederum mehr die unstrukturierten Algorithmen Verwendung finden, sollen diese im Folgenden vorgestellt werden.

4.1.2 Unstrukturierte Netzgenerierung

Die unstrukturierte Netzgenerierung besitzt nicht die Bedingung der „**Knotenwertigkeit**“. Es ist demnach erlaubt, dass an verschiedenen Knoten eine unterschiedliche Anzahl an Elementen angrenzt. In den meisten Fällen werden unstrukturierte Netze aus Dreieck- (2D) beziehungsweise Tetraeder-Elementen (3D) erzeugt. Es existieren aber auch viereck-/ hexaederbasierte, unstrukturierte Netze. Auch daher existiert ein gewisser Überhang der beiden Methoden zur Netzgenerierung.

Im Folgenden werden die Techniken zur Erzeugung von Dreieck-/ Tetraeder-Netzen und Viereck-/ Hexaeder-Netzen dargestellt.

²¹ **vertex** (engl.), Plural: **vertices** - Hinweis: Geometrie-Knoten werden im Englischen als **vertices**, FE-Knoten aber als „**nodes**“ bezeichnet.

²² **curve(s)** (engl.)

²³ **surface(s)** (engl.)

²⁴ **solid(s)** (engl.)

Dreieck-/Tetraeder-Vernetzung

Die unstrukturierte Netzgenerierung für Elemente auf Basis von dreiecksförmigen Flächen kann in drei Hauptkategorien unterteilt werden:

1. **Octree**-Technik
2. **DELAUNAY**-Methode
3. **advancing front**²⁵-Methode

Obgleich mit Sicherheit ein Unterschied in der Komplexität bei zwei- und dreidimensionaler Netzgenerierung besteht, sind die Algorithmen zu einem weiten Teil identisch in der Vorgehensweise für beide Dimensionen.

Die Octree-Technik

Diese Technik wurde ursprünglich entwickelt von SHEPARD [75][76]. Die Vorgehensweise ist hierin, dass ein geometrisches Model (2D/3D) rekursiv solange unterteilt wird, bis die gewünschte Auflösung erreicht ist. Abbildung 4-1 zeigt ein zweidimensionales Beispiel der Zerlegung eines einfachen Objektes in Quadrate. „Irreguläre“ Elemente zur Anpassung an die Geometrie werden dort erzeugt, wo der Rand des Modells geschnitten wird. Dazu ist allerdings eine Vielzahl von – besonders im Dreidimensionalen sehr aufwändigen – Schnittberechnungen erforderlich.

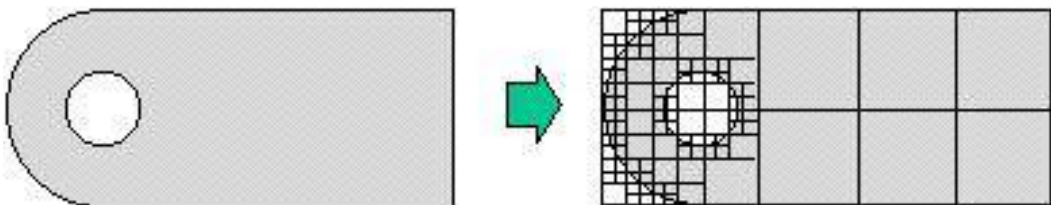


Abbildung 4-1 – Vernetzung einer Geometrie mittels Octree-Technik

Um Sicherzustellen, dass die Elementgrößen sich während der Verfeinerung des Randbereichs nicht zu sehr verändern, kann man eine Maximaldifferenz für den Unterteilungsschritt zwischen angrenzenden Elementen definieren.

Die DELAUNAY-Methode

Dies ist das wohl meist verwendete Kriterium [30] zur Erzeugung von Dreieck- und Tetraeder-Netzen. Es besagt, dass kein Knoten innerhalb der „Umkugel“ jedes Tetraeders eines Netzes ent-

²⁵ **advancing front** (engl.) - fortschreitende Frontlinie/Stirnseite

halten sein darf. Die *Umkugel* ist definiert als die Kugeloberfläche, auf der alle vier (Geometrie-) Knoten des zugehörigen Tetraeders als Punkte liegen.

Abbildung 4-2 stellt zwar den zweidimensionalen Fall dar, die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall ist jedoch leicht ableitbar. Die Knoten eines Dreiecks in **(a)** liegen nicht innerhalb des *Umkreises* des jeweils anderen Dreiecks. Fall **(b)** verdeutlicht die Nicht-Einhaltung des Kriteriums, da jeweils ein Knoten eines Dreiecks im Umkreis des anderen Dreiecks liegt.

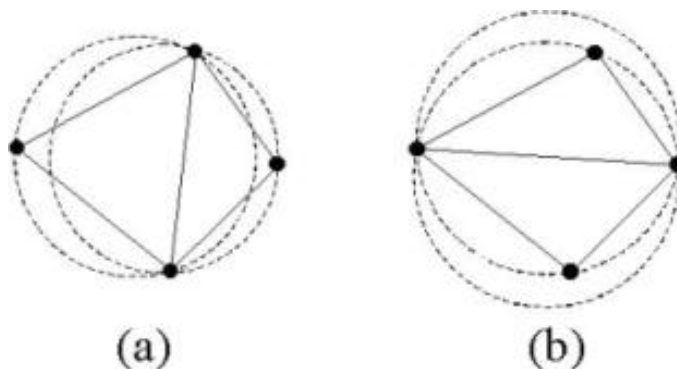


Abbildung 4-2 – DELAUNAY-Kriterium: (a) erfüllt und (b) nicht erfüllt

Das DELAUNAY-Kriterium allein stellt jedoch noch keinen Algorithmus zur Vernetzung dar. Es liefert nur die Bedingung(en) zum Verbinden von bereits existierenden Punkten in einem geometrischen Körper. Eine typische Vorgehensweise ist es, zuerst den Rand einer Geometrie zu vernetzen, um eine Anfangszahl von Knoten zu bekommen. Dann werden die Knoten mit Hilfe des DELAUNAY-Kriteriums weiter vernetzt.

Punkteinfügung

Es existieren verschiedene Ansätze, um Punkte in einen geometrischen Körper einzufügen. Im Folgenden sollen die am weitesten Verbreiteten kurz erläutert werden.

- Der einfachste Weg der Punkteinfügung ist, Knoten mittels eines regelmäßigen Gitters, welches die zu vernetzende Geometrie abdeckt, mit vorgegebener Knotendichte zu erzeugen. Um Elemente von unterschiedlicher Größe erzeugen zu können, ist es zusätzlich möglich, eine Größenfunktion einzuführen, mit der gesteuert wird, dass solange Knoten eingefügt werden, bis ihre Bedingung erfüllt ist.
- Eine andere Variante ist es, Knoten an den Schwerpunkten der Tetraeder-Elemente einzufügen, vorausgesetzt die zugrunde liegende Größenfunktion wird dabei nicht verletzt.
- Alternativ ist es außerdem möglich, die Knoten am Schwerpunkt der Umkreise (2D) oder *Umkugeln* (3D) einzufügen. Wird eine bestimmte Reihenfolge eingehalten, spricht man bei dieser Technik auch von „Garantierter Qualität“ eines Netzes [24][70].
- Ein VORONOI-Segment ist die Linie, welche die Mittelpunkte von zwei Umkreisen/*Umkugeln* verbindet. Ein neuer Knoten wird bei dessen Verwendung auf diesem Liniensegment unter

Berücksichtigung eines Größenkriteriums eingefügt. Dies führt im Allgemeinen zu sehr strukturierten Netzen (mit sechs Dreiecken an jedem inneren Knoten) [65].

- In [50] wird eine Methode definiert, welche einen *advancing front*-Algorithmus verwendet. Die Knoten werden inkrementell vom Rand ins Innere eingefügt. Man erhält sehr strukturierte Netze, die sich gut den geometrischen Randbedingungen anpassen.

Durch Randbedingungen beschränkte Triangulation

Da in den meisten DELAUNAY-Implementierungen die Randknoten generiert werden, ohne auf die korrekte Triangulation der Oberfläche zu achten, ist ein zweiter Schritt notwendig, um die konforme Einteilung der Oberfläche in Dreiecke zu erzwingen. Da es sich hinterher nicht mehr um eine strikte DELAUNAY-Methode handelt spricht man von einer „durch Randbedingungen beschränkten DELAUNAY-Triangulation“²⁶.

Auf die verwendeten Algorithmen soll hier aber nicht näher eingegangen, sondern für nähere Informationen auf [59] verwiesen werden.

Die *advancing front*-Methode

Diese auch als *moving front*²⁷ bezeichnete Methode ([44][45]; [46][47]) ist ein weiterer populärer Ansatz zur Erzeugung von Dreieck-/Tetraeder-Element-Netzen. Hierin werden ausgehend von einer triangulierten Oberfläche (einem Rand in 2D) schrittweise ins Innere weitere Tetraeder (Dreiecke) erzeugt. Die aktive Frontlinie ist der Bereich, wo neue Tetraeder (Dreiecke) entstehen. Abbildung 4-3 zeigt eine zweidimensionale Geometrie mit den im ersten Schritt entlang des Randes erzeugten Dreiecken. Der Algorithmus verwendet, wie an den nahe beieinander liegenden Rändern der Geometrie zu erkennen ist, auf dem Weg nach Innen auch schon bereits vorhandene Knoten, um neue Dreiecke zu erzeugen. Gleiches gilt im dreidimensionalen Fall für Tetraeder-Elemente.

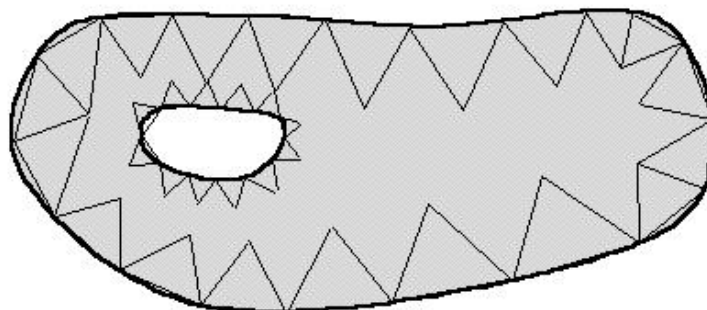


Abbildung 4-3 - 2D-Beispiel der *advancing front* (mit einer Lage am Rand platzierter Dreiecke)

²⁶ *Boundary Constrained DELAUNAY-Triangulation* (engl.)

²⁷ *moving front* (engl.) - sich bewegende Frontlinie

Es sind hierbei grundsätzlich Überprüfungen notwendig, ob sich Elemente eventuell überschneiden, während sich die Fronten in einem Körper aufeinander zu bewegen. Auch hier kann eine Größenfunktion verwendet werden, um die Elementdichte und -anzahl gezielt zu steuern.

Viereck-/Hexaeder-Vernetzung

Obgleich die Erzeugung unstrukturierter Netze mit Dreieck- und Tetraederelementen die weiteste Verbreitung gefunden hat, sind in den letzten Jahren auch vermehrt Algorithmen auf Basis von Viereck- und Hexaederelementen entwickelt worden. Allerdings ist dabei der Transfer eines Algorithmus von zweidimensionalen Rechteck- auf dreidimensionale Hexaederelemente nicht so direkt umsetzbar, wie es bei der Umstellung von Dreieck- (2D) auf Tetraederelemente (3D) möglich ist.

Mapped Meshing

Obwohl es sich beim so genannten *Mapped Meshing*²⁸ eigentlich um eine strukturierte Methode handelt, beinhalten viele unstrukturierte Methoden eine Option, Netze mittels *Mapped Meshing* erzeugen zu können. In der Ebene ist es dabei erforderlich, dass gegenüberliegende Kanten die gleiche Anzahl an Unterteilungen aufweisen. Im dreidimensionalen Raum gilt entsprechendes für die gegenüberliegenden Flächen eines räumlichen Körpers. Diese müssen die gleiche Anzahl an Teilflächen und somit das gleiche Oberflächennetz besitzen.

Eine Variante des *Mapped Meshing* ist das *Sub-Mapping*²⁹. Diese Methode unterteilt die räumliche Geometrie in Teilkörper und wendet das *Mapped Meshing* auf Letztere an. Prinzipbedingt eignet sich diese Methode gut für blockähnliche Formen (2D) und Körper (3D) mit genau definierten Kanten und würfelförmigen Regionen.

*Sweeping*³⁰, oftmals auch als 2½-D-Vernetzung bezeichnet, ist eine weitere Variante des räumlichen *Mapped Meshing*. Ein auf Rechtecken basierendes Netz wird an einer räumlichen Kurve entlang „gestrichen“ und so ein räumliches Netz erzeugt, indem in vorgegebenen Intervallen Hexaeder erzeugt werden (Abbildung 4-4).

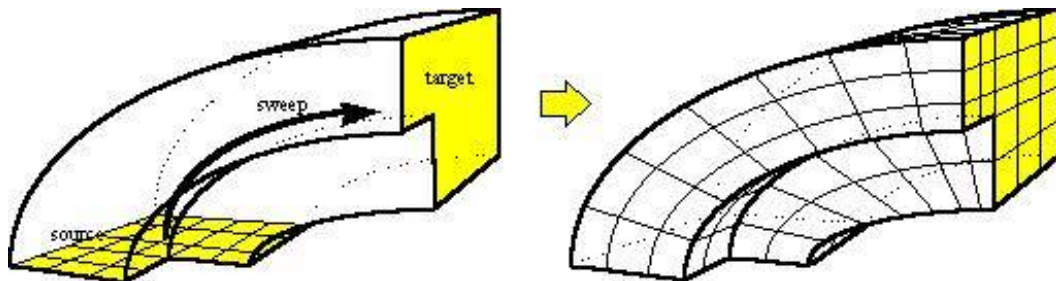


Abbildung 4-4 - Hexaeder-Elemente erzeugt mittels Sweeping

²⁸ *Mapped Meshing* (engl.) - „abgebildete Vernetzung“

²⁹ *Sub-Mapping* (engl.) - „Unter-Abbilden“

³⁰ *sweeping* (engl.) - „streichend; Streichen (hier im Sinne von: Führen)“

Unstrukturierte Viereckvernetzung

Bei der unstrukturierten Viereckvernetzung gibt es zwei Hauptkategorien: die **direkten** und die **indirekten** Methoden. Bei einem indirekten Ansatz wird die Umgebung zuerst mit Dreiecken vernetzt und Letztere dann mittels entsprechender Algorithmen zu Rechtecken zusammengefasst. Ein direkter Ansatz wird kein Umweg über ein Dreiecksnetz gegangen, sondern eine (Ober-)Fläche direkt mit Rechtecken vernetzt.

Indirekte Methoden

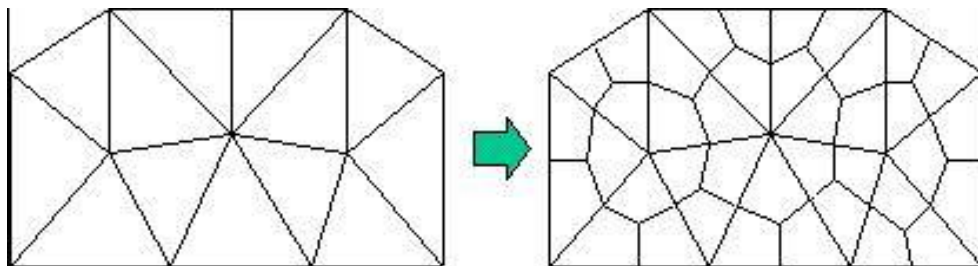


Abbildung 4-5 - Viereckelement-Netz erzeugt durch Aufspaltung von Dreieckelementen

Die einfachste Methode zur indirekten Viereckvernetzung ist es, die Dreiecke einer bereits vernetzten Fläche in jeweils drei Vierecke zu unterteilen. Diese Vorgehensweise resultiert in einem vollständigen Vierecknetz, allerdings mit der Einschränkung, dass viele irreguläre Knoten in diesem Netz vorhanden sind (Abbildung 4-5).

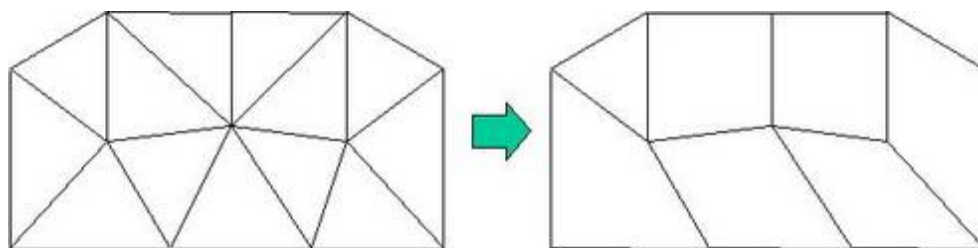


Abbildung 4-6 - Viereckelement-Netz erzeugt durch Kombination von Dreieckelementen

Dies führt des Weiteren zu einer verminderten Elementqualität. Ein anderer Algorithmus verbindet zwei nebeneinander liegende Dreieckelemente zu einem Viereckelement. Während sich dabei zwar die Elementqualität erhöht, bleiben prinzipbedingt jedoch einige Dreieckelemente übrig (Abbildung 4-6). Die Methode kann dadurch verfeinert werden, dass man darauf achtet, welche Dreiecke in welcher Reihenfolge kombiniert werden. So kann die Anzahl der zurückbleibenden Dreieckelemente stark reduziert werden.

Des Weiteren existieren Kombinationen der beiden oben genannten Methoden.

*Quad Morphing*³¹ [60] bedient sich eines *advancing front*-Algorithmus, um Dreiecke in Vierecke umzuwandeln. Es ist auch in der Lage, die Anzahl der irregulären Knoten im Netz signifikant zu verringern. Bei dieser Methode werden lokale Kanten vertauscht und zusätzliche Knoten hinzugefügt, um die Ausrichtung am Rand und (bestmögliche) Orthogonalität zu sichern. Es kann dafür eine beliebige Anzahl an Dreiecken aufgelöst werden, um ein einzelnes Viereck zu erzeugen.

Da bei den indirekten Methoden alle Operationen lokal durchgeführt werden, also keine globalen Überprüfungen auf Verschneidungen durchgeführt werden müssen, sind diese Methoden sehr schnell. Der Nachteil jedoch ist, dass viele irreguläre Knoten in den indirekt erzeugten Netzen zurückgelassen werden. Selbst wenn nur wenige irreguläre Knoten existieren, ist nicht garantiert, dass die Elemente sich den Begrenzungen (Rändern) korrekt anpassen.

Direkte Methoden

Die direkten Methoden können zwei Kategorien zugeordnet werden:

- Die einen Methoden basieren auf einer Form der Zerlegung der zu vernetzenden Geometrie in einfachere Regionen, die dann mittels einer für die jeweilige Form einer Region gegebenen Vorlage weiter zerlegt werden.
- Die zweite Kategorie bilden die Methoden, die einen *moving front*-Algorithmus für das direkte Platzieren von Knoten und Elementen verwenden.

Viereckvernetzung mittels Zerlegung

Die ***Viereck-Baum-Zerlegung*** [9] verwendet als eine der ersten Techniken die Methode der Zerlegung. Nach einer ersten Zerlegung eines Gebiets in *Viereck-Bäume* werden Viereckelemente in die *Blätter* der *Viereck-Bäume* so eingepasst, dass sie mit den Rändern konform sind.

In [79] wurde eine Methode vorgestellt, die einen Bereich rekursiv in einfache Polygone unterteilt. Die resultierenden Polygone werden dann mittels vorhandener Vorlagen weiter in Viereckelemente unterteilt. Die Anzahl der Vorlagen für die Unterpolygone ist allerdings begrenzt.

Abbildung 4-7 zeigt die Viereckvernetzung unter Zuhilfenahme einer Mittelachse [80]. Letztere kann man sich vorstellen als eine Reihe von Linien und Kurven, die vom Mittelpunkt eines maximalen, tangierenden Inkreises erzeugt werden, während dieser durch die Geometrie „rollt“. Nachdem die Geometrie so in einfachere Regionen zerlegt wurde, werden diese wiederum mittels vorhandener Vorlagen weiter in Viereckelemente zerlegt.

³¹ ***Quad Morphing*** (engl.) - „Rechteck-Umwandlung“

Advancing Front-Viereckvernetzung

Einer der ersten *Advancing Front*-Algorithmen wurde entwickelt von ZHU [93]. Analog den bereits oben vorgestellten Methoden (s. 4.1.2.1.3), werden zuerst Knoten auf den Rändern der Geometrie erzeugt. Ausgehend von diesen Knoten werden dann neue Elemente mittels vorspringender Kanten ins Innere der Geometrie erzeugt. Es werden zwei Dreiecke mit den althergebrachten *Advancing Front*-Algorithmen erzeugt und diese dann zu einem einzelnen Viereck verbunden.

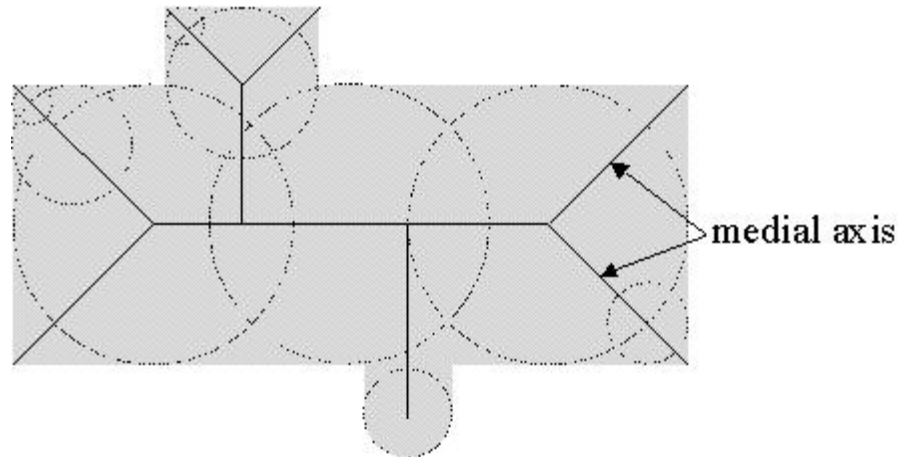


Abbildung 4-7 - Viereckvernetzung mittels einer Mittelachse

Der *Paving*³²-Algorithmus [19] stellt eine Methode dar, komplette Reihen von Elementen ausgehend vom Rand nach Innen zu generieren. Damit einhergehend werden Methoden zur Vorausberechnung von Knoten, die Behandlung spezieller Geometrien und (eventuelle) Überschneidungen von gegenüberliegenden Elementfronten behandelt. Es existieren Erweiterungen für diesen Algorithmus auf dreidimensionale Oberflächen und zum Setzen einzelner Elemente anstatt kompletter Elementreihen.

Unstrukturierte Hexaedervernetzung

Auch hier existieren – analog zum vorangegangenen Abschnitt – *direkte* und *indirekte* Methoden.

Indirekte Methoden

Obgleich die indirekten Methoden keine große Verwendung in Programmen zur Vernetzung finden, gibt es einige Algorithmen, die auf der Zerlegung eines Tetraeders in vier Hexaeder basieren (Abbildung 4-8). Der Grund für die nur sehr spärliche Anwendung liegt in der resultierenden minderwertigen Elementqualität.

³² *paving* (engl.) - „Pflastern, Pflasterung“

Ein indirekter Algorithmus, der auf der Kombination von Tetraedern zu einem Hexaeder beruht – analog zur Verbindung von Dreieckelementen zu einem Viereckelement –, wurde nie vorgestellt oder ein entsprechender Ansatz verfolgt, da schon die einfachste Unterteilung eines Würfels fünf Tetraeder erfordert. Somit müsste ein solcher Algorithmus nach Kombinationen von fünf oder mehr Tetraedern suchen, um diese zu einem einzigen Hexaeder zusammenfassen zu können. Dieser Weg wird jedoch nicht als Erfolg versprechender Ansatz erachtet.

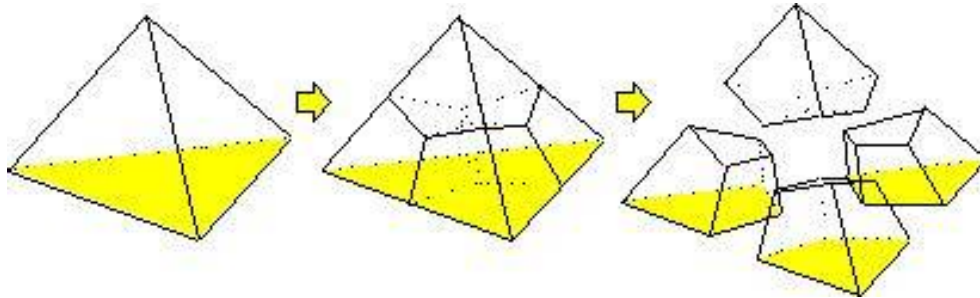


Abbildung 4-8 - Zerlegung eines Tetraeders in vier Hexaeder

Direkte Methoden

Die vier wichtigsten direkten Techniken, die in der Fachliteratur am dominantesten vertreten sind, zur unstrukturierten Hexaeder-Netzgenerierung sind:

1. Gitter-basierter Ansatz
2. Mittelflächen-Methode
3. *Plastering*³³
4. *Whisker Weaving*³⁴

⇒ 1.) Gitter-basierter Ansatz

Dieser Ansatz von SCHNEIDERS [74] erzeugt ein eingepasstes Gitter von Hexaederelementen im Inneren eines Körpers. Weitere Hexaederelemente werden an den Rändern hinzugefügt, um vorhandene Lücken zwischen dem regelmäßigen Hexaeder-Gitter und der Oberfläche des dreidimensionalen Körpers zu füllen. Obgleich robust, neigt diese Methode dazu, Elemente von minderer Qualität am Rand des Volumens zu erzeugen. Die Hexaederelemente werden im Allgemeinen dem Rand nicht gut angepasst. Das resultierende Netz ist im Übrigen sehr abhängig von der Orientierung des inneren Gitters aus Hexaederelementen. Zusätzlich ist darauf zu achten, dass die Elementgrößen annähernd gleich sein müssen. Neuere Erweiterungen dieser Technik ermöglichen stärkere Unterschiede in den Elementgrößen auf Basis einer *Octree*-Zerlegung des Körpers. Ein bekannter, auf dieser Technik basierender Vernetzer ist beispielsweise im Programm **Mentat** von **MARC** [49] enthalten.

³³ *plastering* (engl.) - „Verputzen“

³⁴ *whisker* (engl.) - „Bart-, Schnurrhaar“; *weaving* (engl.) - „Weben“; *Whisker Weaving* - „Barthaar-Weben“

⇒ 2.) *Mittelflächen-Methode*

Mittelflächen-Methoden [43][61][62] verwenden eine Anfangszerlegung des zu vernetzenden

Volumens. Als direkte Erweiterung der Mittelachsen-Methode aus dem zweidimensionalen Bereich wird der Körper mit Hilfe von Mittelflächen unterteilt. Letztere sind vorstellbar als Flächen, die durch den Mittelpunkt von einer maximalen, tangierenden Innenkugel erzeugt werden, während diese Kugel durch den Körper bewegt wird (s. Abbildung 4-7).

Es entstehen auch hier wieder Regionen, die mittels einer Reihe von vorgegebenen Schablonen mit Hexaederelementen vernetzt werden können. Für allgemeine Geometrien ist diese Methode wenig zuverlässig. Robustheitsfragen und die Tatsache, dass man jeder mögliche Region, die durch die Mittelflächen erzeugt werden kann, mit einer Vorlage Rechnung tragen muss, stellen schwierig zu lösende Probleme dar.

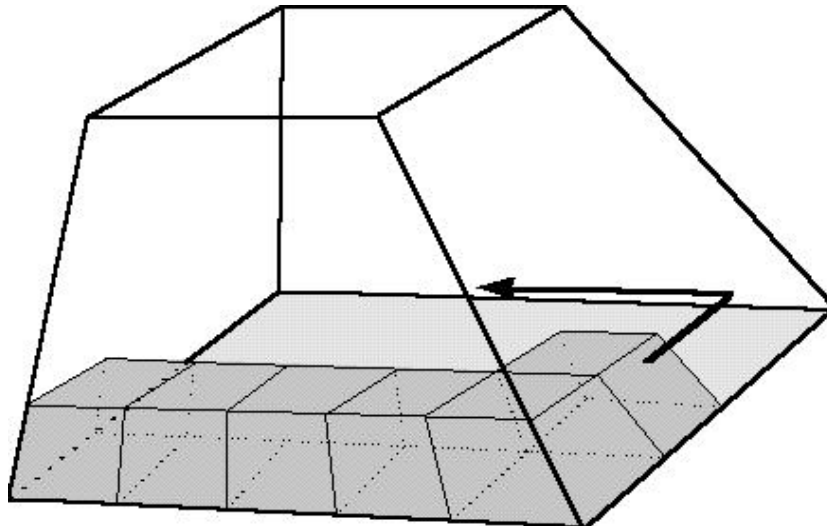


Abbildung 4-9 - Vorgang des Plastering zur Erzeugung von Randelementen

⇒ 3.) *Plastering*

Ähnlich zu Punkt 2 stellt *Plastering* [20][25] eine Erweiterung des *Paving* in die dritte Dimension dar. Abbildung 4-9 zeigt die Vorgehensweise des Verfahrens, das zuerst Elemente an den Rändern erzeugt und daraufhin fortschreitend Richtung Zentrum des Volumens weitere Elemente platziert. Heuristische Verfahren werden herangezogen, um die Reihenfolge der Elementanordnung festzulegen. Ähnlich anderen *Advancing Front*-Algorithmen ist die aktuelle Front definiert als bestehend aus allen Viereckflächen. Einzelne Viereckflächen werden in das Volumeninnere projiziert, um Hexaeder zu erzeugen. Daher sind zusätzlich Überprüfungen auf Verschneidungen und die Bestimmung notwendig, ob und wie ein Anschluss an bereits existierende Knoten möglich ist.

Während der Algorithmus durch den zu vernetzenden Körper voranschreitet, ist es möglich, dass komplexe, geometrische Hohlräume entstehen, die überhaupt nicht mit Hexaedern vernetzbar sind. In einem solchen Fall sind bereits vorhandene Hexaederelemente dahingehend anzupassen, dass das Einfügen von weiteren Hexaedern in den entstandenen Fehlstellen ermöglicht wird.

⇒ 4.) *Whisker Weaving*

Whisker Weaving [81] basiert auf dem Konzept des *Spatial Twist Continuum*³⁵ (STC) [53]. Das STC wird beschrieben als der **Dual** des Hexaedernetzes, repräsentiert durch eine Anordnung von Schnittflächen, die Hexaederelemente in allen (drei) Richtungen halbieren. Abbildung 4-10 zeigt die Verdreh-Ebenen des STC für einen Körper aus zwei Hexaederelementen.

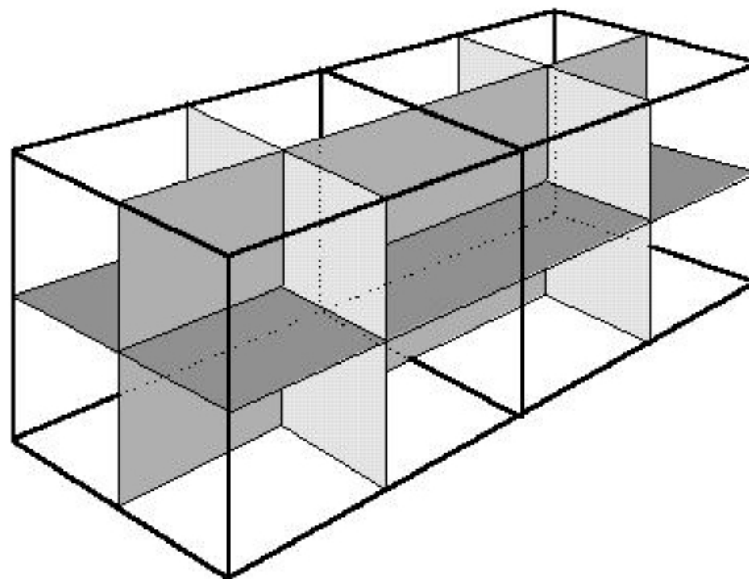


Abbildung 4-10 - STC mit vier Verdreh-Ebenen für einen Körper aus zwei Hexaedern

Das Prinzip hinter *Whisker Weaving* ist, zuerst das STC des Hexaedernetzes zu erzeugen. Mit einem kompletten STC als „Vorlage“ können die Hexaederelemente dann in das Volumen eingepasst werden. Dies wird dadurch erreicht, dass die Kurven, welche aus den Schnitten der Verdreh-Ebenen mit der Oberfläche des Volumens entstehen, topologisch dargestellt werden. Diese Kurven können sehr einfach durch eine initiale Viereckvernetzung der Volumenoberfläche bestimmt werden. Die Aufgabe des *Whisker-Weaving*-Algorithmus ist zu bestimmen, wo sich die Verdreh-Ebenen im Volumeninneren schneiden. Da dies topologisch durchgeführt wird, sind keine Verschneidungsberechnungen erforderlich. Ist erst einmal eine gültige topologische Darstellung der Verdreh-Ebenen gefunden, werden die Hexaeder im Volumen erzeugt. Ein Hexaeder entsteht immer dort, wo drei Verdreh-Ebenen zusammenlaufen.

³⁵ *Spatial Twist Continuum* (engl.) - „Räumliches Verdreh-Kontinuum“

4.2 Lösungsverfahren

4.2.1 Allgemeines

Ziel der Näherungslösung bei der Berechnung nicht-linearer FE-Systeme ist es, das nicht-lineare Gleichungssystem auf ein lineares und somit lösbares System zurückzuführen, wobei das grundlegende Problem darin besteht, dass aus statischen Gründen die Summe der äußeren Einwirkungen der Summe der inneren Knotenpunktkräfte zu einem Zeitpunkt t exakt im Gleichgewicht stehen müssen.

Man spricht in diesem Zusammenhang von bereichsweiser Linearisierung eines nicht-linearen Systems. Die drei unterschiedlichen Arten von Lösungsverfahren bezeichnet man als **inkrementelle**, **iterative** und **gemischte** Verfahren. Im Folgenden werden die bekanntesten Verfahren näher erläutert.

4.2.2 Inkrementallösungen

Inkrementelles Verfahren

Die Inkrementallösung geht davon aus, dass für einen bestimmten Zeitpunkt t die Lösung bekannt ist und dass sie für den Zeitpunkt $t+\Delta t$ gesucht wird. Δt bezeichnet den Zuwachs der Zeit und stellt somit das Inkrement dar. In statischen Berechnungen gibt t die Laststufe an, d.h. die Lösung für eine bestimmte Last zur Zeit t wird zur Berechnung bei einer Lasterhöhung, bezeichnet mit Δt , verwendet.

Die Verschiebungen sind zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ exakt, wenn sie den gerade wirkenden Lasten entsprechen. Um dies zu überprüfen, müssten die ermittelten Knotenpunktkräfte in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt werden. Die Inkrementallösung sieht das jedoch nicht vor, so dass man keinerlei Kontrolle über die Genauigkeit der Näherungslösung hat. Innerhalb der nächsten Laststufe wird dann ohne Korrektur der Ergebnisse der angenäherten Lösung weiter gerechnet. Folgerichtig kann es leicht passieren, dass die berechnete Lösung von der tatsächlichen wegdriftet.

Es ist festzuhalten, dass das inkrementelle Verfahren sich nur bei Strukturen eignet, die geringe Nicht-Linearitäten aufweisen. Die Funktionen sollten möglichst stetig und differenzierbar sein. Sprünge und Knickpunkte sind also zu vermeiden, da diese durch die Inkrementallösung nicht erfasst werden können.

Bei stark nicht-linearen Problemen führt dieses Verfahren aufgrund des entstehenden Fehlers zu inakzeptablen Ergebnissen. Teilweise brechen Berechnungen wegen Divergenz sogar ganz ab.

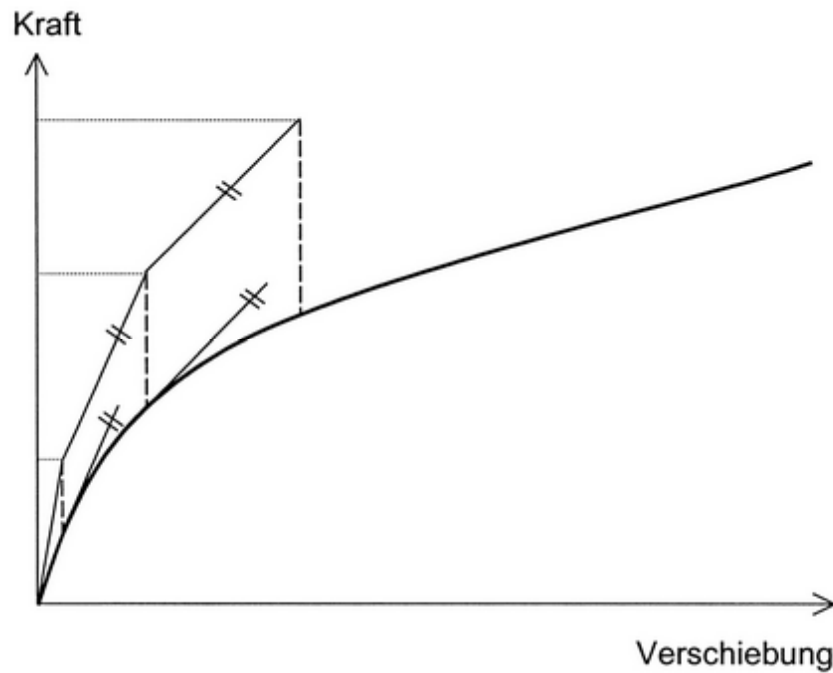


Abbildung 4-11 - Inkrementelles Verfahren

Inkrementelles Verfahren mit Gleichgewichtskorrektur

Die Modifikation, die dieses Verfahren im Gegensatz zum oben beschriebenen vorsieht, besteht darin, dass der während der inkrementellen Lösung entstandene Fehler als Zusatzlast auf das Lastinkrement addiert wird. Der Fehler wird trotz dieser Korrekturlast zwar nicht vollständig behoben, aber die Abweichungen von der exakten Lösung werden deutlich verringert (Abbildung 4-12).

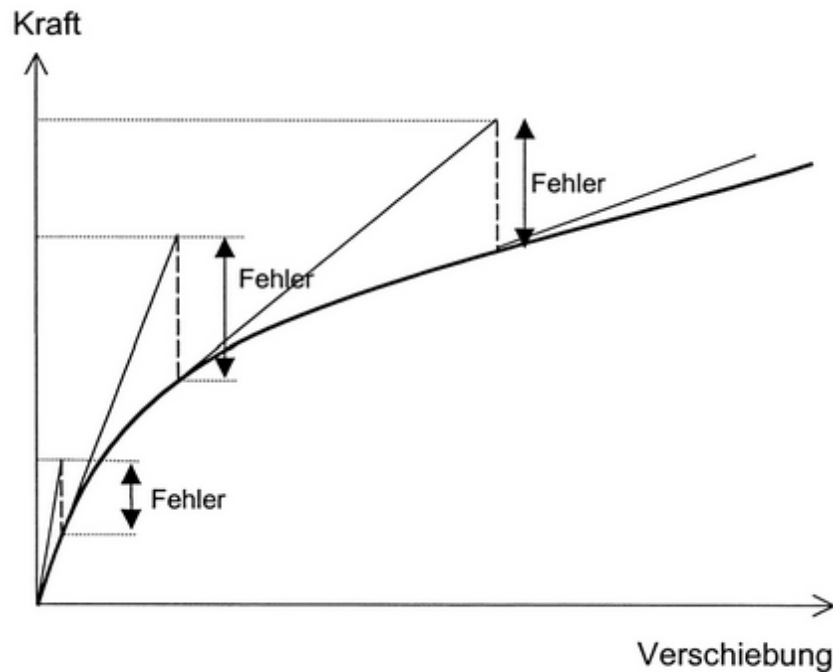


Abbildung 4-12 - Inkrementelles Verfahren mit Gleichgewichtskorrektur

4.2.3 Iterative Verfahren

(Standard) NEWTON-RAPHSON-Methode

Wie in der Überschrift zu diesem Abschnitt angedeutet, wird die NEWTON-RAPHSON-Methode zur besseren Unterscheidung zur Modifizierten (s.u. 4.2.3.2) auch mit dem Zusatz „Standard“ bezeichnet.

Die Finite-Elemente-Gleichgewichtsforderungen laufen darauf hinaus, die Lösung der Gleichung

$$f(\underline{U}^*) = 0 \quad (4.1)$$

zu finden. Diese Funktion stellt eine Fehlerfunktion mit der Variablen \underline{U}^* dar, die beim Erreichen des Gleichgewichtszustandes zu Null werden muss. Aus der Differenz zwischen Einwirkung und Widerstand erhält man Ungleichgewichtskräfte, die der Fehlerfunktion $f(\underline{U}^*)$ entsprechen.

$$f(\underline{U}^*) = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F(\underline{U}^*) = 0 \quad (4.2)$$

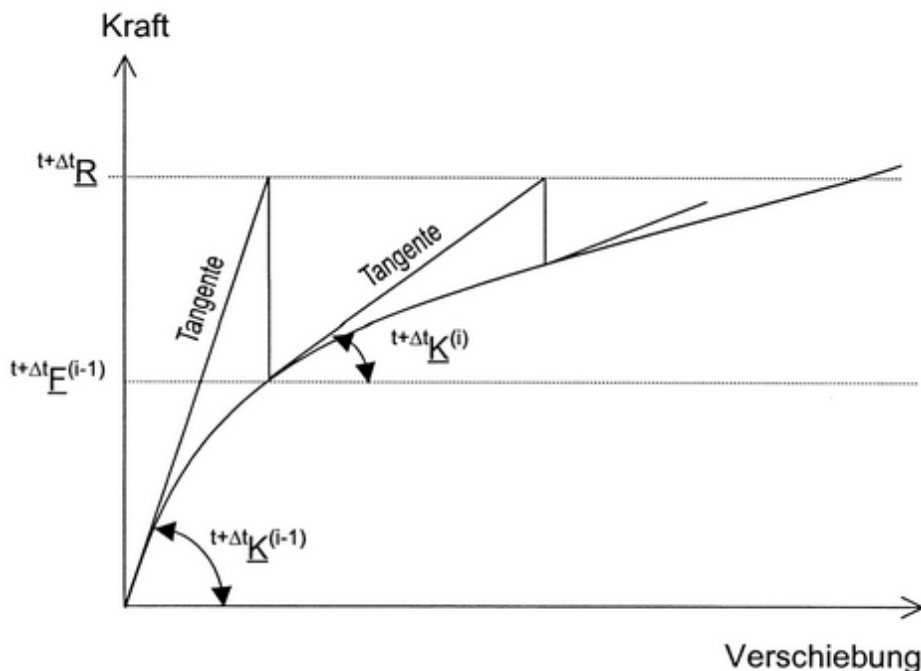


Abbildung 4-13 - (Standard) NEWTON-RAPHSON-Methode

Diese Ungleichgewichtskräfte müssen bis zum Erreichen des Gleichgewichtszustandes vom Tragwerk noch aufgenommen werden. Durch eine iterative Berechnung erfolgt der Abbau der Ungleichgewichtskräfte, so dass sich die Fehlerfunktion $f(\underline{U}^*)$ Null nähert.

Die inneren Knotenpunktkräfte sind von der Variablen \underline{U}^* , welche die Verschiebung definiert, abhängig, und somit ist die Funktion $f(\underline{U}^*)$ nicht-linear. Daher ist Gleichung (4.2) nicht direkt lösbar.

Durch eine TAYLOR-Reihenentwicklung der Funktion $f(\underline{U}^*)$ kann Gleichung (4.1) linearisiert und dadurch gelöst werden. Auf eine ausführliche Beschreibung der Entwicklung einer Funktion in eine TAYLOR -Reihe wird an dieser Stelle verzichtet und auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen.

Für die erste Iteration in einem Lastschritt lauten die Anfangsbedingungen:

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(0)} = {}^t\underline{U} \qquad {}^{t+\Delta t}\underline{F}^{(0)} = {}^t\underline{F} \qquad (4.3)$$

Wie bei der Inkrementallösung sind ${}^t\underline{U}$ und ${}^t\underline{F}$ bekannt.

Nun wird der Zuwachs des Verschiebungsvektors ${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)}$ im i -ten Iterationsschritt definiert:

$$\Delta\underline{U}^{(i)} = \underline{U}^* - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)} \qquad (4.4)$$

Unter der Voraussetzung, dass die äußeren Lasten nicht von den Verschiebungen abhängen, gilt:

$$\frac{\partial R}{\partial \underline{U}} \Big|_{t+\Delta t \underline{U}^{(i-1)}} = \underline{0} \quad (4.5)$$

Die äußere Belastung ist im Übrigen während der gesamten Iteration innerhalb eines Lastschrittes konstant.

Die inneren Knotenpunktkräfte sind jedoch von den Verschiebungen abhängig. Die Ableitung der Kräfte nach den Verschiebungen bezeichnet man als tangentielle Steifigkeitsmatrix:

$$\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \Big|_{t+\Delta t \underline{U}^{(i-1)}} = {}^{t+\Delta t} \underline{K}_T^{(i-1)} \quad (4.6)$$

${}^{t+\Delta t} \underline{K}_T^{(i-1)}$ ist die aktuelle tangentielle Steifigkeitsmatrix aus dem $(i-1)$ -ten Iterationsschritt, die als nicht-singulär angenommen wird. Sie berechnet sich aus:

$$\underline{K}_T = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (4.7)$$

Dies ist exakt die Gleichung, wie sie auch bei der globalen Steifigkeitsmatrix im linearen Bereich verwendet wird. Der einzige Unterschied besteht darin, dass im Gegensatz zum linearen Fall die Elastizitätsmatrix \underline{D}_e ersetzt wird durch die Matrix mit elastisch-plastischen Materialeigenschaften $\underline{D} = \partial \sigma / \partial \varepsilon$.

Es wird ersichtlich, dass dieses Verfahren auf einer Tangentennäherung basiert, wie auch in Abbildung 4-13 noch einmal verdeutlicht wird.

$\Delta \underline{U}^{(i)}$ wird mit Hilfe von Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme berechnet. Anschließend werden die gewählten Konvergenzkriterien überprüft. Werden die Grenzen für Konvergenz nicht eingehalten, muss ein weiterer Iterationsschritt erfolgen. Dieser hat als Ausgangswert den letzten Näherungswert der Knotenpunktverschiebung $\underline{U}^{(i)}$, um die Element-Spannungen und die Knotenpunktkräfte ${}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i)}$ zu ermitteln.

Modifizierte NEWTON-RAPHSON-Methode

Der Unterschied zur im vorhergehenden Abschnitt erläuterten Standardmethode ist, dass die tangentielle Steifigkeitsmatrix nur am Anfang einer Serie von Iterationsschritten neu aufgestellt wird.

Meist wird jedoch $m = 1$ gewählt, so dass die tangentielle Steifigkeitsmatrix nur am Anfang jedes Berechnungsschrittes neu formuliert wird, wie es in Abbildung 4-14 dargestellt ist. Innerhalb eines Lastinkrements bleibt die Steifigkeitsmatrix also konstant, die Steigung passt sich nicht an.

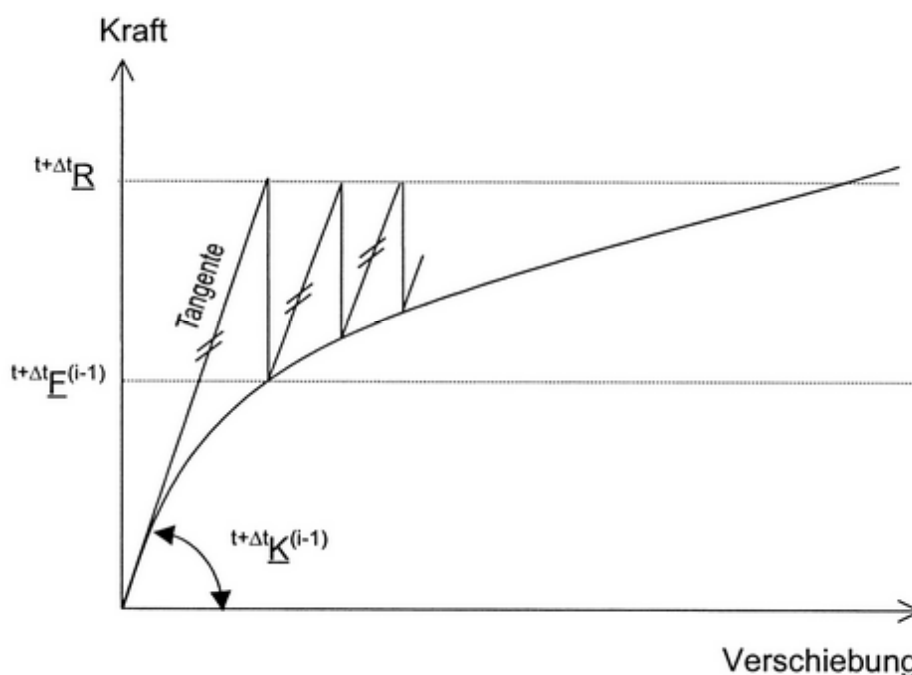


Abbildung 4-14 - Modifizierte NEWTON-RAPHSON-Methode

Dadurch kann der Rechenaufwand minimiert werden, da nicht bei jedem Iterationsschritt innerhalb der Lastinkremente die Steifigkeitsmatrix neu formuliert werden muss, wie bei der Standardmethode. Allerdings bedingt dies ein schlechteres Konvergenzverhalten, so dass mehr Iterationsschritte benötigt werden.

Bei stark nicht-linearen Problemen in Verbindung mit großen Lastschritten kann daher der Fall eintreten, dass sich höhere Rechenzeiten und eventuell ein Divergenzverhalten einstellen können. Dies ist dadurch bedingt, dass innerhalb eines Lastschrittes die Struktur eines Systems plötzlich anfangen kann zu plastizieren, die Tangente der Last-Verschiebungskurve dann aber für den folgenden Iterationsschritt zu steil ist.

Es gilt: $\frac{t+\Delta t \underline{K}}{i \underline{K}} = E_T / E$.

Wenn dieses Verhältnis gegen Null geht, müssen sehr viele Iterationsschritte durchgeführt werden, um Konvergenz zu erreichen.

Bei der Modifizierten NEWTON-RAPHSON-Methode besteht ein weiteres Problem dann, wenn die Ungleichgewichtskräfte während einer Lösung zunehmen. Dabei unterscheidet man zwei Auswirkungen auf das Materialverhalten.

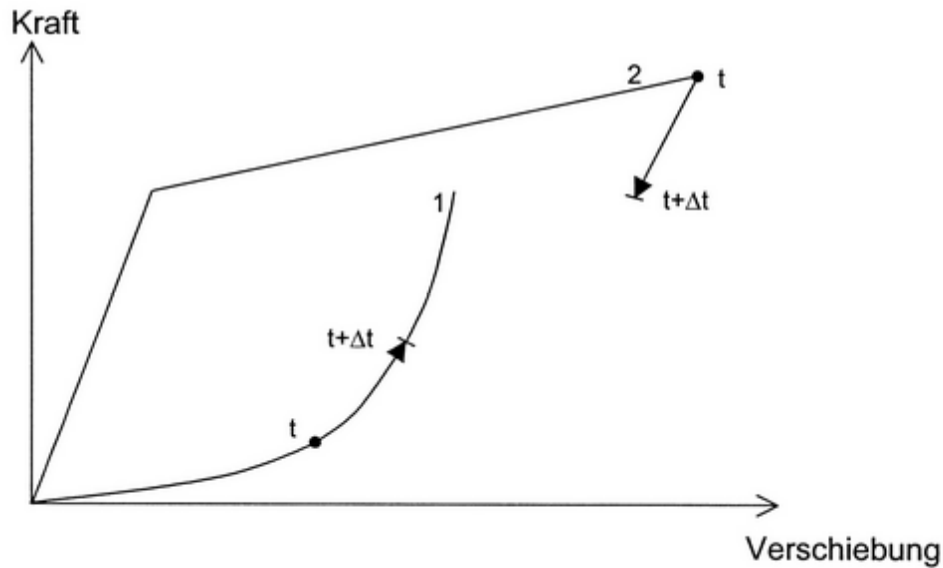


Abbildung 4-15 - Zu Divergenz führende Last-Verschiebungskurven

Bei der Berücksichtigung von geometrischen Nicht-Linearitäten kommt es zu einer langsamen Versteifung, wie in Abbildung 4-15 als Kurve 1 dargestellt. In der Folge müssen die Lastschritte verkleinert werden, um noch Konvergenz zu erlangen.

Kurve 2 (Abbildung 4-15) verdeutlicht die Probleme, welche sich ergeben, wenn eine Entlastung im nicht-linearen Bereich bei einem elastisch-plastischen Materialverhalten vorgenommen wird. Kleinere Lastschritte reichen hier nicht aus, um das Konvergenzverhalten wieder herzustellen. Zur Lösung des Problems muss die Steifigkeitsmatrix dadurch verbessert werden, dass sie auf Grundlage der elastischen Materialeigenschaften zum Zeitpunkt t neu aufgestellt wird und mit dieser dann weiter gerechnet wird.

Grundsätzlich können Probleme bei Systemen auftreten, die bei Belastung zuerst fast reine Biegezustände aufweisen und bei denen sich dann erst Membrananteile aufbauen, beispielsweise bei geraden Balken oder bei Platten mit Querlast. Auch im umgekehrten Fall treten Probleme auf, wie z.B. bei einem Dreiecksrahmen unter Einzellast.

Auch bei Verwendung von kleinen Lastschritten entstehen schon zu Anfang der Belastung Konvergenzschwierigkeiten, die erst bei zunehmender Kopplung der Wirkung verschwinden. Bei schwacher Nicht-Linearität eines Problems konvergiert die Iteration des modifizierten Verfahrens jedoch sehr schnell.

Sekanteniteration

Während bei den NEWTON-Verfahren die Tangente an die Last-Verschiebungskurve berechnet wurde, wird bei diesem Verfahren die Sekante ermittelt. Die Belastung kann in einem Schritt oder inkrementell aufgebracht werden, da bei jedem Berechnungsschritt mit der gesamten bereits vor-

handenen Belastung gerechnet wird. Folglich muss für jeden Iterationsschritt die (Sekanten-) Steifigkeitsmatrix aufgestellt werden.

Für den ersten Iterationsschritt ($i=1$) des Lastinkrementes ${}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^t\underline{R}$ gilt:

$$(\underline{K}_0 - \underline{K}_1 \times {}^t\underline{U}) \times \Delta\underline{U}^{(1)} = {}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^t\underline{R} \quad (4.8)$$

Dabei sind:

\underline{K}_0 : Tangentiale Steifigkeitsmatrix (linearer Anteil)

\underline{K}_i : Tangentiale Steifigkeitsmatrix (nicht-linearer Anteil)

Die Sekantengleichung ergibt sich zu:

$$\underline{K} = \frac{{}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^t\underline{R}}{\Delta\underline{U}^{(1)}} \quad (4.9)$$

Die Steifigkeit wird der Belastung angepasst und daraus wird das Verschiebungsinkrement berechnet. Im Gegensatz zu den anderen Iterationsverfahren werden weder Ungleichgewichtskräfte berechnet noch wird eine Tangente ermittelt.

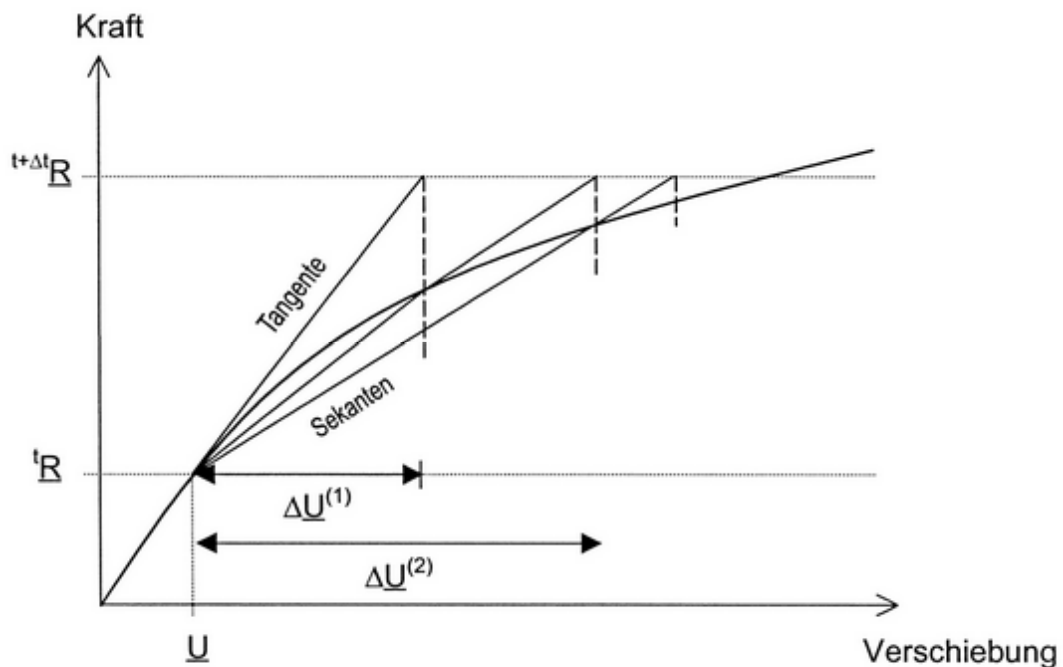


Abbildung 4-16 – Sekanteniteration

Bei der Sekantensteifigkeitsmethode konvergiert der Verschiebungszuwachs $\underline{DU}^{(i)}$ gegen das gesuchte \underline{DU} . Sie konvergiert im Allgemeinen langsamer als die beiden NEWTON-RAPHSON-Iterationen.

Quasi-NEWTONsche Verfahren

Diese Verfahren sind auch unter dem Begriff der „Methoden der Maximumrechnung“ bekannt. Sie wurden als eine Alternative zu den zuvor behandelten NEWTON-RAPHSON-Verfahren entwickelt. Sie sind ein Kompromiss zwischen dem Standard und dem Modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahren. Eingesetzt werden sie, um die numerische Effizienz des Iterationsprozesses zu verbessern.

Wie bei der Modifizierten NEWTON-RAPHSON-Methode wird zu Beginn der Iteration die Steifigkeitsmatrix einmalig aufgestellt. Bei jedem Iterationsschritt wird die Matrix dann „aufdatiert“, d.h. die Matrix wird im Verlauf der Iteration verbessert. Es wird somit ein kompletter Neuaufbau vermieden. Die Korrektur erfolgt auf der Grundlage der zurückliegenden Verformungsinckremente und der zugehörigen Ungleichgewichtskräfte, sowie einer wahrscheinlichen Lösungsrichtung. Dadurch wird ein sekantenförmiges Konvergenzverhalten erreicht.

Bei diesem Verfahren muss die Matrix ${}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i)}$ die Quasi-NEWTON-Gleichung erfüllen:

$${}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i)} \times \underline{\delta}^{(i)} = \underline{\gamma}^{(i)} \quad (4.10)$$

wobei der Verschiebungszuwachs $\underline{\delta}^{(i)}$ definiert ist durch

$$\underline{\delta}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} - {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)} \quad (4.11)$$

Der Zuwachs der Ungleichgewichtskräfte $\underline{\Delta R}$ ergibt sich zu

$$\underline{\Delta R} = \underline{\Delta R}^{(i-1)} - \underline{\Delta R}^{(i)} \quad (4.12)$$

Nach Gleichung (4.6) ist die tangentielle Steifigkeitsmatrix definiert als die Ableitung der Kräfte \underline{F} nach den Verschiebungen \underline{U} . Auch hier kann man durch Umformen von Gleichung (4.10) \underline{K} als Steigung ausdrücken:

$${}^{t+\Delta t}\underline{K}^{(i)} = \frac{\underline{\gamma}^{(i)}}{\underline{\delta}^{(i)}} \quad (4.13)$$

Zu den Quasi-NEWTON-Verfahren gehören unter anderem die BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNOSche oder kurz BFGS-Methode und die BROYDEN-Iteration. Sie sollen im Folgenden näher erläutert werden.

BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNOSche oder BFGS-Methode

Bei diesem Verfahren handelt es sich um ein so genanntes „Rang-zwei-Verfahren“, d.h. die aufdatierte Matrix ist vom Rang³⁶ zwei.

Der Ablauf einer Iteration wird in drei Schritte unterteilt:

Schritt 1: Zunächst ist für den Verschiebungsvektor der Zuwachs zu ermitteln. Durch die Berechnung von $\Delta \underline{U}$ wird eine Richtung für den gegenwärtigen Zuwachs festgelegt. Dieser Rechenschritt wird nur am Anfang eines neuen Lastinkrementes durchgeführt.

Bei den nächsten Iterationsschritten wird $\Delta \underline{U}$ nicht mehr mit der Ausgangssteifigkeit berechnet, da eine Aufdatierung der Steifigkeitsmatrix ermittelt wird.

Schritt 2: Die gesamte Verschiebung wird ausgedrückt durch:

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)} + \beta \Delta \underline{U} \quad (4.14)$$

Der skalare Faktor β ist zunächst unbekannt. Er kann mit Hilfe eines Suchalgorithmus bestimmt werden, indem ein Konvergenzkriterium eingehalten werden muss.

Schritt 3: Schließlich wird die Korrektur der Steifigkeitsmatrix vorgenommen, d.h. die Matrix wird *aufdatiert*. Dabei wird mittels eines Toleranzkriteriums überprüft, ob numerische Schwierigkeiten bei der Aufdatierung auftreten können.

Ist dies der Fall, werden zur Aufdatierung nur die Vektoren des vorangegangenen Iterationsschrittes herangezogen. Während einer vorgegebenen Anzahl von Iterationsschritten erfolgt die Aufdatierung der Steifigkeitsmatrix.

Ist diese Anzahl während der Berechnung erreicht, wird die Matrix neu aufgestellt und anschließend wieder aufdatiert.

³⁶ Rang einer Matrix = die maximale Anzahl an linear unabhängigen Spalten

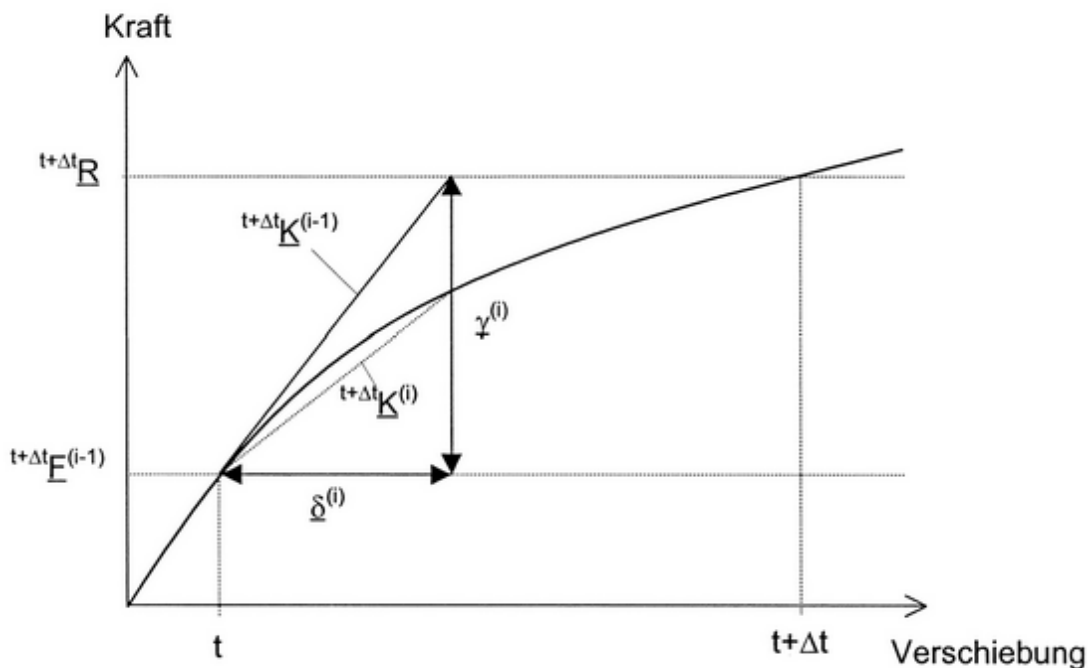


Abbildung 4-17 - BROYDEN-FLETCHER-GOLDFARB-SHANNOSche (/BFGS-)Iteration

Eine Konvergenz ist bei der BFGS-Iteration garantiert. Jedoch ist dafür eine große Anzahl an Iterationsschritten nötig. Konvergenzschwierigkeiten können auftreten, wenn das für Konvergenz zuständige Kriterium für den Suchalgorithmus **STOL** (s. 4.2.3.6.1) zu groß gewählt wurde oder eine Aufdatierung der Steifigkeitsmatrix nicht erfolgte.

Empfohlen wird **STOL = 0,5**.

Die BFGS-Methode wird für viele nicht-lineare Probleme als sehr geeignet und effektiv erachtet. Allerdings kann sie nur bei symmetrischen Steifigkeitsmatrizen angewandt werden. Bei nichtsymmetrischen und/oder nicht positiv definiten³⁷ Matrizen wird das BROYDEN-Verfahren empfohlen.

BROYDEN-Verfahren

Das BROYDEN-Verfahren unterscheidet sich von der BFGS-Iteration nur durch den Aufdatierungsalgorithmus.

Die Aufdatierungsmatrix berechnet sich zu:

$$\underline{A}^{(i)} = \underline{A}^{(i-1)} + \frac{(\underline{\gamma}^{(i)} - \underline{A}^{(i-1)} \times \underline{\delta}^{(i)}) \times \underline{\delta}^{(i)}}{\underline{\delta}^{(i)T} \times \underline{\delta}^{(i)}} \quad (4.15)$$

³⁷ **positiv definit** = Determinante einer Matrix M ist größer Null ($\det M > 0$)

Dabei ist die tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\underline{K}^{(i)} = \underline{K}^{(i)} \quad (4.16)$$

Um die gesuchten Verschiebungen auszurechnen, muss nach Gleichung (4.18) die Inverse von \underline{A} gebildet werden:

$$\Delta \underline{U} = \left[{}^{(t+\Delta t)}\underline{K}^{(i-1)T} \right] \times \Delta \underline{R}^{(i-1)} \quad (4.17)$$

Probleme treten auf, da die Matrix \underline{A} nicht symmetrisch und positiv definit sein muss. Es wurde folgende Formel [Sherman und Morrison] entwickelt, um \underline{A} zu invertieren:

$$\left(\underline{A}^{-1}\right)^{(i)} = \left(\underline{A}^{-1}\right)^{(i-1)} + \frac{\left(\underline{\delta}^{(i)} - \left(\underline{A}^{-1}\right)^{(i-1)} \times \underline{\gamma}^{(i)T}\right) \times \underline{\delta}^{(i)} \times \left(\underline{A}^{-1}\right)^{(i-1)}}{\underline{\delta}^{(i)T} \times \left(\underline{A}^{-1}\right)^{(i-1)} \times \underline{\gamma}^{(i)}} \quad (4.18)$$

Das BROYDEN-Verfahren ist vom Rang-Eins-Typ, d.h. die Aufdatierungsmatrix \underline{A} ist vom Rang eins.

Im Vergleich zur NEWTON-Iteration benötigt das BROYDEN-Verfahren deutlich weniger Rechenaufwand:

Für ein System mit n Gleichungen und n Unbekannten müssen bei der NEWTON-Iteration ($n^2 + n$) skalare Funktionsauswertungen und n^3 Rechenoperationen je Iteration durchgeführt werden.

Bei der BROYDEN-Iteration verringert sich der Aufwand zu n skalaren Funktionsauswertungen und n^2 Rechenoperationen je Iteration.

Optimierungsalgorithmen

Suchalgorithmus (*Line-Search* nach CRISFIELD)

Dieser Suchalgorithmus kann bei allen Iterationsverfahren verwendet werden. Er ist besonders bei großen Lastschritten und stark nicht-linearem Materialverhalten hilfreich, da bei derartigen Problemen die Konvergenzrate der verschiedenen Iterationsverfahren häufig sehr gering ist oder teilweise sogar Divergenz auftritt.

Bei allen Iterationsverfahren ist die gesuchte Knotenpunktverschiebung zu ermitteln:

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(i-1)} + \beta \Delta \underline{U} \quad (4.19)$$

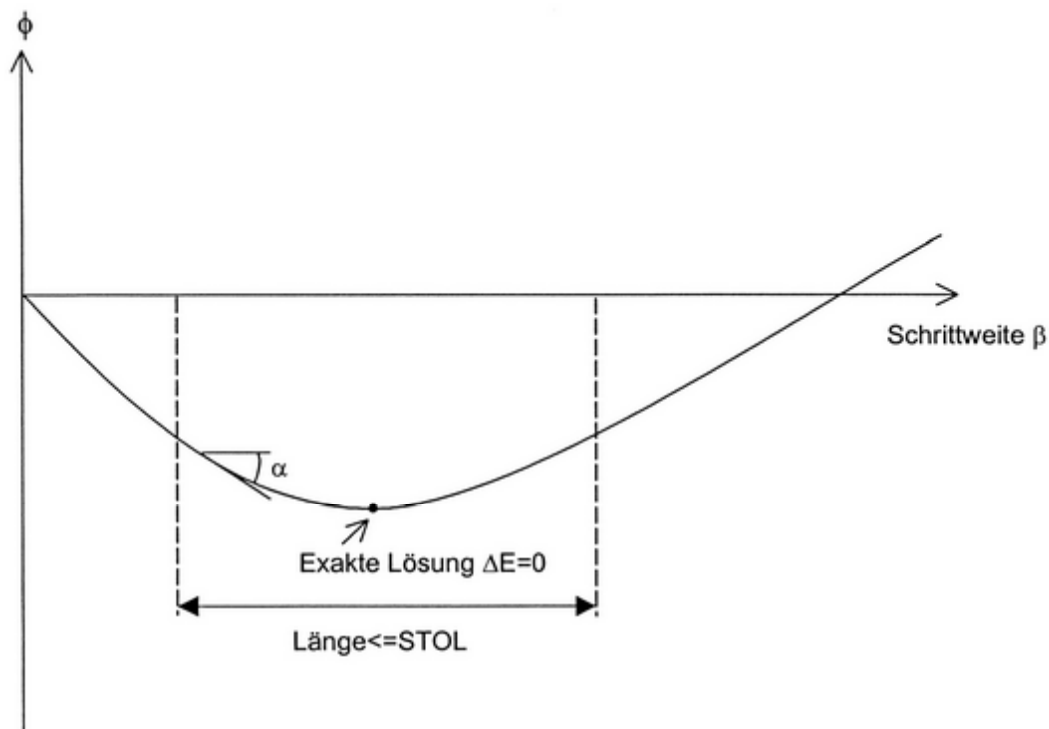


Abbildung 4-18 - Line-Search

Mit $\Delta \underline{U}$ wird hier die Richtung festgelegt, in der *linienhaft* gesucht werden muss, um Gleichgewicht zu erreichen:

$$\Delta \underline{U} = \left[{}^{t+\Delta t} \underline{K}_T^{(i-1)} \right]^{-1} \times \left({}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i-1)} \right) \quad (4.20)$$

Der skalare Faktor β aus Gleichung (4.19) wird als **Dämpfungsfaktor** oder **Schrittweite** bezeichnet. β „dämpft“ sozusagen die negative Auswirkung eines schlechten Startwertes auf die Konvergenz, wenn beispielsweise ein großer Lastschritt gewählt wurde.

Soll eine Iteration ohne Suchalgorithmus ausgeführt werden, setzt man $\beta = 1$. Allgemein geht man zur Bestimmung von β so vor, dass man den Faktor solange variiert, bis die Restenergie ΔE zu Null wird. Diese Restenergie wird über das Skalarprodukt aus dem Zuwachs der Verschiebungen und den Ungleichgewichtskräften definiert:

$$\Delta \underline{E} = \Delta \underline{U}^T \times \left({}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i)} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Sie kann aber auch über den Quotienten aus der potentiellen Energie ϕ und β berechnet werden.

$$\Delta \underline{E} = \frac{\delta \phi}{\delta \beta} \quad (4.22)$$

wobei sich die potentielle Energie aus einer TAYLOR-Reihenentwicklung von $\phi^{(i)}(\beta + \Delta\beta)$ ergibt.

In Gleichung (4.22) wird die Restenergie durch eine Steigung ausgedrückt. Diese lässt sich immer auch durch die Beziehung $\tan\alpha$ definieren. Wird nun der Winkel α , also die Steigung Null, ist Gleichung (4.21) erfüllt. Allerdings ist die Forderung, dass die Restenergie verschwinden soll, unwirtschaftlich, so dass eine Konvergenztoleranz eingeführt wird, welche die folgende Bedingung erfüllen muss:

$$\Delta \underline{U}^T \times \left({}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i)} \right) \leq STOL \Delta \underline{U}^T \times \left({}^{t+\Delta t} \underline{R} - {}^{t+\Delta t} \underline{F}^{(i-1)} \right) \quad (4.23)$$

In der Literatur wird meist **STOL = 0,5** empfohlen. Es existieren aber auch Angaben mit **STOL = 0,8**. Abbildung 4-18 verdeutlicht (graphisch) die Ermittlung von β .

Grundsätzlich ist dieser Algorithmus für zyklische Belastung sehr hilfreich. Er verbessert die Konvergenzgeschwindigkeit besonders bei der Modifizierten NEWTON-RAPHSON-Iteration erheblich. Einen vollkommenen Schutz vor divergentem Verhalten bietet er allerdings nicht.

Automatische Schrittweitenfindung

Bei diesem Verfahren muss die Lastgeschichte nicht im Voraus angegeben werden, sondern das FE-Programm errechnet sich anhand des jeweils vorliegenden Systems und dessen Verhaltens eigenständig die äußeren Lastvektoren. Es findet also selbsttätig den nächsten Lastschritt.

Der Algorithmus basiert auf der Extrapolation vom bereits ermittelten Verlauf der Last-Verschiebungskurve, welche mittels der Funktion ${}^m \underline{U} = f({}^m \underline{R})$ definiert ist, wobei m hier die Laststufe bezeichnet.

Ausgehend vom ersten linearisierten Lastschritt, der wie bisher mit einem vorgegebenen Lastinkrement berechnet wurde, ist die Abweichung $\Delta \underline{U}^{(i)}$ des Verschiebungszuwachses $\underline{U}^{(i)}$ bekannt. Beschränkt man die TAYLOR-Reihenentwicklung auf den quadratischen Term, folgt für $\Delta \underline{U}^{(i)}$:

$$\Delta \underline{U}^{(i)} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f({}^m \underline{R})}{\partial {}^m \underline{R}^2} \times \underline{R}^2 \quad (4.24)$$

$\Delta \underline{U}^{(i)}$ kann als eine Art Fehler betrachtet werden, der proportional zur Krümmung (2. Ableitung) der Last-Verschiebungsfunktion f ist. Der Lastschrittverlauf muss sich demnach also dieser Funktion anpassen.

Abbildung 4-19 zeigt beispielhaft die Extrapolation aus drei bereits errechneten Stützstellen (mittels eines Extrapolationspolynoms 2. Ordnung).

Es ist allerdings auch die Multiplikation der Schrittweite mit einem konstanten Faktor möglich:

$$\underline{R}^{(i)} = \alpha \times \underline{R}^{i-1} \quad (4.25)$$

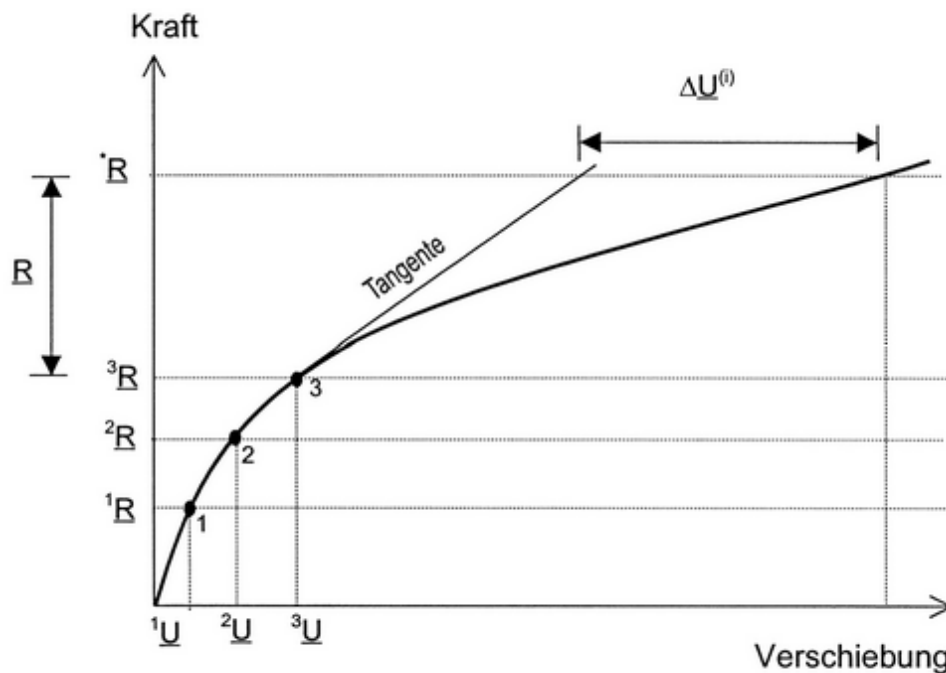


Abbildung 4-19 - Automatische Schrittweitenfindung

$\alpha < 1$ bedeutet hierbei eine Zunahme der Abweichung vom linearen Fall, während $\alpha > 1$ eine abnehmende Abweichung darstellt.

4.2.4 Verformungsgesteuerte Berechnung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die vorgestellten Verfahren auf Grundlage einer lastgesteuerten Berechnung erläutert. Es besteht jedoch ebenfalls die Möglichkeit, die Last verformungsgesteuert aufzubringen.

Der Nachteil einer lastgesteuerten Berechnung ist, dass das jeweils verwendete Verfahren unabhängig vom gewählten Iterationsalgorithmus versagt, wenn die vorgegebene Last nicht ins Gleichgewicht mit den (inneren) Schnittgrößen des Systems gebracht werden kann. Dies geschieht immer dann, wenn die aufgebrachte Last die maximale Tragfähigkeit des Systems überschreitet. Die Verschiebungen und Dehnungen werden extrem groß, so dass in der Folge der Iterationsprozess oszilliert oder divergiert.

Im Forschungsbereich ist es jedoch meist von größter Wichtigkeit, die Versagenslast eines Bauteils (und somit die Tragfähigkeit eines Werkstoffes) ermitteln und die zugehörigen Verschiebungen bestimmen zu können.

Divergenz ist dabei ein Anzeichen dafür, dass ein Bauteil in einem Lastschritt versagt. Sie kann jedoch auch aus numerischen Schwierigkeiten herrühren, so dass sie nicht zwangsläufig mit einem Versagen des Bauteils einhergeht.

Es müssen daher Verfahren Verwendung finden, welche eine Weiterführung der Last-Verschiebungskurve nach Überschreiten der Tragfähigkeit ermöglichen, um Auskünfte über das Verhalten des Bauteils nach dem Versagen erhalten zu können.

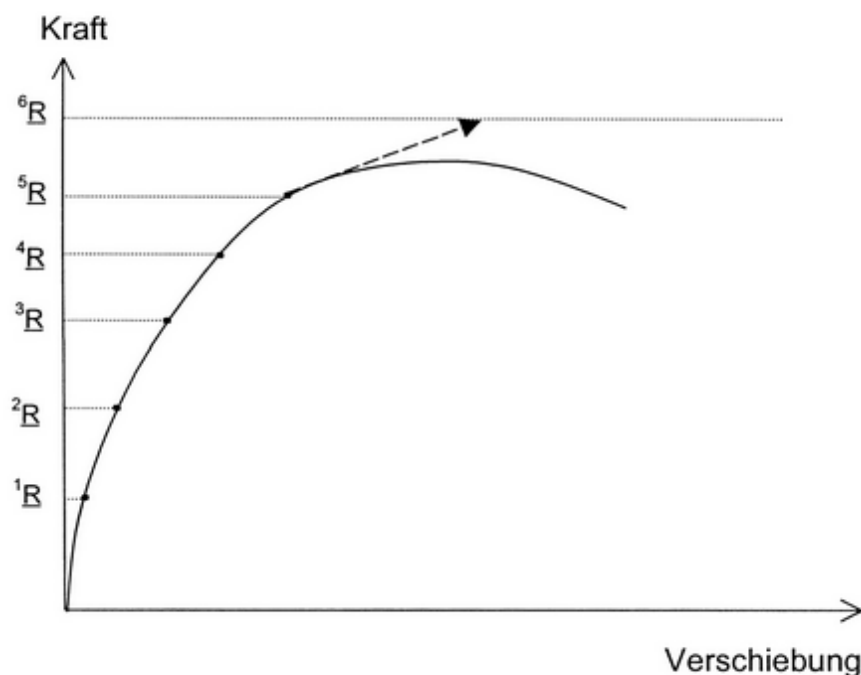


Abbildung 4-20 - Divergenz bei lastgesteuerter Berechnung

Die genannten Probleme werden mit der verformungsgesteuerten Berechnung gelöst. Es werden hierbei an der Lasteinleitungsstelle äquivalente Verschiebungen vorgegeben, z.B. über ein zusätzliches, verschiebliches Auflager. Die infolgedessen auf das System einwirkende Kraft wird über die dort auftretende Auflagerreaktion ermittelt. Somit ist es möglich, das Gleichgewicht zum Versagenszeitpunkt einzuhalten und Verformungen nach Überschreiten der Versagenslast zu berechnen.

Bei der numerischen Umsetzung werden die Knotenpunktverschiebungen in zwei Gruppen eingeteilt: die unbekanntes Knotenpunktverschiebungen und die vorgegebenen Verschiebungen. Der Verschiebungsvektor wird in die beiden Anteile unterteilt: $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2\}^T$. Gleiches gilt für die äußeren $\{\underline{R}_1, \underline{R}_2\}^T$ und die inneren Kräfte $\{\underline{F}_1, \underline{F}_2\}^T$.

Die äußeren Kräfte \underline{R}_1 , die zu den unbekanntes Knotenpunktverschiebungen gehören, werden vereinfachend zu Null gesetzt, während die äußeren Kräfte, die auf den Träger wirken, die Reaktionskräfte \underline{R}_2 in den Lagern sind, welche aus den Verschiebungen \underline{U}_2 resultieren.

Das Gleichgewicht ergibt sich somit zu:

$$\underline{F}_1(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = 0 \tag{4.26}$$

$$\underline{F}_2(\underline{U}_1, \underline{U}_2) = \underline{R}_2 \tag{4.27}$$

\underline{U}_2 wird vorgegeben, so dass die unbekannt Verschiebungen \underline{U}_1 aus Gleichung (4.26) ermittelt und in der Folge die inneren Knotenpunktkräfte \underline{F}_2 mittels Gleichung (4.27) bestimmt werden können.

Im aktuellen Lastschritt $t+\Delta t$ sind die Verschiebungen ${}^t\underline{U}_1$ und ${}^t\underline{U}_2$ aus dem letzten Lastschritt t bekannt. Somit ergibt sich:

$${}^t\underline{F}_1 + {}^t\underline{K}_{11} \times \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_1 + {}^t\underline{K}_{12} \times \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_2 = \underline{0} \quad (4.28)$$

K_{11} und K_{12} sind Komponenten der tangentialen Steifigkeitsmatrix.

Das Inkrement der Verschiebungen \underline{U}_2 ist schon im Voraus bekannt, so dass gilt:

$$\Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_2^{(1)} = \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_2 = {}^{t+\Delta t}\underline{U}_2^{(1)} - {}^t\underline{U}_2 \quad (4.29)$$

Dies wird in Gleichung (4.28) eingesetzt:

$${}^t\underline{K}_{11} \times \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(1)} = -{}^t\underline{F}_1 - {}^t\underline{K}_{12} \times \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_2 \quad (4.30)$$

Jetzt kann ${}^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(1)}$ berechnet werden und in die folgenden Näherungsgleichungen eingesetzt:

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(1)} = {}^t\underline{U}_1 + \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(1)} \quad (4.31)$$

$${}^{t+\Delta t}\underline{U}_2^{(1)} = {}^t\underline{U}_2 - \Delta^{t+\Delta t}\underline{U}_2^{(1)} = {}^{t+\Delta t}\underline{U}_2 \quad (4.32)$$

Im Bereich $({}^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(1)}, {}^{t+\Delta t}\underline{U}_1^{(2)})$ ist Gleichung (4.26) jetzt linearisiert, da die Korrekturen der Verschiebungen \underline{U}_1 jetzt berechnet sind. Diese Vorgehensweise wird solange wiederholt bis die Konvergenzkriterien eingehalten sind.

4.2.5 Bogenlängenverfahren

Dieses Verfahren, welches oft auch als „Kurvenverfolgungsverfahren“ bezeichnet wird, eignet sich zum Überwinden kritischer Punkte in Fällen, in denen nicht alle Stellen in einem Bauteil die gleiche Verschiebung erfahren. Diese Voraussetzung muss bei der im vorangegangenen Abschnitten vorgestellten verformungsgesteuerten Berechnung gegeben sein.

Voraussetzung zur Anwendung dieses Verfahrens ist es, alle Kraftkomponenten, die auf ein System einwirken, mit Hilfe eines Lastparameters beschreiben zu können. Die Freiheitsgrade eines Systems sind dann alle Verschiebungen sowie der Lastparameter. Ein Lösungskrement ist dann gleichzeitig abhängig von einem Last- bzw. einem Verschiebungsanteil. In Abhängigkeit von der Lage der Lösungskurve werden dann der Belastungs- und der Verschiebungszustand iterativ korrigiert.

Als Erstes wird ein globaler Lastfaktor λ eingeführt. Dieser beschreibt den aktuellen Belastungszustand eines Systems:

$$\lambda^{(i)} = t+\Delta t \lambda^{(i)} - t \lambda \quad (4.33)$$

$$\Delta \lambda^{(i)} = t+\Delta t \lambda^{(i-1)} - t+\Delta t \lambda^{(i)} \quad (4.34)$$

Einfluss auf die Art des Lösungsverfahrens erhält man durch Einfügen einer Nebenbedingung. Mit den Gleichungen (4.33) und (4.34) erhält man zuerst folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} t+\Delta t \underline{K}_T^{(i)} & t+\Delta t \lambda^{(i-1)} \\ \underline{f}_U^{(n)T} & f_\lambda^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+\Delta t \underline{R} - t+\Delta t \underline{F}^{(i)} \\ f^{(i)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$f^{(i)}$ dient hierbei als Nebenbedingung zur Beschreibung der Korrekturiteration.

Nach WESSELS wird eine Iteration auf Normalenebene vorgeschlagen. Innerhalb eines Iterationsschrittes (i) werden die beiden Teillösungen ermittelt:

$$\underline{U}^{(i)I} = [t+\Delta t \underline{K}_T^{(i)}]^{-1} \times [t+\Delta t \underline{R} - t+\Delta t \underline{F}^{(i)}] \quad (4.36)$$

$$\underline{U}^{(i)II} = [t+\Delta t \underline{K}_T^{(i)}]^{-1} \times [\lambda^{(i)} t+\Delta t \underline{R}] \quad (4.37)$$

Anschließend werden sie zum Gesamtverschiebungsincrement zusammengefasst:

$$\underline{U}^{(i)} = \underline{U}^{(i)I} + \Delta \lambda^{(i)} \underline{U}^{(i)II} \quad (4.38)$$

Jetzt wird das Lastniveau um das Inkrement des Lastparameters mit Hilfe der Nebenbedingung (4.35) (zweite Gleichung) reduziert:

$$\Delta \lambda^{(i)} = \frac{f^{(i)} + \underline{f}_U^{(n)T} \underline{U}^{(i)I}}{f_\lambda^{(i)} \lambda^{(1)} + \underline{f}_U^{(n)T} \underline{U}^{(i)II}} \quad (4.39)$$

Die Korrektorschritte erfolgen auf einer zum vorgegebenen Prädikatorschritt senkrechten Ebene:

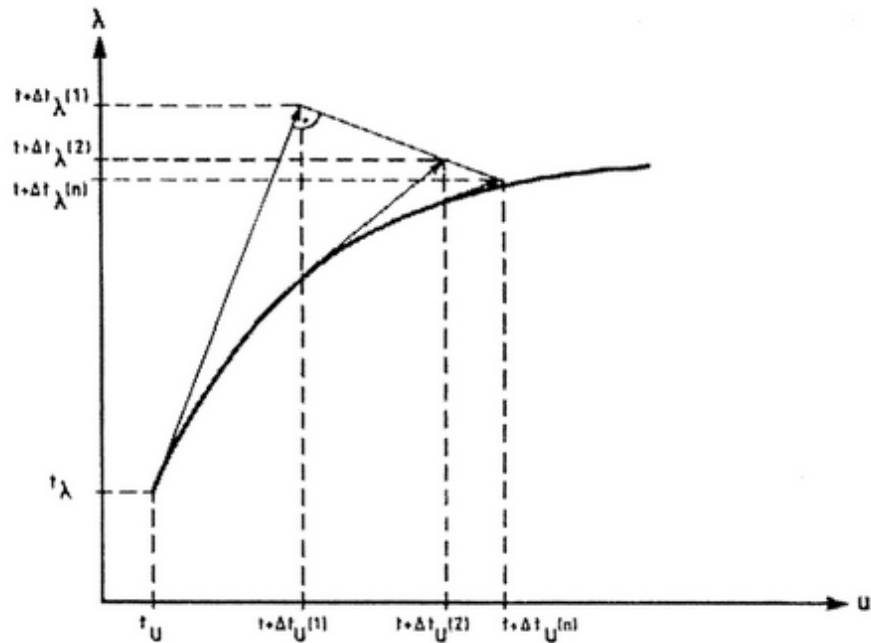


Abbildung 4-21 - Bogenlängenverfahren – Iteration auf einer Normalenebene

Die Normalenebene wird, wie in Abbildung 4-21 gezeigt, während der weiteren Iterationen nicht verändert. Es kann jedoch auch eine Neuberechnung der Normalenebene in jedem Iterationsschritt abhängig von der jeweiligen Tangente erfolgen:

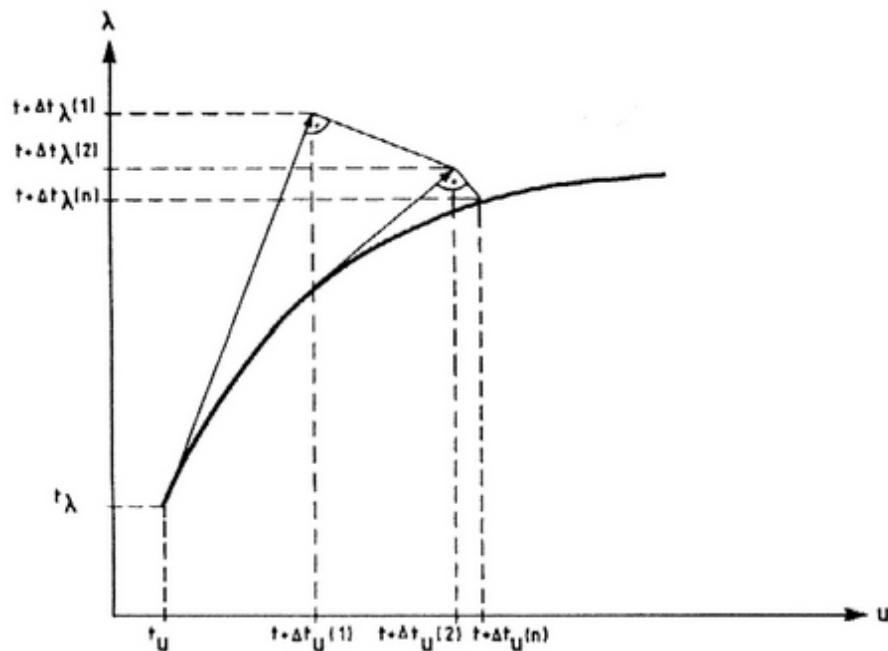


Abbildung 4-22 - Bogenlängenverfahren – Iteration auf einer mittels Tangente aktualisierten Normalenebene

Des Weiteren ist die Verwendung der modifizierten NEWTON-Iteration in der ersten Zeile von Gleichung (4.35) möglich. Die Tangente wird dabei nur im ersten Iterationsschritt neu berechnet und dann beibehalten:

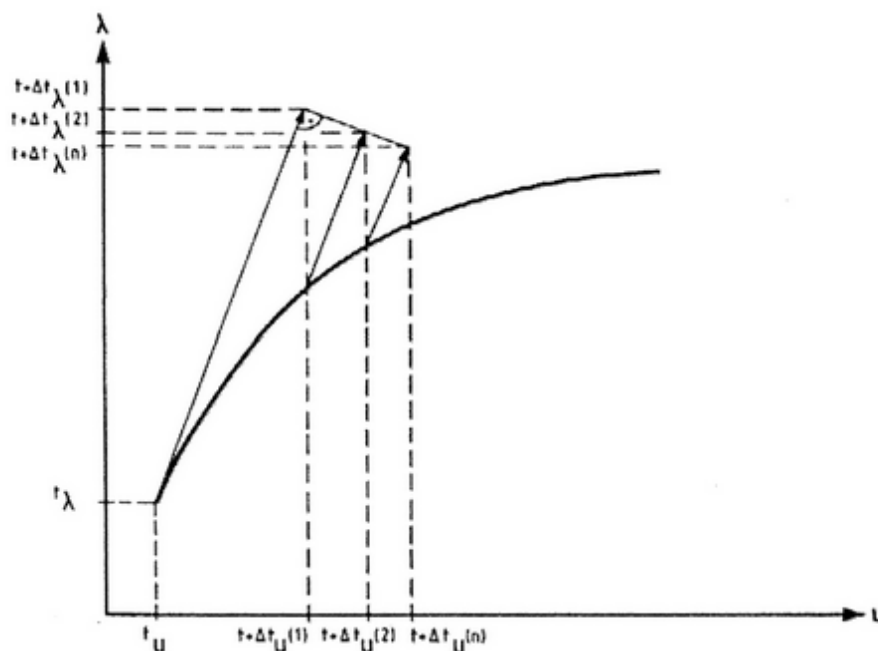


Abbildung 4-23 - Bogenlängenverfahren – Iteration auf einer modifizierten Normalenebene

4.2.6 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Allgemeines

Wie bereits erwähnt, besteht das grundlegende Prinzip der nicht-linearen Finite-Elemente-Berechnung darin, dass ein nicht-lineares auf ein lineares System zurückgeführt, also *linearisiert*, wird.

Die Lösung solcher linearisierter Gleichungssysteme hängt von den Koeffizienten der tangentialen Steifigkeitsmatrix \underline{K} ab. Es existieren viele unterschiedliche Verfahren, wobei hier nur auf die am häufigsten vorkommenden Algorithmen eingegangen werden soll.

Ist die Steifigkeitsmatrix positiv definit³⁸, wie es beispielsweise bei der BFGS-Iteration zwingend erforderlich ist, bietet sich das Verfahren nach CHOLESKY an. Der Vorteil dieses Verfahrens, etwa verglichen mit der GAUSS-Zerlegung, liegt in dessen hoher numerischer Stabilität. Außerdem sind weniger Punkt-Operationen nötig.

Ist die Matrix \underline{K} jedoch indefinit, können bei der Zerlegung auch imaginäre Zahlen auftreten, so dass der Rechenaufwand erheblich ansteigt. Innerhalb der BROYDEN-Iteration könnte dieser Fall

³⁸ positiv definit = $\det K > 0$

auftreten, da dort keine Beschränkung auf positiv definite Steifigkeitsmatrizen besteht. Hier bietet sich unter anderem die GAUSS-Zerlegung als Lösungsalgorithmus an.

Allgemein ist nach jedem (Neu-)Aufstellen der tangentialen Steifigkeitsmatrix ein lineares Gleichungssystem (LGS) zu lösen, im Falle des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens also in jedem Iterationsschritt i das LGS: $\underline{K}_T(v_i) \Delta v_{i+1} = -\underline{G}(v_i)$.

Dieses LGS ist in den meisten Fällen symmetrisch, kann aber bei bestimmten Problemstellungen in Verbindung mit inelastischen Materialien, verformungsabhängigen Lasten oder Reibkontakt auch unsymmetrisch sein.

Im Wesentlichen unterscheidet man in **direkte** und **iterative Löser**.

Direkte Gleichungslöser

Zu den direkten Verfahren zählen die folgenden Algorithmen:

- GAUSSsche Elimination
- CHOLESKY-Zerlegung
- Frontlöser
- Sparse-Löser
- Blockeliminationsmethoden

Grundsätzlich nutzen die Verfahren sowohl die (meist vorhandene) Bandstruktur als auch die schwache Besetztheit der Matrix \underline{K} aus. Des Weiteren verwenden die Algorithmen Band- oder Profilspeichertechniken, um nur Nicht-Null-Elemente zu speichern und somit den Speicherbedarf zu begrenzen.

Werden die Gleichungssysteme zu groß und passen nicht in den Arbeitsspeicher eines Computersystems, kommen Blockeliminationstechniken oder Frontlösungsmethoden zum Einsatz, da diese nur einen Teil des Gleichungssystems im Arbeitsspeicher bearbeiten und es schrittweise lösen.

Der Vorteil der direkten Verfahren liegt bei nicht-linearen FE-Berechnungen darin, dass auch für schlecht konditionierte Systeme eine Lösung gefunden wird, wenn die Kondition des Gleichungssystems nicht so schlecht wird, dass Rundungsfehler die Lösung verfälschen. Der Nachteil der direkten Verfahren liegt in dem Aufwand, den sie für die Lösungsfindung betreiben müssen. Bei n Unbekannten und der Band- oder Profildbreite b einer Matrix hat der Aufwand die Ordnung $n \cdot b^2$. Vor allem bei dreidimensionalen Systemen ergeben sich dadurch sehr lange Rechenzeiten.

Iterative Gleichungslöser

Auch die iterativen Gleichungslöser nutzen die Tatsache aus, dass es sich bei den großen Matrizen während der Behandlung von Problemen mit der FEM um schwach besetzte Matrizen handelt. Hierbei kommt die Kompaktspeichertechnik zum Einsatz, die prinzipbedingt nur in Verbindung mit den iterativen Lösern verwendet werden kann. Es muss allerdings unterschieden werden, ob es sich um symmetrische oder unsymmetrische Koeffizientenmatrizen handelt.

1. Verfahren für symmetrische Matrizen:

- Methode der konjugierten Gradienten (**CG-Methoden**) für positiv definite Gleichungssysteme
- **LANCZOS**-Algorithmus
- **JACOBI**- oder **Überrelaxations**-Verfahren
- **Multigrid**-Methoden

2. Verfahren für unsymmetrische Matrizen:

- Verfahren der **bi-konjugierten** Gradienten
- **GMRES**-Verfahren
- **CGSTAB**-Algorithmus

Auf die Algorithmen soll hier nicht näher eingegangen werden. Es ist nur zu erwähnen, dass sie insgesamt bei großen, also insbesondere dreidimensionalen Systemen sehr gut geeignet sind, da Speicherbedarf und Rechenaufwand geringer sind als bei den direkten Lösern. Die Voraussetzung für eine effiziente Berechnung allerdings besteht darin, dass geeignete **Vorkonditionierer** gefunden werden müssen, die so konstruiert sind, dass die Anzahl der für die Gleichungslösung benötigten Iterationen gering ist und mit wachsender Zahl der Unbekannten nicht zunimmt.

Der optimale Fall – der jedoch so gut, wie nie eintritt – ist ein Aufwand der Ordnung n (bei n Unbekannten).

4.3 Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien sind notwendig zur Steuerung der Iteration. Mit ihrer Hilfe kann die Güte der Ergebnisse nach dem i -ten Iterationsschritt bewertet werden. Es wird also festgestellt, ob Gleichgewicht erreicht wurde oder ob die Berechnung eventuell divergiert.

Da die korrekte Lösung nicht vorher (oder auch niemals) bekannt ist, müssen Kriterien Verwendung finden, die das Erreichen eines hinreichend genauen Ergebnisses anzeigen. Es ist dabei zu

beachten, dass die Konvergenztoleranzen nicht zu weit gefasst sind, da ansonsten zu ungenaue Ergebnisse erzielt werden.

Bei zu eng gewählten Konvergenztoleranzen wiederum erhöht sich der Rechenaufwand, so dass viel Zeit darauf verwendet werden muss, eine (meist) unnötige Genauigkeit zu erreichen. Dies ist in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Näherungscharakter einer FE-Lösung zu sehen. Die Ergebnisse einer genaueren Rechnung nähern sich nur besser der exakten Lösung an.

Die Konvergenzkriterien lassen sich in die Kategorien Verschiebungs-, Kraft- und Energiekriterium einteilen.

4.3.1 Verschiebungskriterium

Alle Iterationsverfahren haben das Ziel der Berechnung des Verschiebungszustandes zur Zeit $t+\Delta t$. Daher sollten sich alle Verschiebungen am Ende jeder Iteration innerhalb einer gewissen Toleranz in der Nähe der wirklichen Verschiebung befinden. Mit ϵ_D als Konvergenztoleranz für die Verschiebung(en) ergibt sich:

$$\frac{\|\Delta \underline{U}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\underline{U}\|_2} \leq \epsilon_D \quad (4.40)$$

Hierbei bedeutet das Konstrukt $\| \dots \|$ die Euklidische Norm des jeweiligen Vektors, die wiederum dem Betrag des Vektors entspricht. Somit kann der Abstand zur Konvergenztoleranz ϵ_D berechnet werden. Für einen beliebigen Vektor mit n Dimensionen gilt:

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad (4.41)$$

Der Vektor ${}^{t+\Delta t}\underline{U}$ ist nicht bekannt. Daher wird für ihn eine Näherung angenommen, indem der letzte berechnete Wert ${}^{t+\Delta t}\underline{U}^{(j)}$ in Gleichung (4.40) eingesetzt wird.

Es ist allerdings darauf zu achten, dass bei der vorherrschenden progressiven Kraft-Verschiebungs-Beziehung kleine Änderungen in den Verschiebungen große Änderungen der Kräfte verursachen. Bei einem verhärtenden Material (s.u. Abbildung 4-24) besteht daher die Möglichkeit, dass das Verschiebungskriterium zwar erfüllt wurde, die Kräfte aber dennoch große Fehler aufweisen. In elasto-plastischen Berechnungen nehmen die Verschiebungen in jedem Iterationsschritt nur wenig zu. Über viele Iterationen hinweg betrachtet ergibt sich ein Zuwachs. In solchen Fällen ist es durchaus sinnvoll, zusätzlich ein Kräftekriterium einzuführen.

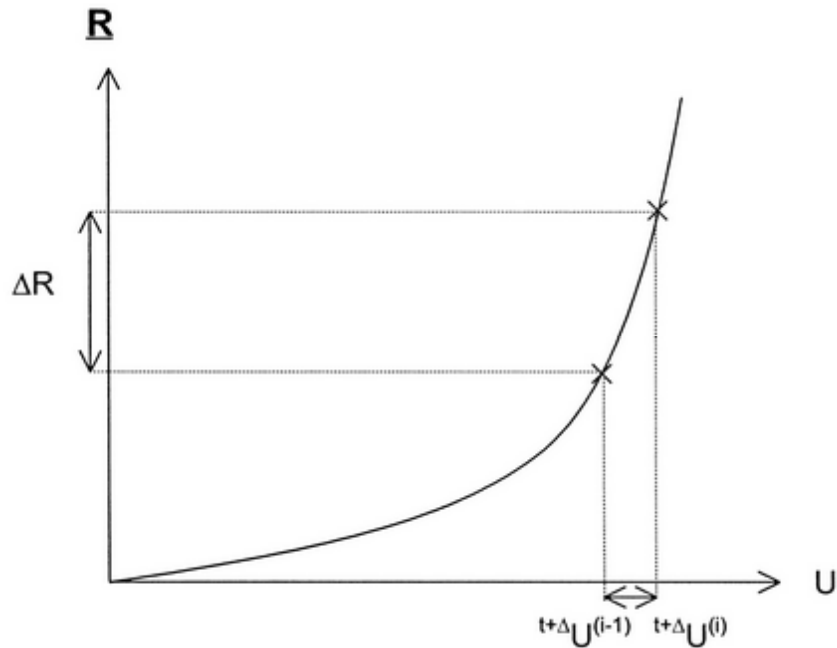


Abbildung 4-24 - Verhärtendes Material

4.3.2 Kräftekriterium

Im Rahmen dieses Kriteriums wird die Norm der Ungleichgewichtskräfte mit der Norm der Laständerungen verglichen. Die vorgegebene Toleranz wird mit ϵ_F bezeichnet:

$$\frac{\|{}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^{t+\Delta t}\underline{F}^{(i)}\|_2}{\|{}^{t+\Delta t}\underline{R} - {}^t\underline{F}\|_2} \leq \epsilon_F \quad (4.42)$$

Unterschiedliche Dimensionen der Größen (z.B. Kräfte oder Momente) können zu Problemen führen, da sie jeweils ein vollkommen unterschiedliches Verformungsverhalten des Systems zur Folge haben.

Bei einem elasto-plastischen Materialverhalten mit einem sehr kleinen Verzerrungsverfestigungsbereich, wie er bei einem erweichenden Material auftritt (s.u. Abbildung 4-25), ist dieses Konvergenzkriterium unzureichend. In einem solchen Fall können die Ungleichgewichtskräfte sehr klein werden, während die Verschiebungen sich stark ändern. Es ist daher analog zu 4.3.1 ein Verschiebungskriterium hinzu zu ziehen.

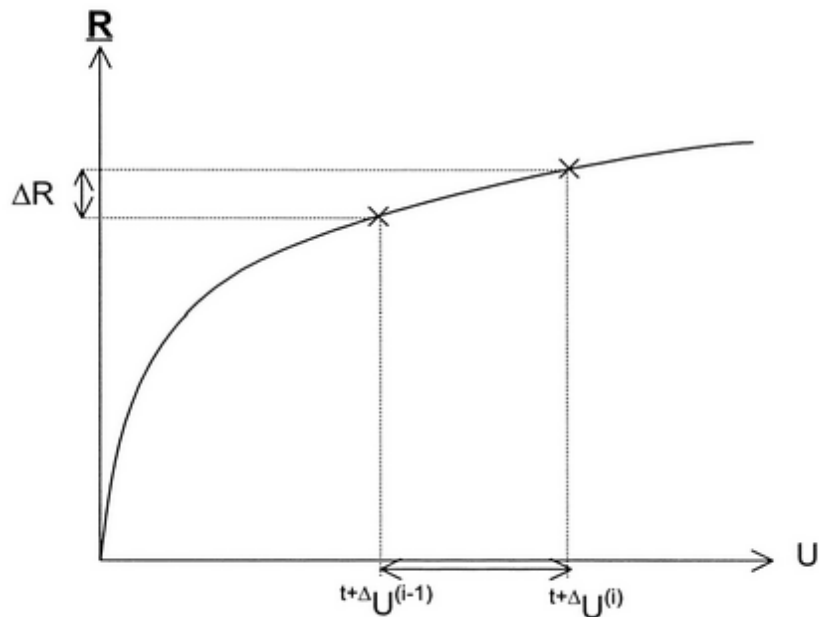


Abbildung 4-25 - Erweichendes Material

4.3.3 Energiekriterium

Da sowohl ein Verschiebungs- als auch ein Kräftekriterium jeweils für sich betrachtet in einigen Fällen als unzureichend erachtet werden müssen, stellt ein Energiekriterium die Kombination beider Effekte in Form eines Produktes aus Verschiebungs- und Kräftekriterium dar.

Der Zuwachs der inneren Energie wird durch Berechnung der Arbeit der Ungleichgewichtskräfte entlang der Verschiebungszuwächse berechnet. Diese Arbeit wird mit dem Anfangszuwachs der Energie innerhalb einer vorgegebenen Toleranz ϵ_E verglichen:

$$\frac{\Delta \underline{U}^{(i)T} \left(\underline{t+\Delta t} \underline{R} - \underline{t+\Delta t} \underline{F}^{(i-1)} \right)}{\Delta \underline{U}^{(1)T} \left(\underline{t+\Delta t} \underline{R} - \underline{t} \underline{F} \right)} \leq \epsilon_E \quad (4.43)$$

Für die Konvergenztoleranzen werden in der Literatur unterschiedliche Empfehlungen gegeben. Sie bewegen sich im Allgemeinen jedoch in den folgenden Wertebereichen:

$$\epsilon_D = 1 \cdot 10^{-3} \qquad \epsilon_F = 1 \cdot 10^{-3} \qquad \epsilon_E = 1 \cdot 10^{-9}$$

oder:

$$\epsilon_D = 1 \cdot 10^{-3} \qquad \epsilon_F = 1 \cdot 10^{-1} \qquad \epsilon_E = 10 \cdot \epsilon_D \cdot \epsilon_F$$

Da der jeweils verwendete Algorithmus jedoch nicht in jedem Fall konvergiert, wie zum Beispiel beim Versagen des untersuchten Materials oder Bauteils, ist es erforderlich einen Maximalwert für die Anzahl der Iterationen als obere Schranke anzugeben. Gleichzeitig ist die Änderung der Fehlergrößen zu überwachen, um einen Abbruch der Iteration aus numerischen Gründen zu vermeiden.

5 Verwendete FE-Programme

5.1 LIMFES

5.1.1 Allgemeines

Das dreidimensionale nichtlineare FE-Programm LIMFES wurde von Dr.-Ing. N. Kerkeni am Institut für Massivbau (IMB) der RWTH Aachen im Rahmen seiner Promotion entwickelt [39] und wird nun kontinuierlich von ihm im Ingenieurbüro Hegger & Partner weiterentwickelt. Dr.-Ing. N. Kerkeni stellt dem IMB das Programm LIMFES zu Forschungszwecken zur Verfügung.

Mit dem Programmsystem LIMFES können dreidimensionale, physikalisch und geometrisch nicht-lineare Berechnungen durchgeführt werden.

5.1.2 Zur Diskretisierung (geometrische Abbildung) in LIMFES

Generell stehen in LIMFES verschiedene Elemente zur geometrischen Abbildung zur Verfügung:

- Fachwerkstab
- Biegestab / Unterzug / 3-Punkt-Biegestab
- Feder-Dämpfer
- Schalendreieck / Schalenviereck
- 8-Knoten-Hexaeder (3D-Volumenelement)
- 3D-Volumenelement mit einer variablen Anzahl von Knoten ($n = 8$ bis $n = 20$)
- GAP- / Interface- / Verbund-Element
- Spannglied-Segment / Spannglied-Spline

LIMFES bietet die Möglichkeit, jedem Element einen bestimmten Layer zuzuweisen, um bestimmte Gruppen von Elementen anzulegen. Die Verwendung von Layern und deren gezieltes ein- oder ausblenden ermöglicht eine differenzierte Darstellung der Ergebnisse.

Fachwerkstäbe

Bei den Fachwerkstäben handelt es sich um eindimensionale Elemente mit einem Verschiebungsfreiheitsgrad an jedem Ende in Richtung ihrer Stabachse ohne räumliche Ausdehnung quer zu ihrer Achse. Mit ihnen können Bewehrungsstäbe unter Vernachlässigung der Biegesteifigkeit abgebildet werden.

Biegestäbe

Alternativ zu Fachwerkstäben können Bewehrungsstäbe mit zwei- oder dreiknotigen Biegestäben abgebildet werden. An jedem Stabende dieses eindimensionalen Elementes können bis zu sechs Kräfte (N_x , Q_y , Q_z , M_T , M_y , M_z) entsprechend ihrer sechs räumlichen Verschiebungsfreiheitsgrade übertragen werden. So kann man komplette Tragwerke unterschiedlichster Querschnittsgestaltung über ihre Membran-, Biege- und Torsionssteifigkeit in ihrer räumlichen Tragwirkung abbilden. Diese Steifigkeiten können direkt eingegeben werden oder mit Hilfe eines Querschnittsgenerators errechnet bzw. aus einer Profildatenbank ausgewählt werden. Die so generierten Querschnitte werden im OpenGL-Modus mit ihren tatsächlichen Abmessungen dargestellt. Dies ermöglicht eine anschauliche Kontrolle der Eingaben (z.B. der Einbaurichtung bei Standardprofilen).

Die Definition der Biegestäbe erfolgt zum einen über ihren Querschnitt und über die Attributdefinition.

Die Querschnitte können dabei für ihre Membran- und ihre Biegetragwirkung unabhängig am Stabanfang und am Stabende (bei 3-Punkt-Biegestäben auch in der Mitte) gewählt werden. Dies ermöglicht es, für die verschiedenen Einwirkungen aus Normalkraft und Biegemoment unterschiedliche Widerstände festzulegen. So ist z.B. die Realisierung einer unterschiedlich großen mitwirkenden Plattenbreite bei Plattenbalkenquerschnitt je nach Belastungsart möglich.

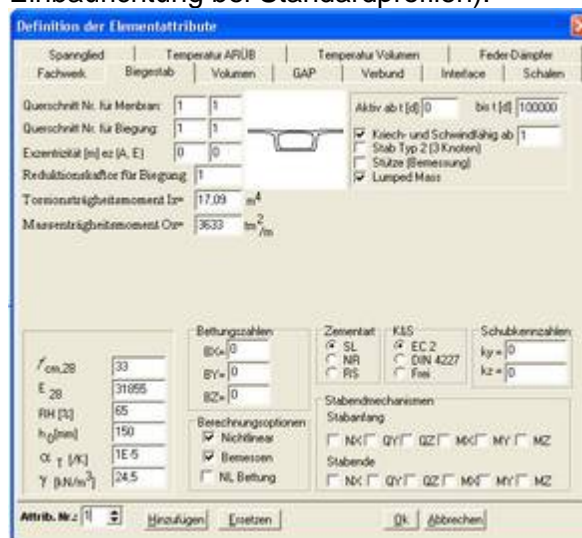


Abbildung 5-1: Attributdefinition Biegestäbe

Durch die getrennte Definition der Querschnitte für Anfang und Endpunkt lassen sich z.B. verjüngende Querschnitte und Vouten abbilden.

Die Elementeingabe erfolgt in der Schwereachse. Um bspw. Querschnittsänderungen und damit verbundene Verschiebungen der Schwereachse des Systems abzubilden, kann eine Exzentrizität der Schwereachse definiert werden.

Zusätzlich kann für die Biegesteifigkeit ein Reduktionsfaktor angegeben werden, wie er bspw. bei Stützen im Erdbebenlastfall benötigt wird. Speziell bei Erdbebenberechnungen kann durch die Aktivierung des Punktes „Lumped Mass“ das Element als Massenpunkt definiert werden.

Neben weiteren geometrischen Randgrößen wie dem Torsionsträgheitsmoment und dem Massenträgheitsmoment werden hier auch Angaben zum zeitabhängigen Materialverhalten und den Klimabedingungen bei Aktivierung des Elementes getroffen.

Durch die Definition der Bettungszahlen als Federsteifigkeiten und der Stabendmechanismen können die am Element angreifenden Kräfte bzw. Element-Freiheitsgrade festgelegt werden.

Spannglieder

Spannglieder werden in LIMFES elementunabhängig eingegeben. Die Zuordnung zu den Elementen erfolgt während der Berechnung. Der Verlauf der aufgebrachten Vorspannkraft wird unter Berücksichtigung aller Eingabe aus Überspannen, Nachlassen und Ankerschlupf berechnet. Die Reibung innerhalb des Hüllrohres bei Spanngliedern mit nachträglichem Verbund wird formell berücksichtigt. Zur Berücksichtigung der Vorspannung wird ein Lastfall „Vorspannung“ definiert, dessen Wirkungszeitraum sich mit dem der Spannglieder deckt.

Der geometrische Verlauf der Spannglieder kann über eine graphische Eingabemaske und in tabellarischer Form eingegeben werden. Das Spannglied wird entsprechend dargestellt und kann über das Kontextmenü weiter definiert werden. Bei gekrümmten Spanngliedern legt LIMFES den Verlauf des „Splines“ als Strecke mit geringster Krümmung zwischen den Punkten fest. Die Steigung des Spanngliedes am Anfang kann beliebig gewählt werden.

Volumenelemente

Zur räumlichen geometrischen Abbildung steht in LIMFES ein 9-Knoten-Element (HEX 9-1) mit acht frei wählbaren Eckknoten zur Verfügung. Der neunte Knoten fällt genau in den Schwerpunkt. Für die Formfunktion zur Beschreibung der Elementgeometrie sowie für die Funktion zur Beschreibung des Verschiebungsfeldes werden nach dem isoparametrischen Prinzip die gleichen Ansatzfunktionen verwendet. Hiernach kommt es unter Berücksichtigung des neunten Knoten auf den Elementrändern zu linearen und im Inneren zu quadratischen Verformungsansätzen. Für die Berechnung der Verformung wird der neunte Knoten im Inneren mittels statischer Kondensation eliminiert. Die Steifigkeitsmatrix der Volumenelemente wird numerisch über acht Gaußpunkte integriert. Dem Element können verschiedene charakteristische Materialgesetze zugeordnet werden, um die unterschiedlichen Baustoffe, wie z.B. Beton und Stahl abzubilden. Durch die Verwendung von Volumenelementen ist es also möglich mit LIMFES Tragwerke beliebiger Geometrie in ihrer räumlichen Tragwirkung abzubilden und zu berechnen.

GAP-Elemente

Beim GAP-Element handelt es sich um ein eindimensionales 2-Knoten-Element ohne geometrische Ausdehnung. Es wird benutzt um zwischen zwei Knoten benachbarter Elemente eine Schubspannungs-Normalspannungs-Verschiebungsbeziehung anzugeben. Die GAP-Elemente können beliebig große Druckspannungen übertragen, die zu übertragende Zugspannung kann jedoch durch Eingabe einer maximalen Normalspannung begrenzt werden. Da beim GAP-Element eine Beziehung der Spannungen und nicht der Kräfte untereinander eingegeben wird, muss ferner eine Einzugsfläche des ausdehnungslosen Elementes eingegeben werden.

Interface-Elemente

In LIMFES steht zur Abbildung des Verbundverhaltens zwischen Volumenelementen mit unterschiedlichem Materialverhalten, wie z.B. zwischen Stahlträger und Kammerbeton, das Interfaceelement LPI 8 (*linear plane interface*) zur Verfügung. Die Interfaceelemente können auch zur Abbildung örtlicher Fehlstellen wie etwa Fugen bei abschnittsweise hergestellten Betonbauteilen oder aber auch zur Untersuchung vorgegebener Risse, bei denen es auch noch nach Rissbildung durch Rissverzahnung zu einer Kraftübertragungen kommt, genutzt werden. Bei dem LPI 8-Element handelt es sich um ein 4-Doppelknoten-Flächenelement mit bilinearem Verschiebungsansatz, das zwischen den beiden Elementseiten eine endliche kleine Ausdehnung haben sollte.

Verbund-Elemente

Die Verbundelemente dienen der Abbildung des Verbundverhaltens zwischen Fachwerkstäben und Volumenelementen. Es handelt sich um 2-Doppelknoten-Elemente, die quer zu ihrer Stabachse keinen Freiheitsgrad besitzen. Sie ermöglichen die Festlegung einer Verbundspannung-Schlupf-Beziehung zwischen den Relativverschiebungen (in Längsrichtung des Stabes) und den Kräften, die zwischen Bewehrung und Beton herrschen.

Netzgenerierung

Die Netze können in LIMFES entweder „von Hand“ oder durch eine automatische Netzgenerierung aufgebaut werden. Aufgrund der so genannten „*Shear-locking*“-Effekte, kann es bei der Verwendung einer GAUSSschen (2 x 2 x 2)-Integrationsvorschrift zu einer Versteifung der Elemente kommen. In LIMFES wurde zur Reduzierung dieser Effekte eine modifizierte Integrationsmethode zur Ermittlung der Schubverzerrungen umgesetzt. Diese geht von acht Integrationspunkten im Inneren des Elementes aus, die vom Mittelpunkt eine Entfernung von 0,05 % der Kantenlänge aufweisen. Die so durchgeführte Integration zeigt sich gegenüber Elementverzerrungen deutlich unempfindlicher als eine Integration nach der klassischen Gaußmethode. Hinsichtlich des Seitenlängenverhältnisses gibt es beim HEX 9-1 Element keine Probleme. Bei Verwendung von Quadern mit einem Seitenlängenverhältnis l/h von nicht größer als 10/1 werden Ergebnisse entsprechend der analytischen Lösung erzielt.

5.1.3 Materialgesetze (physikalische Abbildung) in LIMFES

In LIMFES werden die Materialgesetze in Attributen definiert. Diese Attribute können den einzelnen Elementen zugewiesen werden. Es besteht auch die Möglichkeit, bei einer zeitabhängigen Berechnung einzelne Elemente über die Attributdefinition zu bestimmten Zeitschritten zu aktivieren oder zu deaktivieren. So lässt sich beispielsweise bei Verbundsystemen der Bauzustand und der Endzustand mit Ortbetonergänzung in einer Rechnung simulieren.

Räumliche Materialmodelle

Linear-elastische und elastisch-plastische Materialkennlinien

Für Fachwerkstäbe erfolgt die Eingabe der Spannungs-Dehnungs-Linie in bis zu fünf frei wählbaren Punkten abschnittsweise linear. Dabei bezeichnet ϵ_1 die Grenzstauchung und ϵ_5 die Grenzdehnung, bei deren Überschreitung das Element ausfällt. Über diese Definition ist die Eingabe einer Materialkennlinie gemäß Baustoffprüfungen möglich. Alternativ können die Materialkennlinien der DIN eingegeben werden (Abbildung 5-2).

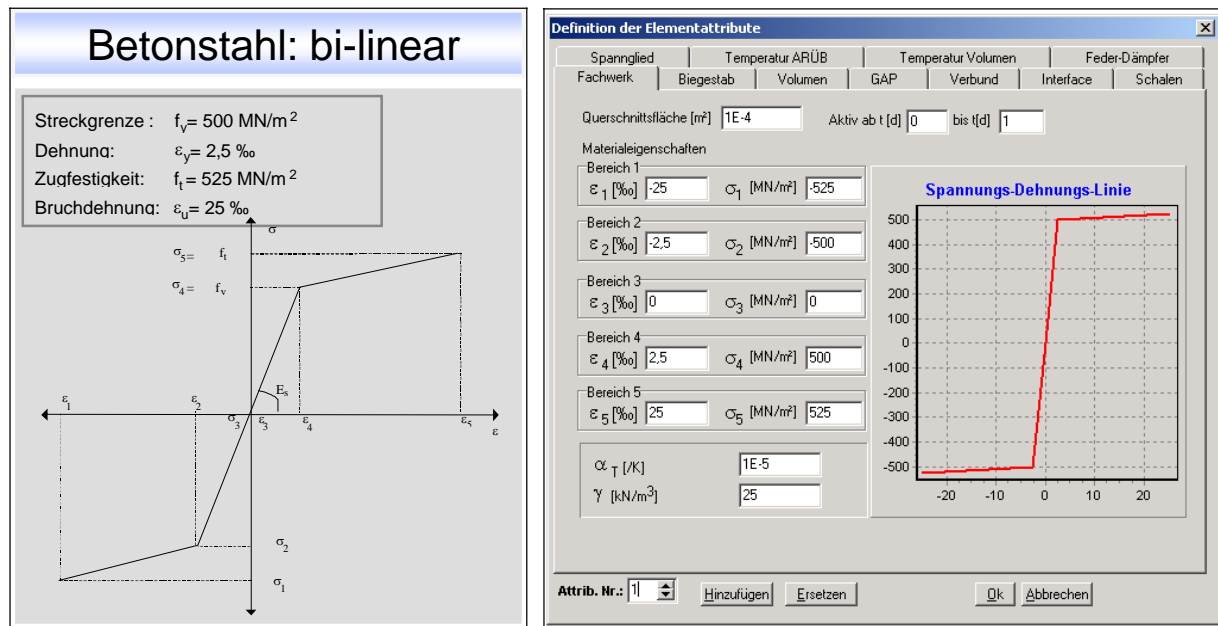


Abbildung 5-2: bilineares Materialgesetz nach DIN 1045-1 [55] und Umsetzung in LIMFES

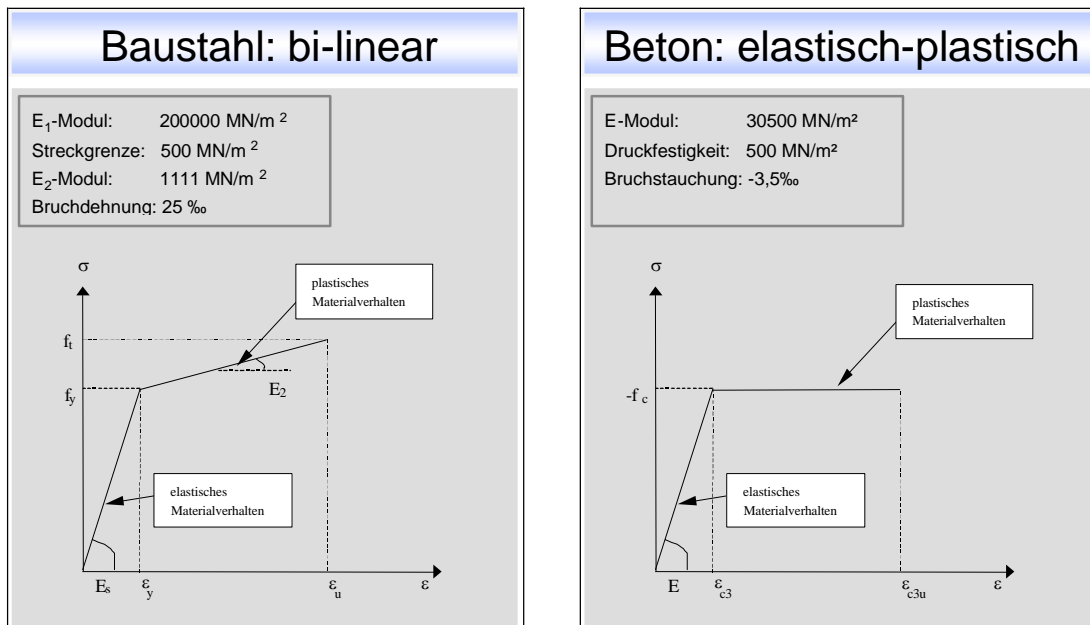


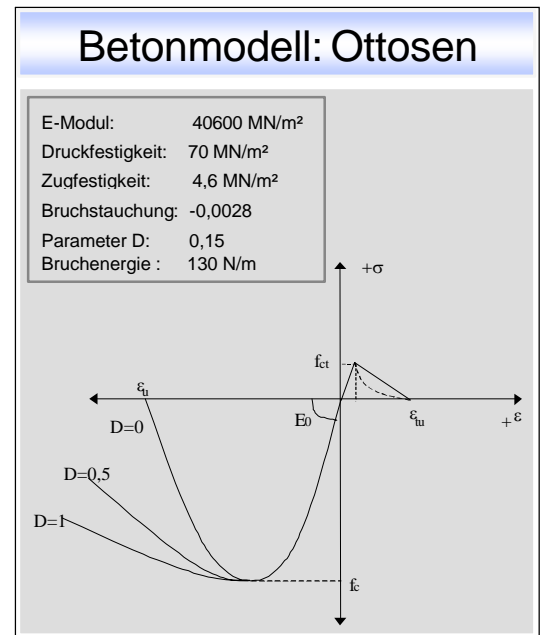
Abbildung 5-3: Materialgesetze der DIN 1045-1[55] zur Abbildung von Baustahl und Beton

Bei den Volumenelementen stehen verschiedene Materialkennlinien zur Verfügung. Neben dem Betonmodell von OTTOSEN können sowohl rein elastische, bilineare und elastisch-plastische Materialkennlinien abgebildet werden.

Betonmodell nach OTTOSEN

LIMFES bietet die Möglichkeit den dreiaxialen Spannungszustand mit dem Betonmodell nach OTTOSEN [58] wirklichkeitsnah abzubilden. Das Betonmodell besteht aus dem Bruchkriterium nach OTTOSEN und dem eigentlichen Werkstoffgesetz, also der Spannungs-Dehnungslinie. Das Bruchkriterium wird durch ein 4-Parameter-Modell beschrieben. Hierbei wird der Verlauf der Versagensfläche so beschrieben, dass sich die einaxiale Druckfestigkeit f_c , die einaxiale Zugfestigkeit f_{ct} , die zweiaxiale Druckfestigkeit f_{2c} sowie ein beliebiger Versagenszustand auf dem Druckmeridian σ_{oct} und τ_{oct} exakt berechnen lassen.

In Abbildung 5-4 ist der prinzipielle Verlauf der Materialkennlinie mit den Standardwerten eines Hochleistungsbetons C70/85 dargestellt.



Die Eingabe der Materialkennlinie erfolgt anwenderfreundlich über die gebräuchlichen Parameter:

- Elastizitätsmodul. E_0
- Zylinderdruckfestigkeit f_c
- Zugfestigkeit f_{ct}
- Bruchstauchung ϵ_u
- Querdehnzahl ν

Abbildung 5-4: Betonmodell OTTOSEN

Zusätzlich wird über den Parameter D das Nachbruchverhalten des Betons bei Druckbeanspruchung beschrieben. Wenn die Zugfestigkeit überschritten wird, zeigt der Beton auch auf der Zugseite einen abfallenden Ast. In LIMFES kann man zwischen einem linearen, einem bilinearen und einem exponentiellen Verlauf des abfallenden Astes unter Zugbeanspruchung wählen. Die Fläche unter der Spannungs-Dehnungs-Linie nach Überschreiten der Zugfestigkeit ist äquivalent zur Bruchenergie G_f . Mit der Option „Risskräfte verteilen“ kann vorgegeben werden, dass der abfallende Ast der Spannungs-Dehnungs-Linie vernachlässigt wird und nach Überschreiten der Zugfestigkeit keine Spannung mehr aufgenommen werden kann. Die freiwerdenden Risskräfte werden auf andere Elemente umgelagert.

Zur Erfassung des Rissverhaltens sind in LIMFES verschiedene Verfahren implementiert, die auf dem Prinzip des verschmierten Rissmodells („*smeared cracking*“) beruhen. Die Erstrissebene bildet sich senkrecht zur Richtung der risserzeugenden Hauptzugspannung aus. In Abhängigkeit des gewählten Verfahrens werden die weiteren Rissebenen bestimmt. Zum einem kann ein Verfahren gewählt werden, bei dem nach der Erstrissbildung die weiteren Rissebenen festgelegt werden. Alternativ kann mit „rotierenden Rissen“ gerechnet werden, die eine Anpassung der Rissebenen an die jeweiligen Hauptdehnungsrichtungen ermöglicht. Beiden Verfahren in LIMFES ist gemeinsam, dass die Anzahl der Risse auf drei begrenzt wird und die Elemente nach einer kompletten Öffnung aller drei Risse ausfallen.

Die Schubfestigkeit des gerissenen Betons wird über die Schubübertragungsfunktion nach Al-Mahaidi [5] simuliert. Diese Funktion mindert den Schubmodul in Abhängigkeit der Rissöffnung ab (vgl. Gleichung 5-2). Damit wird die nachlassende Rissverzahnung bei zunehmender Rissbreite berücksichtigt.

$$\eta = 1,0 \text{ wenn } \varepsilon_N \leq \varepsilon_R$$

$$\eta = \alpha_G \cdot \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_N} \quad \text{wenn } \varepsilon_N > \varepsilon_R \quad (1-2)$$

mit ε_R = Dehnung beim Reißen des Betons (= Rissdehnung)

ε_N = Dehnung normal zum Riss

In LIMFES kann die Funktion zur Abminderung der Schubübertragung als Konstante oder in Abhängigkeit der Rissdehnung und der Rissöffnung mit beliebigem Faktor α_G definiert werden.

Da mit LIMFES auch Berechnungen möglich sind, die das zeitabhängige Materialverhalten des Betons (Kriechen und Schwinden) berücksichtigen, können zusätzlich Zeitfunktionen für die einzelnen Materialparameter eingegeben werden. Hierbei kann der Anwender zwischen einer Berücksichtigung der Ansätze nach EC 2 [27] ,der DIN 4227 [56] bzw. DIN 1045-1 [55] die mit der Eingabe der verwendeten Zementart und der Umgebungsbedingungen auskommen, wählen. Zusätzlich besteht die Möglichkeit die einzelnen Parameter gezielt in Abhängigkeit der Zeit zu definieren.

Microplane-Modell

In derzeit aktuellen LIMFES-Version kann neben dem OTTOSEN-Modell auch das Microplane-Modell M4 verwendet werden. Mit dem Microplane-Modell M4 [92] kann das Verhalten der Materialien Beton und Betonstahl simuliert werden. Zusätzlich besteht die Möglichkeit, das Verbundverhalten (mit Interface-Elementen) durch Verwendung des Microplane-Modells abzubilden.

Die grundlegende Idee aller Microplane Versionen wird im folgenden Bild verdeutlicht.

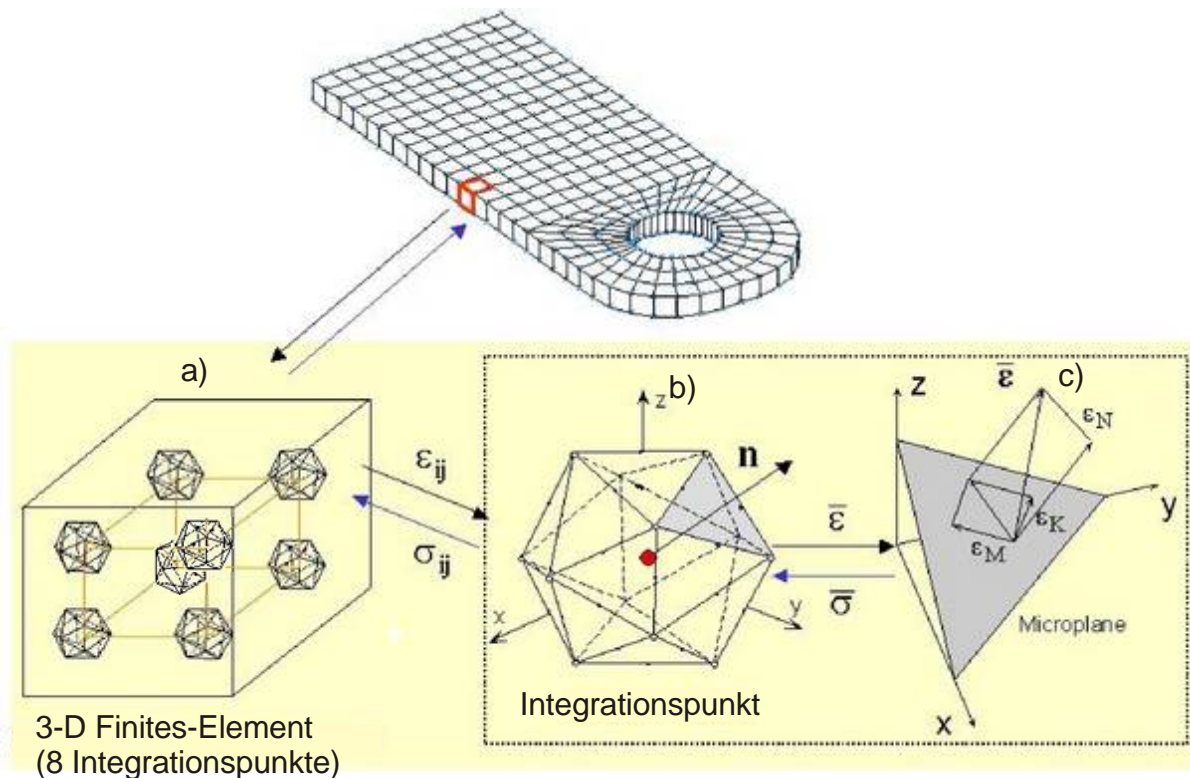


Abbildung 5-5: Microplane-Modell mit kinematischer Bindung: a) FE-Element mit Integrationspunkten b) Icosahedron mit 21 Ebenen für die Integration nach GAUSS c) Dehnungsprojektion auf eine Microplane nach dem Postulat der kinematischen Bindung [92]

Die Microplanes können als Versagensebenen im Material verstanden werden. Bei Beton sind das die Kontaktflächen zwischen den Zuschlagkörnern bzw. Zuschlag und Zementsteinmatrix. In einem Materialpunkt A sind unterschiedlich gerichtete Ebenen vorhanden.

Die räumliche Ausrichtung der Microplanes in einem Punkt ist in Abbildung 5-5 b) dargestellt. Die Ebenen spannen ein Icosahedron auf, die umrandeten Punkte sind Durchtrittsstellen der Microplane-Normalen für die Auswertung der GAUSSschen Integrationsformel.

In Abbildung 5-5 c) wird die kinematische Bindung verdeutlicht. Der Dehnungstensor in einem Punkt, das ist der Kerngedanke der kinematischen Bindung, wird auf die Microplanes projiziert. Die Projektion wird aufgeteilt in Schub- und Normaldehnungen der Ebene, aus denen mit dem Materialgesetz die korrespondierenden Spannungen ermittelt werden, die dann mit einem integralen Ansatz zum Spannungstensor im betrachteten Materialpunkt führen.

Übersicht über die Parameter des Microplane-Materialgesetzes Version M4

Das Materialmodell benötigt für numerische Simulationen die Angabe der Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} , der Stauchung beim Höchstwert der Druckspannung ϵ_{c1} und des E-Moduls. Die Beziehung zwi-

schen Spannungen und Dehnungen auf den Microplane-Ebenen werden mit den Werten $k_1 \dots k_4$ und c_1 bis c_{17} geregelt, die im Folgenden näher betrachtet werden.

Die Einflussgrößen c_1 bis c_{17} sind laut [92] für alle Betone gleich, die Werte k_1 bis k_4 müssen an die physikalischen Eigenschaften des Werkstoffes angepasst werden.

Variable	empfohlener Wert	mögliche Werte
k_1	1,5 E-4	$0,8 \text{ E-}4 < k_1 < 2,5 \text{ E-}4$
k_2	500	$100 < k_2 < 1000$
k_3	15	$5 < k_3 < 15$
k_4	150	$30 < k_4 < 200$

Tabelle 5-1: Die Variablen k_i bei der Microplane Version M4 [92]

Tabelle 5-2: Die Konstanten c_i bei der Microplane Version M4 [92]

Konstante	Wert	Einfluss der Konstante auf...
c_1	0,62	den Spannungshöchstwert unter einaxialer Zugbeanspruchung
c_2	2,76	die Ausrundung der Spannungs-Dehnungs-Linie bei einaxialer Zugbeanspruchung im Bereich von f_{ct}
c_3	4,00	die Steigung des abfallenden Astes bei einaxialem Zug
c_4	70	die Steigung des abfallenden Astes bei hydrostatischer Zugbeanspruchung
c_5	2,50	die hydrostatische Expansion bei einaxialer Druckbeanspruchung
c_6	1,30	die Ausrundung des Höchstwertes der hydrostatischen Expansion bei einaxialer Druckbeanspruchung
c_7	50	die Steigung des abfallenden Astes bei einaxialer Druckbeanspruchung
c_8	8,00	den Spannungshöchstwert unter einaxialer Druckbeanspruchung
c_9	1,30	die Ausrundung der Spannungs-Dehnungs-Linie bei einaxialer Druckbeanspruchung im Bereich von f_{ck}
c_{10}	0,73	den „Druckeffekt“ in Standard-Dreiaxial-Versuchen
c_{11}	0,2	das Ausmaß der Initialkohäsion bei Reibung
c_{12}	7000	die Verringerung der Kohäsion mit zunehmendem Volumen
c_{13}	0,20	die Querdehnung bei einaxialem Zug
c_{14}	0,5	siehe c_{13}
c_{15}	0,02	die hydrostatischen Dehnungen und Spannungen bei dynamischer Belastung
c_{16}	0,01	siehe c_{15}
c_{17}	0,4	das Ausmaß der Zerstörung bei dynamischer Belastung

Eindimensionale Materialeigenschaften

Eindimensionale Materialgesetze werden Elementen wie Fachwerkstäben, Biegestäben oder Spanngliedern zugewiesen (vergleiche Abschnitt 5.2.1 bis 5.2.3).

Spannungsdehnungslinien

Für Fachwerkstäbe erfolgt die Eingabe der Spannungs-Dehnungs-Linie in bis zu fünf frei wählbaren Punkten abschnittsweise linear. Dabei bezeichnet ε_1 die Grenzstauchung und ε_5 die Grenzdehnung, bei deren Überschreitung das Element ausfällt. Über diese Definition ist die Eingabe einer Materialkennlinie gemäß Baustoffprüfungen möglich. Alternativ können die Materialkennlinien der DIN eingegeben werden (Abbildung 5-2).

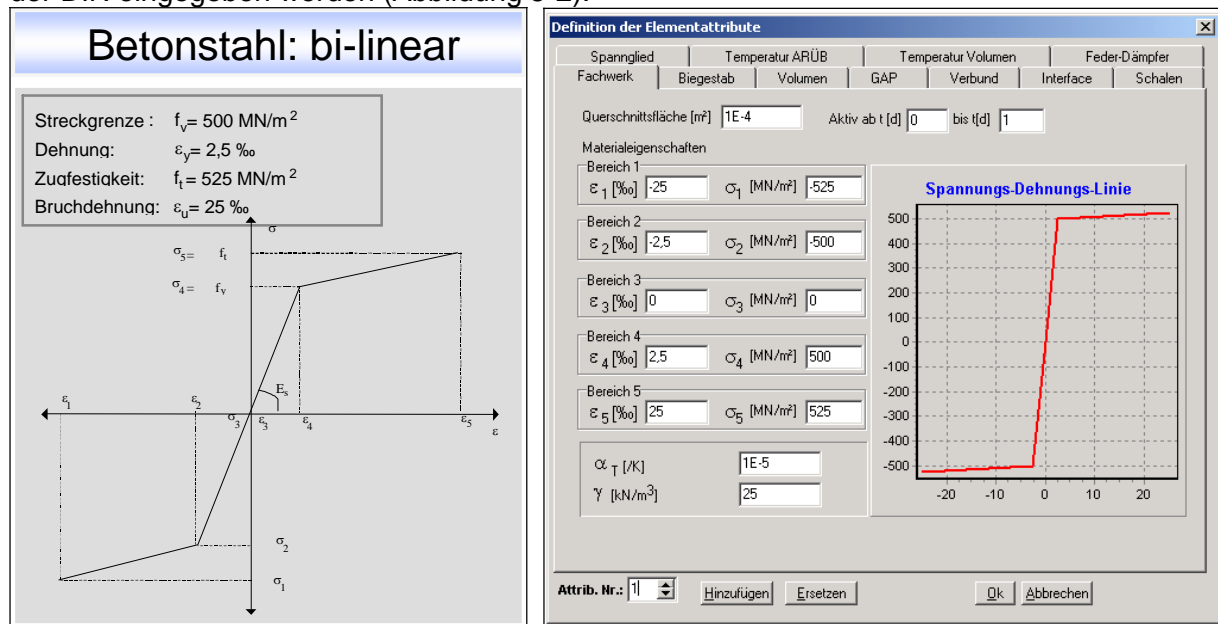


Abbildung 5-6: bilineares Materialgesetz nach DIN 1045-1 [55] und Umsetzung in LIMFES

Für die verwendeten Materialien (z.B. Beton, Betonstahl bzw. Baustahl) werden Spannungs-Dehnungs-Linien definiert. Diese werden für die Bemessung benötigt. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung kann entweder aus den nach EC 2 festgelegten Materialgesetzen für Betone von C 12 bis C 100 und BSt 500 S aus dem Auswahlmenü für diese Baustoffe gewählt werden oder frei in bis zu vier Teilbereichen eingegeben werden. Für jeden der vier Teilbereiche kann nun eine eigene Spannungs-Dehnungs-Beziehung festgelegt werden. Damit kann eine wirklichkeits- bzw. normgerechte Abbildung der Materialeigenschaften sichergestellt werden.

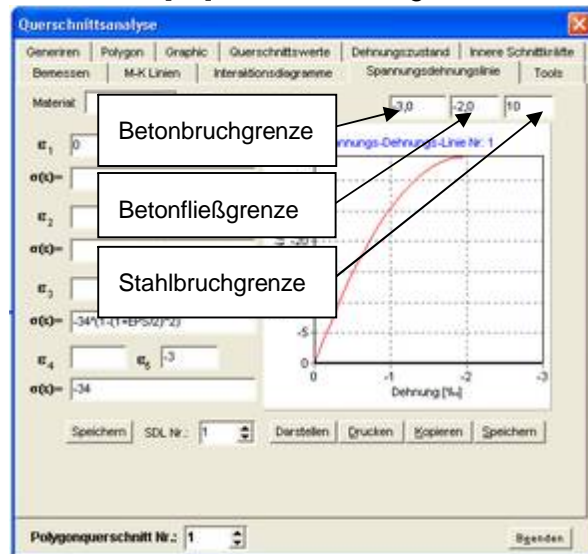


Abbildung 5-7: Spannungs-Dehnungs-Linien

Die Materialeigenschaften von Spanngliedern werden gesondert definiert. Der dazu notwendige Dialog ist in Abbildung 5-8 dargestellt. Neben den charakteristischen Eigenschaften wie der Spanngliedfläche A_p , dem Hüllrohrdurchmesser, der Zugfestigkeit usw. kann hier auch die Verbundart des Spanngliedes sowie deren Aktivierungszeitraum festgelegt werden.

Spanngliedeigenschaften

Aktiv ab: 2,00 Tage
 Spanngliedfläche A_p : 2.660,0 mm²
 Hüllrohr-Durchmesser: 106,0 mm
 E-Modul E_s : 195.000,0 N/mm²
 charak. Zugfestigkeit f_{pk} : 1.860,0 N/mm²
 Spannung bei 0,1 % $f_{p0,1k}$: 1.600,0 N/mm²
 ungewolte Umlenkwinkel k : 0,010 Rad/m
 Reibungsbeiwert μ : 0,200
 Ankerschlupf s_l : 6,00 mm
 zul. anfängliche Vorspannkraft P_0 : 3.463,00 kN

Spannanweisung: [%] von P_0

	1. Übersp.	1. Nachlass.	2. Übersp.	2. Nachlass.
Anfang	108	100	0	0
Ende	108	100	0	0

Verbundart:
 sofortiger
 nachträglicher
 ohne

Anzahl der Abschnitte: 10

1	1. Überspannen Anfang
2	1. Nachlassen Anfang
3	2. Überspannen Anfang
4	2. Nachlassen Anfang
5	Verankern Anfang
6	1. Überspannen Ende
7	1. Nachlassen Ende
8	2. Überspannen Ende
9	2. Nachlassen Ende
10	Verankern Ende

OK Abbrechen <<<

Abbildung 5-8: Spanngliedeigenschaften

Verbundgesetze

Verbundgesetze können die Interaktion zwischen unterschiedlichen Materialien abbilden. Je nach Verbundart stehen unterschiedliche Materialgesetze zur Verfügung. Sie unterscheiden sich je nach Anforderungserfordernis. Soll ein räumliches Verbundverhalten simuliert werden, dann kommt ein Materialgesetz nach Abbildung 5-9 zum Einsatz. Dies ist z.B. der Fall bei Betrachtung der Reibung zwischen Beton und Baustahl oder zwischen Beton und Kopfbolzendübel. Kann die Betrachtung auf den eindimensionalen Fall beschränkt werden (z.B. Verbund zwischen Beton und Betonstahl), so kommt ein Materialgesetz, wie in Abbildung 5-10 dargestellt, in Frage.

Räumliches Verbundverhalten

Zur Abbildung des räumlichen Verbundverhaltens kann in LIMFES eine Schubspannungs-Beziehung in Abhängigkeit der Relativverschiebung der Elementseiten und der auf sie wirkenden Normalspannung eingegeben werden. Dabei können für die zu übertragende Normalspannung Grenzen festgelegt werden, so dass z.B. ausschließlich Druckkräfte und keine Zugkräfte übertragen werden. In Abbildung 5-9 ist beispielhaft die Dübelkennlinie eines Kopfbolzendübels gemäß Push-Out-Test nach EC4 [26] dargestellt.

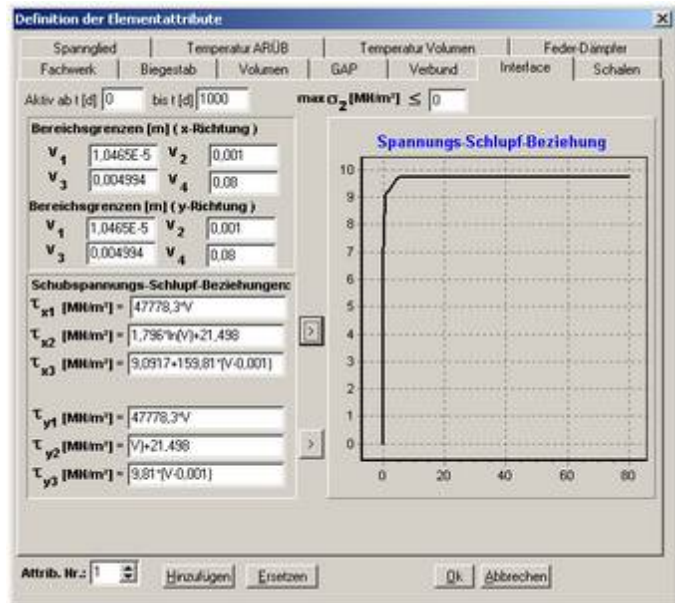
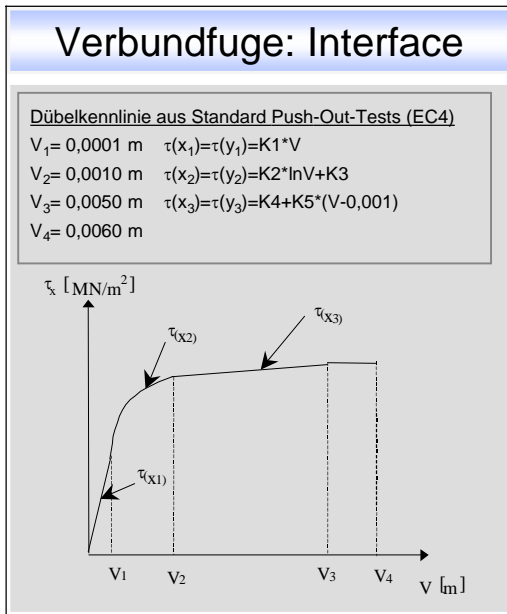


Abbildung 5-9: Interfacelement KBD nach EC 4 [26] und Umsetzung in LIMFES

Eindimensionales Verbundverhalten

In LIMFES erfolgt die Festlegung der Verbund-Schlupf-Beziehung zwischen Betonstahl und Beton in bis zu vier frei wählbaren Bereichen. Es ist hierdurch möglich, die im MC 90 [28] genannten Funktionen in Abhängigkeit des Verbundbereiches, des Versagensmechanismus, der Rippenabstände und der Betonfestigkeit zu definieren. In Abbildung 5-10 ist ein typischer Verlauf einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nach MC 90 [28] und der Eingabemöglichkeit in LIMFES angegeben.

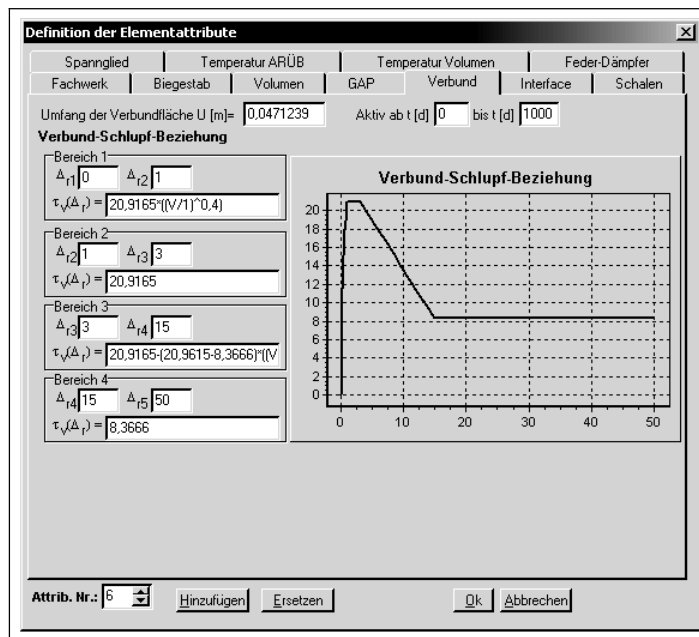


Abbildung 5-10: Attributdefinition der Verbundelemente

Abbildung des zeitabhängigen Materialverhaltens in LIMFES

Lineares Kriechverhalten

Die Grundlage für die Berechnung des zeitabhängiges Materialverhalten (Kriechen, Schwinden, Relaxation) bildet das zeitabhängige Spannungs-Dehnungs-Gesetz nach Trost [84].

$$\sigma(t) = \frac{E_b}{1 + \rho\varphi} \varepsilon_\varphi - \frac{E_b}{1 + \rho\varphi} \varphi \varepsilon_{b,0} - \frac{E_b}{1 + \rho\varphi} \varepsilon_{b,s} \quad (5-3)$$

mit	$\sigma(t)$	Betonspannung zum Zeitpunkt t
	E_b	E-Modul des Betons
	ρ	Relaxationsbeiwert nach Trost für den Zeitpunkt t , i. d. R. 0,8
	φ	Kriechbeiwert für den Zeitpunkt t
	ε_φ	Betondehnung zum Zeitpunkt t
	$\varepsilon_{b,0}$	Betondehnung aus kriecherzeugenden Dauerlasten
	$\varepsilon_{b,s}$	Betondehnung aus Schwinden

Die Definition des Lastfalls Kriechen, Schwinden, Relaxation erfolgt in LIMFES über die Eingabe der obigen Kennwerte sowie der Definition der **Kriech Erzeugenden Lasten (KEL)** und dem Belastungszeitraum. Zusätzlich können Spannkraftverluste infolge Relaxation als Prozentwert der vorhandenen Vorspannkraft direkt eingegeben werden.

Nichtlineares Kriechverhalten

Die Erfassung des zeitabhängigen Materialverhaltens in Betonkonstruktionen erfordert neben der räumlichen Diskretisierung eine Diskretisierung der Zeit. Diese kann im Rahmen einer Finite-Elemente-Berechnung über die Teilung des betrachteten Zeitraums ($t_m - t_0$) in m genügend kleine Zeitintervalle

$$\Delta t = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m \quad (5-4)$$

erreicht werden, wobei t_i diskrete Zeitpunkte darstellen.

Aufgrund des zeitabhängigen Materialverhaltens von Beton ist die Spannungsverteilung in einem Stahlbetonkörper bei konstanter äußerer Belastung und Umweltbedingungen i.a. zeitabhängig. Abbildung 5-11 zeigt die Spannungsgeschichte für eine vorgegebene Belastungsgeschichte. Abbildung 5-11 zeigt sowohl die kontinuierliche Spannungsänderung bei konstant gehaltener äußerer Belastung als auch einen Spannungssprung infolge einer Erhöhung der äußeren Belastung

zu einem diskreten Zeitpunkt. Dabei ist zu beachten, dass die Dauer des Zeitintervalls in dem die Belastung geändert wird gleich Null ist.

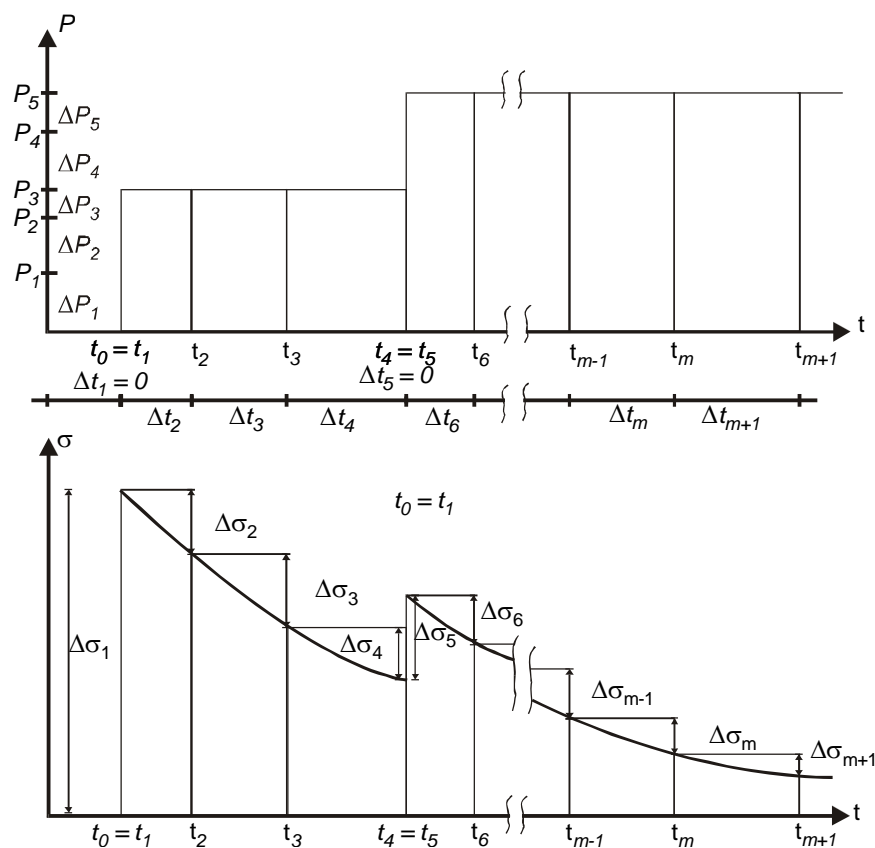


Abbildung 5-11: Belastungsgeschichte und zugehörige Spannungsgeschichte bei vorgegebener Zeitdiskretisierung

Bis zu einem Spannungsniveau von ca. 40% der einachsigen Druckfestigkeit f_c besteht ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen den einwirkenden Spannungen und den Kriechverzerrungen. Da die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons bis zu diesem Spannungsniveau annähernd linear ist, lässt sich die Dehnung zum Zeitpunkt t unter konstanter Spannung wie folgt angeben:

$$\varepsilon_{ges}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma(t_0) + \varepsilon^0(t) \quad (5-5)$$

Darin sind

- t betrachteteter Zeitpunkt
- t_0 Zeitpunkt der ersten Lastaufbringung
- $J(t, t_0)$ Komplianzfunktion zum Zeitpunkt t
- $\varepsilon^0(t)$ spannungsunabhängiger Verzerrungsanteil aus Schwinden und Temperatur
- $\sigma(t_0)$ konstante Spannung von t_0 bis t

Gleichung (5-5) setzt eine konstante Spannung im gesamten Zeitraum $[t - t_0]$ voraus. Im vorliegenden Fall sind die Spannungen aufgrund von zeitabhängigen Spannungsumlagerungen infolge Kriechen und Schwinden auch bei konstanter äußerer Belastung nicht konstant. Die Gleichung (5-5) muss also erweitert werden, so dass die gesamte Spannungsgeschichte von t_0 bis t berücksichtigt wird. Dies kann unter bestimmten Voraussetzungen über die Anwendung des BOLTZMANNschen Superpositionsprinzips erreicht werden. Danach wird die Spannungsgeschichte in Differentialen $d\sigma$, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten aufgebracht werden, unterteilt (Abbildung 5-12). Die Gesamtverformung lässt sich demnach wie folgt berechnen:

$$\varepsilon_{ges}(t) = J(t, t_0) \cdot \sigma(t_0) + \int_{\tau=t_0}^t J(t, \tau) \cdot \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \cdot d\tau + \varepsilon^0(t) \quad (5-6)$$

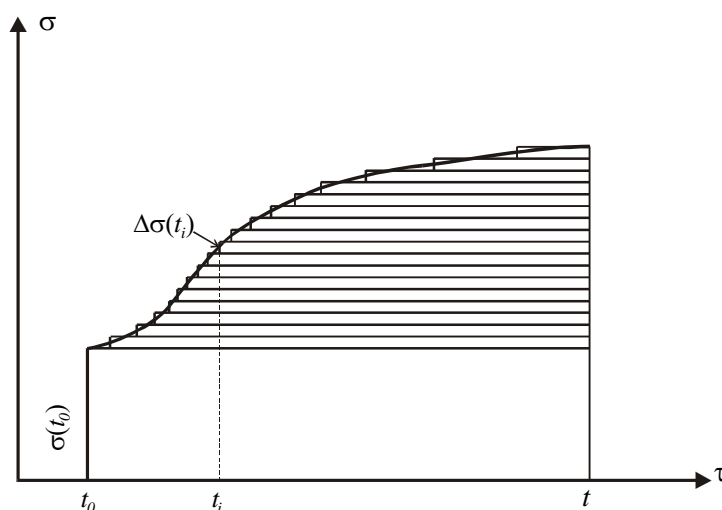


Abbildung 5-12: Das Superpositionsprinzip bei veränderlicher Spannung

In Gleichung (5-6) sind die Last- und Kriechverzerrungen zusammengefasst. Das Splitten dieser Verzerrungen in Sofortverzerrungen und zeitabhängige Verzerrungen bietet jedoch hinsichtlich der Implementierung in Finite-Elemente-Programme einige Vorteile. Die Komplianzfunktion wird in einen elastischen und einen Kriechanteil zerlegt:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \quad (5-7)$$

mit der Kriechkomplianzfunktion

$$C(t, t_0) = \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (5-8)$$

Diese stellt die zeitabhängige Dehnung infolge einer im Zeitintervall $(t-t_0)$ aufgebrauchte Einheitsspannung. Die spannungsabhängigen Kriechverzerrungen lassen sich danach wie folgt berechnen:

$$\varepsilon_{cr}(t) = \int_{\tau=0}^t C(t, \tau) \cdot d\sigma(\tau) \quad (5-9)$$

Die Erweiterung der Gleichung (5-9) auf den dreidimensionalen Spannungszustand erfolgt unter Annahme eines isotropen Materialverhaltens durch die Einführung der isotropen Materialmatrix $[A]$:

$$\{\varepsilon_{cr}(t)\} = \int_{\tau=0}^t [A] \cdot C(t, \tau) \cdot \{d\sigma(\tau)\} \quad (5-10)$$

wobei

$$\begin{aligned} \{d\sigma(\tau)\} &= [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{zx}]^T, \\ \{\varepsilon_{cr}(t)\} &= [\varepsilon_{x,cr} \quad \varepsilon_{y,cr} \quad \varepsilon_{z,cr} \quad \gamma_{xy,cr} \quad \gamma_{yz,cr} \quad \gamma_{zx,cr}]^T, \end{aligned} \quad (5-11)$$

und

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu^{cr} & -\nu^{cr} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu^{cr} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu^{cr}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu^{cr}) & 0 \\ \text{sym.} & & & & & 2(1+\nu^{cr}) \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

Die Querdehnungszahl ν^{cr} wird vereinfachend identisch zur Querdehnungszahl des Betons angenommen.

Die Ermittlung der Kriechverformung nach Gleichung (5-10) erfolgt durch numerische Integration über die Zeit. Dabei wird die Spannungsgeschichte in den gewählten Zeitintervallen als stufenweise konstant abgebildet. Die Spannungsänderungen werden demnach nur in den vorgegebenen diskreten Zeitpunkten t_i berücksichtigt. Unter der Annahme, dass die Spannungen in einem Zeitintervall $[t_{i+1}-t_i]$ konstant bleiben und den Spannungen am Anfang des Zeitintervalls entsprechen, kann die Kriechdehnung wie folgt ermittelt werden:

$$\{\varepsilon_{cr}(t_m)\} = [A] \cdot \sum_{i=1}^{m-1} C(t_m, t_i) \cdot \{\Delta\sigma(t_i)\}, \quad m \geq 2 \quad (5-13)$$

Entsprechend dieser Gleichung ergibt sich die Kriechdehnung zum Zeitpunkt t_m zu:

$$\{\varepsilon_{cr}(t_m)\} = [A] \cdot \left[\begin{aligned} &C(t_m, t_1) \cdot \{\Delta\sigma(t_1)\} + C(t_m, t_2) \cdot \{\Delta\sigma(t_2)\} + \dots \\ &\dots + C(t_m, t_{m-1}) \cdot \{\Delta\sigma(t_{m-1})\} \end{aligned} \right]. \quad (5-14)$$

Die Kriechdehnung zum Zeitpunkt t_{m+1} kann somit wie folgt ermittelt werden:

$$\{\varepsilon_{cr}(t_{m+1})\} = [A] \cdot \left[\begin{aligned} &C(t_{m+1}, t_1) \cdot \{\Delta\sigma(t_1)\} + C(t_{m+1}, t_2) \cdot \{\Delta\sigma(t_2)\} + \dots \\ &\dots + C(t_{m+1}, t_{m-1}) \cdot \{\Delta\sigma(t_{m-1})\} + C(t_{m+1}, t_m) \cdot \{\Delta\sigma(t_m)\} \end{aligned} \right]. \quad (5-15)$$

Dieser Gleichung ist zu entnehmen, dass die Berechnung der Kriechdehnungen zum Zeitpunkt t_{m+1} nur auf der bekannten Spannungsgeschichte bis zum Zeitpunkt t_m basiert. Dieses Berechnungsverfahren stellt somit eine explizite Integrationsmethode dar. Bessere Ergebnisse können durch die Verwendung eines impliziten Integrationsverfahren zweiter Ordnung, bezüglich der gewählten Zeitintervalle erzielt werden. Unter Verwendung der Trapezregel kann Gleichung (5-13) durch folgender Gleichung ersetzt werden:

$$\{\varepsilon_{cr}(t_m)\} = [A] \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} [C(t_m, t_{i-1}) + C(t_m, t_i)] \cdot \{\Delta\sigma(t_i)\}, \quad m \geq 2. \quad (5-14)$$

Das Schwinden wird als volumetrischer Prozess modelliert. Wobei die nach dem Vorhersageverfahren ermittelte Schwinddehnung in allen drei Richtungen angesetzt wird:

$$\{\varepsilon_s(t)\} = [\varepsilon_s \quad \varepsilon_s \quad \varepsilon_s \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5-15)$$

Die ermittelten Schwind- und Kriechverzerrungen werden auf der Lastseite als Anfangsdehnungen berücksichtigt.

5.2 ABAQUS

5.2.1 Allgemeines

Das von der Firma Hibbit, Karlsson & Sorenson, Inc. entwickelte Finite-Elemente-Programm ABAQUS ist eine kommerzielle Anwendung zur Simulation von linearen sowie nicht-linearen physikalischen Problemen in unterschiedlichen Fachgebieten. Es wird im Bauwesen, der Automobil- und Zuliefererindustrie, Luft- und Raumfahrt, Maschinen- und Anlagenbau, Konsumgüterindustrie, Medizintechnik, Chemie- und Prozessindustrie sowie in der Forschung und Lehre verwendet.

5.2.2 Zur Diskretisierung

Im Programm ABAQUS stehen eine Vielzahl von Elementen zur Verfügung.

1. *Truss elements* (Stabelemente):

- beginnen mit dem Buchstaben "T";
- nur Zug- oder Druckbelastung möglich, keine Biegung;
- Kräfte nur eindimensional wirksam;
- kann maximal 3 Freiheitsgrade an jedem Knoten haben (nur Verschiebungen);
- wird durch 2 Knoten beschrieben;
- nur axiale Spannung und Dehnung werden berechnet;

2. **Beam elements** (Balkenelemente):

- beginnen mit dem Buchstaben "B";
- für Komponenten, in denen die Längendimension signifikant größer als die anderen beiden Dimensionen ist;
- Verschiebung und Rotation möglich;
- hat beim 3-dimensionalen Balken 6 Freiheitsgrade pro Knoten, beim 2-D-Balken 3 Freiheitsgrade pro Knoten;
- wird durch 2 Knoten beschrieben;
- berechnet werden axiale und Scherspannung (nur bei 3-D-Balken), Dehnung, axiale Kraft, Biegemomente und Krümmung.

3. **Continuum (solid) elements** (Volumenelemente):

- beginnen mit dem Buchstaben "C";
- 3-D-Volumenelemente: Hexaeder, Tetraeder oder Prismen;
- 2-D-Volumenelemente: Drei- oder Vierecke;
- nur Verschiebung möglich, keine Rotation;
- (2-D) bzw. 3 (3-D) Freiheitsgrade an jedem Knoten;
- kann bis zu 20 Knoten (z.B. quadratisches 3-D-Kubuselement) in einem Element haben;
- berechnet werden Spannungen und Dehnungen;

4. **Shell elements** (Schalenelemente):

- beginnen mit dem Buchstaben "S";
- für Komponenten, bei denen die Dicke entscheidend kleiner ist als die anderen Dimensionen;
die Spannungen senkrecht zur Dickenachse müssen vernachlässigbar klein sein;
- nur 3-D-Elemente;
- 6 Freiheitsgrade an jedem Knoten;

5. **Rigid elements** (Starre Elemente):

- beginnen mit dem Buchstaben "R";

- definieren starre Körper;
- keine Freiheitsgrade an den Knoten, statt dessen ein "Referenzpunkt", dessen Bewegungen stellvertretend für die Bewegung des ganzen starren Körpers stehen;
- außer der Bewegung des Referenzpunktes wird nichts berechnet, da keine Verformungen oder Spannungen etc. auftreten;

Die verwendeten Elementtypen werden in den im Anschluss geschilderten Beispielen näher beschrieben.

5.2.3 Materialmodelle

Allgemeines

Die numerische Berechnung von Stahlbetonstrukturen erfordert neben der Materialmodellierung von Beton und Betonstahl auch die der Verbundeigenschaften.

Im Programm ABAQUS wird der Beton und der Stahl getrennt behandelt. Die Rissbildung wird im Materialmodell *CONCRETE als verschmierte Rissbildung über das Element abgebildet.

Die Spannungsübertragung zwischen den Rissen im Beton durch den Stahl wird durch Einführung des „*Tension-Stiffening*“ (s.u.) im Materialmodell *CONCRETE simuliert. Hierbei wird neben der Mitwirkung des Betons auf Zug die Reibung der Rissufer, der Stahlschlupf und die Dübelwirkung „verschmiert“ berücksichtigt.

Das Reißen des Betons ist ein wichtiger Aspekt bei der Modellierung von Stahlbeton. Ist ein Riss entstanden, so bleibt seine Rissrichtung für die weitere numerische Berechnung erhalten. Nachfolgende Risse im selben Punkt werden senkrecht zu dieser Rissrichtung angenommen. Das bedeutet, dass in einem Volumenelement maximal drei Risse in einem Punkt auftreten können. Ein Schalenelement kann zwei Risse in einem Punkt und ein Balkenelement einen Riss pro Punkt simulieren.

Die Iterationsschritte werden in jedem Integrationspunkt unabhängig voneinander durchgeführt. Iterationsschritte sind dabei die verschiedenen Laststufen der verwendeten Iterationsmethode. Tritt ein Riss in einem Integrationspunkt auf, so beeinflusst dieser nur die Spannungen und Steifigkeiten in diesem Integrationspunkt.

Verbund

Der Verbund zwischen Beton und Betonstahl kann als eine starre Verbindung zwischen Beton- (*CONCRETE-) und Bewehrungselementen (*REBAR) abgebildet werden. Dadurch wird die Steifigkeit des Verbundwerkstoffes Stahlbeton durch eine einfache Überlagerung von verschiedenen Materialsteifigkeiten für Beton und Bewehrung berechnet.

Muss ein genaueres Verbundverhalten berücksichtigt werden, so werden für Beton und Stahl unterschiedliche Knoten eingeführt (Abbildung 5.2-13). Diese Knoten werden dann nicht direkt, sondern über Federelemente gekoppelt, deren Steifigkeitscharakteristik dem des Verbundes angepasst wird.

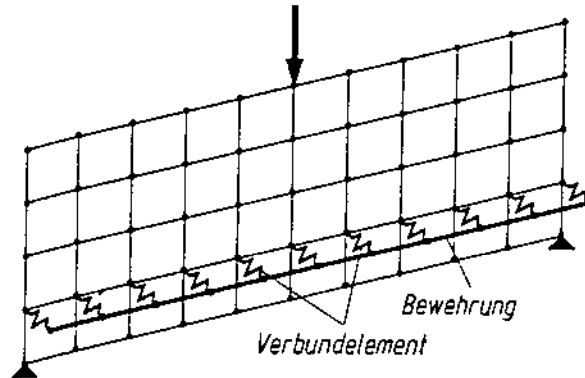
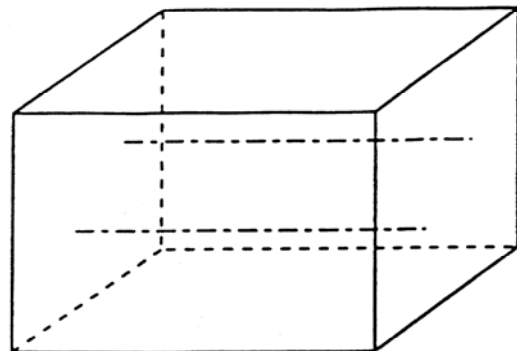


Abbildung 5.2-13: Modellierung des Verbundes zwischen Beton und Bewehrungsstahl mit Federelementen

Betonstahl

Die Geometrie und das Verhalten des Stahls wird im Programm ABAQUS in einem eigenen Materialmodell *REBAR eingegeben. In diesem *REBAR-Modell können sowohl einzelne Stabstähle als auch Stahllagen, in einer Ebene „verschmiert“, angegeben werden (Abbildung 5.2-13).



"single" rebar

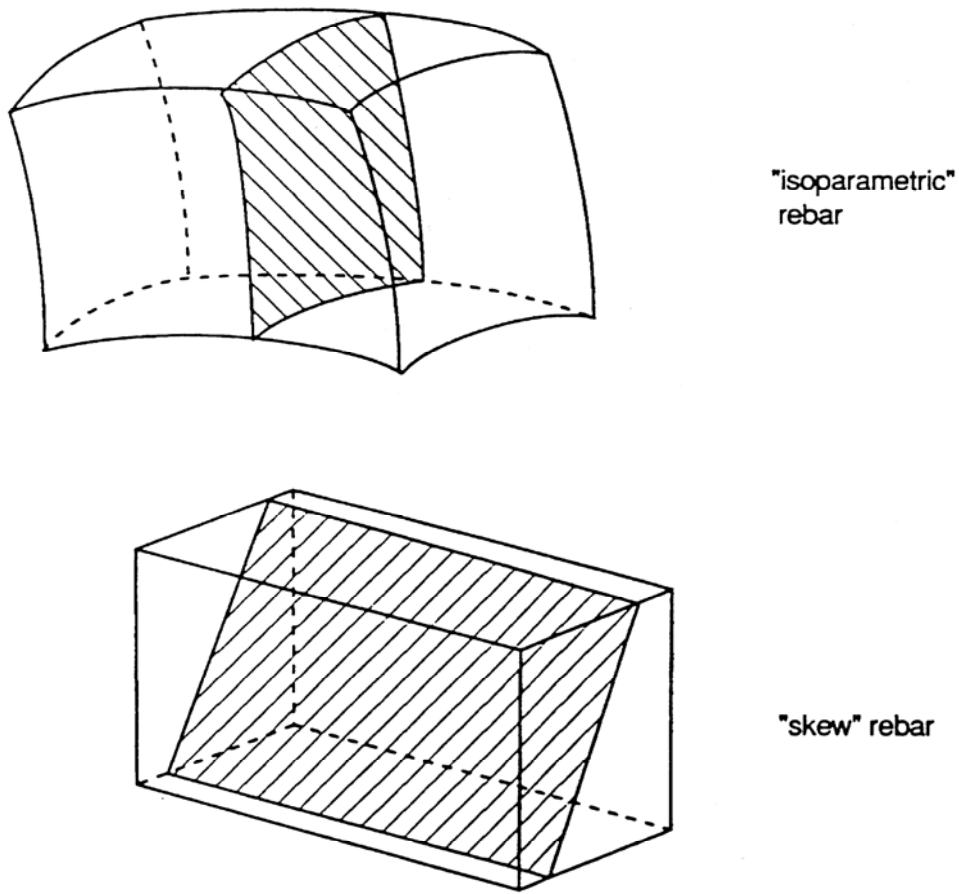


Abbildung 5.2-14: Einige Beispiele zur Anwendung des *REBAR-Moduls [3]

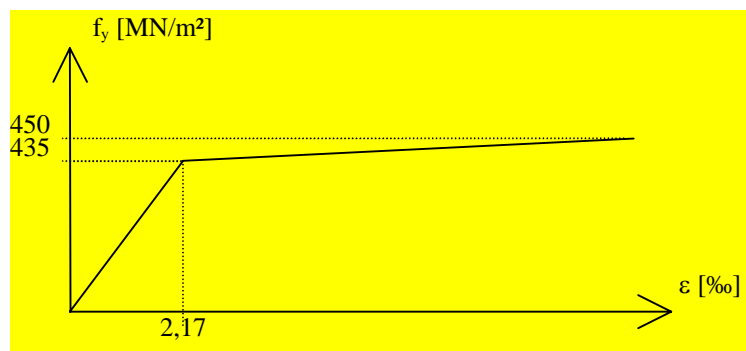


Abbildung 5.2-15: σ - ϵ -Linie für den Bewehrungsstahl S500

Beton (*CONCRETE)

Allgemeines

Das CONCRETE-Modell des Finite-Elemente-Programms ABAQUS besteht aus einem elastisch-plastischen Modell mit einer DRUCKER-PRAGER-Fließbedingung, assoziierter Fließregel und isotroper Verfestigung und gilt für Druckbeanspruchungen bis zur drei- bis vierfachen Druckfestigkeit.

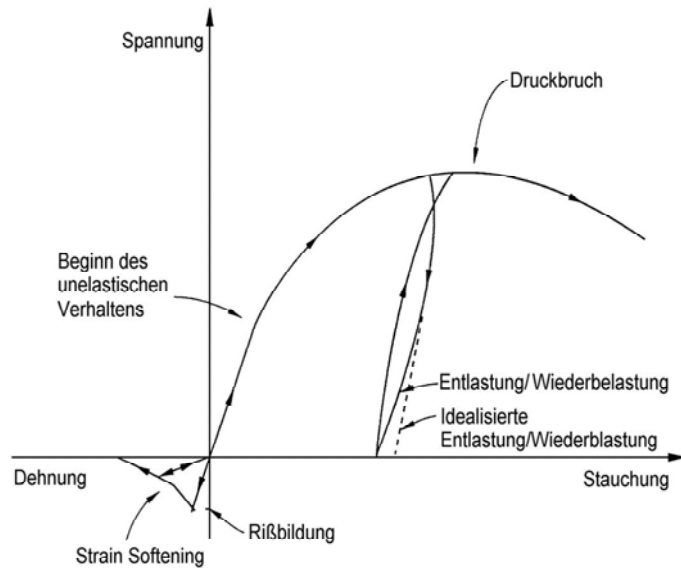


Abbildung 5.2-16: Spannungs-Verzerrungslinie des Betons

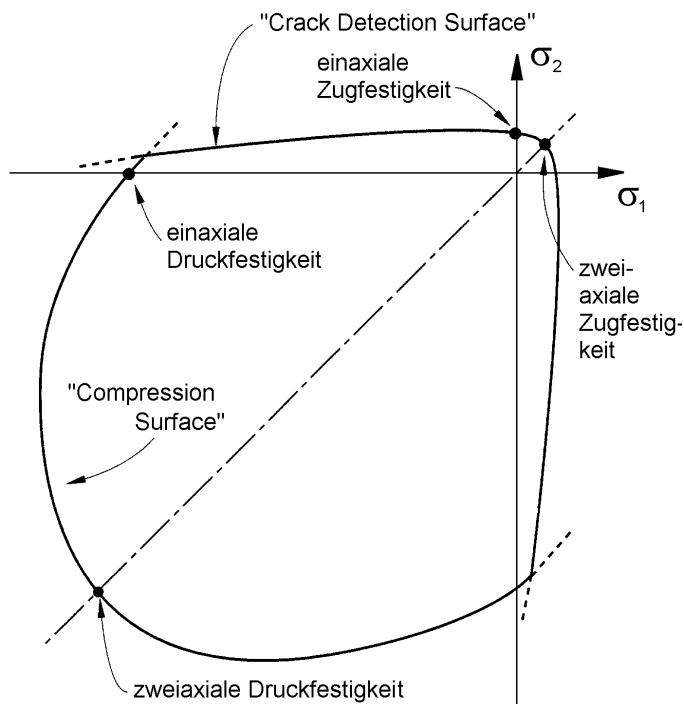


Abbildung 5.2-17: Versagensfläche des ABAQUS-Betonmodells im zweidimensionalen Spannungsraum

Weiterhin enthält das Modell ein verschmiertes Risskonzept für gerissenen Beton. Das Entstehen der Risse wird durch das Überschreiten einer Versagensfläche (*crack detection surface*) angezeigt und führt zum Verlust der elastischen Materialsteifigkeit (*damaged elasticity*). Die veränderten Materialeigenschaften des gerissenen Betons werden mit der *TENSION STIFFENING-Option und der *SHEAR RETENTION-Option erfasst. Die Rissrichtung wird gespeichert und alle Berechnungen in diesem lokalen Risskoordinatensystem durchgeführt. Das Entstehen eines zweiten Risses ist nur senkrecht zum ersten möglich.

Dieses Betonmodell ist ein relativ einfaches Modell, bei dem zugunsten der Rechenintensität auf komplizierte Berechnungsverfahren verzichtet wurde.

Hierzu zählt zum Beispiel die Annahme einer assoziierten Fließregel, mit der plastische Verzerrungen grundsätzlich überschätzt werden. Auch die Annahme einer konstanten elastischen Steifigkeit im druckbeanspruchten Beton ist eine Vereinfachung der Wirklichkeit, da sich unter hoher Druckbeanspruchung auch die elastische Antwort des Materials ändert. Die Annahme einer DRUCKER-PRAGER-Fließfläche bzw. Verfestigungsfunktion ist für den dreiaxial beanspruchten Beton keine gute Approximation der Wirklichkeit. Für eine zweiaxiale Beanspruchung des Betons, was in der Praxis die Mehrzahl aller Fälle darstellt, ist diese Fläche jedoch eine gute Annahme.

Eine weitere wesentliche Vereinfachung des tatsächlichen Materialverhaltens ist die Annahme, dass sich ein zweiter Riss nur senkrecht zum ersten Riss in einem Integrationspunkt bilden kann. Insbesondere auch bei schubbeanspruchten Bauteilen kann sich die Hauptdehnungsrichtung sowohl im Versuch als auch im Laufe der Finite-Elemente-Berechnung ändern.

Dies führt in der Realität zu einer Drehung der Rissenden in die veränderte Hauptdehnungsrichtung. Dieses Phänomen kann mit dem CONCRETE-Modell nicht abgebildet werden und resultiert in einer Überschätzung der Tragfähigkeit.

Die Abminderung der Schubtragfähigkeit mit einer *Shear-Retention*-Funktion stellt eine bewährte Methode zur Beschreibung der Schubübertragung nach Rissbildung dar. Ebenso ist die indirekte Berücksichtigung der Interaktion zwischen Beton und Bewehrung mit der *Tension-Stiffening*-Funktion ein gutes Hilfsmittel zur Beschreibung der Realität.

Bezüglich der Schubtragfähigkeit ist die Abminderung der Druckfestigkeit infolge einer Querkzugbeanspruchung ein wichtiger Faktor.

Das Materialmodell *CONCRETE kann in Balken-, Schalen- und Volumenelementen für bewehrten Beton und unbewehrten Beton verwendet werden.

Im Materialmodell *CONCRETE sind einige Strukturen, zur genaueren Beschreibung des Materialmodells *CONCRETE implementiert, deren Größe man angeben muss (*TENSION STIFFENING) oder deren Größe man angeben kann (*SHEAR RETENTION und *FAILURE RATIOS). Im Folgenden wird die Bedeutung dieser verschiedenen Strukturen kurz beschrieben.

Tension Stiffening

Der *Tension-Stiffening*-Effekt simuliert die Mitwirkung des Betons auf Zug. Hierbei sind die Reibung der Rissufer, der Stahlschlupf und die Dübelwirkung mitzuberrücksichtigen. Im bewehrten Beton übernimmt der Stahl die Zugkräfte, die durch das Aufreißen des Betons frei werden, über Verbund und Dübelwirkung. Dieser *Tension-Stiffening*-Effekt ist im bewehrten Beton maßgebend.

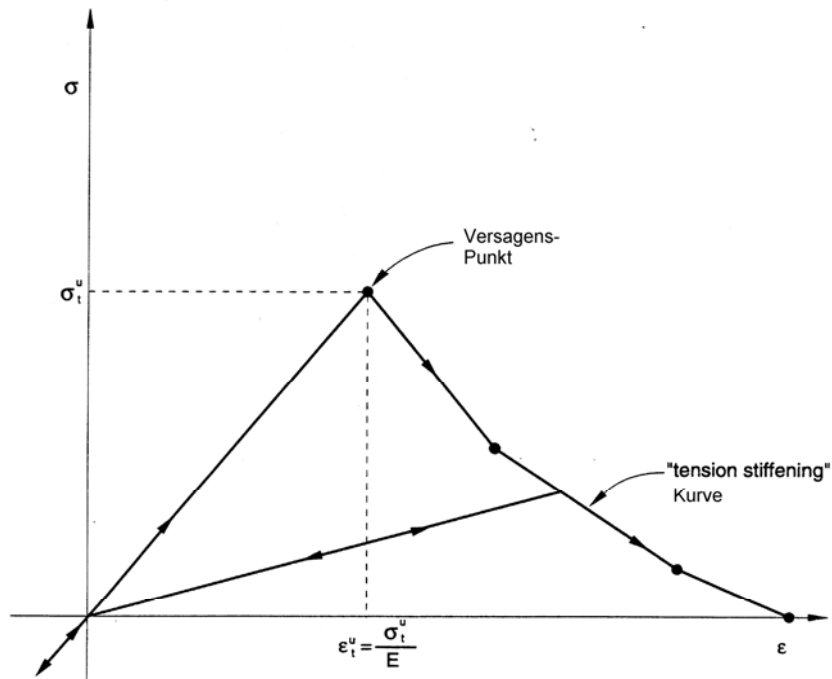


Abbildung 5.2-18: *Tension-Stiffening*-Modell über die Dehnung im Beton nach Rissbildung [2]

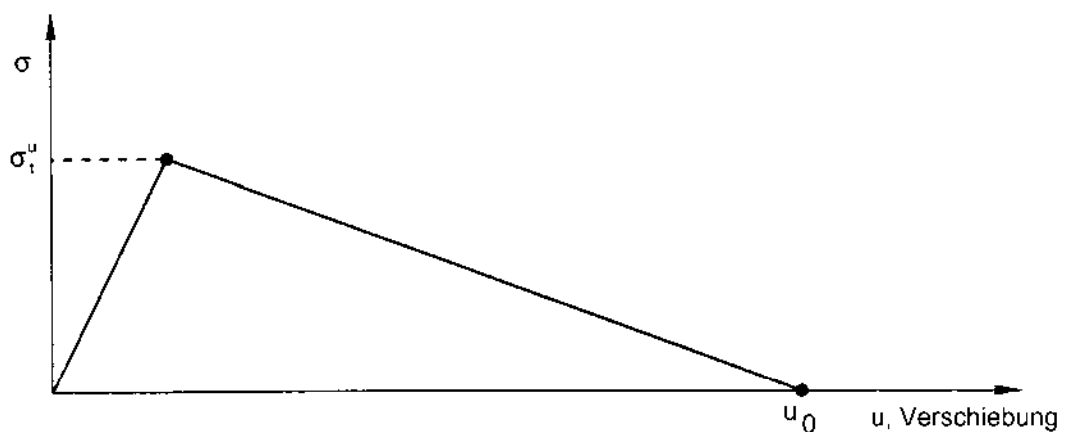


Abbildung 5.2-19: Bruch-Energie-Methode [2]

In der *TENSION STIFFENING-Struktur sind beide Modelle implementiert. Im bewehrtem Beton wird der Spannungsabfall der Betonzugspannung nach Rissbildung als Funktion über die Dehnung senkrecht zur Rissrichtung im Beton angegeben. Dieser Spannungsverlust hängt sowohl von dem Bewehrungsgrad als auch von der Bewehrungsrichtung in Bezug auf die Rissrichtung ab. In schwach- oder unbewehrtem Beton führt dies zur Netzabhängigkeit der Ergebnisse. Abhilfe schafft die Verwendung der Bruchenergie-Methode.

In praktischen Berechnungen für bewehrten Beton ist das Elementnetz so anzulegen, dass jedes Element Bewehrung enthält. Der Verbund zwischen Beton und Betonstahl wird durch den *Tension-Stiffening*-Effekt simuliert. Jedoch ist darauf zu achten, dass eine angemessene Größe des *Tension Stiffening* vorhanden ist, um diesen Verbund zu simulieren.

Die Größe des *Tension Stiffening* ist entscheidend für das Tragverhalten der analysierten Struktur. Bei zu kleinem *Tension Stiffening* kann ein lokaler Riss zu einem instabilen Verhalten des Gesamttragwerks führen. Ein zu großes *Tension Stiffening* führt zu einem unrealistisch steifem Systemverhalten.

Shear Retention

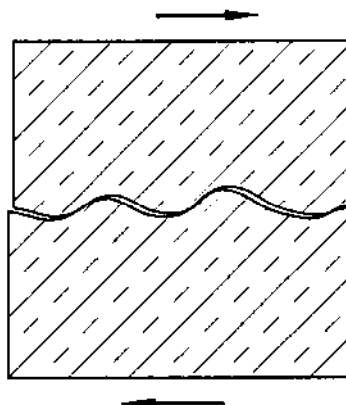


Abbildung 5.2-20: Schubübertragung eines Risses infolge einer gebrochenen Oberfläche

Die für die Schubübertragung in einem offenen Riss verantwortlichen Mechanismen sind:

- Druckstrebenneigung
- Zugkraft in der Bewehrung
- Schubspannungsübertragung auf Grund der gebrochenen Oberfläche und der Reibung
- Verdübelungswirkung der Bewehrung

Welcher dieser Eigenschaften nun eine wesentliche Rolle zukommt, hängt von der Größe und der Art der Struktur, von der Lastanordnung und Lagerung, von der Lastart und der Vorbelastung, sowie von bereits vorhandenen Rissen als auch von Lage und Größe der Bewehrung ab. Es werden

recht komplexe Modelle verwendet, welche die Schubübertragung in Abhängigkeit von dem gegenwärtigen Spannungszustand, der Lage der Bewehrung oder der aktuellen Rissweite und Rissleitung kontrollieren. Meist aber haben sich einfachere Modelle als ausreichend erwiesen, welche die Schubsteifigkeit über eine fiktive Dehnung und den Bewehrungsgehalt steuern (Abbildung 5.2-21).

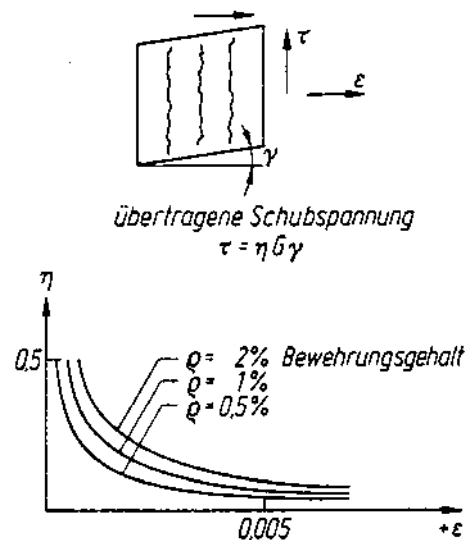


Abbildung 5.2-21: Berechnung der Schubsteifigkeit in Abhängigkeit von Bewehrungsgehalt und Rissdehnung

Im Programm ABAQUS besteht die Möglichkeit, die Schubsteifigkeit, ähnlich wie die Mitwirkung des Betons im *Tension-Stiffening*-Effekt, nach Rissbildung linear auf Null zu reduzieren bei einer vorgegebenen maximalen Dehnung (ϵ_{\max}).

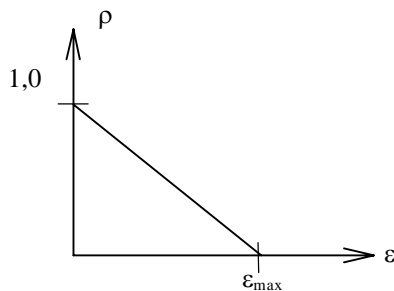


Abbildung 5.2-22: Reduktion des *Tension-Stiffening*-Effektes

Failure Ratios

Die *FAILURE RATIOS-Struktur erlaubt die Definition verschiedener Spannungs- und Dehnungsbeziehungen zueinander. An dieser Stelle wird kurz auf diese Beziehungen eingegangen und ihre im Programm ABAQUS vorgegebenen Werte.

- Das Verhältnis von maximaler zweiachsigen Druckspannung σ_{bc}^u zu maximaler einachsigen Druckspannung σ_c^u :

$$\sigma_{bc}^u / \sigma_c^u = 1,16$$

Dieser Wert entspricht dem von Kupfer [42] angegebenen Versuchsergebnissen.

- Der Absolutwert des Verhältnisses von einachsiger Zugspannung σ_t^u beim Reißen des Betons zur maximalen einachsigen Druckspannung σ_c^u :

$$\sigma_t^u / \sigma_c^u = 0,09$$

Im EC2 ist die mittlere Zugfestigkeit wie folgt definiert:

$$f_{ctm} = 0,30 * f_{ck}^{2/3}$$

- Das Verhältnis der Größe der Hauptkomponente der plastischen Dehnung ε_{bc}^u bei maximaler zweiachsigen Druckspannung zur plastischen Dehnung ε_c^u bei maximaler einachsigen Druckspannung:

$$\varepsilon_{bc}^u / \varepsilon_c^u = 1,28$$

- Das Verhältnis des Hauptzugspannungswertes σ_2 beim Reißen des Betons in der Ebene, wenn die andere Nicht-Null-Hauptspannungskomponente σ_1 den maximalen Druckspannungswert σ_{bc}^u hat, zur Zugspannung σ_t^u beim Reißen des Betons im einachsigen Belastungszustand:

$$\sigma_2 / \sigma_t^u = 1/3 \quad \text{wenn } \sigma_1 = \sigma_{bc}^u$$

5.3 MASA

Das Programm MASA (**MA**cro **S**pace **A**nalysis) ist ein nicht-lineares dreidimensionales FE-Programm zur Untersuchung unterschiedlicher Tragstrukturen. MASA wurde von Dr. J. Ožbolt am Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart entwickelt. Durch das implementierte Microplane-Materialmodell (siehe Abschnitte 3.3.4 und 5.1.3) eignet sich MASA besonders gut für die Simulation von Bruchvorgängen spröder Materialien, wie z.B. Beton.

6 Schlussfolgerungen – Anforderungen an ein wissenschaftliches Finite-Elemente-Programm

Im Folgenden sollen die Anforderungen an ein wissenschaftliches Finite-Elemente-Programm noch einmal stichpunktartig zusammengefasst werden.

Es handelt sich dabei um die Mindestanforderungen, die eine für die realitätsnahe Abbildung und Berechnung von Tragwerken und Bauteilen von einem modernen, zeitgemäßen FE-Programm verlangt werden sollten.

Netzgenerierung

- Die Möglichkeit zur Generierung von ein-, zwei- und dreidimensionalen Systemen mit leistungsfähigen, numerisch stabilen Elementen muss vorhanden sein. Eine hohe Anzahl von Element-Knoten ist allein kein Garant für eine effektive und genaue Lösung, wie der Vergleich von LAGRANGE- und SERENDIPITY-Elementen zeigt.
- Es muss die Option vorhanden sein, an besonders interessanten Stellen eines Bauteils oder Tragwerks das Netz aus Finiten Elementen zur Verbesserung der Ergebnisse verfeinern zu können. Eventuell sind dafür entsprechende (FE-)Übergangselemente zu implementieren.
- Es ist für den Forschungsbereich unabdingbar, dass Bewehrung diskret abgebildet werden kann. Dazu sind geeignete und konfigurierbare Interface-Elemente in der FE-Software vorzusehen.

Werkstoff-/Materialmodelle

- Die Abbildung der Materialien muss die physikalische Nicht-Linearität – insbesondere diejenige des Betons – berücksichtigen und korrekt abbilden.
- Der Einfluss der zeitabhängigen Kenngrößen (z.B. Kriechen und Schwinden für Beton) muss berücksichtigt werden.
- Die Spannungsermittlung sollte auf dem Konzept der nicht-lokalen Bruchmechanik basieren, die besonders bei der Simulation von vorwiegend Querkraft beanspruchten Systemen zu besseren Ergebnissen führt.

(Iterative) Lösungsverfahren

- Die (iterativen) Lösungsverfahren des FE-Programms müssen eine hohe numerische Stabilität aufweisen und effizient implementiert sein, um auch bei großen und nicht standardgemäßen Systemen eine (iterative) Lösung finden zu können.
- Dies lässt sich durch Kombination der bekannten Lösungsverfahren für Lineare Gleichungssysteme und entsprechender Optimierungsalgorithmen („Line-Search“, automatische Schrittweitenfindung) erreichen.
- Als Abbruchkriterium sollte ein Energiekriterium, also eine Kombination aus Kraft- und Verschiebungskriterium, gewählt werden.

7 Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS, Analysis of Concrete Structures with ABAQUS, Hibbitt, Karlsson & Sorenson, Inc., Providence, Rhode Islands, 1992
- [2] ABAQUS-Theory-Manual 5.5, 1995, H, K & S, Inc., Providence, Rhode Island, USA
- [3] ABAQUS-User-Manual 5.5, 1995, H, K & S, Inc., Providence, Rhode Island, USA
- [4] Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben „Untersuchungen zur Duktilität der Verbundmittel bei Anwendung von hochfestem Stahl und hochfestem Beton“; AIF-Nr.: 12124; Studiengesellschaft Stahlanwendung e.V.: Projektnummer P 486/25/99; Aachen, November 2000.
- [5] Al-Mahaidi, R.S.H.: Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Deep Members, Report 79-1, Department of Structural Engineering, Cornell University, 1979
- [6] Argyris, J.H; Scharpf, D.W.: „The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method – Part I: Natural Definition of Geometry and Strains“, Journal of the Aeronautic Society, 1968, Ausg. 73, S. 873-878
- [7] Argyris, J.H; Scharpf, D.W.: „The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method – Part II: Interpolation Scheme and Stiffness Matrix“, Journal of the Aeronautic Society, 1968, Ausg. 73, S. 878-883
- [8] Bathe, K.-J.: „Finiten Elemente Methoden“ (Deutsche Übersetzung); Springer Verlag, Berlin; 1986
- [9] Baehmann, Peggy L.; Wittchen, Scott L.; Shephard, Mark S.; Grice, Kurt R.; Yerry, Mark A.: „Robust Geometrically-based, Automatic Two-Dimensional Mesh Generation“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1987, Ausg. 24, S. 1043-1078
- [10] Bazant, Zdenek P.: „Chapter 3: Microplane Model for Strain Controlled Inelastic Behaviour“, Proc. Mech. of Engrg. Mat.; Desai, C.S. and Gallagher, R.H. (Herausgeber), Wiley, London, 1984, S. 45-59
- [11] Bazant, Zdenek P.; Caner, Ferhun C.; Carol, Ignacio; Adley, Mark D. and Ankers, Stephen A.: „Microplane Model M4 for Concrete – Part I: Formulation with Work-Conjugate Deviatoric Stress“, Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers, 2000, Ausg. 126, Heft 9, S. 944-953
- [12] Bazant, Zdenek P.; Caner, Ferhun C.: „Microplane Model M4 for Concrete – Part II: Algorithm and Calibration“, Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers, 2000, Ausg. 126, Heft 9, S. 954-961
- [13] Belytschko, T.; Tsay, C.: „A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, Ausg. 19, S. 405-419
- [14] Belytschko, T.; Hsieh, B.J.: „Nonlinear Finite Element Analysis With Convected Coordinates“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973, Ausg. 7, S. 255-271
- [15] Betten, Josef: „Finite Elemente für Ingenieure 1“; Springer Verlag; Berlin; 2003; 2. Auflage
- [16] Betten, Josef: „Finite Elemente für Ingenieure 2“; Springer Verlag; Berlin; 2003; 2. Auflage

- [17] Beutel, R.: Sicherheit gegen Durchstanzen von schubbewehrten Flachdecken, AiF Forschungsvorhaben Nr. 10644-N (DBV 185), Nov. 1998
- [18] Beutel, R.: Widerstand gegen das Durchstanzen an Decken-Stützen-Verbindungen, Diplomarbeit am Lehrstuhl und Institut für Massivbau der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1994
- [19] Blacker, Ted D.; Stephenson, Michael B.: „Paving: A New Approach to Automate Quadrilateral Mesh Generation“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, Ausg. 32, S. 811-847
- [20] Blacker, Ted D.; Myers, R. J.: „Seams and Wedges in Plastering: A 3D Hexahedral Mesh Generation Algorithm“, Engineering With Computers, 1991, Ausg. 2, S. 83-93
- [21] Brameshuber, Prof. Dr.-Ing. W.: Umdruck der Baustoffkunde Vertiefervorlesung, Abschnitt Massenbeton, 1999
- [22] Campi, E.; Eligehausen, R.; Bertero, V.V.; Popov, E.P.: Analytical Model for Concrete Anchorages of Reinforcing Bars under Generalized Excitations. Earthquake Engineering Research Center, Report No. UCB/EERC 82/23, University of California, Berkeley, 1982
- [23] Chen, W.F.: „Plasticity in Reinforced Concrete“, McGraw-Hill Book Company, 1982
- [24] Chew, Paul L.: „Guaranteed-Quality Triangular Meshes“, TR 89-983, Department of Computer Science - Cornell University; Ithaca (NY); 1989
- [25] Canann, Scott A.: „Plastering and Optismoothing: New Approaches to Automated, 3D Hexahedral Mesh Generation and Mesh Smoothing“, Dissertation, Brigham Young University, Provo, UT, 1991
- [26] Comité Européen de Normalisation: Eurocode 4 (EC 4): Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton - Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln, Bemessungsregeln für den Hochbau, Deutsche Fassung: ENV 1994-1-1: 1992. Februar 1994
- [27] Comité Européen de Normalisation: Eurocode 2 (EC 2): Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken - Teil 1-1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau, Deutsche Fassung ENV 1992-1-1: 1991. Juni 1992
- [28] Comité Euro-International du Béton (CEB): CEB-FIP Model Code 1990 (MC 90). 1993
- [29] Cosserat, E.; Cosserat F.: „Theorie des Corps Deformables“, Traite de Physique (2. Ausgabe), Choulson (Herausgeber); Paris, 1999, S. 953-1173
- [30] Delaunay, Boris N.: „Sur la Sphere“ Vide. Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk, 1934, Vol. 7, S. 793-800
- [31] Deutsches Institut für Bautechnik: Allgemeine bauaufsichtliche Zulassung Nr. Z-15.1-84: Durchstanzbewehrung System HDB-N, 14.05. 2001, Gültigkeitsdauer bis 31.08.2002
- [32] DiMaggio, F.L.; Sandler, I.S.: „Material Models for Granular Solids“, Journal of Engineering Mechanics (Division), American Society of Civil Engineers (ASCE), 1971, Ausg. 97, S. 935-950
- [33] Döinghaus, Peter: Zum Zusammenwirken hochfester Baustoffe in Verbundträgern - Dissertation am Lehrstuhl und Institut für Massivbau RWTH Aachen. S. 200. 2001. (unveröffentlicht)

- [34] Furche, J.: Zum Trag- und Verschiebungsverhalten von Kopfbolzen bei zentrischem Zug, Institut für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart, genehmigte Dissertation, 1994
- [35] Hegger, J.; Beutel, R.; Bertram, G.: Ausziehversuche zum Verankerungsverhalten von Doppelkopfkankern mit und ohne angeschweißte Querstäbe bei Variation der Einbindetiefe. Hegger und Partner, Versuchsbericht V01-03, 2001 (unveröffentlicht)
- [36] Hillerborg, A., Modéer, M., Peterson, P.E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. Cement Concrete Research, Vol. 6, pages 773-782, 1976
- [37] Jirasek, Milan: „Modeling of Fracture and Damage in Quasibrittle Materials“, (PhD) Dissertation, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1993
- [38] Kapania, R.K.; Raciti, S.: „Recent Advances in Analysis of Laminated Beams and Plates – Part I: Shear Effects and Buckling“; AIAA Journal, 1989, Ausg. 27, 923-934
- [39] Kerkeni, Naceur: „Zur Anwendung der FE-Methode bei spritzbetonverstärkten Stützen“; Dissertation; Lehrstuhl und Institut für Massivbau - RWTH Aachen; Aachen, 2000
- [40] Krätzig, Wilfried; Pölling, Rainer: „Modellierungsprinzipien von Beton“; Baustatik-Baupraxis 7, S. 295-304; Meskouris, Konstantinos (Hrsg.); Balkema, Rotterdam; 1999
- [41] Krätzig, Wilfried; Pölling, Rainer: „Elasto-Plastic Damage-Theories and Elasto-Plastic Fracturing-Theories - A Comparison“; Comp. Mat. Science, 1998, Ausg. 13, S. 117-131
- [42] Kupfer, H.: Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbeanspruchung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung, Heft 229 des DAfStb, Ernst & Sohn, Berlin 1973
- [43] Li, T.S.; McKeag, R.M.; Armstrong, C.G.: „Hexahedral Meshing Using Midpoint Subdivision and Integer Programming“, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, Ausg. 124, S. 171-193
- [44] Lo, S.H.: „Volume Discretization into Tetrahedra I - Verification and Orientation of Boundary Surfaces“; Computers and Structures, 1991, Ausg. 39, Nr. 5, S. 493-500
- [45] Lo, S.H.: „Volume Discretization into Tetrahedra II - 3D Triangulation by Advancing Front Approach“, Computers and Structures, 1991, Ausg. 39, Nr. 5, S. 501-511
- [46] Lohner, Rainald; Parikh, Paresh; Gumbert, Clyde: „Interactive Generation of Unstructured Grid for Three Dimensional Problems“, Numerical Grid Generation in Computational Fluid Mechanics, S. 687-697; Pineridge Press; 1988
- [47] Lohner, Rainald: „Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique“, Engineering with Computers, 1996, Ausg. 12, S. 186-210
- [48] Mancevski, D.: „Nicht-lineare Analyse von Stahlbetontragewerken mit konsistenten Simulationsalgorithmen“; Dissertation; Lehrstuhl für Statik und Dynamik - Ruhr-Universität Bochum; Bochum, 1998
- [49] MSC Software, MSC.Marc: <http://www.marc.com/>
- [50] Marcum, David L.; Weatherill, Nigel P.: „Unstructured Grid Generation Using Iterative Point Insertion and Local Reconnection“, AIAA Journal, 1995, Ausg. 33, Heft 9, S. 1619-1625

- [51] Mehlhorn, G.; Kolleger, J.: Anwendung der Finite Elemente Methode im Stahlbetonbau, Der Ingenieurbau, Rechenorientierte Baumechanik, Ernst und Sohn, 1995
- [52] Mindlin, R.D.: „Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates“, Journal of Applied Mechanics, 1951, Ausg. 18, S. 31-38
- [53] Murdoch, Peter; Benzley, Steven E.: „The Spatial Twist Continuum“, Proceedings, 4th International Meshing Roundtable, Sandia National Laboratories, 1995, S. 243-251
- [54] Normenausschuss Bauwesen im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.: DIN 1045: Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung, Juli 1988
Betten, Josef: „Finite Elemente für Ingenieure 1“; Springer Verlag; Berlin; 2003; 2. Auflage
- [55] Normenausschuss Bauwesen im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.: DIN 1045-1 Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 1: Bemessung und Konstruktion. S. 148. Juli 2001
- [56] Normenausschuss Bauwesen im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.: DIN 4227 Teil 1, Spannbeton: Bauteile aus Normalbeton mit beschränkter oder voller Vorspannung, Ausgabe Dez. 1979
- [57] Ottosen, N.S.: „A Failure Criterion for Concrete“, Journal of Engineering Mechanics (Division), American Society of Civil Engineers, 1977, Ausg. 103, EM4, S. 527-535
- [58] Ottosen, N.S.: „Constitutive Model for Short-time Loading of Concrete“, Journal of Engineering Mechanics (Division), American Society of Civil Engineers (ASCE), 1979, Ausg. 105, EM1, S. 127-141
- [59] Owen, Steven J.: „A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology“ (<http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/survey/>); Department of Civil and Environmental Engineering, Sandia National Laboratories, Albuquerque (NM); 1998
- [60] Owen, Steven J.; Staten, Matthew L.; Canann, Scott A. and Saigal, Sunil: „Advancing Front Quad Meshing Using Local Triangle Transformations“, Proceedings, 7th International Meshing Roundtable, 1998
- [61] Price, M.A.; Armstrong, C.G.: „Hexahedral Mesh Generation by Medial Surface Subdivision: Part I“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, Ausg. 38(19), S. 3335-3359
- [62] Price, M.A.; Armstrong, C.G.: „Hexahedral Mesh Generation by Medial Surface Subdivision: Part II“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, Ausg. 40, S. 111-136
- [63] Ramm, Ekkehard: Finite Elemente – Skripte zur Vorlesung; Institut für Baustatik – Universität Stuttgart; Stuttgart, 1999/2000
- [64] Ramm, Ekkehard: „From Reissner Plate Theory to Three Dimensions in Large Deformation Shell Analysis“, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2000, Ausg. 80 (1), S. 61-68
- [65] Rebay, S.: „Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm“, Journal Of Computational Physics, 1993, Ausg. 106, S. 125-138

- [66] Reissner, E.: „A Note on Variational Theorems in Elasticity“, International Journal of Solids and Structures, 1965, Ausg. 1, S. 93-95
- [67] Reissner, E.: „On the Theory of Bending of Elastic Plates“, Journal of Math. Physics, 1944, Ausg. 23, S. 184-191
- [68] Reissner, E.: „The Effect of Transverse Shear Deformations on the Bending of Elastic Plates“, Journal of Applied Mechanics, 1945, Ausg. 12, S. A69-A77
- [69] Richart, F.; Brandtzoeg, A.; Brown, R.: „The Failure of Plain and Spirally Reinforced Concrete in Compression“, Bulletin No. 190, University of Illinois, 1929
- [70] Ruppert, Jim: „A New and Simple Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation“; Technical Report UCB/CSD 92/694; University of California at Berkely, Berkely (CA); 1992
- [71] Schickert, G.; Winkler, H.: „Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung von Beton bei mehraxialer Druckbeanspruchung“, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton (DAfStB), Heft 277, Berlin
- [72] Sargin, M.: „Stress-Strain Relationship for Concrete and Analysis of Structural and Analysis of Strucural Concrete Section“; Study No. 4, Solid Mechanics Division, University of Waterloo; Waterloo, Ontario, Canada; 1971
- [73] Sedlacek, G., Hegger, J.; Döinghaus, P.: Use of High Strength Steel S460, Kapitel 6 des Abschlussberichtes zum ECSC Project No. 7210-SA, Institut für Massivbau, RWTH Aachen, 2000.
- [74] Schneiders, Robert: „A Grid-Based Algorithm for the Generation of Hexahedral Element Meshes“, Engineering With Computers, 1996, Ausg. 12, S. 168-177
- [75] Shephard, Mark S.; Yerry, Mark A.: „Three-Dimensional Mesh Generation by Modified Oc-tree Technique“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1984, Ausg. 20, S. 1965-1990
- [76] Shephard, Mark S.; Georges, Marcel K.: „Three-Dimensional Mesh Generation by Finite Oc-tree Technique“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, Ausg. 32, S. 709-749
- [77] Simo, J.C.; Rifai, M.S.: „A Class of Mixed Assumed Strain Method of Incompatible Modes“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, Ausg. 29, S. 1595-1538
- [78] Simo, J.C.; Armero, F.; Taylor, R.L.: „Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Finite Elements or 3D Finite Deformation Problems“, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, Ausg. 110, S. 359-386
- [79] Talbert, J.A.; Parkinson, A.R.: „Development of an Automatic, Two Dimensional Finite Element Mesh Generator using Quadrilateral Elements and Bezier Curve Boundary Definitions“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, Ausg. 29, S. 1551-1567
- [80] Tam, T.K.H.; Armstrong, C.G.: „2D Finite Element Mesh Generation by Medial Axis Subdivision“, Advances in Engineering Software, 1991, Ausg. 13, S. 313-324
- [81] Tautges, Timothy J.; Blacker, Ted; Mitchell, Scott: „The Whisker-Weaving Algorithm: A Connectivity Based Method for Constructing All-Hexahedral Finite Element Meshes“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, Ausg. 39, S. 3327-3349

- [82] Taylor, G.I.: „Plastic Strain in Metals“, J. Inst. of Metals, London, 1938, Ausg. 62, S. 307-324
- [83] Taylor, R.L.; Beresford, P.J.; Wilson, E.L.: „A Non-Conforming Element for Stress Analysis“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, Ausg. 10, S. 1211-1219
- [84] Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton. In: Beton- und Stahlbetonbau, H. 10 und 11
- [85] Vecchio, F.; Collins, M.P.: The response of concrete to in-plane shear and normal stresses, Dept. of Civil Eng., Publication 82-03, University of Toronto, 1982
- [86] Wilson, E.L.; Taylor, R.L.; Doherty, W.P.; Ghaboussi, J.: „Incompatible Displacement Models“, Numerical and Computer Models in Structural Mechanics; Fenves, S.J.; Perrone, N.; Robinson, A.R.; Schnobrich, W.C. (Herausgeber); Academic Press, New York, 1973, S. 43-57
- [87] Wriggers, Peter: „Nicht-lineare Finite-Element-Methoden“; Springer-Verlag; 2001
- [88] Wriggers, P.; Hueck, U.: „On the Stabilization of the Rectangular 4-Node Quadrilateral Element“, Communications in Numerical Methods in Engineering, 1994, Ausg. 10, S. 555-563
- [89] Wriggers, P.; Hueck, U.; Reddy, B.D.: „A Formulation for the 4-Node Quadrilateral Element“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, Ausg. 38, S. 3007-3037
- [90] Yang, Henry: „A Survey of Recent Finite Shell Elements“; International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, Ausg. 47, S. 101-127
- [91] Zdenek P. Bažant, Goangseup Zi: Microplane constitutive model for porous isotropic rocks, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 27, 2003
- [92] Zdenek P. Bažant, Ferhun C. Caner, Ignacio Carol, Mark D. Adley, Stephen A. Akers: Microplane Model M4 for concrete, 2: Algorithm and calibration, Journal of Engineering Mechanics, 2000
- [93] Zhu, J.Z.; Zienkiewicz, O.C.; Hinton, E.; Wu, J.: „A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation“, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, Ausg. 32, S. 849-866
- [94] Zienkiewicz, O.C.: „Methode der Finiten Elemente“; Carl Hanser Verlag, München, 1984

Anhang: Beispiele für FE-Berechnungen

Anhang: Beispiele für FE-Berechnungen

A LIMFES	A.0
A.1 FE-Simulationen zu Verbundträgern	A.0
A.1.1 Projektart	A.0
A.1.2 Kurzbeschreibung	A.0
A.1.3 Verwendete Elemente	A.0
A.1.4 Verwendete Materialgesetze	A.1
A.1.5 Ergebnisse	A.1
A.2 Modellkörperversuche eines DFG Forschungsvorhabens	A.3
A.2.1 Projektart	A.3
A.2.2 Kurzbeschreibung	A.3
A.2.3 Verwendete Elemente	A.4
A.2.4 Verwendete Materialgesetze	A.4
A.2.5 Ergebnisse	A.4
Implementierung in die Single-Push-Out-Tests (SPOT)	A.4
Implementierung in die Push-Out-Versuche (PO)	A.6
Implementierung in die Pull-Out-Tension-Versuche (POT)	A.8
A.3 Simulationen zum Durchstanzen im Bereich von Randstützen	A.9
A.3.1 Projektart	A.9
A.3.2 Kurzbeschreibung	A.9
A.3.3 Verwendete Elemente	A.10
A.3.4 Verwendete Materialgesetze	A.10
A.3.5 Ergebnisse	A.10
A.4 Untersuchungen zum Pull-Out-Verhalten von Doppelkopfkankern	A.13
A.4.1 Projektart	A.13
A.4.2 Kurzbeschreibung	A.13
A.4.3 Verwendete Elemente	A.13
A.4.4 Verwendete Materialgesetze:	A.15
A.4.5 Ergebnisse	A.16
A.5 Durchstanztragfähigkeit einer Flachdecke mit Stahleinbauteil	A.18
A.5.1 Projektart	A.18
A.5.2 Kurzbeschreibung	A.19
A.5.3 Verwendete Elemente:	A.19
A.5.4 Verwendete Materialgesetze	A.20
A.5.5 Ergebnisse	A.21
A.6 Fernbahnhof Frankfurt	A.25
A.6.1 Projektart	A.25
A.6.2 Kurzbeschreibung	A.25
A.6.3 Verwendete Elemente	A.25
A.6.4 Verwendete Materialgesetze	A.26
A.6.5 Ergebnisse:	A.26

A.7 Gutachten Speditionsstrasse Düsseldorf	A.28
A.7.1 Projektart	A.28
A.7.2 Kurzbeschreibung	A.28
A.7.3 Verwendete Elemente	A.28
A.7.4 Verwendete Materialgesetze	A.30
A.7.5 Ergebnisse	A.31
B ABAQUS	B.1
B.1 Lasterhöhungsfaktoren bei Flachdecken	B.1
B.1.1 Projektart	B.1
B.1.2 Kurzbeschreibung	B.1
B.1.3 Verwendete Elemente	B.2
Das Federelement SPRING1	B.4
Das Schalenelement S8R	B.4
Abbildung der Bewehrung	B.5
B.1.4 Verwendete Materialgesetze:	B.5
Eigenschaften des Betons	B.5
Verwendetes Werkstoffgesetz für den Stahl	B.6
B.1.5 Ergebnisse:	B.7
B.2 Simulation eines Schubtragversuchs mit Hilfe des Finite-Elemente-Programms ABAQUS	B.11
B.2.1 Projektart	B.11
B.2.2 Kurzbeschreibung	B.11
B.2.3 Verwendete Elemente	B.13
B.2.4 Verwendete Materialgesetze	B.14
B.2.5 Ergebnisse	B.16
C MASA	C.1
C.1 Finite-Elemente-Simulation des Durchstanzbereiches schubbewehrter Flachdecken	C.1
C.1.1 Projektart	C.1
C.1.2 Kurzbeschreibung	C.1
C.1.3 Verwendete Elemente	C.1
C.1.4 Verwendete Materialgesetze	C.3
C.1.5 Ergebnisse	C.3
Untersuchung des Verankerungsverhaltens der Bügelbewehrung	C.3
Verifikation eines Durchstanzversuchs mit Bügelbewehrung	C.4

A LIMFES

A.1 FE-Simulationen zu Verbundträgern

A.1.1 Projektart

Forschungsvorhaben [4], [73] zur Tragfähigkeit von Verbundträgern

A.1.2 Kurzbeschreibung

Am Institut für Massivbau (IMB) der RWTH Aachen wurden Versuche aus eigenen Forschungsvorhaben und der Literatur nachgerechnet. Parameterstudien auf der Grundlage von FE-Berechnungen bildeten die Basis zur Erstellung moderner Bemessungsregeln und erlauben eine genaue und auf die entscheidenden Parameter abgestimmte Versuchsplanung. Ziel der numerischen Simulation von Verbundträgern und Verbundprofilen war die Abbildung des globalen Tragverhaltens, wie z.B. die Querschnittstragfähigkeit und der Lastverformungskurve. Weiterhin wurde das lokale Tragverhalten, wie z.B. das Einschnüren der Betondruckzone, die Schubkraftumlagerungen in der Verbundfuge, die Aktivierung des Kammerbetons durch planmäßige Verdübelung und unplanmäßigen Verbund infolge Reibung, das Beulen des Stahlprofils, die Beanspruchung im Bereich von Stegöffnungen untersucht.

A.1.3 Verwendete Elemente

Die Verbundfuge wurde mit Hilfe von Interfaceelementen abgebildet und an den am IMB durchgeführten Push-Out-Versuchen [4] kalibriert. Die Funktion des Schubspannungs-Schlupf-Verlaufes wurde durch das Materialgesetz der Interfaceelemente bereichsweise abgebildet (Abbildung A-1).

In den numerischen Simulationen konnten gute Übereinstimmungen mit den Ergebnissen der Push-Out-Versuche erzielt werden.

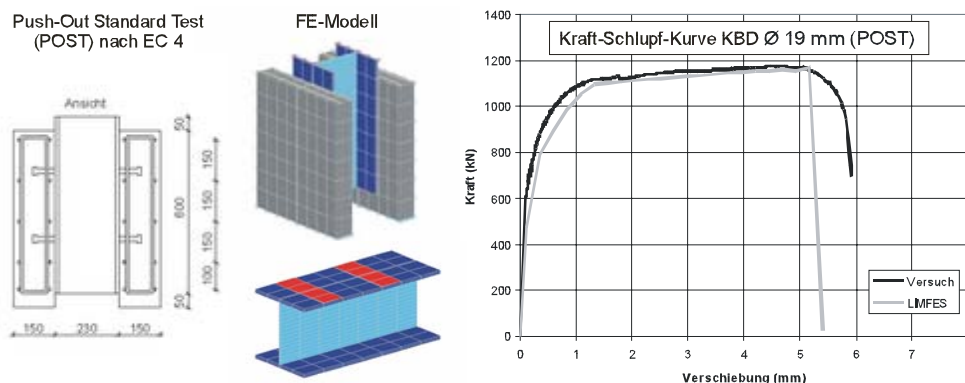


Abbildung A-1: Simulation von Standard-Push-Out-Versuchen nach EC 4 [26]

Beton und Baustahl wurden durch 8-Knoten-Volumenelemente diskretisiert. Die Bewehrung wurde durch 2-Knoten-Fachwerkelemente abgebildet. Durch eine den erwarteten Versagensmechanismen angepasste Netzgenerierung und die Ausnutzung der Symmetrie wurden die Simulationen im Bezug auf Genauigkeit und Rechenzeit optimiert (Abbildung A-2).

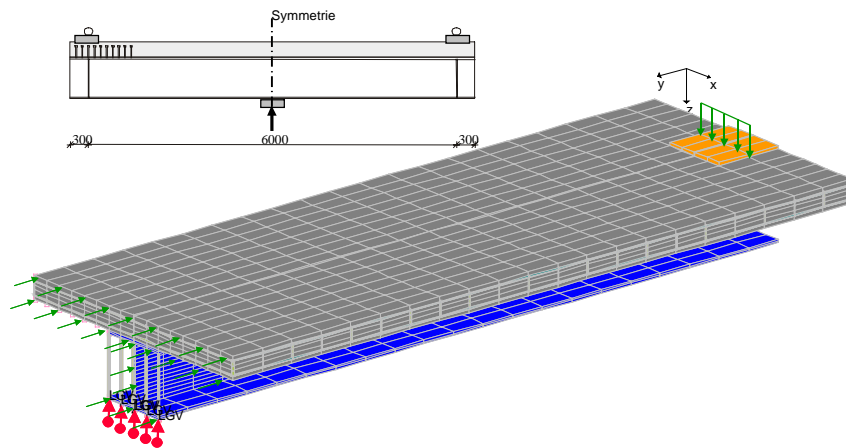


Abbildung A-2: Einfeldträger unter negativer Momentenbeanspruchung im FE-Modell

A.1.4 Verwendete Materialgesetze

Den Elementen des Stahlträgers wurde das Versagenskriterium nach VON MISES zugewiesen. Dies ist ein elasto-plastisches Materialgesetz mit bilinearem Spannungs-Dehnungs-Verlauf. Bis zum Erreichen der Streckgrenze verhält sich der Werkstoff linearelastisch, bei weiterer Belastung ist er bis zum Bruch einer linearen Verfestigung unterworfen.

Dem Beton wurde das Versagenskriterium nach OTTOSEN zugeordnet. Das Verhalten der diskret abgebildeten Bewehrungselemente unter Belastung wurde mit einem bilinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf charakterisiert.

A.1.5 Ergebnisse

In der Simulation des Verbundträgers „B100“ unter positiver Momentenbeanspruchung wurden die Anfangssteifigkeit und der Versagensmechanismus ausreichend genau erfasst. Maßgebend war das Biegedruckversagen des Betonobergurtes.

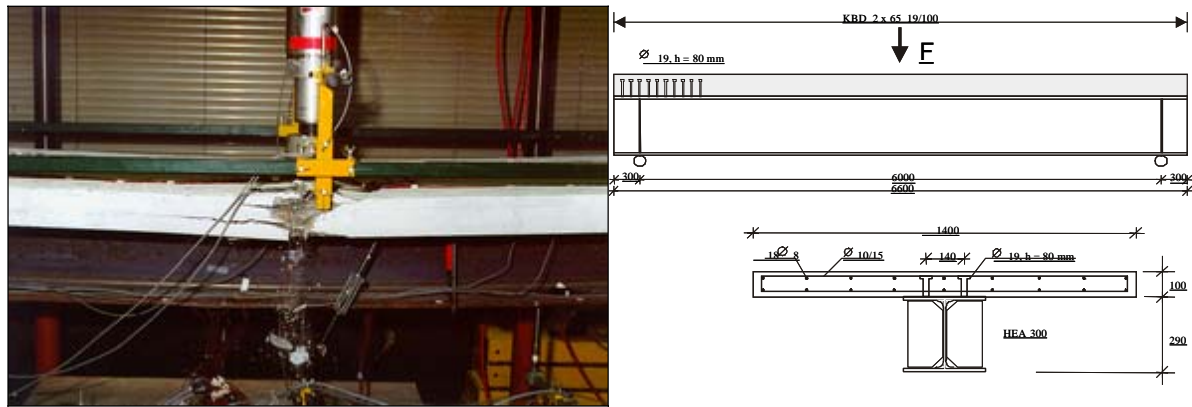


Abbildung A-3: Versagen der Betondruckzone des Verbundträgers „B100“ unter positiver Momentenbeanspruchung

In der Simulation wurde eine 10% größere Bruchlast als im Versuch erreicht. Ein Grund für diese Abweichungen können die in den Materialprüfungen an einer Zugprobe ermittelten Überfestigkeiten des hochfesten Profilsstahls S460 sein, die im Biegeversuch nicht in dieser Größenordnung auftraten. Der Schubkraftverlauf der Verbundfuge entlang der Trägerachse konnte in den Versuchen messtechnisch nicht erfasst werden. Die in der Simulation ermittelten Schubkraftverläufe (100 % bzw. 135 % $\cdot M_{Rd, pl}$) stimmen allerdings mit den Erkenntnissen kürzlich veröffentlichter Forschungsberichte [33] überein. In Abbildung A-4 ist der Verlauf der Schubspannungen für die Laststufen 100% und 135% $M_{pl,Rd}$ dargestellt.

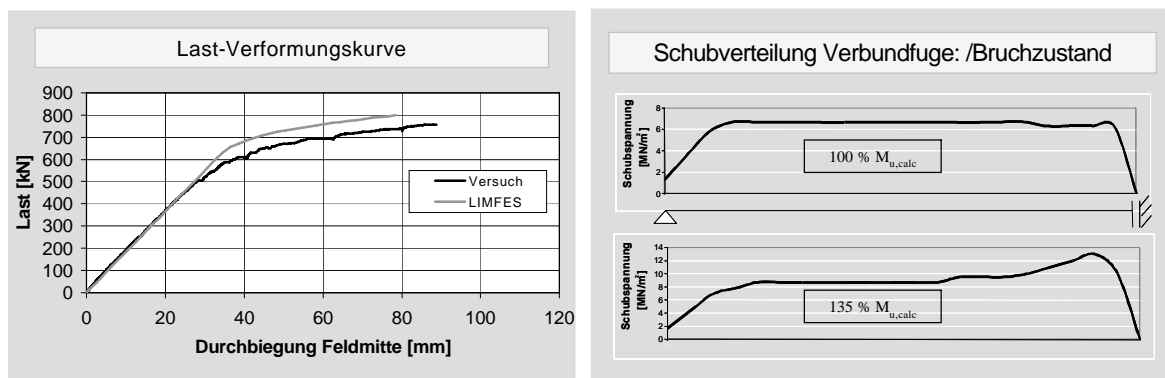


Abbildung A-4: Lastverformungskurve und Schubkraftverlauf des Verbundträgers „B100“ im Versuch und in LIMFES

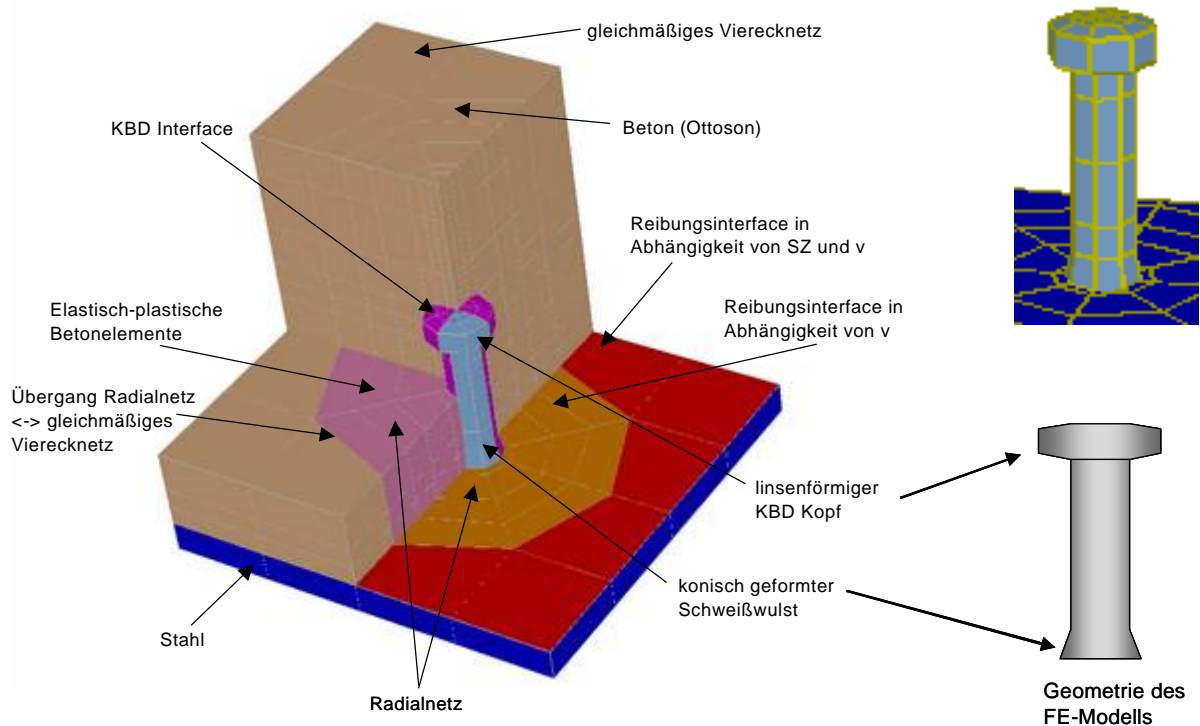


Abbildung A-5: FE-Modell eines Kopfbolzendübels \varnothing 19mm

A.2 Modellkörperversuche eines DFG Forschungsvorhabens

A.2.1 Projektart

Forschungsvorhaben [4], [73] zur Tragfähigkeit von Verbundmitteln

A.2.2 Kurzbeschreibung

In den von der DFG geförderten Forschungsvorhaben [4] und [73], wurde das Verhalten des Kammerbetons und seiner Verbundmittel in Modellversuchen untersucht. Im Rahmen des Forschungsvorhabens wurden Modellversuche (Push-Out-Standard-Tests (POST), Single-Push-Out-Tests (SPOT), Push-Out- (PO), Push-Out-Compression- (POC) und Pull-Out-Tension- (POT) Versuche) zur Untersuchung der Verbundsicherung kammerbetonierter Stahlprofile durchgeführt. Die Versuchsergebnisse stellten die Grundlage zur Kalibrierung von FE-Berechnungen dar. Die numerischen Simulationen wurden genutzt, um die Lastabtragungsmechanismen der einzelnen Modellversuche aufzudecken und deren Einfluss auf die gemessenen Last-Verformungs-Beziehungen aufzuzeigen.

A.2.3 Verwendete Elemente

Um das komplexe Last-Verformungs-Verhalten und den Bruchmechanismus von Kopfbolzendübel in HSC zu ermitteln, wurde eine nichtlineare FE-Simulation mit LIMFES durchgeführt. Das FE-Modell bestand aus 8-Knoten-Volumenelementen (Abbildung 2-17).

Zur Verbindung der Stahl-Volumenelemente des Kopfbolzendübels mit den umgebenden Betonelementen wurden Interfaceelemente eingesetzt. Diese Interfaceelemente wurden so definiert, dass sie nur Druckkräfte weiterleiteten. Es waren daher keine Schub- und Zugkräfte zwischen den Kopfbolzendübel- und den Betonelementen möglich.

A.2.4 Verwendete Materialgesetze

Den Elementen des Kopfbolzendübels wurde das Versagenskriterium nach VON MISES zugewiesen. Dies ist ein elasto-plastisches Materialgesetz mit bilinearem Spannungs-Dehnungs-Verlauf. Bis zum Erreichen der Streckgrenze verhält sich der Werkstoff linearelastisch, bei weiterer Belastung ist er bis zum Bruch einer linearen Verfestigung unterworfen.

Dem Beton wurde das Versagenskriterium nach OTTOSEN zugeordnet. Die Betonelemente in der Umgebung des Schweißwulstes, die großen Druckkräften ausgesetzt sind, wurden durch ein elastisch-plastisches Materialgesetz abgebildet. Die Versuchsergebnisse aus [33] zeigten, dass der Beton in diesem Bereich infolge des mehraxialen Spannungszustandes, Druckfestigkeiten erreicht, die bis zu 1,8-mal größer sind als unter einachsiger Beanspruchung. Dies wurde berücksichtigt indem man den elastisch-plastischen Betonelementen eine Druckfestigkeit von 175 N/mm² zuordnete.

A.2.5 Ergebnisse

Implementierung in die Single-Push-Out-Tests (SPOT)

Das beschriebene FE-Modell wurde zur Simulation der am IMB durchgeführten SPOT Versuche [4] verwendet. In Abbildung A-6 ist der schematische Aufbau der SPOT Versuche sowie die Umsetzung als FE-Modell mit LIMFES dargestellt. Die Lagerungsbedingungen entsprachen den Bedingungen des SPOT (Abbildung A-8).

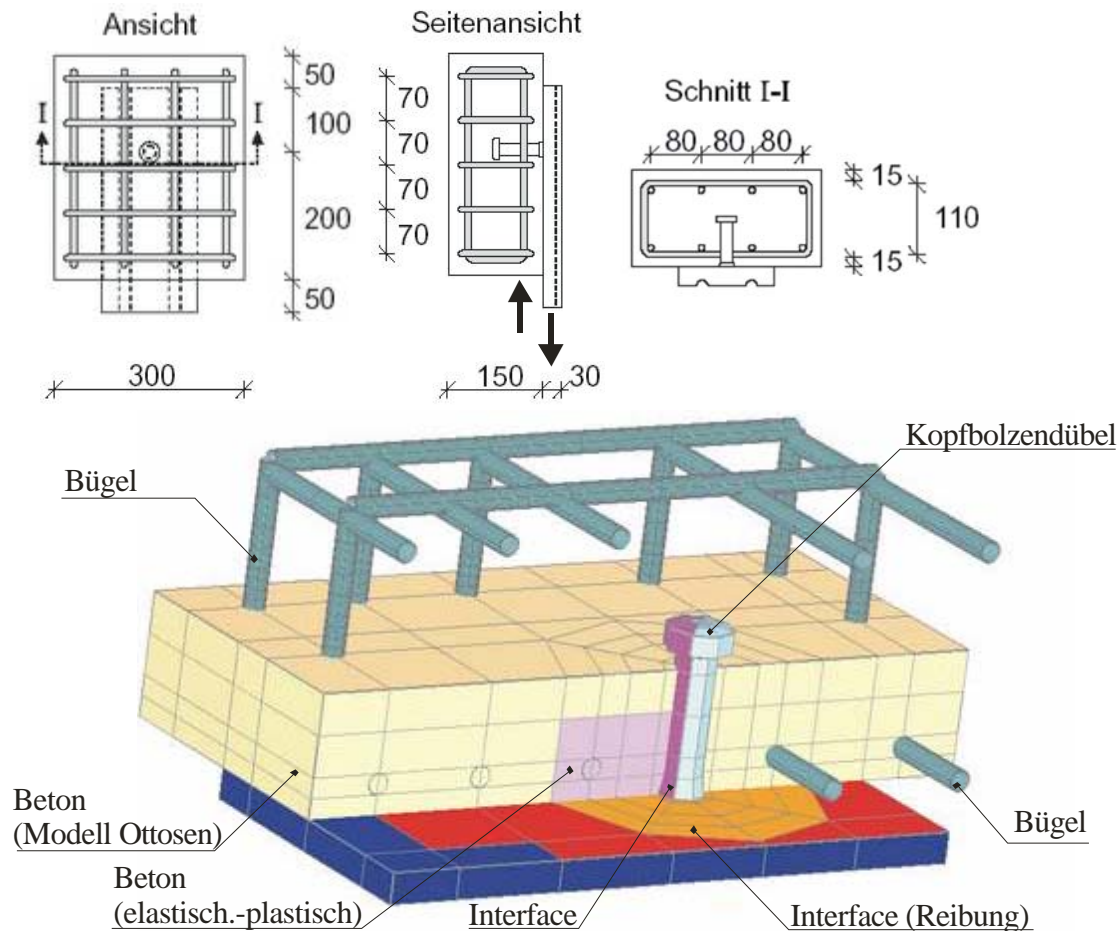
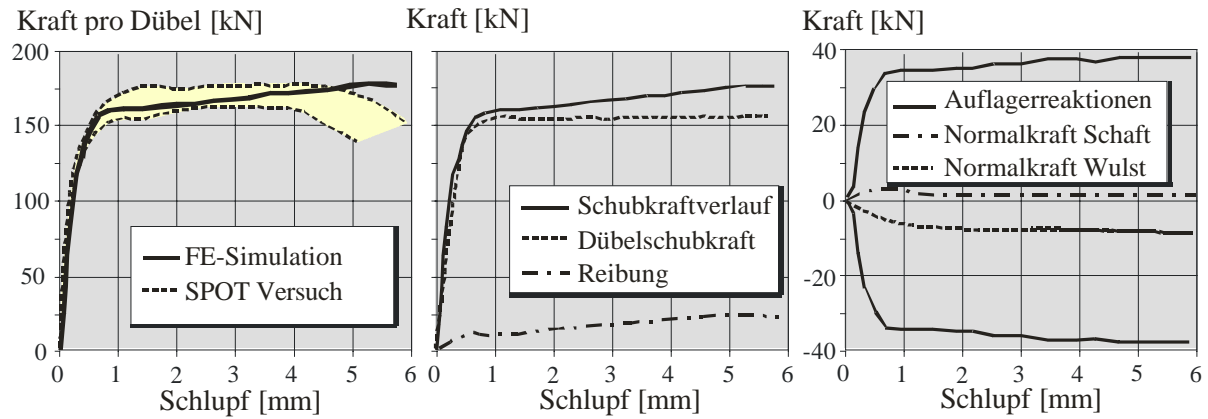


Abbildung A-6: Schematischer Aufbau der SPOT Versuche und Umsetzung als FE-Modell

Die FE-Ergebnisse werden in Abbildung A-7 (a) mit den Versuchsergebnissen verglichen. Die dargestellten Last-Verformungskurven für einen Kopfbolzendübel mit einem Durchmesser von 19 mm repräsentieren den Streubereich aus mehreren Versuchen an Kopfbolzendübeln. Man erkennt, dass das FE-Modell das Schub-Verformungsverhalten gut abbildet. Die Ergebnisse aus der FE-Rechnung stimmen bis auf die Abbildung des abfallenden Astes zum Ende der Lastverformungskurven gut überein. Abbildung A-7 (b) zeigt den Anteil der Schubkraft der vom Kopfbolzendübel aufgenommen wird, sowie den Anteil aus Reibung zwischen der Stahlplatte und dem Beton. Ca. 10 % der Schubkraft werden durch Reibung zwischen Beton und Stahlplatte abgetragen. Das stimmt mit den 9,3 % überein, die bei den Versuchen in [33] ermittelt wurden. Die Normalkraftverläufe im Kopfbolzendübel und im Schweißwulst, sowie die Auflagerkräfte der beiden horizontalen Auflager werden in Abbildung A-7 (c) dargestellt.



(a) Last-Verformungskurven (b) Aufteilung der Schubkräfte (c) Wirkende Kräfte

Abbildung A-7: FE-Ergebnisse (Single-Push-Out-Test)

Die Hauptdrucktrajektorien sind in Abbildung A-8 dargestellt. Vor dem Dübel bilden sich zwei Druckstreben im unteren Teil aus. Die größere Druckstrebe geht in die vertikale Lasteinleitung, wohingegen sich die zweite Druckstrebe am horizontalen Rahmen abstützt. Hinter dem Dübel entstehen Druckstreben, die sich an der unteren horizontalen Traverse und der Bügelbewehrung abstützen.

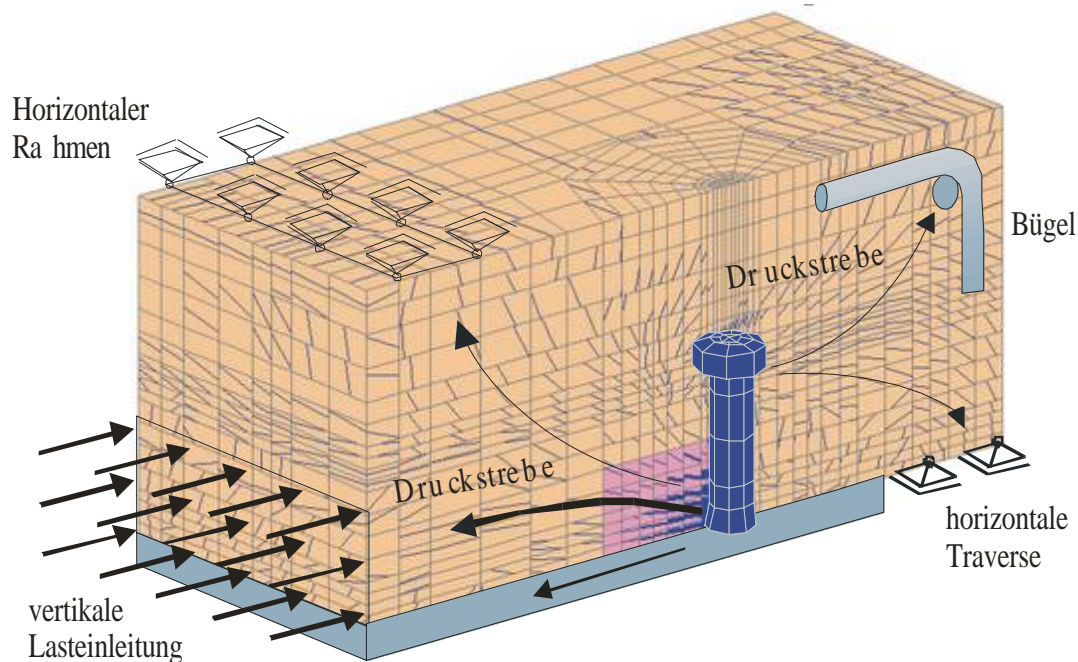


Abbildung A-8: Hauptdruckspannungen (Single-Push-Out-Test)

Implementierung in die Push-Out-Versuche (PO)

Zur Ermittlung des Tragverhaltens der KBD in ausbetonierten Stahlprofilen wurden Abscherversuche an den in Abbildung A-9 dargestellten Push-Out-Körpern durchgeführt. In diesem Versuchsaufbau wurde das Lastverformungsverhalten durch die Verbundmittel und die Reibkräfte an

den Flanschen des Stahlprofils bestimmt. Diese Reibfuge wurde in LIMFES mit Interfaceelementen abgebildet, welche eine von der Normalspannung abhängige Reibfunktion besaßen.

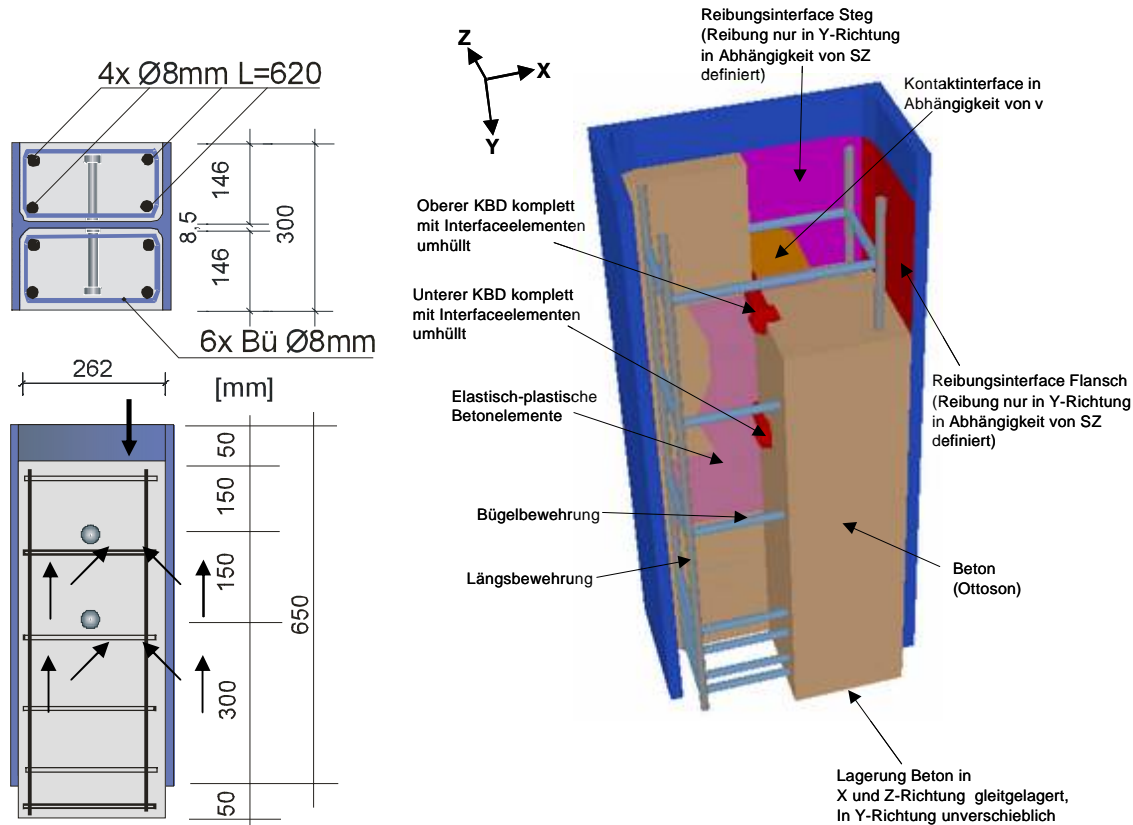


Abbildung A-9: Schematischer Aufbau der Push-Out-Versuche und Umsetzung als FE-Modell

Im linear elastischen Abschnitt der Last-Verformungskurve sind die gemessenen und die errechneten Kurven annähernd deckungsgleich. Der Übergang in den plastischen Bereich wird von LIMFES mit 630 kN um ca. 10% überschätzt. Ab einem Schlupf von ca. 1 mm verläuft die berechnete Kurve bis zum Ende hin im Streubereich der Versuchskurven. Sowohl die maximale Verformungsfähigkeit wie auch die Bruchlast werden von LIMFES gut abgebildet.

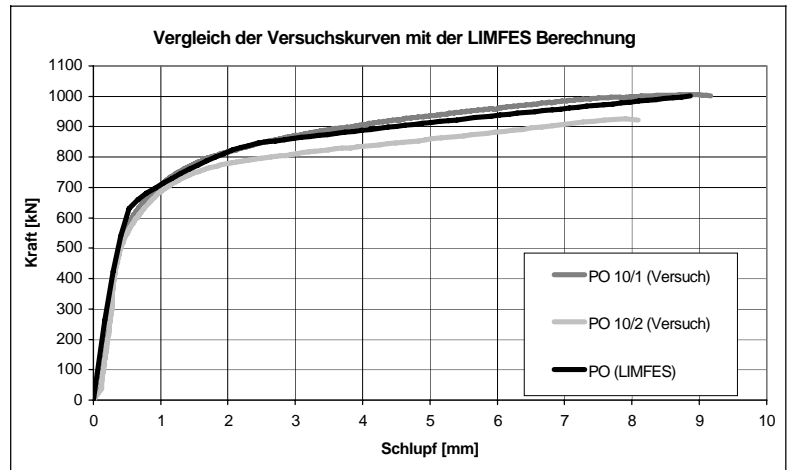


Abbildung A-10: Lastverformungskurve PO im Versuch und in LIMFES

Implementierung in die Pull-Out-Tension-Versuche (POT)

Die POT-Versuche dienen der Ermittlung der Tragfähigkeit und des Last-Verformungsverhaltens von KBD im gerissenen Kammerbeton unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (*tension stiffening*) zur Einschätzung der im positiven Momentenbereich in der Verbundfuge des Kammerbetons wirkenden Traglastanteile.

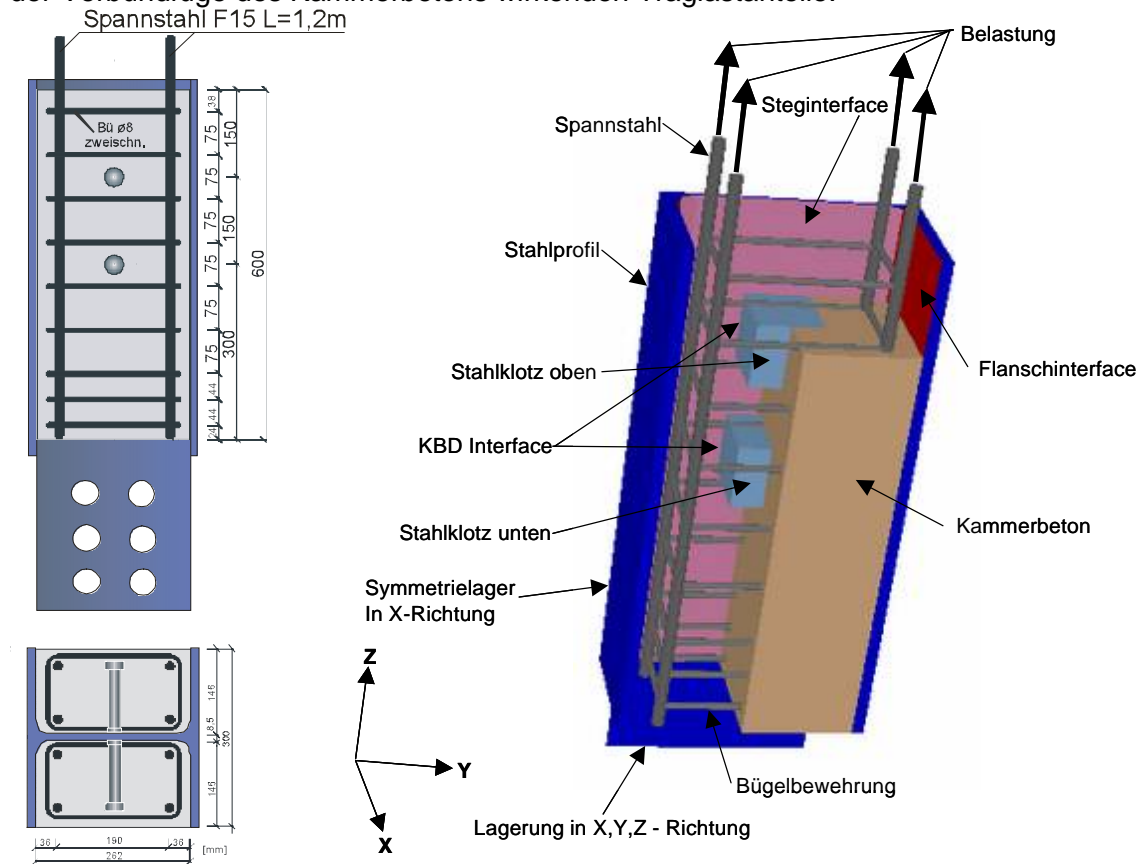


Abbildung A-11: Schematischer Aufbau der POT-Versuche und Umsetzung als FE-Modell

In der Simulation konnten die Effekte des gerissenen Kammerbetons abgebildet werden. Die mit LIMFES simulierte Lastverformungskurve verläuft bis zu einem Schlupf von 5,5 mm innerhalb des 5%-igen Streubereiches des aus den POT-Versuchen gemittelten Kurvenverlaufs. Die maximale Verformungsfähigkeit und das im Versuch erzielte Bruchlastniveau wurden in der numerischen Simulation unterschätzt.

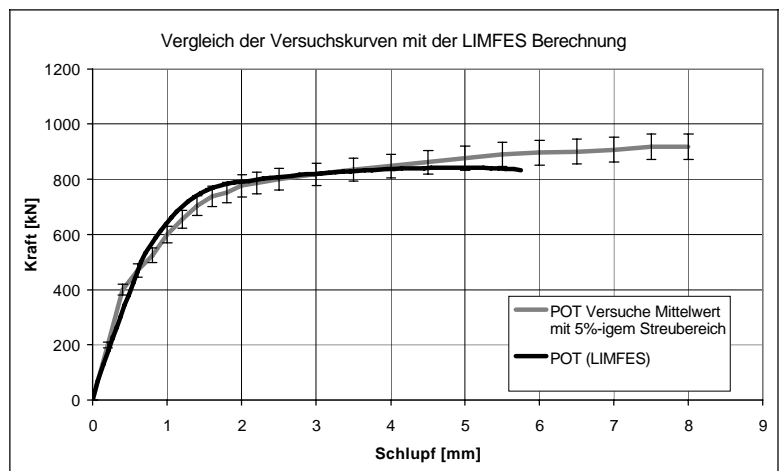


Abbildung A-12: Lastverformungskurve POT im Versuch und in LIMFES

A.3 Simulationen zum Durchstanzen im Bereich von Randstützen

A.3.1 Projektart

Forschungsvorhaben zur theoretischen und experimentellen Überprüfung des Querkrafttragverhaltens von querkraftbewehrten sowie vorgespannten Flachdecken im Bereich von Randstützen

A.3.2 Kurzbeschreibung

Im Bereich der Decken- Stützenverbindung entstehen bei Flachdecken hohe Momenten- und Querkraftbeanspruchungen, die sowohl ein Biegeversagen, als auch ein Querkraftversagen der Decke verursachen können. Das lokale Querkraftversagen, das als Durchstanzen bezeichnet wird, tritt in der Regel schlagartig ein. In ausgesteiften Systemen liegt bei Innenstützen im allgemeinen eine rotationssymmetrische Belastung vor, da kein Moment von der Stütze in die Platte eingeleitet wird. Bei Rand- und Eckstützen führt hingegen das Einspannmoment aus Rahmenwirkung zu einer zusätzlichen Beanspruchung im Durchstanzbereich.

Ziel des Forschungsvorhabens war die theoretische und experimentelle Überprüfung des Querkrafttragverhaltens von querkraftbewehrten sowie vorgespannten Flachdecken im Bereich von Randstützen. Der experimentelle Teil des Vorhabens bestand aus fünf Versuchen an Deckenausschnitten von Randstützen mit praxisüblichen Abmessungen. Ein Versuch wurde ohne Durchstanzbewehrung durchgeführt, zwei Versuche mit Durchstanzbewehrung und zwei Versuche mit Vorspannung (ohne zusätzliche Durchstanzbewehrung). Der Versuchsaufbau ist in Abbildung A-13 dargestellt.

Fehler!

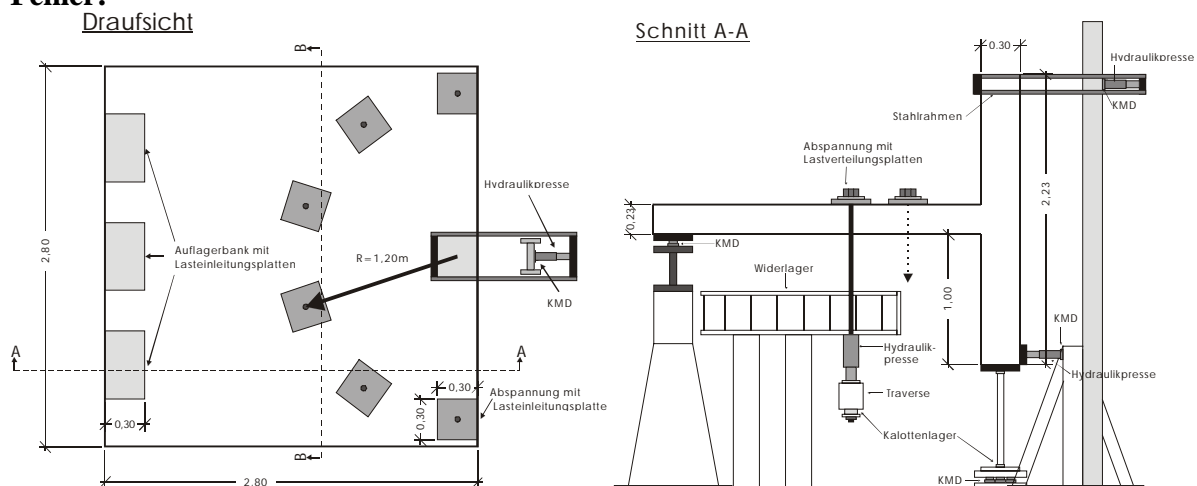


Abbildung A-13: Versuchsstand der Randstützenversuche am Institut für Massivbau

A.3.3 Verwendete Elemente

Die Stahlbetonplatte wurde durch 8-Knoten-Volumenelemente räumlich diskretisiert. Die Bewehrung wurde durch 2-Knoten-Fachwerkstäbe abgebildet. Für die Verankerungselemente der Durchstanzbewehrung wurden Biegestäbe verwendet. Das Elementnetz der Platte wurde durch lokale Verfeinerungen der Elementabmessungen im Durchstanzbereich optimiert. Die Elementgröße im durchstanzgefährdeten Bereich betrug 5 cm x 5 cm und wurde zu den stützenfernen Rändern hin größer.

Abbildung A-14 zeigt das in den Berechnungen verwendete FE-Netz in der Draufsicht

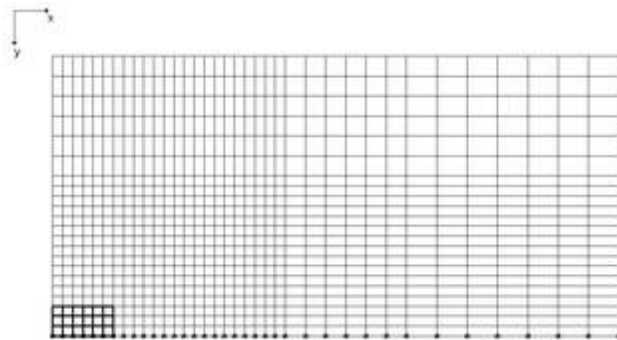


Abbildung A-14: FE-Netz in der Draufsicht

A.3.4 Verwendete Materialgesetze

Dem Beton wurde das Versagenskriterium nach OTTOSEN zugeordnet. Das Verhalten der diskret abgebildeten Bewehrungselemente unter Belastung wurde mit einem bilinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf charakterisiert.

A.3.5 Ergebnisse

In der Simulation wurde 97% der Versuchsbruchlast erzielt. Eine gute Übereinstimmung zeigen auch die Last-Verformungskurven (Abbildung A-15).

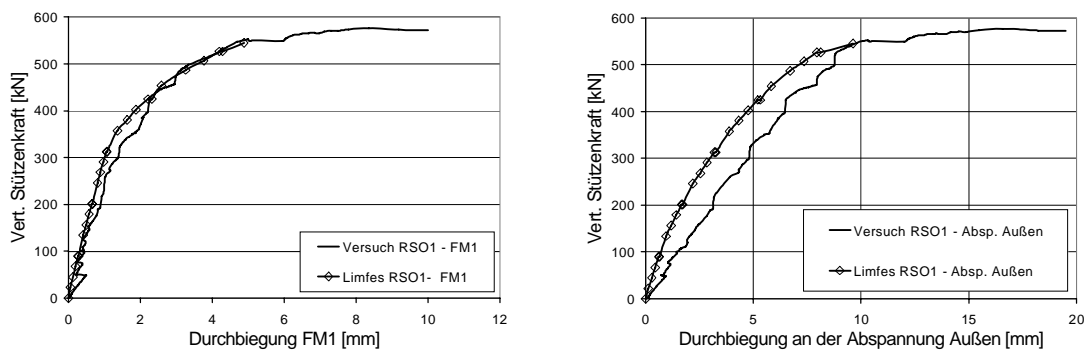


Abbildung A-15: Durchbiegungen in Plattenmitte und außen parallel zum freien Rand

Ein Vergleich der Rissbilder zeigt, dass sowohl die Querkraftrisse, als auch die Torsionsrisse gut abgebildet wurden (Abbildung A-16).

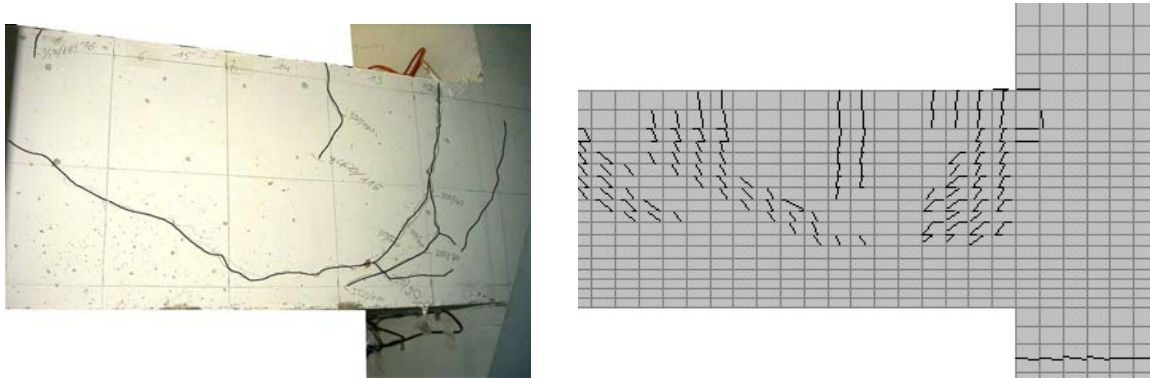


Abbildung A-16: Vergleich der Rissbilder

Die Betondehnungen in radialer und tangentialer Richtung wurden innen und seitlich an der Stützenkante sowie an der Stützenecke gemessen. Insgesamt betrachtet konnte mit LIMFES der qualitative Verlauf aber auch die Größe der Dehnungen wirklichkeitsnah ermittelt werden (Abbildung A-17).

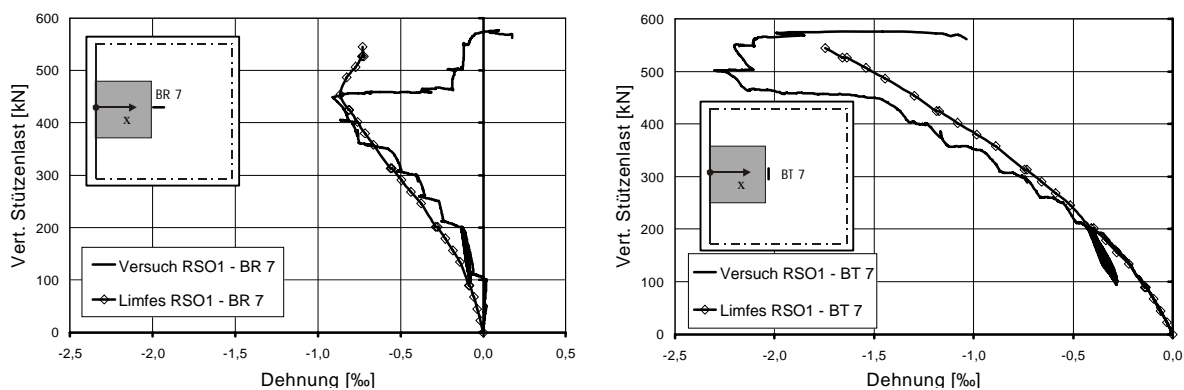


Abbildung A-17: Betondehnungen am Stützenanschnitt in radialer (BR) und tangentialer (BT) Richtung

Entsprechend der tatsächlichen Bewehrungsführung wurde die Bewehrung mit Fachwerkstäben diskret abgebildet. Für die Verankerungselemente der Durchstanzbewehrung wurden Biegestabelemente verwendet, die vertikalen Stäbe wurden als Fachwerkstäbe diskretisiert.

In Abbildung A-19 sind die Hauptdruckdehnungen ϵ_{33} der Platte dargestellt. Das Tragverhalten der Durchstanzbewehrung als Fachwerk konnte im Rahmen der Simulationen bestätigt werden.

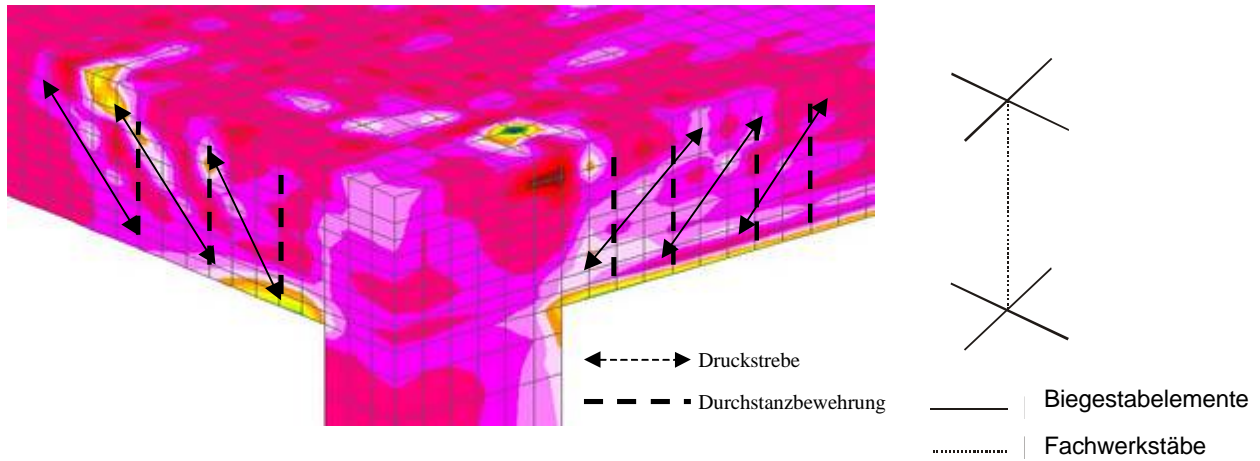


Abbildung A-18: Hauptdruckdehnungen ϵ_{33} am Plattenausschnitt, Abbildung der Schubbewehrung

Die Aktivierung und die Zunahme der Bügeldehnungen wurden in der Simulation gut wiedergegeben. Der Bügel 6.1 wurde in der Simulation erst wesentlich später, der Bügel 11.1 allerdings früher als im Versuch aktiviert (Abbildung A-19). Nach einer Versteifung im System stimmte die berechnete Dehnung des Bügels 11.1 bei 450 kN wieder mit den Versuchswerten überein.

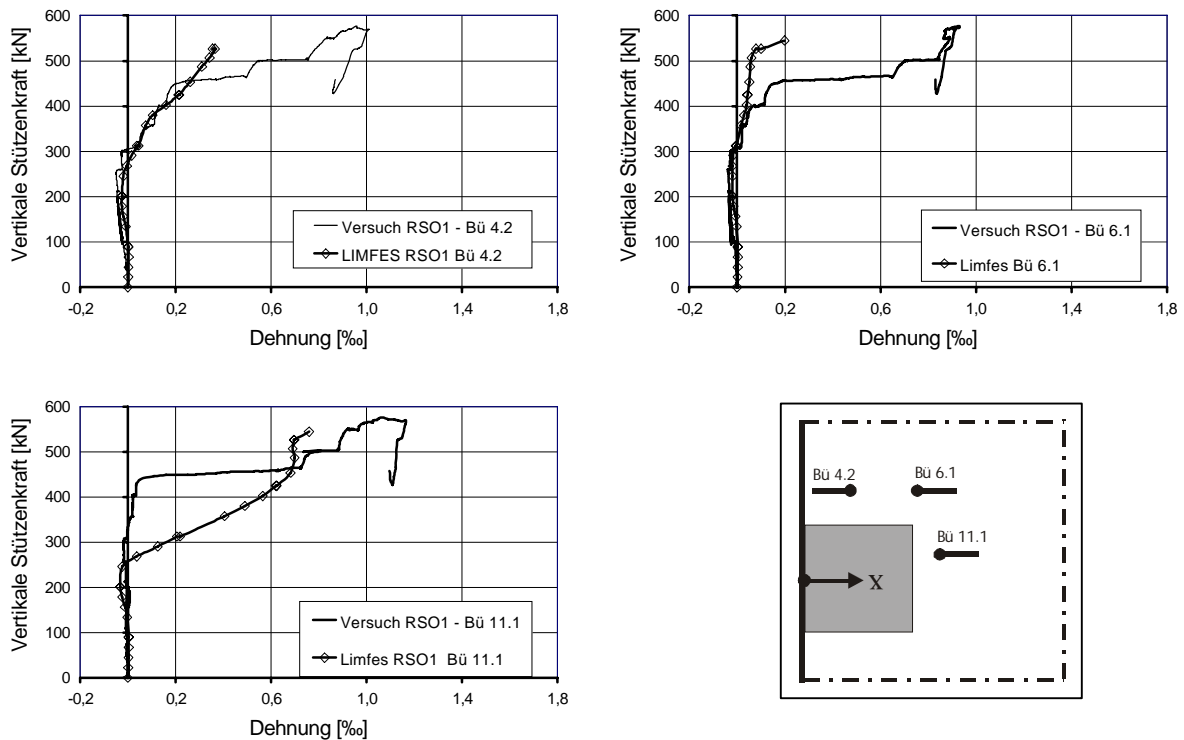


Abbildung A-19: Bügeldehnungen der ersten Reihe in den Simulationen und im Versuch

A.4 Untersuchungen zum Pull-Out-Verhalten von Doppelkopfkankern

A.4.1 Projektart

Forschungsvorhaben zur Beurteilung der Tragfähigkeit von Doppelkopfkankern

A.4.2 Kurzbeschreibung

Zur Beurteilung des Tragverhaltens von Kopfbolzendübeln wurden umfangreiche FE-Simulationen durchgeführt. Dabei wurden Doppelkopfkanker mit und ohne angeschweißten Querstab untersucht.

A.4.3 Verwendete Elemente

Beim FE-Modell wurden die Betonquader sowohl für die Versuchsnachrechnung als auch für die Parameterstudien entsprechend den Versuchsrandbedingungen (Abbildung A-20) mit 8-Knoten-Volumenelementen diskretisiert. Das verwendete FE-Modell nutzt die jeweils vorhandenen Symmetrieeigenschaften der Versuchskörper, so dass ein Viertel oder die Hälfte des Versuchskörpers abgebildet wurde. Die Quaderlänge, der Abstand der Lagerflächen sowie die vertikale Lagerung wurden entsprechend der jeweiligen Prüfgeometrie in Abhängigkeit der Einbindetiefe festgelegt.

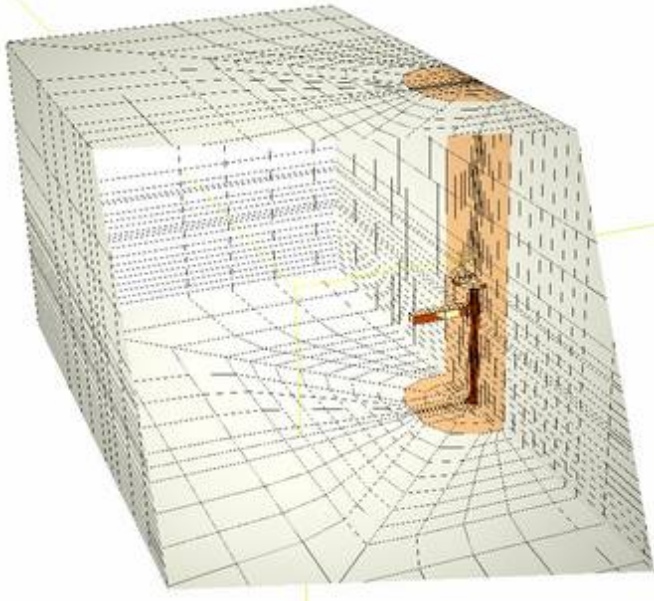


Abbildung A-20: Volumenmodell der Versuchskörper mit einem Querstab (Blick ins Innere)

Abbildung A-21 zeigt eine charakteristische Elementierung der HDB-Anker $\varnothing 10$ mit und ohne Querstab ($\varnothing 8$). Die Ankerabmessungen wurden nach Zulassung Z-15.1-84 [31] abgebildet. Die Rippung der Anker wurde mit Verbundelementen erfasst. Der Abstand zwischen Kopfoberfläche und den Querstäben betrug für alle Untersuchungen 25 mm. Die dargestellten Anker wiesen eine Einbindetiefe von 58 mm auf. Zur Eingrenzung des Generierungsaufwandes wurden die Querstäbe mit einem quadratischen Querschnitt modelliert. Die höhere Biegesteifigkeit des quadratischen Querschnittes wurde durch Verminderung des Elastizitätsmoduls auf den Wert eines kreisförmigen

Querschnittes angepasst. Die Querstabauskrägung betrug entsprechend der Geometrie der Versuchskörper 80 mm. Dieser Wert ist größer als die nach DIN 1045(88) [54] Absatz 18.5.1(3) geforderte Mindestquerstablänge von $5 d_s$, so dass von einem voll wirksamen Querstab auszugehen war. Unterhalb des Ankerkopfes wurden Interfacelemente angeordnet die ausschließlich Druckkräfte übertragen, um bei lokalen Ankerkopfplastizierungen übermäßige Betonschädigungen infolge einer Querkzugbeanspruchung numerisch zu vermeiden.

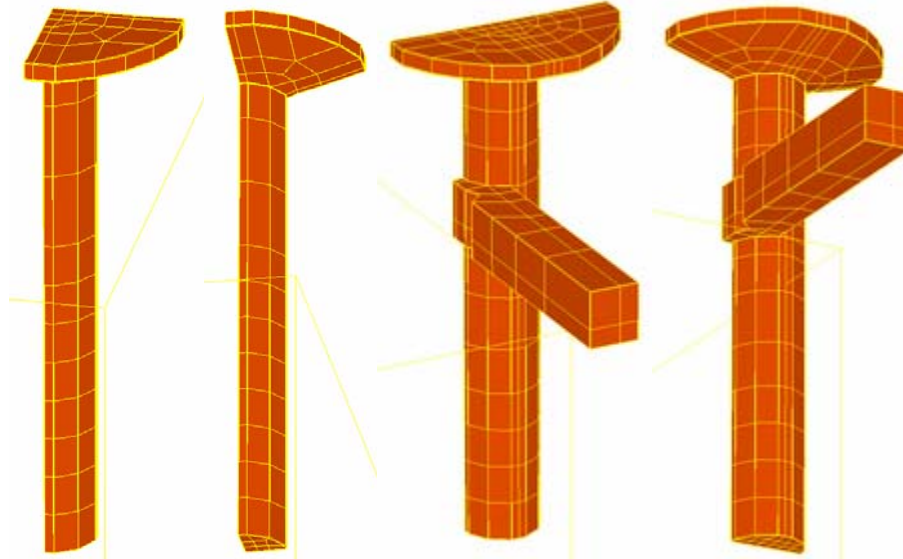


Abbildung A-21: Ankermodelle: ohne Querstab und mit einem Querstab Durchmesser 8 mm

A.4.4 Verwendete Materialgesetze:

Unterhalb des Ankerkopfes wurde in einer Elementreihe ein elasto-plastisches Betontragverhalten unterstellt. Dieses war gerechtfertigt, da Versuche an Kopfbolzen in [34] zeigten, dass bei ausreichend steifen Kopfverbreiterungen ein ausgeprägt plastisches Betontragverhalten unterhalb des Ankerkopfes auftritt. Das Betontragverhalten im Zugbereich wurde mit dem Modell rotierender Risse [51] bei Überschreitung der Hauptzugspannung abgebildet. Die Mitwirkung des Betons auf Zug wurde nach [36] erfasst. Die rechnerischen Materialkennwerte entsprachen bei allen Versuchsnachrechnungen den geprüften Werten. Die Wirkung des Verbundes entlang des Ankerschaftes wurde mit einer Verbundspannungs-Schlupfbeziehung nach [22] erfasst. Die Ankerbeanspruchung wurde verformungsgesteuert über den freien Ankerschaft eingeleitet. Für die Simulation eines Querdruckes wurden zwei gegenüberliegende Seitenflächen mit Gleichlasten auf Druck belastet (Abbildung A-22). Die Querdruckbelastung wurde in allen Simulationsrechnungen erst vollständig aufgebracht. Im Anschluss wurde dann die Lagerverschiebung eingetragen.

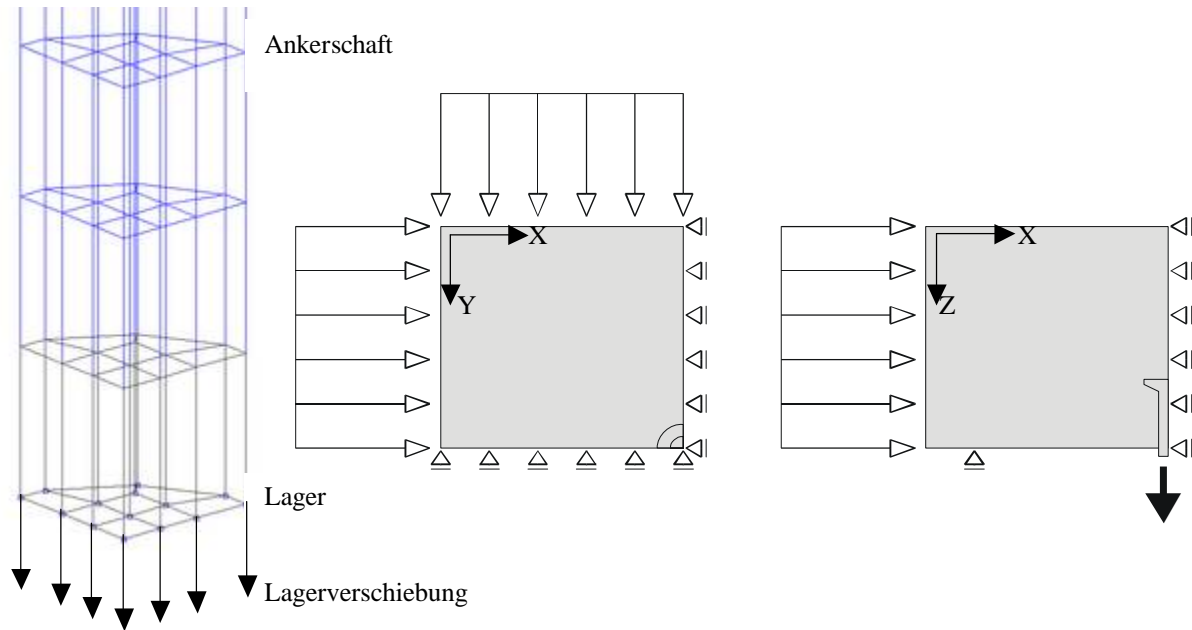


Abbildung A-22: Lasteinleitung am Ankerschaft und Abbildung des Querdruckes

A.4.5 Ergebnisse

Am Beispiel des Versuches HAV 3 (HDB Anker ohne Querstab) und der entsprechenden Versuchsnachrechnung 58VN wird gezeigt, dass die Simulationsrechnungen die Charakteristik der Versuche gut erfassen (Abbildung A-23). Es zeigte sich, dass die Simulationen die Ausziehlast etwas unterschätzen und im Nachbruchverhalten ein spröderes Beton-Brechverhalten abbilden. Dies ist plausibel, da sich im Versuch im Nachbruchverhalten ein Verkanten der Betonsegmente zeigte.

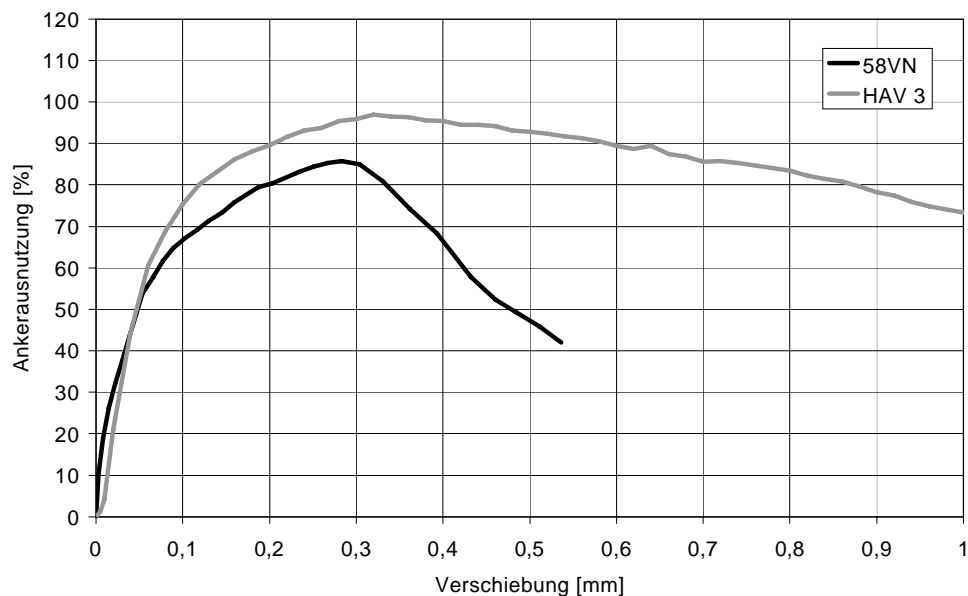


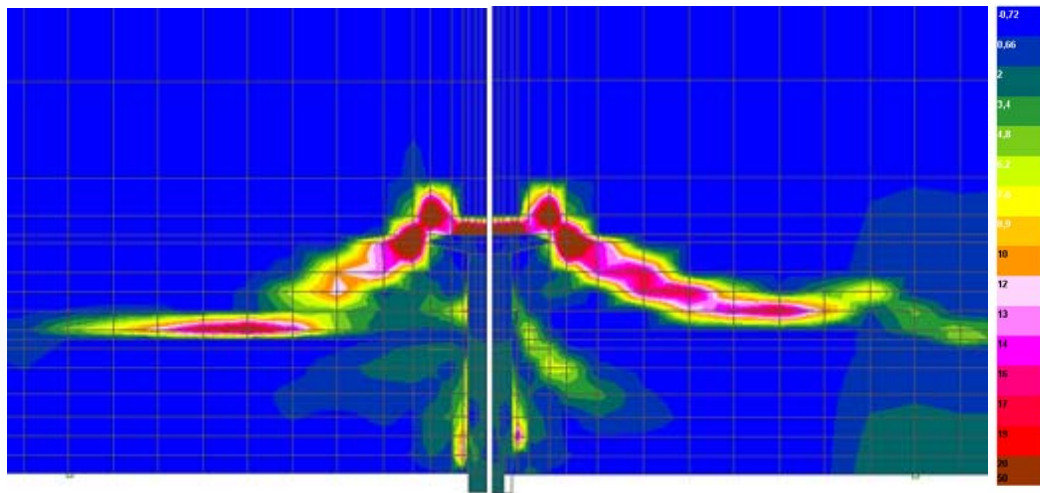
Abbildung A-23: Last-Verschiebungskurven: Simulation 58VN im Vergleich zum Versuch HAV 3

Zum Vergleich der Rissentwicklungen mit und ohne Querstäbe werden nachfolgend für gleiche Anker-Ausnutzungsgrade die Hauptverzerrungen ε_1 sowie die Rissbildung für Einbindetiefen 58 mm gegenübergestellt. Die Hauptverzerrungen ε_1 (Schnitt in Richtung des Querstabes Ansicht senkrecht zum Querstab

Abbildung A-24) sowie die Rissbilder (Schnitt in Richtung des Querstabes Ansicht senkrecht zum Querstab

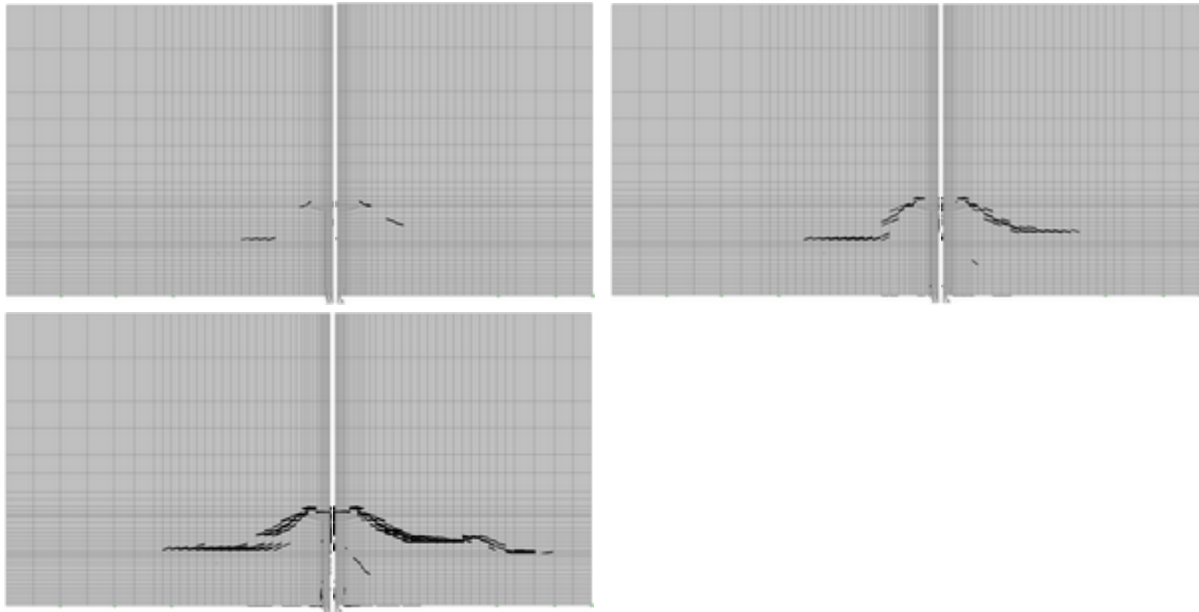
Abbildung A-25) für eine Einbindetiefe von 58 mm zeigen auf dem maximalem Traglastniveau einen ausgeprägten Bruchkegel ausgehend vom Ankerkopf sowie einen zweiten steileren Schrägriss ausgehend von den Querstäben. Eine Überschneidung der Rissebenen wurde weder in den Simulationen noch anhand der Bruchkegel der Ausziehversuche erkennbar (ohne Querstab und ohne Verbund mit 2 Querstäben \varnothing 8 mm

Abbildung A-26).



Schnitt in Richtung des Querstabes Ansicht senkrecht zum Querstab

Abbildung A-24: 58VN2QS: Hauptverzerrung ε_1 - Ausnutzung = 86,2 %



Schnitt in Richtung des Querstabes

Ansicht senkrecht zum Querstab

Abbildung A-25: 58VN2QS: Rissentwicklung - Ausnutzung = 86,2 % unten



ohne Querstab und ohne Verbund

mit 2 Querstäben \varnothing 8 mm

Abbildung A-26: Bruchkegel der Bauteilversuche mit 78 mm Einbindetiefe

A.5 Durchstantragfähigkeit einer Flachdecke mit Stahleinbauteil

A.5.1 Projektart

Forschungsvorhaben zur Durchstantragfähigkeit von einer Flachdecke mit einer Stützenkopfverstärkung in Form eines Stahleinbauteils.

A.5.2 Kurzbeschreibung

Die Durchstantragfähigkeit im Stützenbereich einer Flachdecke kann mit unterschiedlichen Bewehrungsformen erhöht werden. Zum Teil werden Stahleinbauteile eingesetzt, welche die Querkrafttragfähigkeit erhöhen sollen. Zu diesen Stahleinbauteilen gehört der Geilinger-Stahlpilz.



Abbildung A-27: Geilinger-Stahlpilz

Das Einbauteil besteht aus den sogenannten Hauptträgern (Stahlflachprofile) und den Nebenträgern (U-Profile). Es erhöht den Durchstanzwiderstand der Stahlbetonplatte und wirkt anteilig bei der Aufnahme von Biegemomenten mit. Im Rahmen eines DIBt-Forschungsvorhabens wurde am Institut für Massivbau der RWTH Aachen der Durchstanzversuch Geilinger-Pilz 2 (im folgenden GP 2 abgekürzt) durchgeführt. Zur weiteren Untersuchung des Tragverhaltens wurden nichtlineare 3D-FE-Simulationen mit LIMFES durchgeführt.

A.5.3 Verwendete Elemente:

Das FE-Netz für die Simulation des Versuches GP 2 wurde manuell im integrierten Pre-Processing-Modul von LIMFES erstellt. Dabei wurde darauf geachtet, die Geometrie des Versuchskörpers genau abzubilden. Aus Symmetriegründen und zur Verminderung des Berechnungsaufwandes wurde nur ein Viertel des Deckenausschnitts modelliert. In den Symmetrieachsen wurden die entsprechenden Festhaltungen vorgesehen. Beton und Geilinger-Stahlpilz wurden mit 8-Knoten-Volumenelementen diskretisiert. Die Abbildung der Betonstahlbewehrung, der Schubzugen und Schrägaufbiegungen erfolgte mit 2-Knoten-Fachwerkstäben und somit diskret. Der Verbund zwischen Geilinger-Stahlpilz und Beton wurde durch Implementierung von Interface-Elementen berücksichtigt. Durch Spannungs-Schlupf-Beziehungen konnte die Interaktion beider Komponenten simuliert werden.

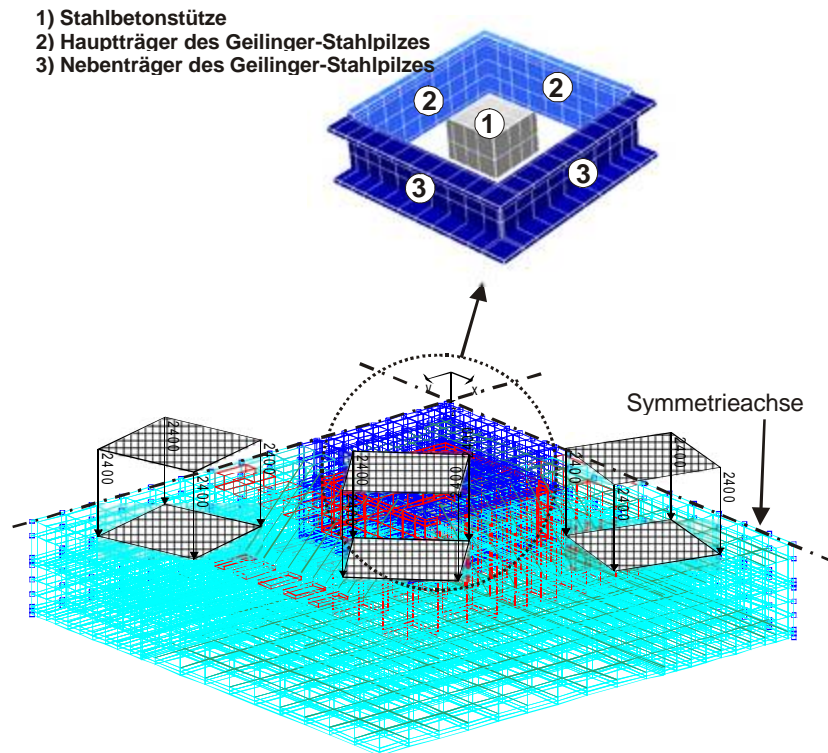


Abbildung A-28: Simulierter Deckenausschnitt mit dargestellter Belastung und Geilinger-Stahlpilz

Die Belastung wurde entsprechend den Versuchsrandbedingungen über Flächenlasten eingeleitet.

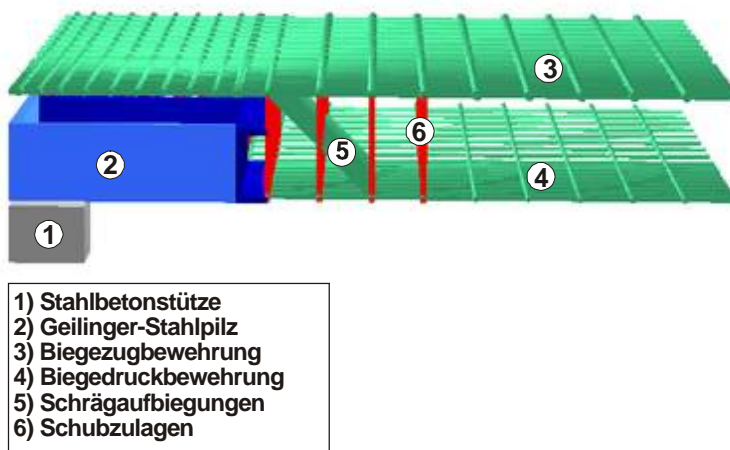


Abbildung A-29: Geilinger-Stahlpilz und Bewehrungsführung

A.5.4 Verwendete Materialgesetze

Den Elementen des Geilinger-Stahlpilzes wurde das Versagenskriterium nach VON MISES zugewiesen.

Der Beton wurde durch das Microplane-Materialgesetz charakterisiert. Die Versagensmechanismen des Betons wurden durch den E-Modul, die Dehnung am Scheitelwert der Druckspannung ϵ_{c1} , die Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} und 21 einstellbare Parameter geregelt. Im Hinblick auf eine konsistente Modellierung wurden lediglich zwei der 21 Parameter angepasst, um ein realistisches Werkstoffverhalten zu erreichen. Mit diesen Einstellungen wurden mehrere unterschiedliche Versuche nach-gerechnet und gute Übereinstimmungen zwischen FE-Simulation und physikalischer Realität festgestellt.

Das Verhalten der diskret abgebildeten Bewehrungselemente unter Belastung wurde mit einem bilinearen Spannungs-Dehnungs-Verlauf charakterisiert.

A.5.5 Ergebnisse

In der numerischen Simulation des Versuches GP 2 wird eine Last von 2540 kN erreicht. Dies entspricht 104 % der Versuchsprüflast. Im Versuch wie in der Simulation findet ein Durchstanzen innerhalb des Geilinger-Stahlpilzes statt.

Im folgenden Bild ist das Lastverformungsverhalten im Versuch mit den Ergebnissen der FE-Simulation verglichen.

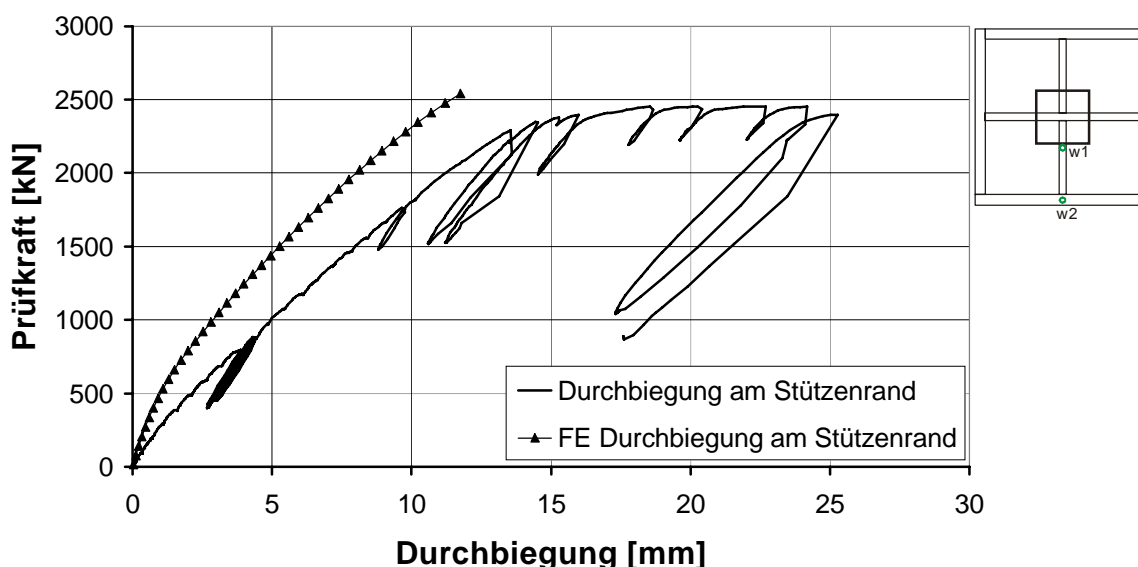


Abbildung A-30: Durchbiegung am Stützenrand (w_1) im Versuch und in numerischer Simulation

Zum Lastverformungsverhalten in der FE-Simulation ist zu bemerken, dass die Anfangssteifigkeit etwas zu steif abgebildet wird, im weiteren aber ein paralleler Verlauf zur Versuchskurve festzustellen ist. Die Dehnung der Biegezugbewehrung wird in der FE-Simulation etwas unterschätzt, dies ist auf das Konzept der verschmierten Rissbildung zurückzuführen.

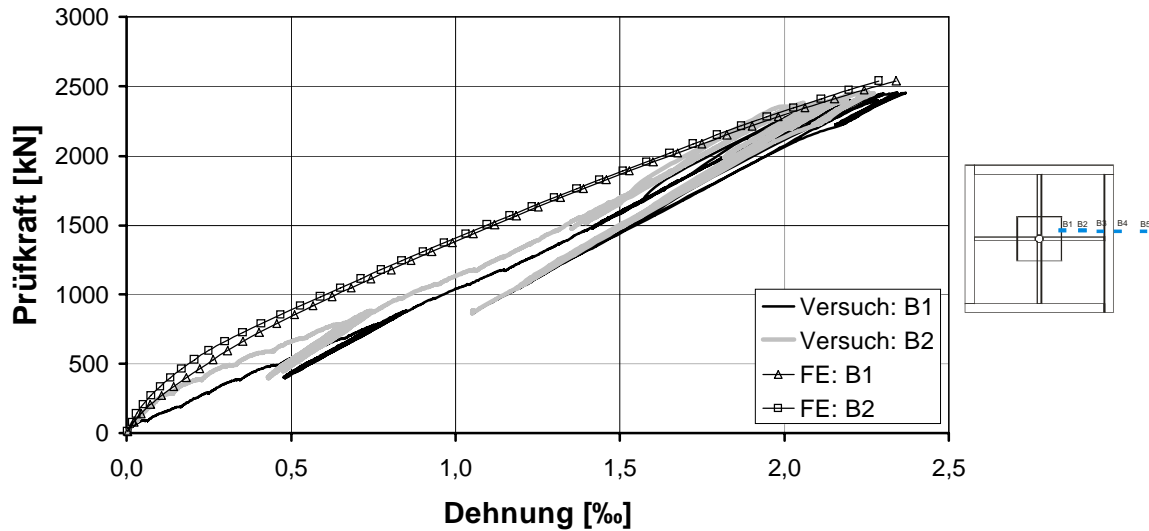


Abbildung A-31: Dehnung der Biegezugbewehrung entlang des Hauptträgers in FE-Simulation und Versuch

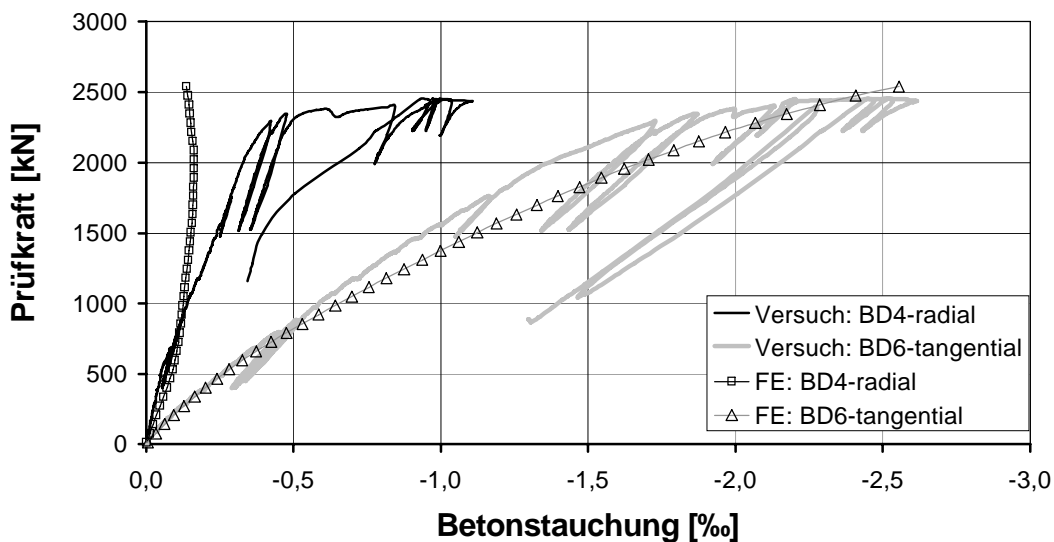


Abbildung A-32: Stauchung des Betons am Übergang von Hauptträger zu Nebenträger in FE-Simulation und Versuch

Die Beanspruchungen des Betons und des Stahleinbauteils sind beispielhaft in Abbildung A-32 und Abbildung A-33 für den Versuch und die numerische Simulation aufgetragen. Es zeigen sich gute Übereinstimmungen.

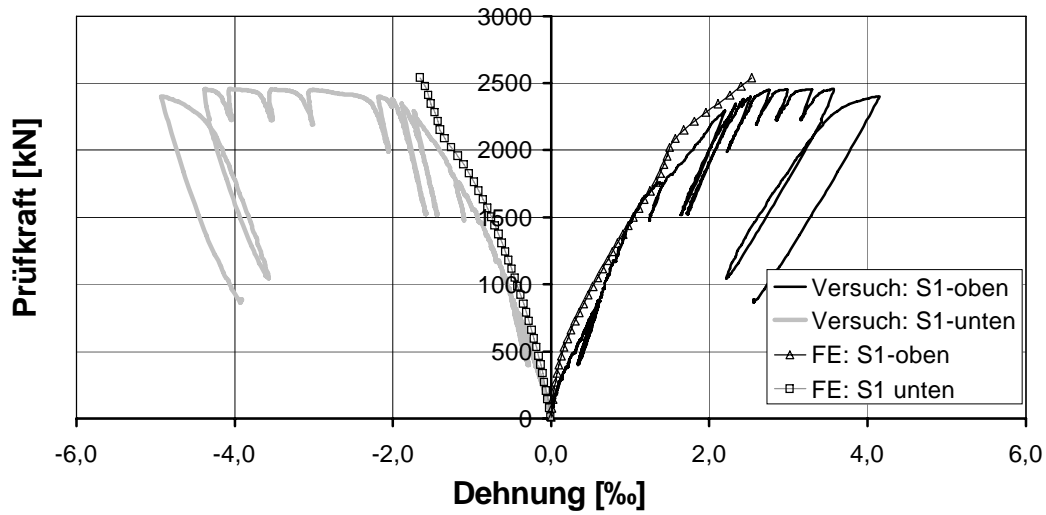


Abbildung A-33: Dehnung des Hauptträgers an der Ober- bzw. Unterseite im Bereich der Stützenmitte in FE-Simulation und Versuch

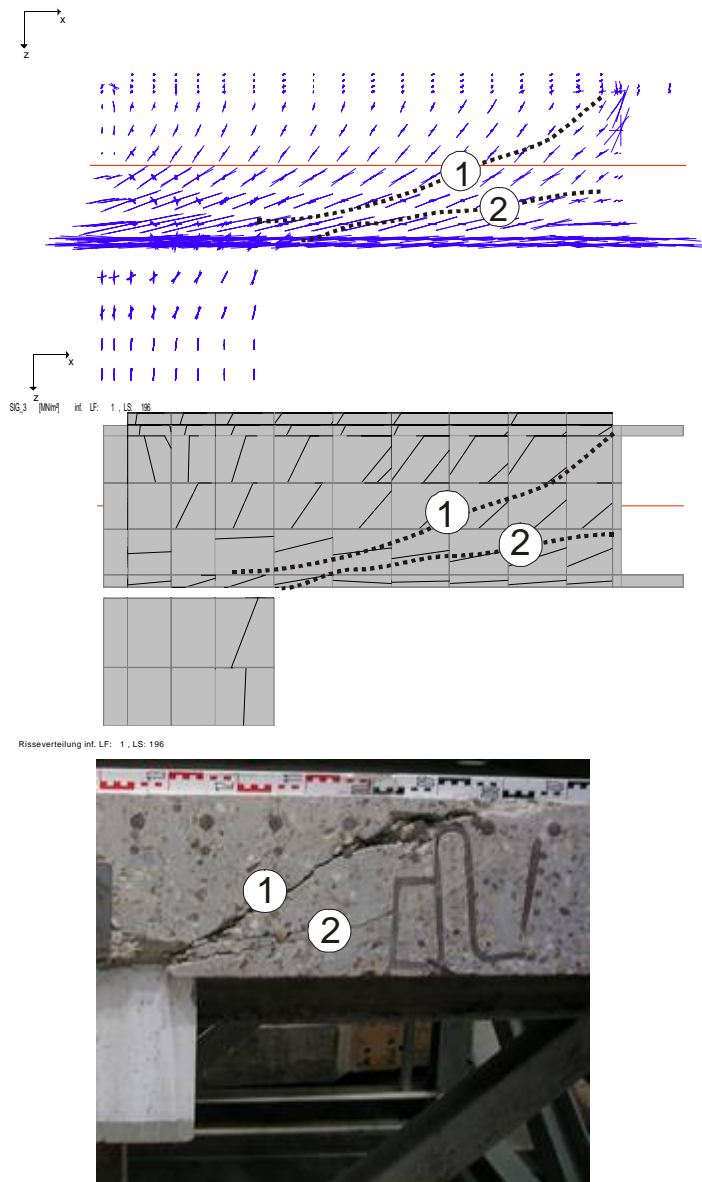


Abbildung A-34: Darstellung der Hauptdruckspannungen und des Rissbildes in der FE-Simulation und im Versuch

Aus Abbildung A-34 wird ersichtlich, dass die Hauptdruckspannungsrichtungen im Beton, die mit der FE-Simulation ermittelt wurden in etwa mit dem Rissbild des Versuchs übereinstimmen. Das Rissbild in der FE-Rechnung zeigt ebenfalls einen Schubriss (1), der vom Stützenanschnitt ausgehend bis über das U-Profil verläuft. Er ist etwas flacher geneigt als im Versuch. Ein weiterer Riss (2) verläuft von der Mitte des U-Profiles zur Stütze und deutet auf eine Druckstrebe in diesem Bereich hin. Diese Druckstrebe beansprucht die Betondeckung im Stützenanschnittsbereich.

A.6 Fernbahnhof Frankfurt

A.6.1 Projektart

Gutachten zur Tragfähigkeit eines Stahlbetonverbundfachwerkträgers des Fernbahnhofes Frankfurt

A.6.2 Kurzbeschreibung

Die Deckenträger des Fernbahnhofes Frankfurt bestehen aus einem Stahlfachwerkträger und einem mit Kopfbolzendübeln angeschlossen Betongurt. Mit Hilfe der numerischen Simulationen konnten neben den Querschnittstragfähigkeiten die Ausnutzung einzelner Bauteile für die maßgebende Lastfallkombination ermittelt werden. Weiterhin konnte das Umlagerungsvermögen der Konstruktion beim Plastizieren einzelner Bauteilabschnitte ermittelt werden.

A.6.3 Verwendete Elemente

Die Deckenträger des Fernbahnhofes Frankfurt bestehen aus einem Stahlfachwerkträger und einem mit Kopfbolzendübeln angeschlossen Betongurt. Von dem „Querträger Achse 76“ wurde eine Trägerhälfte generiert. Entsprechend den statischen Berechnungen wurde der Stahlfachwerkträger (ST 52-3), der Betongurt $b/h = 5/0,3$ (B55) und die Verbundfuge abgebildet. Die Querschnitte der Gurte, Diagonalen und Pfosten wurden entsprechend den Werkstattplänen generiert. Es wurde näherungsweise von einem symmetrischen System mit symmetrischer Belastung ausgegangen. Generiert wurden die Längsachsen A bis M.

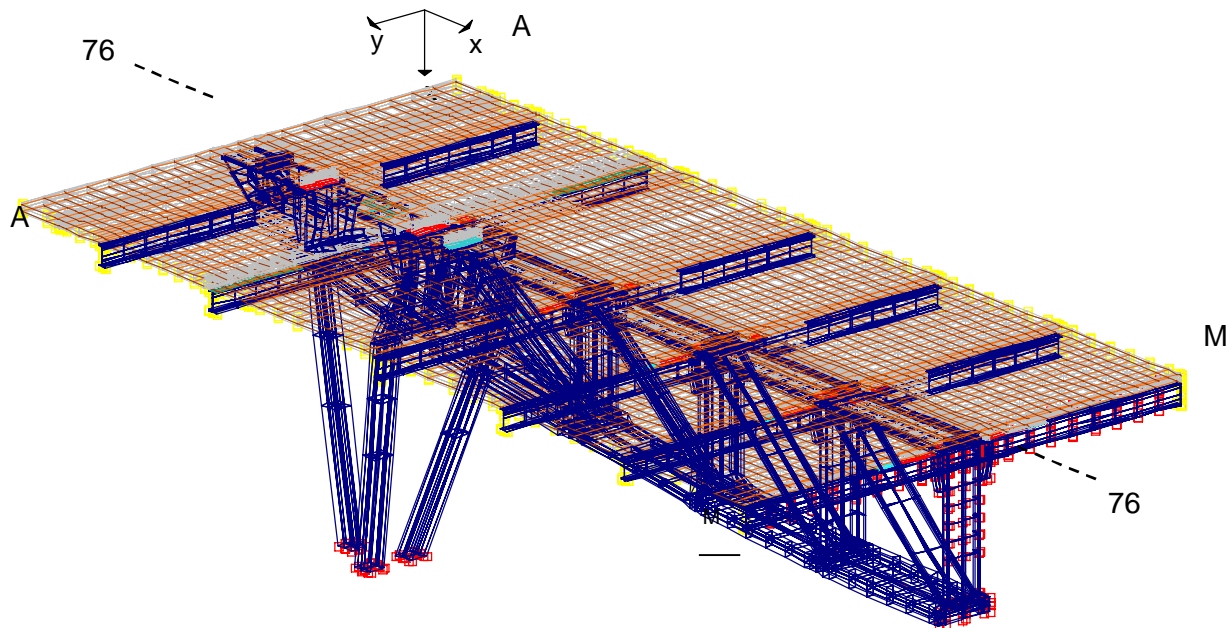


Abbildung A-35: FE-Netz Querträger Achse 76, 3D-Ansicht

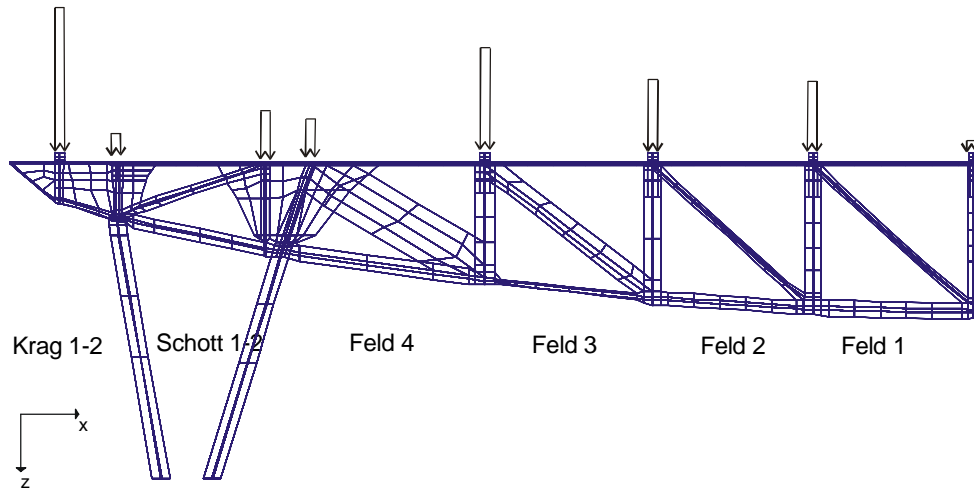


Abbildung A-36: FE-Netz Querträger Achse 76, Seitenansicht (mit Belastung)

A.6.4 Verwendete Materialgesetze

Für den Baustahl, Betongurt, Betonstahl und die Verbundfuge (KBD $d=23$ mm) wurden nichtlineare Materialeigenschaften gewählt. Als Festigkeiten wurden Fraktilwerte nach EC 2 [27] bzw. EC 4 [26] gewählt. Das Nachbruchverhalten bzw. die Nachverfestigung des Baustahls und des Bewehrungsstahls wurde auf der sicheren Seite sehr gering angesetzt.

A.6.5 Ergebnisse:

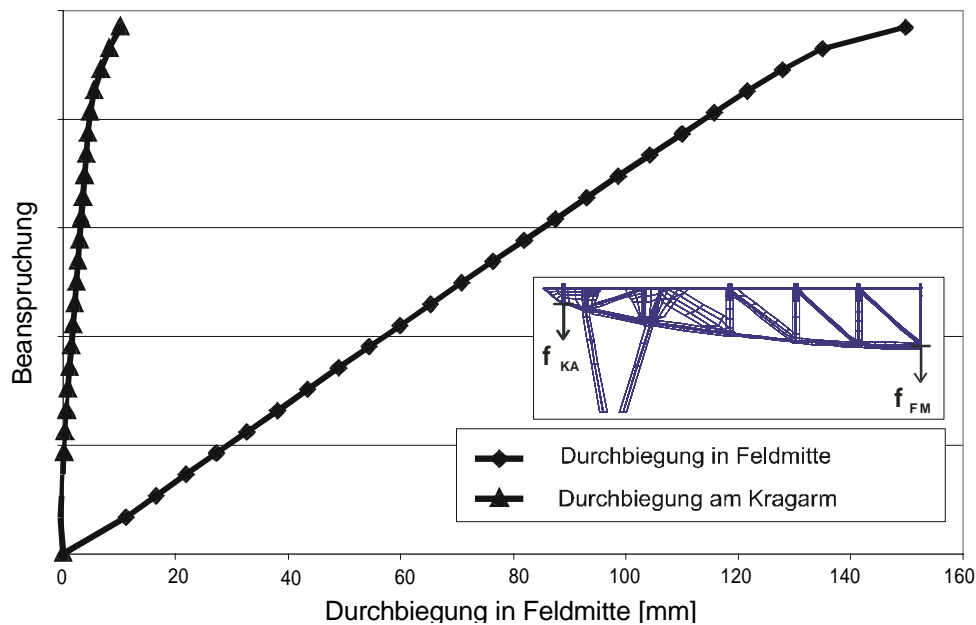


Abbildung A-37: Last-Verformungskurven für den Kragarm (KA) und die Feldmitte (FM)

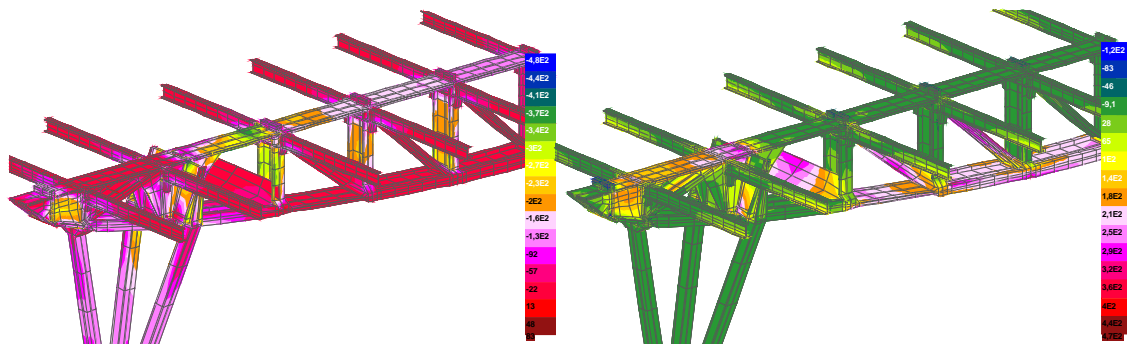


Abbildung A-38: Hauptspannungen: Druck: Obergurt 3. Feld (links) Zug: Diagonale 2. Feld (rechts)

Mit Hilfe der numerischen Simulationen konnten neben den Querschnittstragfähigkeiten die Ausnutzung einzelner Bauteile für die maßgebende Lastfallkombination ermittelt werden. Weiterhin konnte das Umlagerungsvermögen der Konstruktion beim Plastizieren einzelner Bauteilabschnitte ermittelt werden.

Die Berechnungen zeigten, dass eine genauere Untersuchung des auf Druck beanspruchten Obergurtes unter Berücksichtigung der Verformungen infolge Theorie II. Ordnung erforderlich ist.

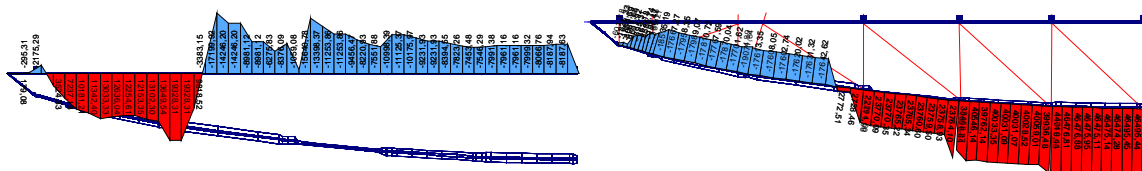


Abbildung A-39: Verlauf der Normalkräfte in den Gurten des Fachwerkträgers (Spannungsintegration)

A.7 Gutachten Speditionsstrasse Düsseldorf

A.7.1 Projektart

Gutachten zur Rissbildung in einer Bodenplatte

A.7.2 Kurzbeschreibung

Die Firma Imtech Deutschland GmbH & Co KG beauftragte die Begutachtung der Bodenplatte des Bauvorhabens Speditionsstrasse 17 in Düsseldorf. In der Bodenplatte traten Risse auf, die Undichtigkeiten zur Folge hatten. Bei dem Bauvorhaben handelt es sich um ein zehnstöckiges Bürogebäude mit vier Untergeschossen (Abbildung A-40). Das Gebäude befindet sich in unmittelbarer Nähe des Düsseldorfer Stadthafens. Die Bodenplatte misst ca. 63 x 34 x 1,5 m und liegt ca. 13,20 m unter dem höchsten Bemessungs-Grundwasserstand (BHGW). Ziel der Untersuchung war es, die Ursache der Risse in der Bodenplatte rechnerisch zu ermitteln.

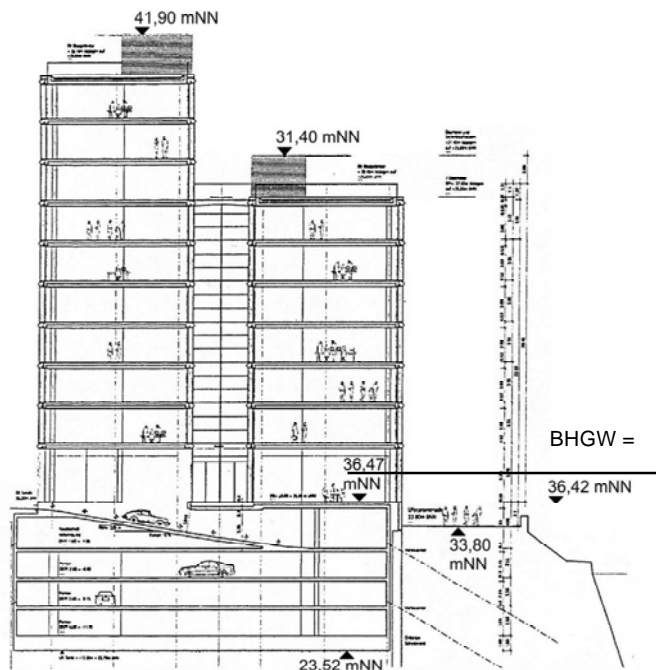


Abbildung A-40: Schnitt durch das Gebäude

A.7.3 Verwendete Elemente

Die Stahlbetonbodenplatte wurde durch 8-knotige Volumenelemente räumlich diskretisiert. Die Elementgröße betrug 1 m x 1 m in der Plattenebene. Die Elemente besaßen eine Höhe von 1,5 m.

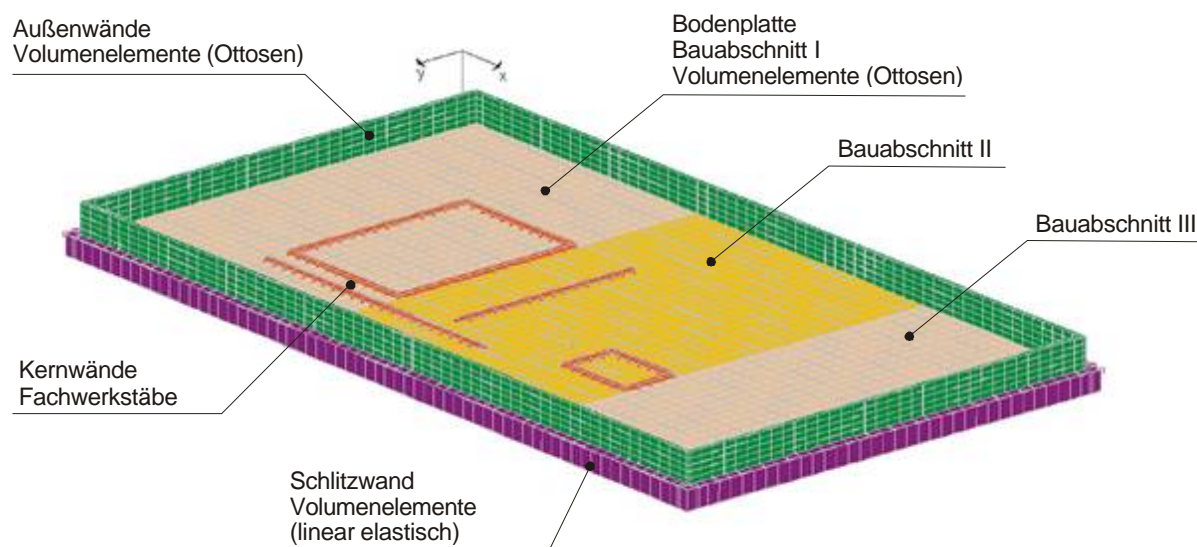


Abbildung A-41: Nichtlineares FE-Modell

Die Außenwände wurden ebenso wie die Bodenplatte durch Volumenelemente abgebildet. Die Abmessungen betragen 1,0 m x 0,3 m x 0,45 m.

Um den Einfluss der Kernwände auf die Bodenplatte zu erfassen, wurden diese durch Fachwerkstäbe abgebildet. Abbildung A-41 zeigt das in den Berechnungen verwendete FE-Netz in der 3D-Ansicht.

Zur Abbildung der Schlitzwand kamen linear elastische Volumenelemente zum Einsatz. Die Schlitzwand wurde auf 1,5 m Höhe mit einer Dicke von 0,7 m modelliert. In der Kontaktfuge zwischen Schlitzwand und Bodenplatte sind die Volumenelemente in allen Freiheitsgraden gekoppelt. Um den Einfluss der Steifigkeit der Schlitzwand ober- und unterhalb der Bodenplatte zu erfassen wurde für die Elemente die dreifache Steifigkeit gewählt.

Im gesamten FE-Modell wurde die Bewehrung durch Fachwerkstäbe simuliert. Abbildung A-42 zeigt das in den Berechnungen verwendete FE-Netz in der 3D-Ansicht.

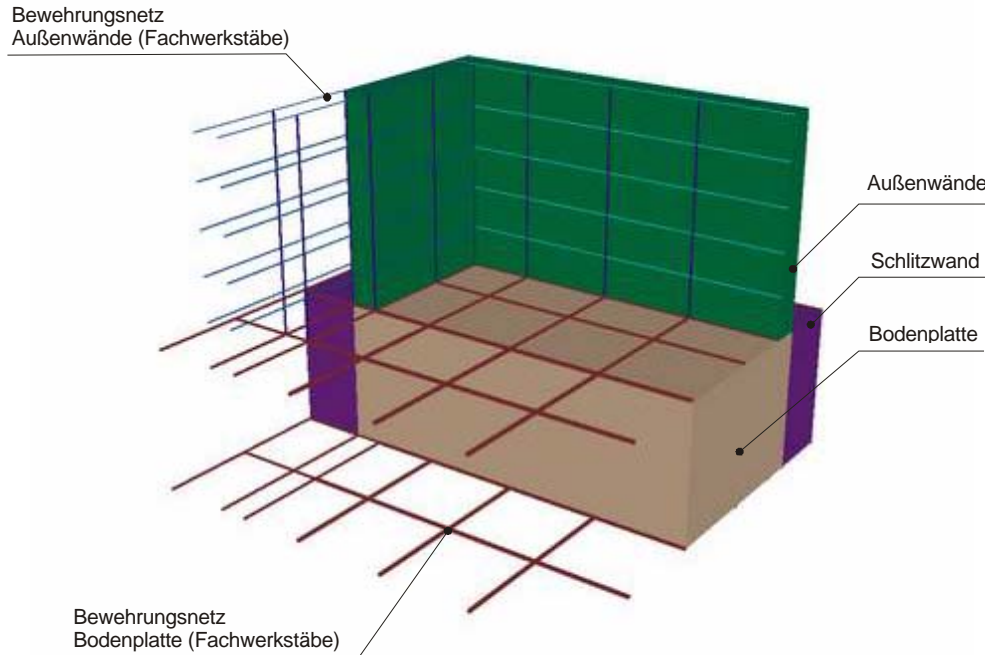


Abbildung A-42: Abbildung der Bewehrung mit Fachwerkstäben

Das Modell wurde statisch bestimmt gelagert, so dass aus der aufgetragenen Temperaturdehnung kein äußerer Zwang entstehen konnte.

A.7.4 Verwendete Materialgesetze

Dem Beton in der Bodenplatte und den Seitenwänden wurde das Bruchkriterium nach Ottosen zugewiesen.

Es wird nach [21] angenommen, dass das Temperaturmaximum in der Bodenplatte nach zwei Tagen erreicht wird. Ausgehend von einer Frischbetontemperatur von 20 °C und einer Temperatursteigerung infolge Hydratation von ~ 30 °C ergibt sich das Maximum zu 50 °C. Nach dem Erreichen des Temperaturmaximums wird ein linearer Abfall der Temperatur auf 20 °C innerhalb von 10 Tagen angesetzt. Der Ermittlung des wirksamen Betonalters unter Berücksichtigung der angenommenen Temperaturentwicklung liegen die Gleichungen (2.1-72) und (2.1-87) nach Model Code 90 [56] zugrunde. Die zeitliche Entwicklung des E-Moduls und der Festigkeiten wurden nach MC 90 durch die Zeitfunktionen nach Gleichung (2.1-54) und (2.1-58) erfasst.

Die rechnerischen Verläufe des E-Moduls und der Druck- sowie Zugfestigkeit sind in Abbildung A-43 dargestellt.

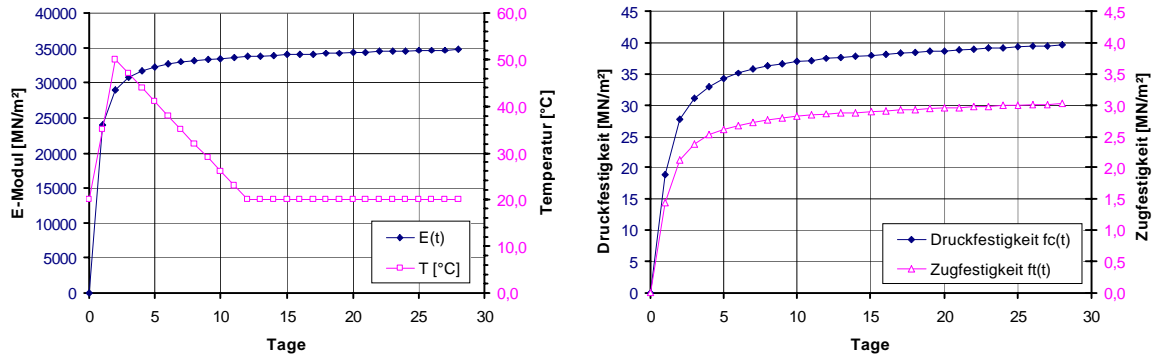


Abbildung A-43: E-Modul und Festigkeitsverlauf der Bodenplatte in Abhängigkeit des Betonalters

Für die FE-Berechnung wurde für die Bodenplatte vereinfacht von den Materialkennwerten des sechs Tage alten Betons ausgegangen, da der Beton erst in der Abkühlphase Zugspannungen aufbaut.

Für die Schlitzwand wurden linear elastische Volumenelemente mit einer Steifigkeit von 102000 N/mm² generiert, um eine mitwirkende Höhe der Schlitzwand von 4,5 m zu simulieren.

Den Fachwerkstäben der Bewehrung wurde ein bilineares Materialgesetz gemäß DIN 1045-1 [55] zugewiesen. Die jeweilige Querschnittsfläche wurde dabei so gewählt, dass entsprechend der Einflussbreite der Fachwerkstäbe, für die Bodenplatte eine Bewehrung von 22,62 cm²/m ($\varnothing 12d - 10$ cm) in beide Richtungen oben und unten simuliert wurde. Für die Außenwände wurde eine Bewehrung von 5,13 cm²/m (Q 513) auf beiden Seiten zu Grunde gelegt.

A.7.5 Ergebnisse

In Abbildung A-44 ist der erste Bauabschnitt mit abgeschlossenem Rissbild zum Ende der Berechnung dargestellt. Zum Vergleich mit den tatsächlich aufgetretenen Rissen in der Bodenplatte ist das qualitative Rissbild über das Rissbild des FE-Modells gelegt.

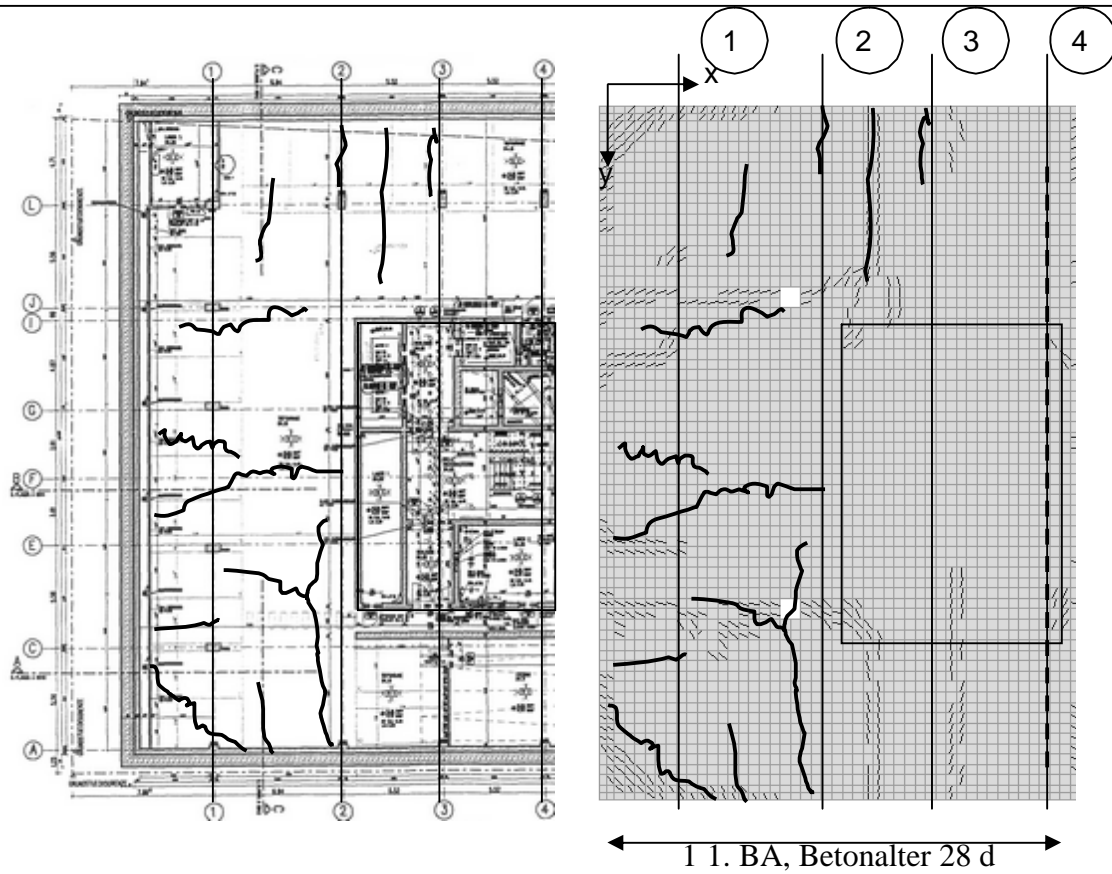


Abbildung A-44: tatsächliches Rissbild und abgeschlossenes Rissbild des FE-Modells

Insgesamt stimmen das tatsächliche Rissbild und das Rissmodell sehr genau überein.

Die in Abbildung A-45 dargestellten Risse der einzelnen Wände liegen in einer Größenordnung von 0,1 mm bis 0,3 mm. Die Rissbreiten entsprechen damit den vor Ort gemessenen Rissbreiten.

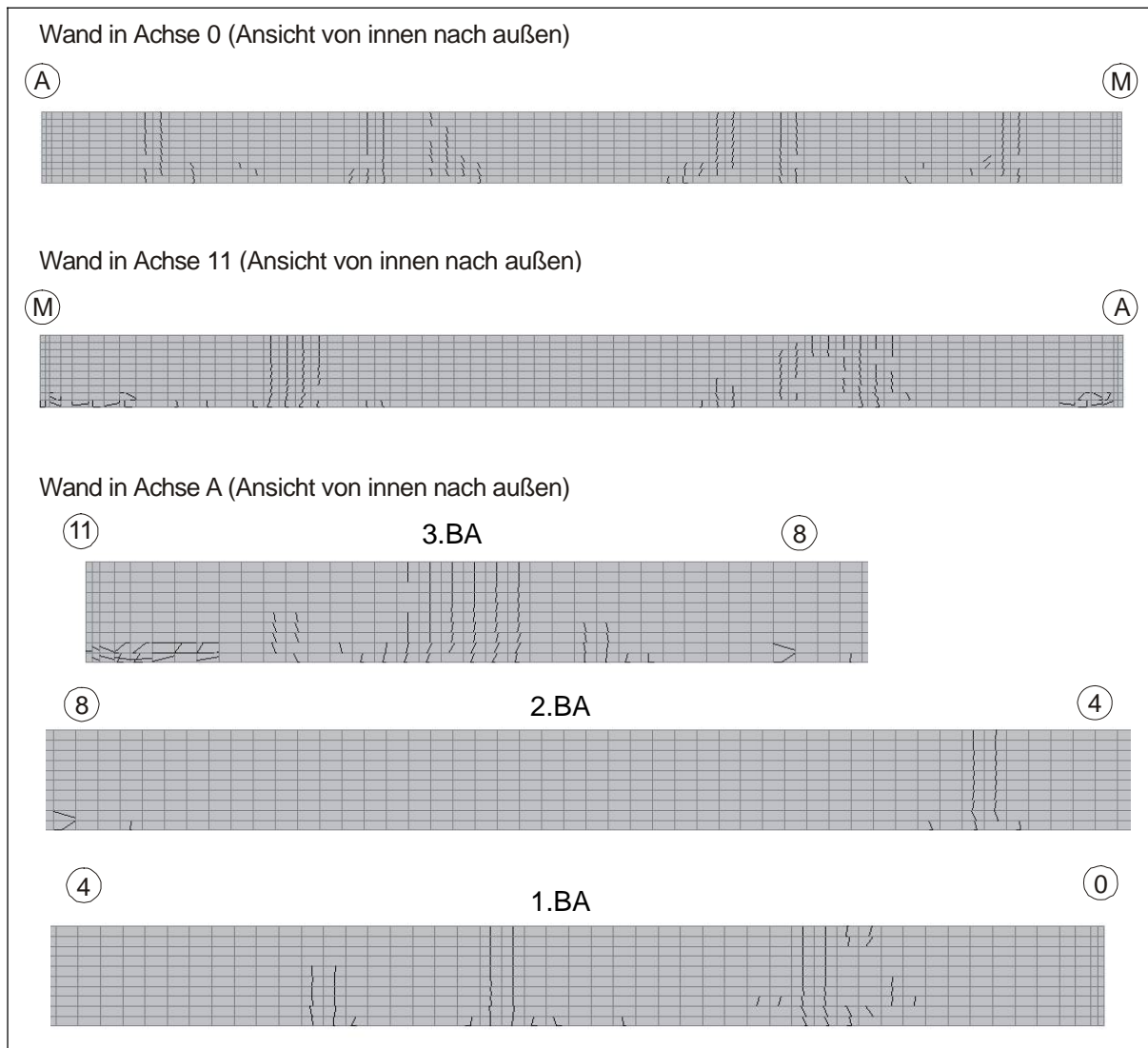


Abbildung A-45: Rissmodell der Wände zum Zeitpunkt $t = 27$ Tage

Mit LIMFES konnte ein physikalisch nichtlineares Numerik-Modell der Bodenplatte und der Außenwände erstellt werden. Dieses Modell ermöglichte eine Untersuchung der Rissbildung in der Bodenplatte unter Einbeziehung der Steifigkeitsabnahme infolge der entstehenden Risse.

Im FE-Modell konnten sowohl der Bauablauf als auch die Belastung zeitabhängig abgebildet werden.

Durch die Verwendung von LIMFES konnte die Ursache für die entstandenen Risse eindeutig auf die kritische Betonrezeptur in Verbindung mit dem kraftschlüssigen Anschluss der Bodenplatte an die Schlitzwand zurückgeführt werden.

B ABAQUS

B.1 Lasterhöhungsfaktoren bei Flachdecken

B.1.1 Projektart

Untersuchung zur numerischen Bestimmung der Lasterhöhungsfaktoren β bei Flachdecken.

B.1.2 Kurzbeschreibung

In der Praxis ist es heute üblich die Schnittgrößenermittlung nach der Elastizitätstheorie durchzuführen. Nach EC2 sind folgende Methoden für die Schnittkraftermittlung zulässig:

- lineare Verfahren, die auf der Elastizitätstheorie beruhen
- lineare Verfahren mit begrenzten Umlagerungen
- Verfahren auf der Grundlage der Plastizitätstheorie
- nichtlineare Verfahren

Aufgrund ihrer großen Wirklichkeitsnähe gewinnen nichtlineare Verfahren zunehmend an Bedeutung. Damit soll dem teilweise beträchtlich von der Elastizitätstheorie abweichenden Verhalten von Stahlbetontragwerken besser als bisher Rechnung getragen werden.

Im Rahmen der Untersuchung wird eine lineare und nichtlineare Schnittgrößenermittlung eines unsymmetrischen und eines symmetrischen Flachdeckensystems mit Hilfe des Finite-Elemente-Programms ABAQUS durchgeführt. Hierbei wird die nichtlineare Schnittgrößenermittlung mit der linearen Schnittgrößenermittlung im Bereich der Decken-Stützenverbindungen verglichen.

Beim Durchstanznachweis nach EC2, Teil 1 wird die resultierende Bemessungsquerkraft mit einem Korrekturfaktor β zur Berücksichtigung von Lastausmitten erhöht. Diese Korrekturbeiwerte β wurden bisher empirisch aus Versuchen ermittelt. Die lineare und nichtlineare Schnittgrößenermittlung ermöglicht eine numerische Abschätzung der Lastausmitten an den Decken-Stützenverbindungen und eine Bewertung der im EC2, Teil 1 definierten Korrekturbeiwerte β .

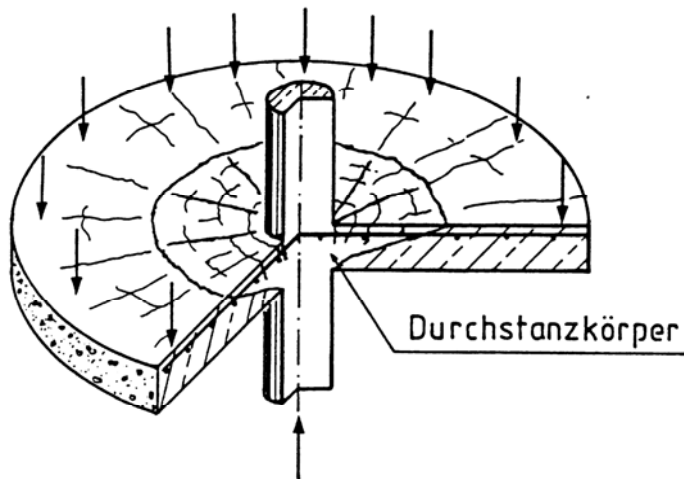


Abbildung -B-1: Bruchbild infolge Durchstanzen im Bereich von Innenstützen [18]

B.1.3 Verwendete Elemente

Die Untersuchungen wurden an einem symmetrischen und an einem unsymmetrischen Flachdeckensystem durchgeführt. Die Geometrie der Deckensysteme ist in den folgenden Bildern dargestellt.

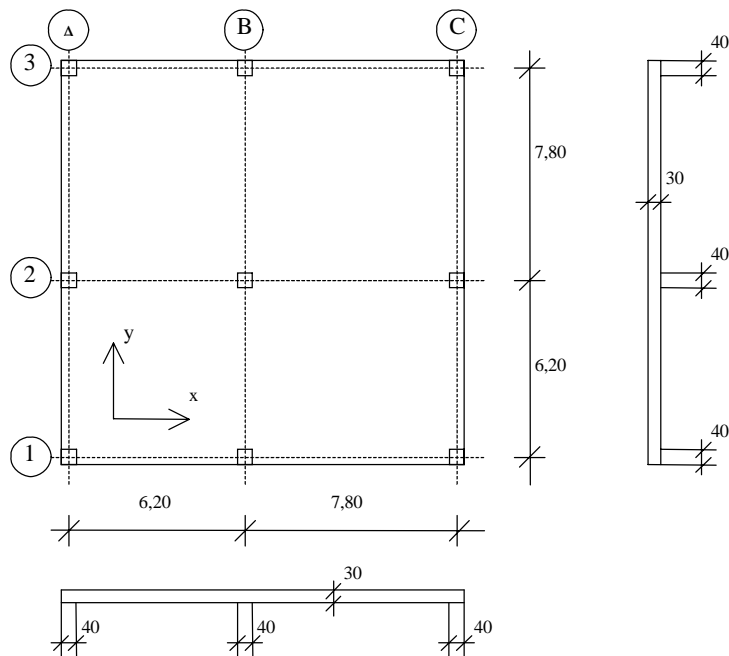


Abbildung -B-2: Geometrie des unsymmetrischen Flachdeckensystems

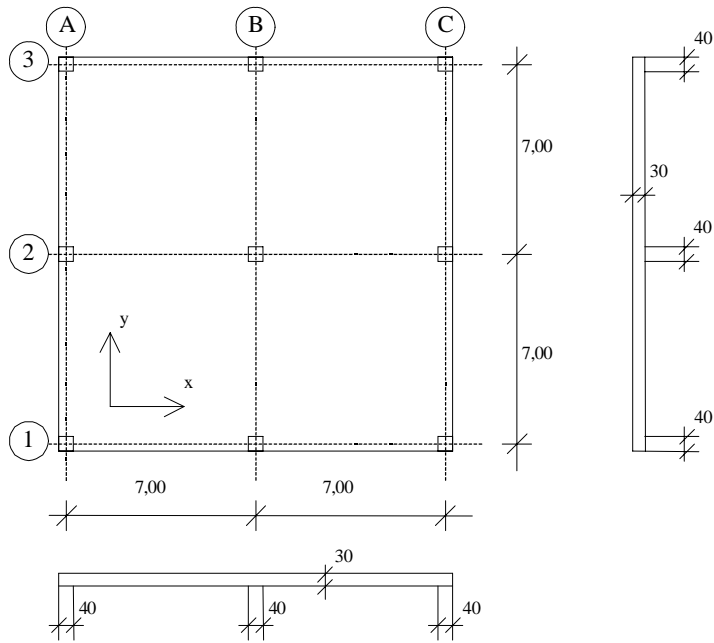


Abbildung -B-3: Geometrie des symmetrischen Flachdeckensystems

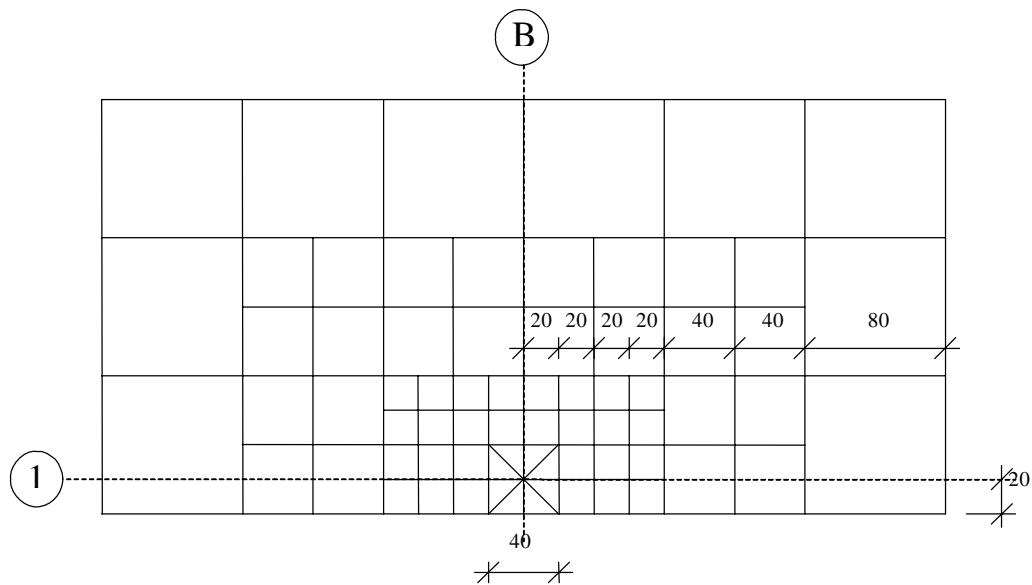


Abbildung -B-4: gewählte Netzverfeinerung im Stützenbereich mit kompatiblen Übergangselementen

Zur Verminderung der Elementanzahl und somit des Berechnungsaufwandes wurde das Netz im Bereich der Stütze verfeinert. Es wurde Gebrauch von kompatiblen Übergangselementen gemacht.

Das Federelement SPRING1

Das Federelement findet Anwendung bei der Simulation von Versteifungen, deren Spannungen nicht von Interesse sind, oder zur Definition von Lagern, deren Steifigkeit in Relation zur berechnenden Struktur zu beachten ist. In der Untersuchung wird das Federelement zur Diskretisierung der Stützen verwendet.



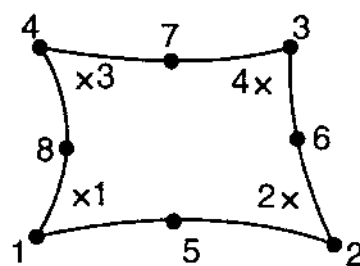
Abbildung -B-5: Federelement SPRING1 [3]

Als Ergebnis stehen die Federkräfte entsprechend ihrer Wirkungsrichtung zur Verfügung. Hierbei ist aber darauf zu achten, dass negative Kräfte des Federelementes Druckkräfte darstellen, und somit den positiven Reaktionskräften im Deckensystem entsprechen.

Das verwendete Federelement SPRING1 (Abbildung 3-15) ist an einem Ende fest eingespannt und am anderem Ende mit einem Knoten gekoppelt. Die Wirkungsrichtung und Federkonstante müssen vorgegeben werden.

Das Schalenelement S8R

Zur Diskretisierung der Stahlbetonplatte wurden Schalenelemente benutzt.



8-Knoten-Schalenelement

Abbildung -B-6:Schalenelement S8R [3]

Das verwendete Schalenelement S8R (Abbildung 3-16) ist ein quadrilaterales Schalenelement mit acht Knoten und vier Integrationspunkten, in einer Ebene. Es besteht die Möglichkeit die Anzahl der Integrationspunkte, über die Dicke des Elementes selbst anzugeben. Zur besseren Erfassung

der Plastizität, Rissentwicklung und des Versagens über die Deckendicke, wird mit neun Integrationspunkten über die Dicke des Elementes gerechnet. Dieses Vorgehen zeigt ein gutes Konvergenzverhalten bei Rissfortpflanzung über die Dicke des Elementes.

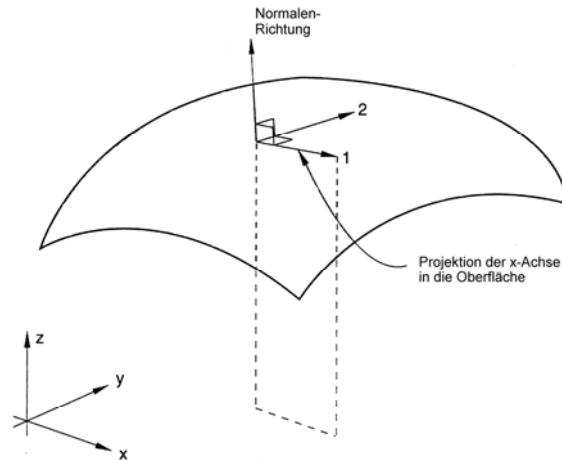


Abbildung -B-7: Definition des lokalen Koordinatensystems und der Normalenrichtung für das Schalenelement [3]

Abbildung der Bewehrung

Die Bewehrung innerhalb der Flachdecke wurde mit dem REBAR-Modul gemäß Abschnitt 3.3.3 simuliert.

B.1.4 Verwendete Materialgesetze:

Eigenschaften des Betons

Im Programm ABAQUS besteht die Möglichkeit, die σ - ε -Beziehung partiell linear darzustellen, so dass im Druckbereich das Parabel-Rechteck-Diagramm für den Beton polygonartig eingegeben werden könnte. Einige Voruntersuchungen haben aber gezeigt, dass bei einer zu großen Anzahl dieser Polygonzüge, also bei vielen σ - ε -Werten, es zu Konvergenzproblemen kommt. Vereinfachend wurde die bilineare σ - ε -Linie (Bild 2.2.-12) für ein Beton C35/45 mit Bemessungsfestigkeit ($f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c = 35 / 1,5 = 23,3 \text{ MN/m}^2$) und einem Verfestigungsbereich nach dem Fließen zur besseren Konvergenz verwendet.

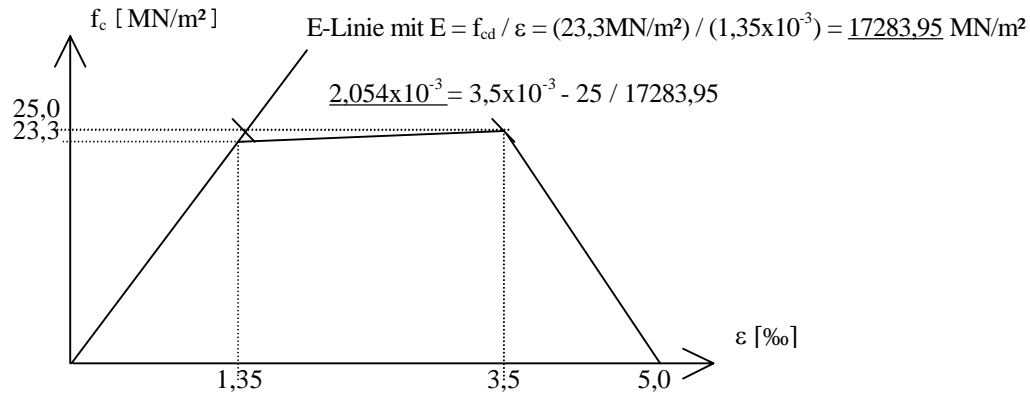


Abbildung -B-8: In der Untersuchung verwendete bilineare σ - ε -Linie für einen Beton C35/45

Im Zugbereich wird mit dem in Abbildung 3-19 dargestellten „*Tension-Stiffening*“-Modell gerechnet. Des weiteren wird die volle Schubtragfähigkeit nach Rissbildung angesetzt.

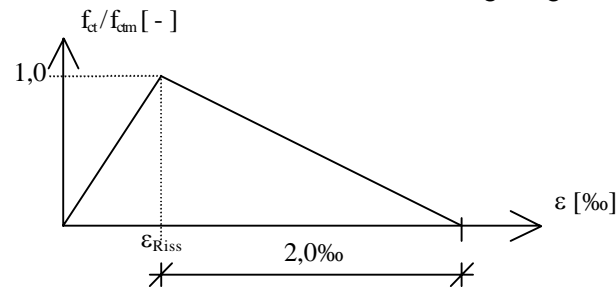


Abbildung B-9: Verwendetes *Tension-Stiffening*-Modell

Verwendetes Werkstoffgesetz für den Stahl

Für den Bewehrungsstahl S500 ($E_s = 200000 \text{ MN/m}^2$ und $f_{yk} = 500 \text{ MN/m}^2$) wird die bilineare σ - ε -Beziehung, mit einem elastischen Verhalten vor der Fließgrenze und einem linearen Verfestigungsbereich nach dem Fließen (Abbildung 3-20) sowohl für den Zug- als auch für den Druckbereich verwendet. Als Fließspannung des Stahls wird seine Bemessungsfestigkeit ($f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 500 / 1,15 = 435 \text{ MN/m}^2$) angesetzt, so dass sich folgende σ - ε -Linie für den Bewehrungsstahl S500 ergibt:

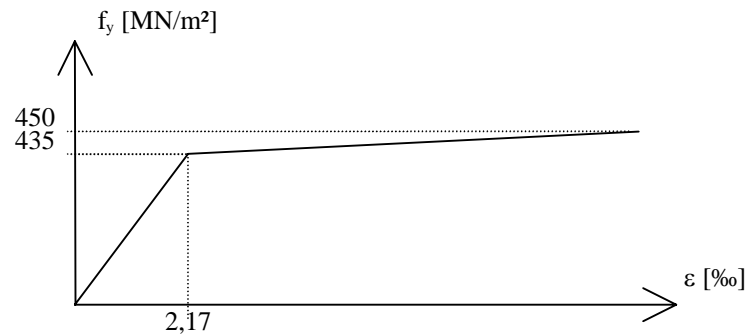


Abbildung B-10: σ - ϵ -Linie für den Bewehrungsstahl S500

B.1.5 Ergebnisse:

Im ersten Schritt wurden anhand von linearen FE-Simulationen der Einfluss unterschiedlicher Stützenlagerungen untersucht. Mithilfe der Momentlinien konnte ermittelt werden, welche Lagerungen Singularitäten erzeugen und aus diesem Grunde ungeeignet sind. Als zielführend erwies sich die Diskretisierung einer Stütze durch neun Federn (ufeder9g)

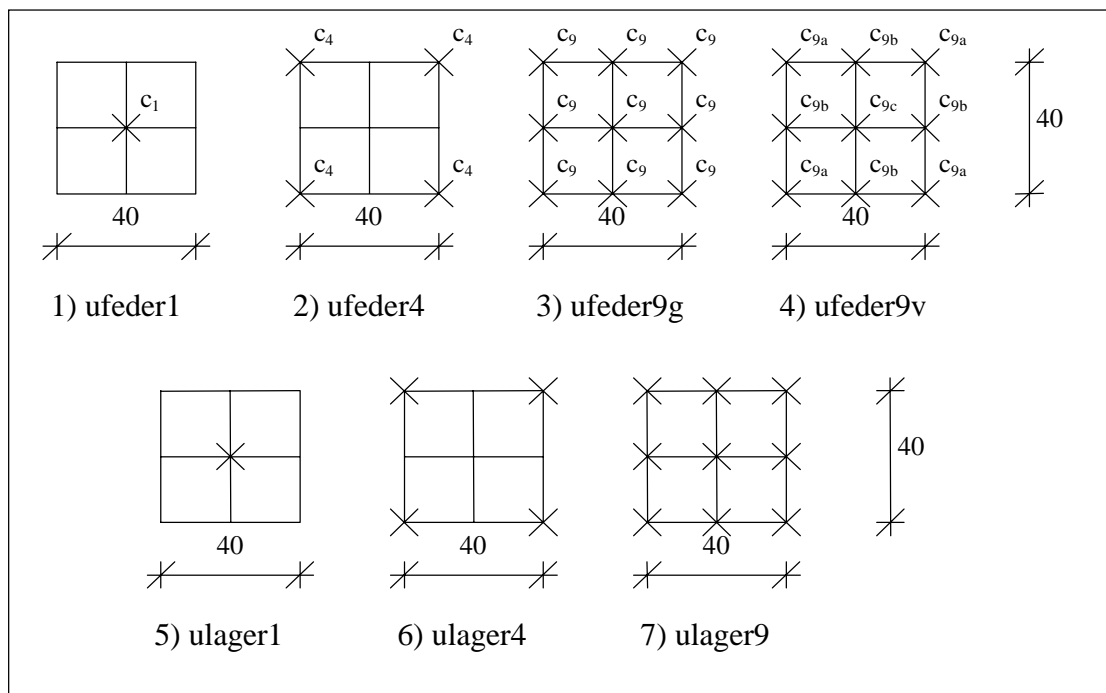


Abbildung B-11: Untersuchte Stützendiskretisierungen

Zusätzlich wurden mit linearen FE-Rechnungen die Bemessungsmomente für die Flachdecke ermittelt und entsprechend der Beanspruchung Bewehrung vorgesehen. Diese Bewehrung wurde für die nicht-linearen Simulationen verwendet.

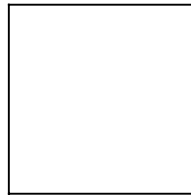


Abbildung B-12: Last-Verformungskurve des belasteten Feldes 1 für das symmetrische Flachdeckensystem bis das Programm ABAQUS abbricht

Der Sprung am Anfang der Last-Verformungskurve (Abbildung 3-22) rührt aus dem Eigengewichtszustand. Es ist die Last-Verformungskurve nach Aufbringen der Verkehrslast dargestellt. Der „*Load-Factor*“ in Abbildung 3-22 dient zur Beschreibung der Laststeigerung. Er stellt den Erhöhungsfaktor dar, um den die Verkehrslast ($q_k = 3,00 \text{ kN/m}^2$) gesteigert wird. Es ist zu erkennen, dass das Programm ABAQUS die Berechnung erst nach Aufbringen der 5,7-fachen Verkehrslast abbricht. Dies liegt weit über dem Bemessungszustand, der bei 1,5-facher Verkehrslast liegt.

Für dieses „weite“ Überschreiten des Bemessungszustandes gibt es folgende Gründe:

- Das Programmsystem ABAQUS rechnet mit einer festen orthogonalen Rissrichtung, mit der zu hohe Versagenslasten ermittelt werden
- Es wurde die Bewehrung gemäß linearer Schnittgrößenermittlung verwendet, dies ist nicht die optimierte Bewehrung

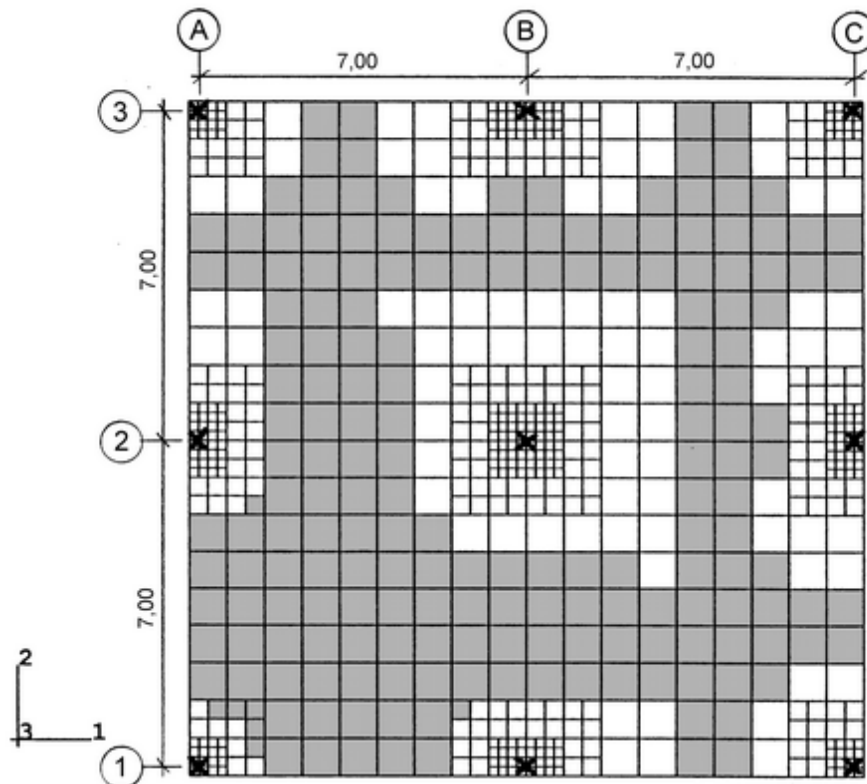


Abbildung B-13: Darstellung der Elemente, in denen an der Deckenunterseite Risse auftreten, im symmetrischen System für Verkehrslast auf Feld 1 im Bemessungszustand

Abbildung 3-23 zeigt, dass eine deutliche Rissbildung im Flachdeckensystem auftritt und aus diesem Grunde eine nicht-lineare Betrachtung erforderlich ist.

Im folgenden werden als Ergebnis die Verhältnisse der β Faktoren nach linearer- bzw. nicht-linearer Berechnung für unterschiedliche Lastpositionen dargestellt.

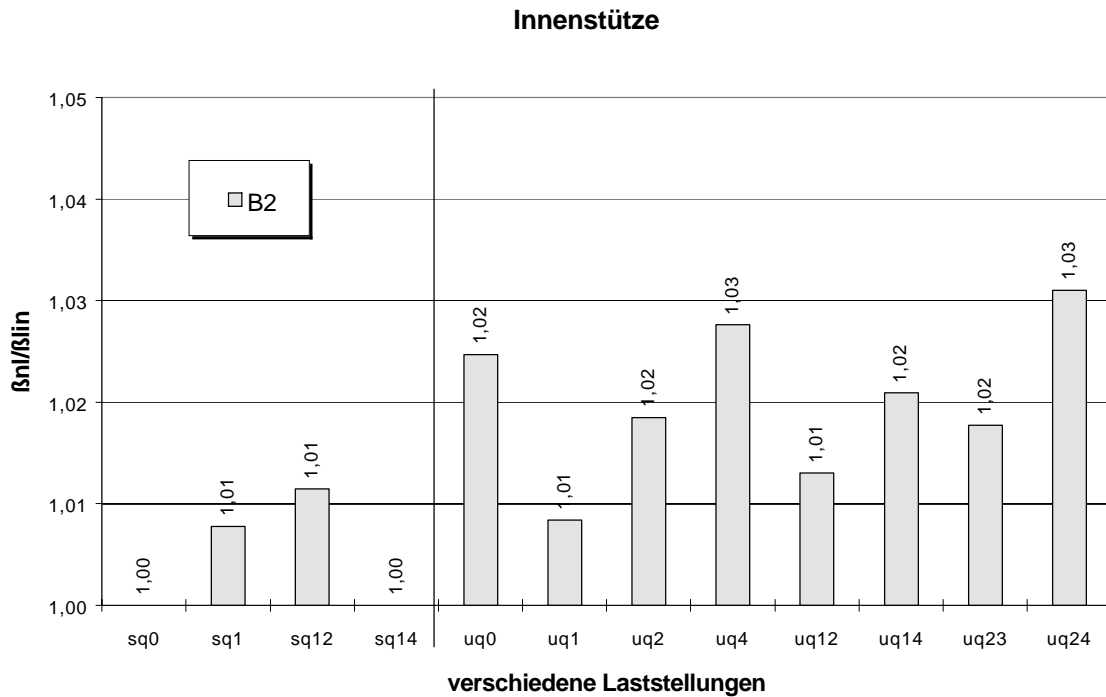


Abbildung B-14: Gegenüberstellung der linearen und nichtlinearen β -Werte (β_{nl} / β_{lin}) für die Innenstütze

Betrachtung von Abbildung 3-24 zeigt, dass aus den numerischen Simulationen geringere Lasterhöhungsfaktoren resultieren, als in EC 2 für Innenstützen vorgeschrieben. Der entsprechende Wert nach EC 2 beträgt für Innenstützen $\beta = 1,15$.

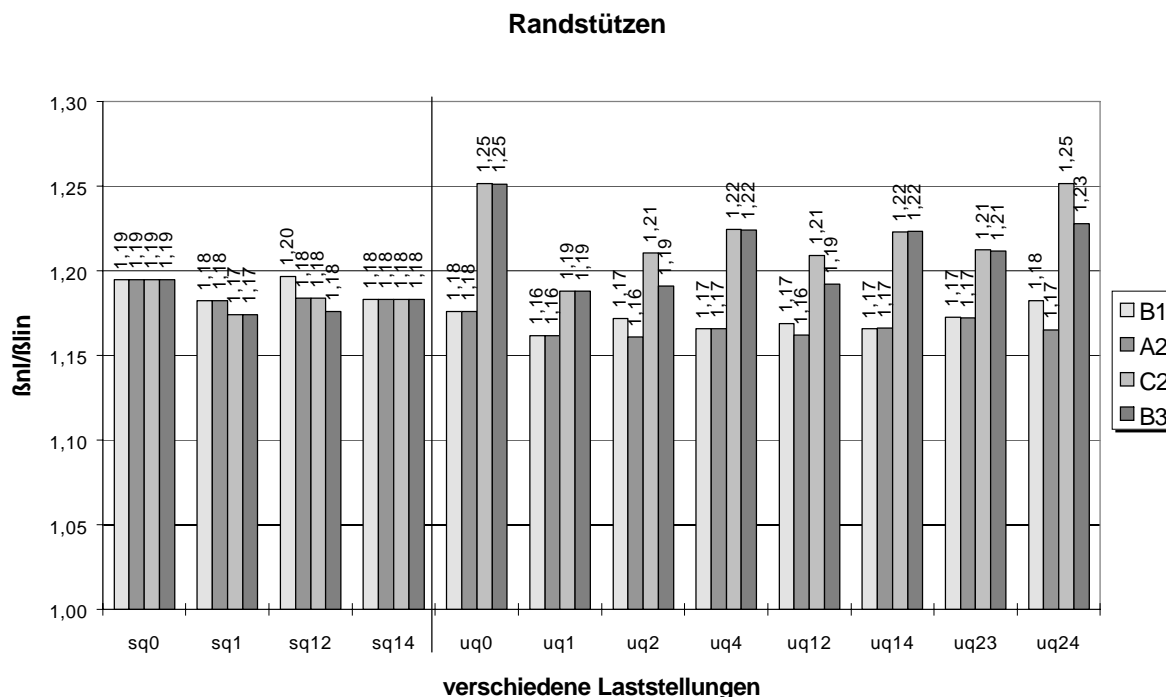


Abbildung B-15: Gegenüberstellung der linearen und nichtlinearen β -Werte (β_{nl} / β_{lin}) für die Randstützen

Es konnte gezeigt werden, dass die Annahme von $\beta = 1,5$ für Randstützen die Lasten auf der sicheren Seite abschätzt.

Für Randstützen mit asymmetrischer Belastung wurden jedoch in der numerischen Simulation zum Teil höhere Lasterhöhungsfaktoren als nach EC 2 ermittelt.

B.2 Simulation eines Schubtragversuchs mit Hilfe des Finite-Elemente-Programms ABAQUS

B.2.1 Projektart

Simulation des numerischen Tragverhaltens unter Schubbeanspruchung mit ABAQUS

B.2.2 Kurzbeschreibung

Die Querkrafttragfähigkeit von Balken und Scheibentragwerken hängt von einer Vielzahl von Parametern, wie Betonfestigkeit, Stabdurchmesser und Stababstand der Längs- und Schubbewehrung, Verbundeigenschaften und Bauteilabmessungen, ab. Die für die Bemessungsregeln relevanten Einflüsse wie Rissverzahnung, Dübelwirkung der Bewehrung, Querkraftanteil der Biegedruckzone und Querkraftanteil der Schubbewehrung müssen in Finite-Elemente-Programmen umgesetzt werden.

Die Simulation des tatsächlichen Tragverhaltens ist daher sehr schwierig und kann nur näherungsweise geschehen.

In der vorliegenden Untersuchung werden diese Einflüsse numerisch untersucht und bewertet. Die Simulation des Schubtragverhaltens wird besonders berücksichtigt. Die Überprüfung fand an sieben ausgewählten Versuchen von Vecchio und Collins statt.

Am "Panel Tester" der Universität von Toronto wurden in der von Vecchio und Collins [85] durchgeführten Versuchsserie zwischen 1979 und 1981 insgesamt 30 Scheiben geprüft.

Die Abmessungen der Scheiben betragen 890/890/70 mm. Die Bewehrung bestand aus glatten Stäben, deren Durchmesser in den verschiedenen Versuchen variiert wurde. Die Stäbe wurden zu orthogonalen Netzen mit Stababständen von etwa 50 mm zusammengeschweißt und in zwei Lagen eingebracht. Die Richtung der Bewehrung war stets parallel zum Rand. (Abbildung 3-26)

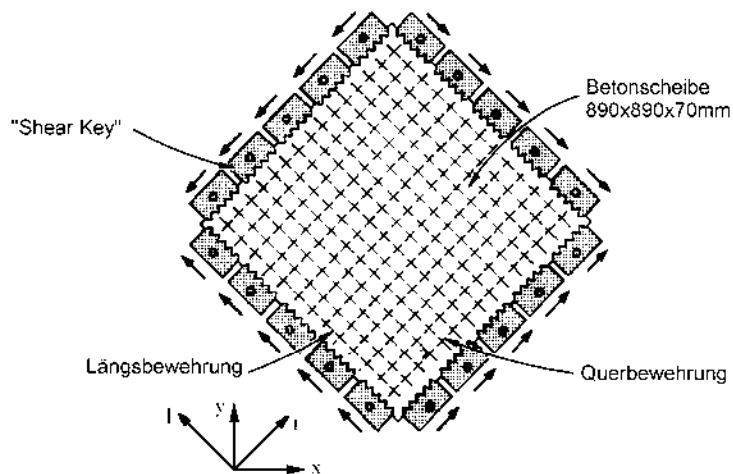


Abbildung B-16: Lasteintragung und Bewehrungslage der Versuchsscheiben von Vecchio und Collins

Zur Lasteintragung in den Beton dienten "Shear Keys" (Abbildung 3-27). Mit Hilfe von Gewindestangen, Ankerplatten und Schlaufen wurde eine Verbindung zu den Bewehrungsstäben hergestellt, um auch die Lasteintragung in die Bewehrung zu gewährleisten.

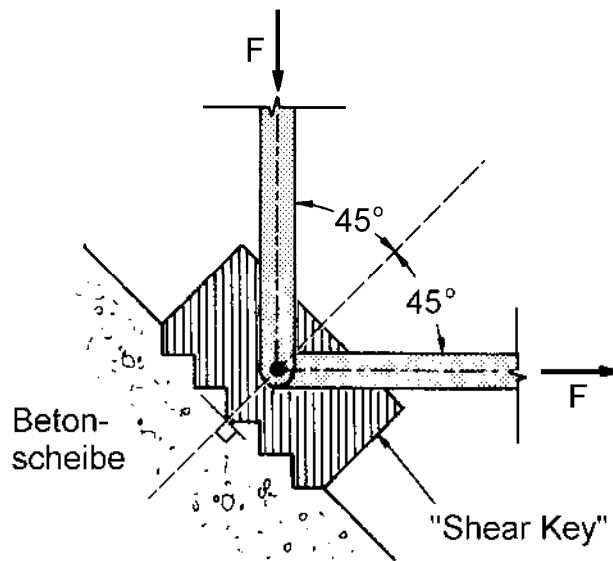


Abbildung B-17: Lasteintragung in die Betonscheibe mittels "Shear Keys", Ankerplatten und Schlaufen

B.2.3 Verwendete Elemente

Es wurden unterschiedliche Elementarten zur Simulation der Versuche von Vecchio und Collins eingesetzt. Ziel war es, das Schubtragverhalten optimal abzubilden.

Es wurden folgende Elemente zur Diskretisierung des Versuchskörpers verwendet:

Element S8R: Schalenelement, 8 Knoten, reduzierte Integration (4 Integrationspunkte)

Element CPS4: Scheibenelement, 4 Knoten, 4 Integrationspunkte

Element CPS8: Scheibenelement, 8 Knoten, 9 Integrationspunkte

Element CPS8R: Scheibenelement, 8 Knoten, red. Integration (4 Integrationspunkte)

Die Variation der Elemente sollte die Frage klären, ob das Konvergenzverhalten vom gewählten Elementtyp abhängt.

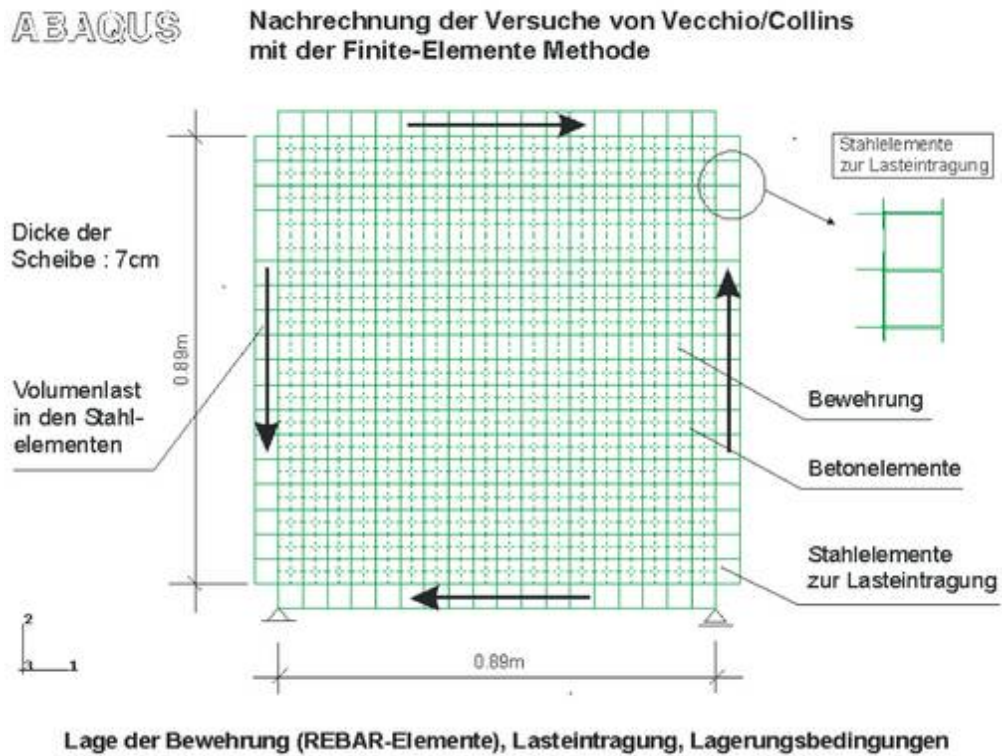


Abbildung B-18: Darstellung des FE-Modells

B.2.4 Verwendete Materialgesetze

Die Eigenschaften des Betonstahls wurden nach Abschnitt 3.3.3 mit dem REBAR-Modul festgelegt. In den FE-Simulationen wurde untersucht, welchen Einfluss unterschiedliche „*Tension-Stiffening*“-Ansätze auf die Ergebnisse der numerischen Rechnungen haben (Abbildung 3-29).

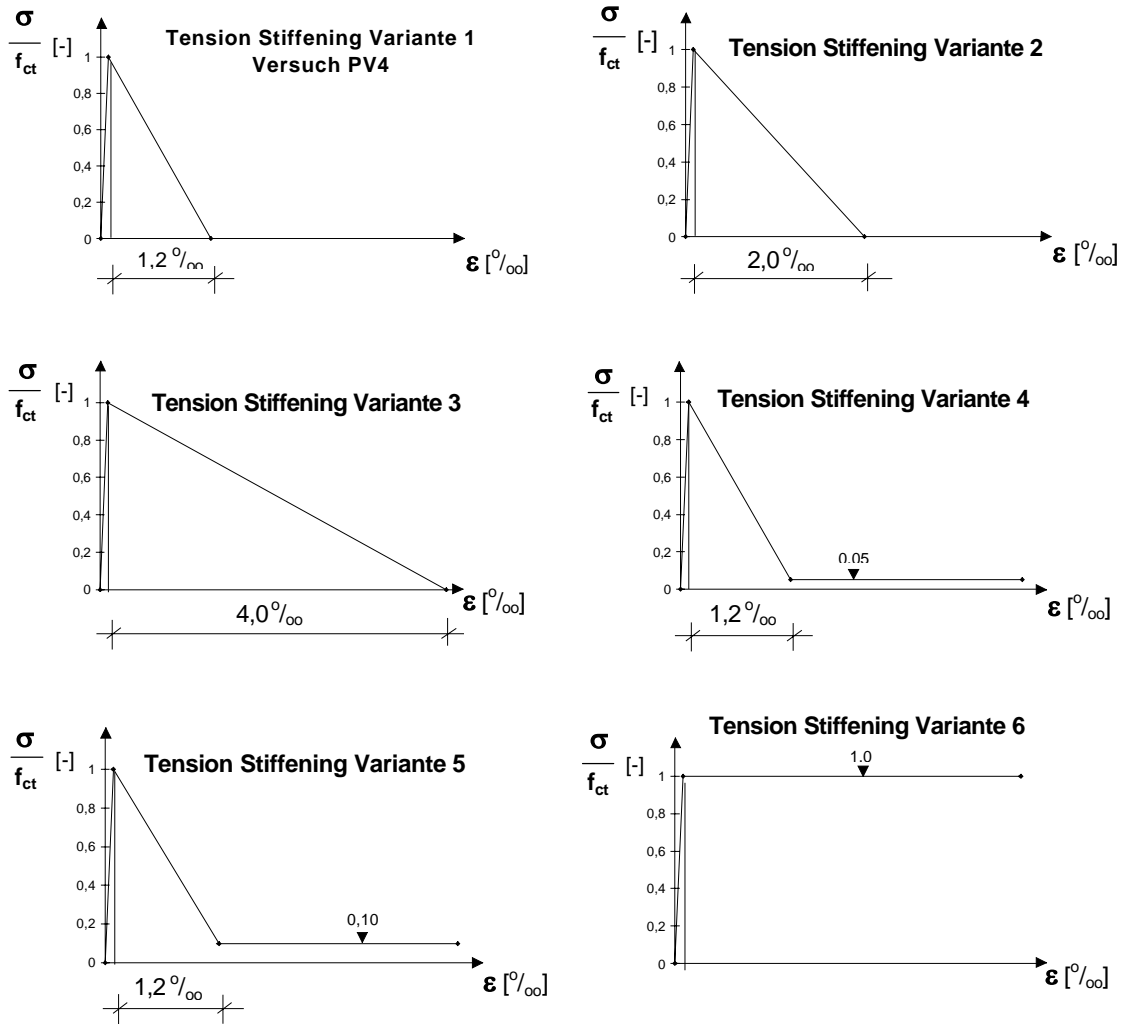


Abbildung B-19: Varianten der *Tension-Stiffening*-Ansätze

Zusätzlich wurde die Arbeitslinie des Betons variiert (Abbildung 3-30). Das zugrundeliegende Materialmodell ist in Abschnitt 3.3.4 dargestellt.

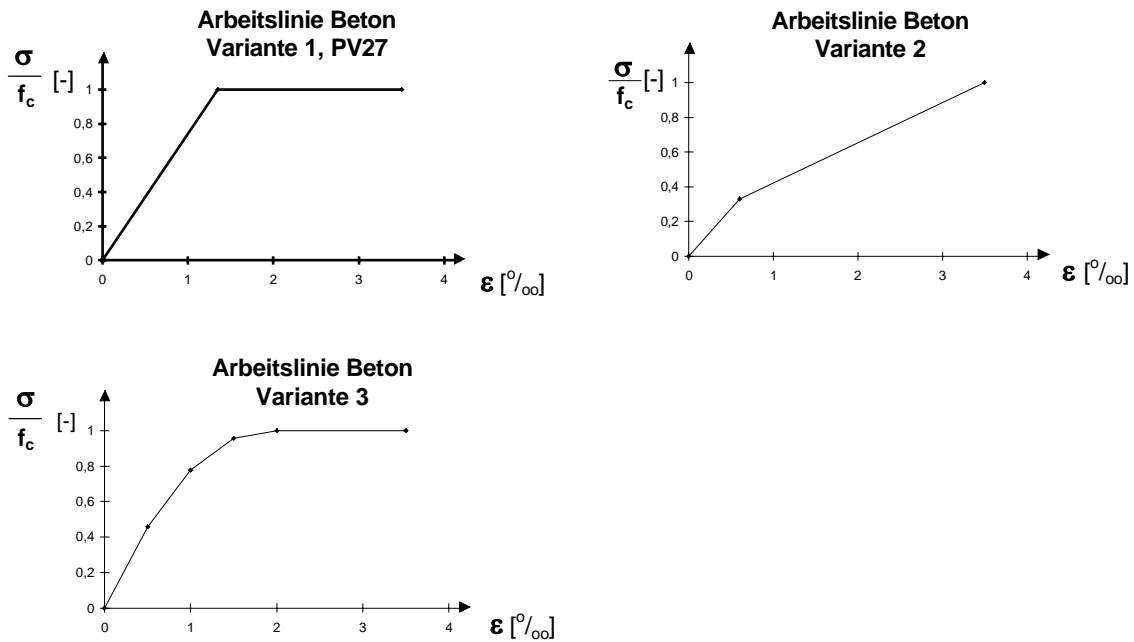


Abbildung B-20: Varianten der Arbeitslinie für Beton

In einer FE-Rechnung wurde auch der *Shear-Retention*-Ansatz variiert, um seinen Einfluss zu untersuchen.

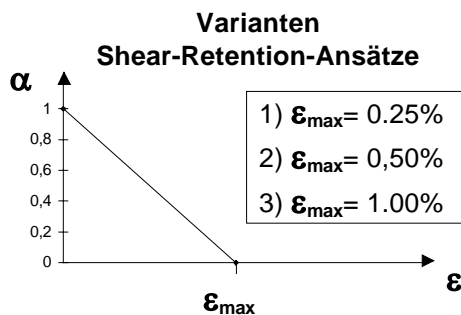


Abbildung B-21: Veränderung des Schubverhaltens

B.2.5 Ergebnisse

Die Auswertung erfolgt hauptsächlich mittels Schubspannungs-Schubverzerrungsbeziehungen. Die Schubverzerrungen werden aus den Verschiebungen des linken, oberen Eckknotens der Scheibe berechnet, da die Schubverzerrungen der gesamten Scheibe benötigt werden, um Vergleiche mit der Auswertung nach VECCHIO und COLLINS zu ermöglichen.

Dabei ergibt sich bei der Nachrechnung aller Versuche, dass das Programm ABAQUS nicht in der Lage ist, die Berechnung bis in den Tragfähigkeitsbereich der Scheiben durchzuführen. Vielmehr

wird die Berechnung aufgrund numerischer Instabilität abgebrochen, bevor plastische Verzerrungen im Beton oder im Stahl auftreten.

Lediglich die Risslast konnte noch abgebildet werden. Wegen des nahezu gleichen Spannungszustandes in allen Elementen trat die Rissbildung in fast allen Elementen auf dem gleichen Lastniveau auf.

Die Variation der Elementtypen ergibt zwar unterschiedliche numerische Stabilität, jedoch wird in keinem Fall die im Versuch gemessene Schubverzerrung erreicht (Abbildung 3-32).

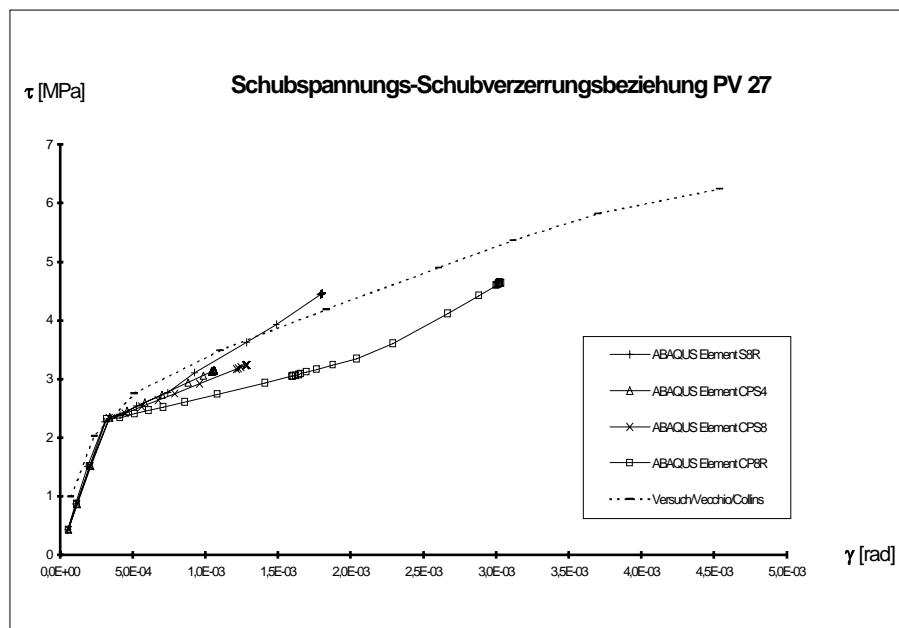


Abbildung B-22: Schubspannungs-Schubverzerrungsbeziehung bei Variation der Elementtypen im Vergleich zum Versuch

Eine Steigerung der Tragfähigkeit in der numerischen Simulation konnte durch Veränderung der Betonarbeitslinie nicht erreicht werden. Die numerische Stabilität war bei Verwendung einer polygonartigen Arbeitslinie (Variante 3 in Abbildung 3-30) besonders gering.

Durch Variation des „*Tension-Stiffening*“-Ansatzes konnte die Steifigkeit des Modells verändert werden, die Tragfähigkeit jedoch nicht gesteigert werden.

In der ABAQUS-Dokumentation [1] ist ein entsprechender Hinweis auf die schlechte Konvergenz des Programms bei Problemen mit gleichzeitiger Druck- und Zugbeanspruchung (verbunden mit Rissbildung), vorhanden. Da eine Schubbeanspruchung auf eine Hauptzugspannung und eine Hauptdruckspannung umgerechnet werden kann, trifft dieser Hinweis auf das vorhandene System zu. Die Lösung solcher Probleme mit dem CONCRETE-Modell sei „sehr schwierig und manchmal unmöglich“. Als Ergebnis der Untersuchung kristallisierte sich heraus, dass eine Berechnung mit ABAQUS bei einer Kombination aus Rissbildung und plastischen Stauchungen des Betons nicht möglich ist.

C MASA

C.1 Finite-Elemente-Simulation des Durchstanzbereiches schubbewehrter Flachdecken

C.1.1 Projektart

Untersuchung zur numerischen Simulation von Flachdecken mit Bügelbewehrung

C.1.2 Kurzbeschreibung

Im folgenden wird die Simulation von schubbewehrten, durchstanzgefährdeten Plattenausschnitten unter Berücksichtigung diskreter Bügel näher beschrieben. Die Simulation wurde durchgeführt mit dem, auf dem Microplane-Modell basierenden, FE-Programm MASA vom IWB Stuttgart. Unter anderem wurde der Einfluss der Diskretisierung der Bügelbewehrung untersucht. Ferner wurde ermittelt, ob MASA in der Lage ist, die Dübelwirkung der Längsbewehrung zu erfassen. Zur Verifikation wurden zwei Versuche aus [17] nachgerechnet. Schließlich konnte in Parameterstudien der Einfluss unterschiedlicher geometrischer und physikalischer Eigenschaften auf die Durchstanztragfähigkeit eingegrenzt werden.

C.1.3 Verwendete Elemente

Unter Ausnutzung der Symmetrieachsen wurde nur ein Viertel des Deckenausschnitts modelliert. Der Beton wurde durch Volumenelemente mit acht Knoten diskretisiert.

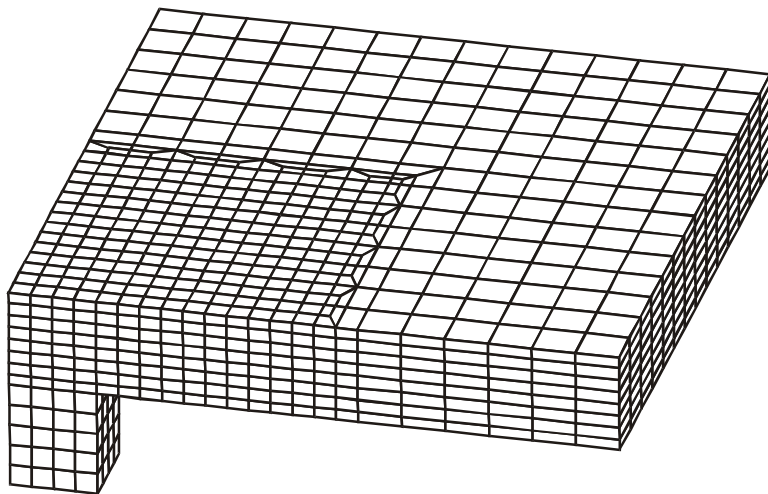


Abbildung C-1: Darstellung des FE-Netzes

Die Höhe der gesamten Platte ist in acht Elementlagen eingeteilt. Da die Elementanzahl insgesamt begrenzt ist und starken Einfluss auf die Rechenzeit hat, ist eine abgestufte Einteilung in der Plat-

tenebene gewählt worden: Für den schubbewehrten Bereich bis 70cm von Stützenmitte wurden Elemente mit 5cm Seitenlänge verwandt, außerhalb haben die Elemente Seitenlängen von 10cm.

Für die Abstufung zwischen den Elementen unterschiedlicher Seitenlängen wurden am IWB eingeführte Übergangselemente übernommen (siehe Abbildung 4-2)

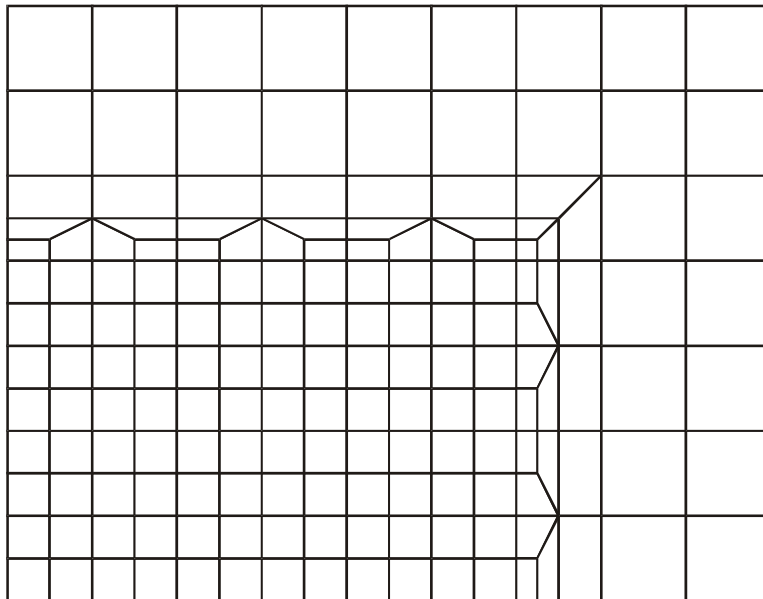
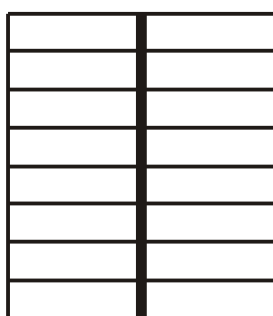


Abbildung C-2: Übergangselemente zwischen den groben und feinen Elementen

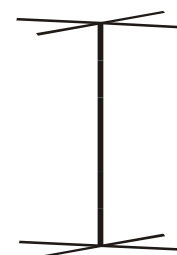
Die Biegebewehrung wurde diskret, mit Fachwerkstäben, abgebildet. Zur Abbildung der Bügel wurde eine Kombination von Fachwerkstäben und Biegestäben verwendet. Dabei wurden verschiedene Verankerungsvarianten numerisch untersucht, mit dem Ziel, die Traglast des Versuches und die Bügelbeanspruchung zu approximieren.



a) Typ I



b) Typ S



c) Typ Doppelt

Abbildung C-3: in den Simulationen getestete Verankerungselemente

Verankerungselement in der Betondeckung (Typ I)

Verankerung der Bügel mit Verankerung Typ S

komplette Verankerung der Bügel (Typ Doppel-T)

C.1.4 Verwendete Materialgesetze

Den Betonelementen wurde das Microplane-Materialmodell der Version M3 zugewiesen. In dieser Modellversion wird das Verhalten des Betons durch 13 Parameter gesteuert. Zum tiefergehenden Verständnis der Parameter wurden Kleinversuche an Plattenausschnitten numerisch durchgeführt.

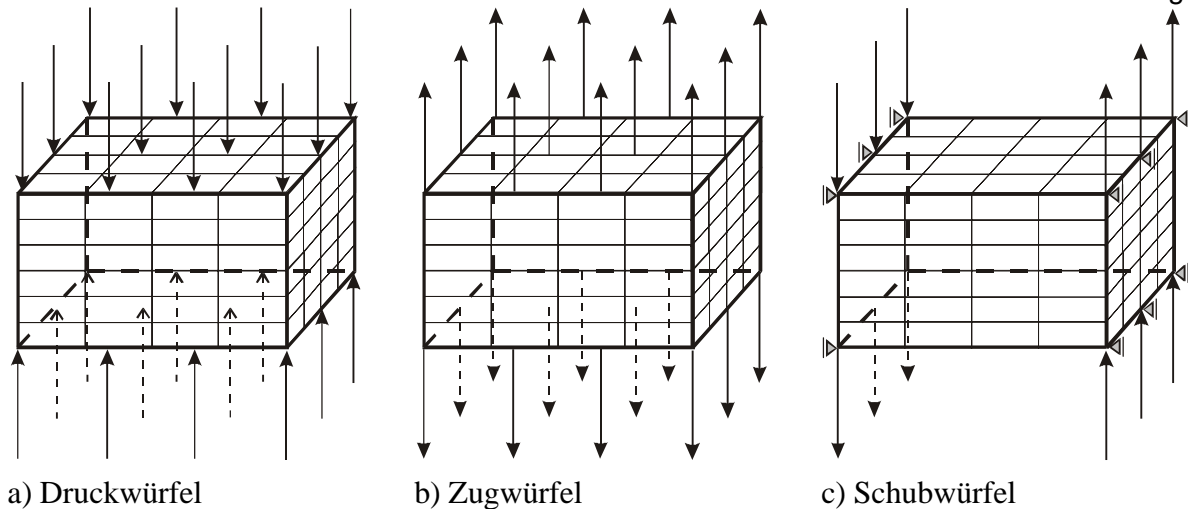


Abbildung C-4: Diskretisierung der Kleinversuche

Zur Simulation der Durchstanzversuche wurden die Standard-Einstellungen für das Microplane-Materialmodell verwendet. Damit wurde die Versuchslast zum Teil etwas unterschritten. Dies wurde im Hinblick auf ein konsistentes Betonmodell jedoch hingenommen.

Das Verhalten der Elemente der Längs- bzw. Bügelbewehrung wurde durch ein bilineares Spannungs-Dehnungs-Gesetz abgebildet.

C.1.5 Ergebnisse

Untersuchung des Verankerungsverhaltens der Bügelbewehrung

Unterschiedliche Verankerungselemente für die Bügelbewehrung wurden nach Abbildung 4-3 getestet. Die Auswirkung auf die Traglast ist in den untenstehenden Diagrammen dargestellt.

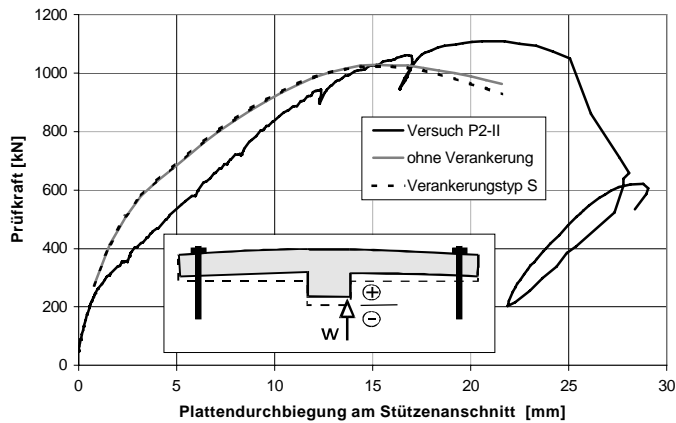


Abbildung C-5: Einfluss des Verankerungstyps S auf die Traglast

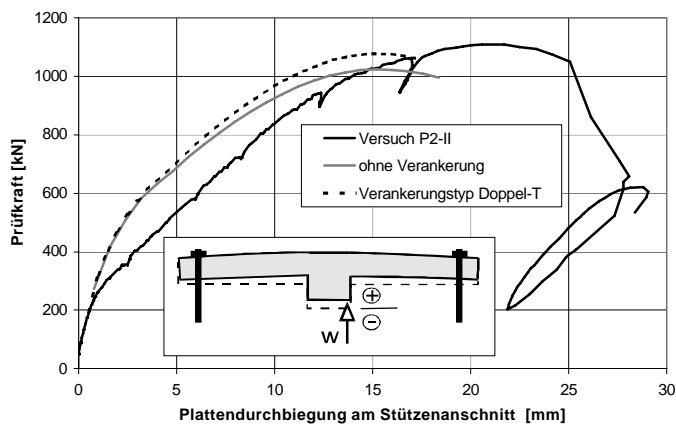


Abbildung C-6: Einfluss des Verankerungstyps T auf die Traglast

Aus Abbildung 4-5 ist ersichtlich, dass eine Verankerung Typ S unwirksam ist, sie erbringt keine Traglaststeigerung gegenüber Bügeln ohne Verankerung.

Als wirkungsvoll erwies sich eine Verankerung nach Typ T, dieser Verankerungstyp wurde im Anschluss für die Simulation der Durchstanzversuche verwendet.

Verifikation eines Durchstanzversuchs mit Bügelbewehrung

Die Nachrechnung eines Durchstanzversuchs mit Bügelbewehrung erbrachte, dass die Traglast zu niedrig abgebildet wird. Nach Einsetzen der Erstrissbildung ist ein zu steifes Tragverhalten der FE-Simulation festzustellen.

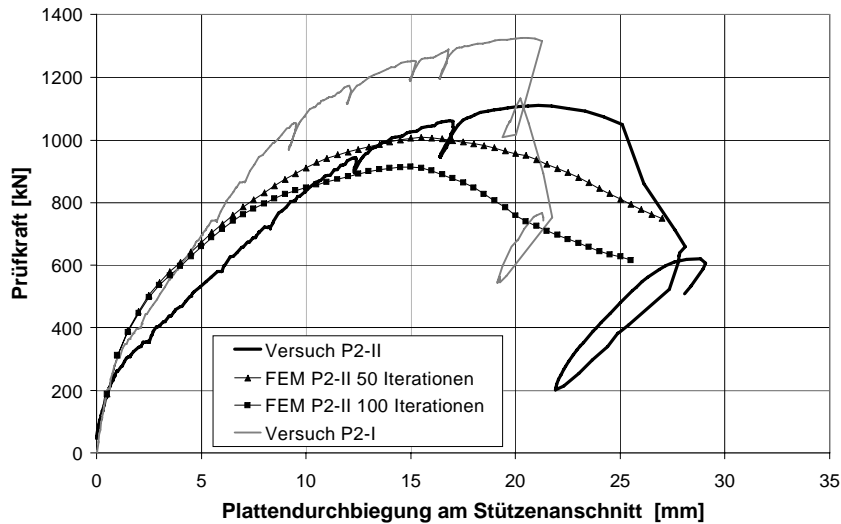


Abbildung C-7: Last-Verformungskurve der Simulationen mit 2,6 bzw 3,8% Restfehler im Vergleich zum Versuch, als Hinweis zusätzlich P2-I

Die zu geringe Traglast konnte auf die fehlende Abbildung der Dübelwirkung der Längsbewehrung zurückgeführt werden. Dies wurde durch Nachrechnung eines Durchstanzversuches mit radial angeordneter Längsbewehrung festgestellt, bei dem eine Dübelwirkung ausgeschlossen werden konnte.

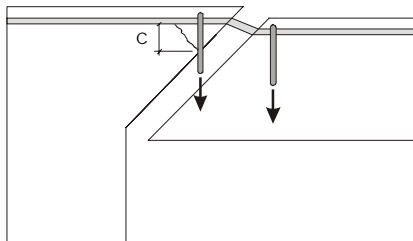


Abbildung C-8: Dübelwirkung der Längsbewehrung

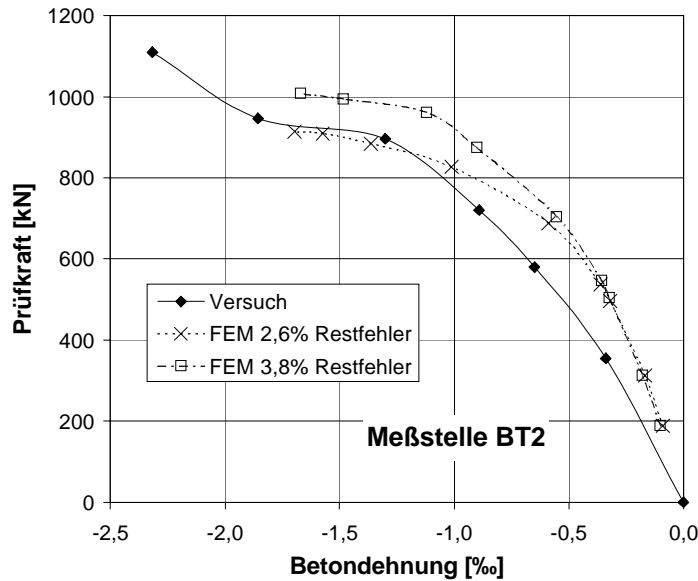


Abbildung C-9: Entwicklung der Betondehnungen auf der Hauptachse (18,5 cm entfernt von der Stütze) in tangentialer Richtung

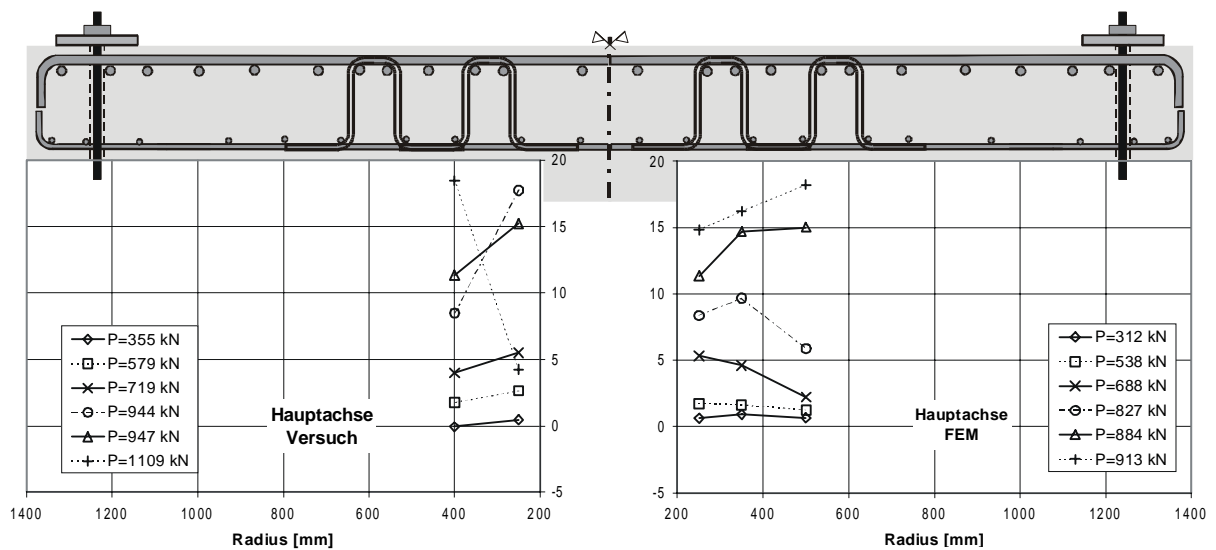


Abbildung C-10: Vergleich der Entwicklung der Bügelkräfte auf der Hauptachse im Versuch und in der Rechnung mit 2,6% Restfehler (Bügel: Ø8)

Betrachtung von Abbildung 4-9 und Abbildung 4-10 zeigt an ausgewählten Beispielen, dass die Beanspruchung von Beton, Betonstahl und Schubbewehrung im Versuch und in der numerischen Rechnung als gut zu bezeichnen ist. Es resultieren aufgrund der geringeren Verformungen im Mittel etwas geringere Spannungen in den FE-Rechnungen.

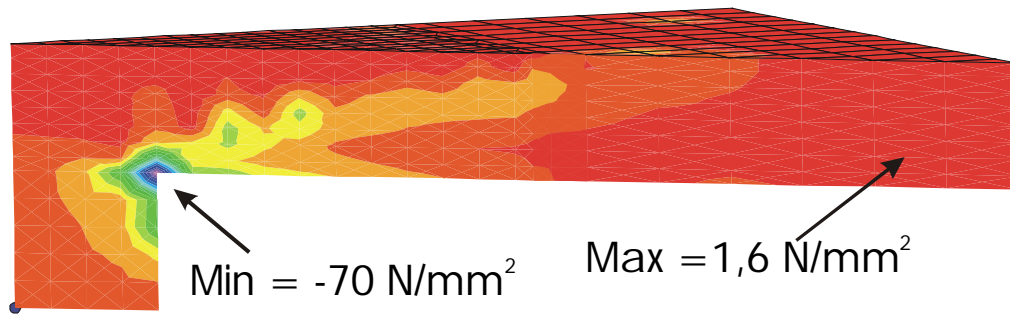


Abbildung C-11: Darstellung der Hauptdruckspannungen im Bruchlastzustand im Schnitt auf der Diagonalen