

# Unsicherheiten von Werten aus Bemessungskurven und -tabellen

**T 3266**

T 3266

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2012

ISBN 978-3-8167-8651-1

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69

70504 Stuttgart

Nobelstraße 12

70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00

Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

# Physikalisch-Technische Bundesanstalt

Braunschweig und Berlin



Bericht

*Report*

Volker Wittstock

Werner Scholl

## **Unsicherheiten von Werten aus Bemessungskurven und -tabellen**

**gefördert vom:**

Deutschen Institut für Bautechnik (DIBt)

Braunschweig, 2011-12-14

## Inhalt

<b>1. EINLEITUNG .....</b>	<b>3</b>
<b>2. UNSICHERHEIT VON WERTEN AUS BEMESSUNGSKURVEN.....</b>	<b>5</b>
2.1. GENERELLE ANMERKUNGEN ZU BEMESSUNGSKURVEN .....	5
2.2. REGRESSIONSRECHNUNG UND ZUGEHÖRIGE UNSICHERHEIT .....	5
2.3. BERÜCKSICHTIGUNG DER UNSICHERHEIT DER EINGANGSGRÖßEN .....	9
2.4. VARIATION DER UNSICHERHEIT DER EINGANGSGRÖßEN.....	12
2.5. UNSICHERHEITEN VON WERTEN AUS MEHRPARAMETRIGEN BEMESSUNGSKURVEN	14
<b>3. UNSICHERHEITEN FÜR TABELLENWERTE.....</b>	<b>16</b>
<b>4. EMPFEHLUNGEN FÜR DIE DIN 4109 .....</b>	<b>19</b>
4.1 BEMESSUNGSKURVEN.....	19
4.2 BEMESSUNGSTABELLEN.....	20
<b>LITERATUR.....</b>	<b>21</b>

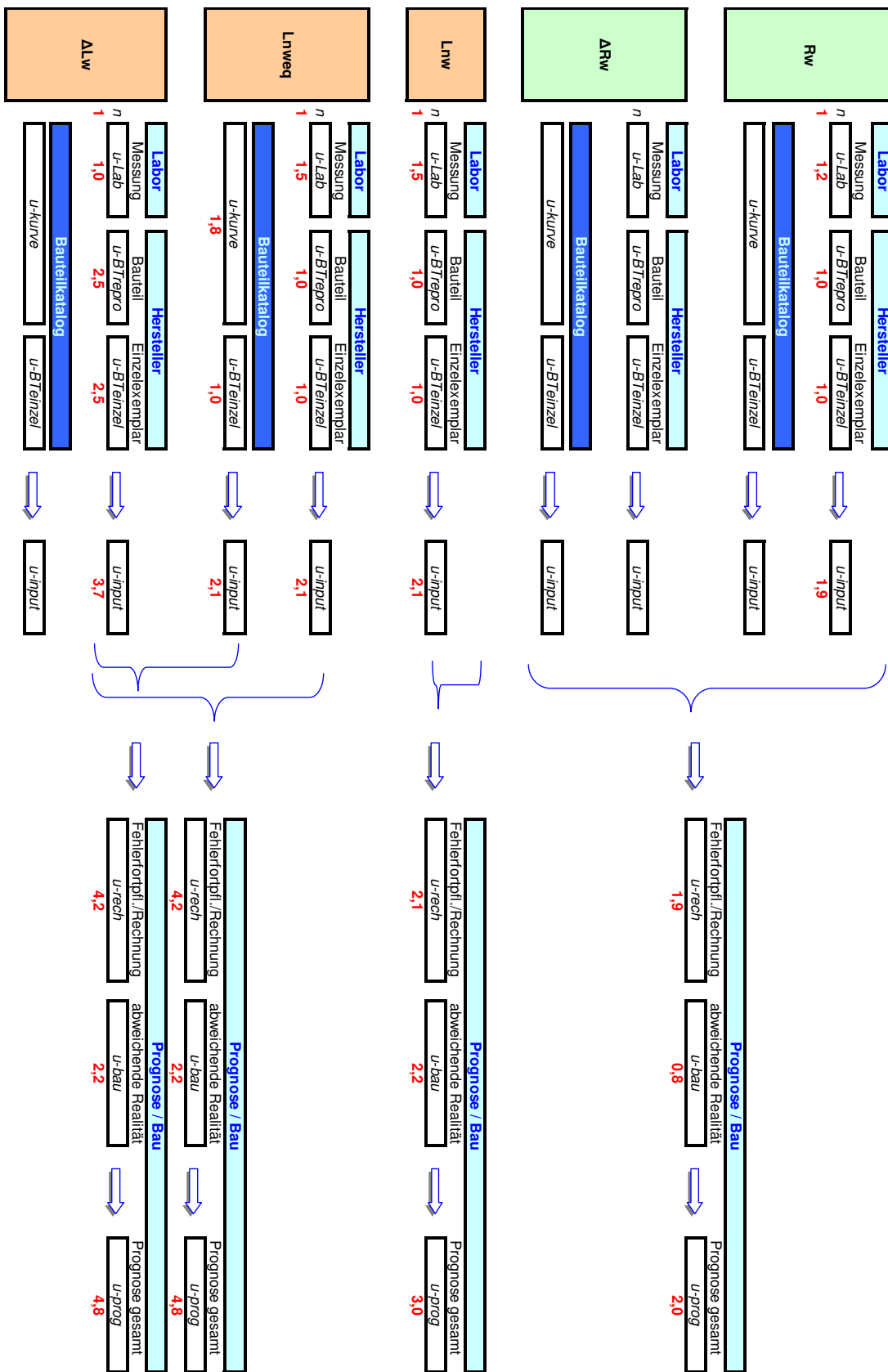
## **1. Einleitung**

Zur Zeit wird die deutsche Schallschutznorm DIN 4109 [1] im Rahmen der Europäischen Harmonisierung völlig neu überarbeitet. Hierzu gehört auch, dass künftig der Nachweis der Erfüllung der bauaufsichtlichen Anforderungen an den Schallschutz eine Unsicherheitsberechnung umfasst, aus der hervorgeht, wie sicher die jeweilige Anforderung erreicht wird. Im Rahmen mehrerer, vom DIBt geförderter Projekte [2], [3], [4], wurden erstmals gesicherte Werte für die Unsicherheiten der entsprechenden bauakustischen Messverfahren, der einzelnen Produkte und der darauf basierenden Prüfzeugnisse und Schallschutznachweise bestimmt. Hierbei war allerdings zugrundegelegt, dass für die am Gebäude beteiligten Bauteile deren Schalldämmwerte durch individuelle Prüfzeugnisse nachgewiesen waren.

In der Neufassung der DIN 4109 zeichnet sich aber ab, dass der sehr umfangreiche - in der alten Fassung bauaufsichtlich eingeführte - Bauteilkatalog zahlreiche Bemessungskurven enthalten wird, die in irgendeiner Weise aus individuellen Messergebnissen gebildet wurden. Damit die erforderliche Unsicherheitsberechnung künftig überhaupt mit solchen Bemessungskurven-Werten durchgeführt werden kann, soll im Folgenden untersucht werden, wie Werten aus Bemessungskurven und -tabellen Unsicherheiten zugeordnet werden können.

Das aktuelle Konzept zur Berücksichtigung der Unsicherheiten in der DIN 4109 ist in Bild 1 dargestellt. Für das bewertete Schalldämm-Maß wird in [4] vorgeschlagen, von einer Messunsicherheit von 1,2 dB auszugehen. Dazu kommt die Streuung auf Grund der begrenzten Reproduzierbarkeit des Bauteils, die mit 1,0 dB abgeschätzt wird. Diese Produktstreuung ist zwei mal zu berücksichtigen, da bei der Messung im Labor ein Exemplar und beim konkreten Bauvorhaben ein anderes Exemplar zum Einsatz kommen. Damit liegt die Unsicherheit beim Eingang in die Prognoserechnung bei 1,9 dB. Die Frage ist nun, wie groß diese Unsicherheit ist, wenn das bewertete Schalldämm-Maß aus einer Bemessungskurve ermittelt wird.

DIN 4109: Unsicherheitsschema



**Bild 1** Aktuelles Konzept zur Berücksichtigung der Unsicherheiten in der DIN 4109 aus [4]. Die roten Zahlen sind die Standardunsicherheiten in dB.

## 2. Unsicherheit von Werten aus Bemessungskurven

### 2.1. Generelle Anmerkungen zu Bemessungskurven

Bemessungskurven in der DIN 4109 setzen voraus, dass ein eindeutiger Zusammenhang zwischen einer akustischen Bauteilkenngröße und einer anderen Bauteileigenschaft existiert. Ein Beispiel für einen solchen Zusammenhang ist die sogenannte Massekurve, die das bewertete Schalldämm-Maß als Funktion von der flächenbezogenen Masse darstellt. Dieser Zusammenhang wird als linear angenommen. Gerade beim bewerteten Schalldämm-Maß liegt ein solcher linearer Zusammenhang jedoch nicht auf der Hand, da es durch eine Erhöhung der flächenbezogenen Masse neben einer generellen Zunahme der Schalldämmung auch zu einer spektralen Verschiebung der Schalldämmwerte kommt. Durch das Bewertungsverfahren werden diese verschieden geformten Spektren zu einer Zahl verdichtet. Eine lineare Abhängigkeit des bewerteten Schalldämm-Maßes von der flächenbezogenen Masse kann daher nur innerhalb bestimmter Grenzen angenommen werden.

Bei der Verwendung von Massekurven muss außerdem berücksichtigt werden, dass die flächenbezogene Masse bei der Prognose üblicherweise nur innerhalb bestimmter Grenzen bekannt ist, die sich aus den Rohdichteklassen der verwendeten Steine ergeben. Eine Unsicherheit von 10 % ist für die flächenbezogene Masse allein auf Grund dieses Effekts realistisch. In die weiteren Untersuchungen wird dieser Effekt jedoch nicht einbezogen.

### 2.2. Regressionsrechnung und zugehörige Unsicherheit

Die Betrachtungen werden anhand einer sogenannten Massekurve vorgenommen, die einen Zusammenhang zwischen dem bewerteten Schalldämm-Maß und der flächenbezogenen Masse des Bauteils herstellt. Die gefundenen Zusammenhänge können ohne Weiteres auf andere einparametrische lineare Zusammenhänge übertragen werden.

**Tabelle 1** Gemessene bewertete Schalldämm-Maße und zugehörige Flächenmasse für Kalksandstein, die als Grundlage für die Berechnung der Massekurve dienen

$m'$ in $\text{kg/m}^2$	130	180	285	341	475	614
$R_{W,\text{Bau}}$ in dB	43,2	46,6	54,5	56,6	60,3	63,5

Aus Messungen liegen die bewerteten Schalldämm-Maße (umgerechnet auf den Bau-Verlustfaktor) und die zugehörigen Flächenmassen vor (Tabelle 1). Die Werte wurden freundlicherweise von der Hochschule für Technik Stuttgart bereitgestellt. Das Ziel besteht nun darin, aus diesen Werten eine Kurve zu berechnen, die die Ermittlung eines bewerteten Schalldämm-Maßes bei vorgegebener Flächenmasse ermöglicht. Dazu wird von einem linearen Zusammenhang zwischen dem bewerteten Schalldämm-Maß und dem dekadischen Logarithmus der Flächenmasse ausgegangen:

$$\underbrace{R_{W,Bau}}_y = b \lg \left[ \underbrace{\frac{m'}{1 \text{ kg/m}^2}}_x \right] + a \quad (1)$$

Die Parameter  $a$  und  $b$  werden durch lineare Regression [5] ermittelt. Sie ergeben sich aus

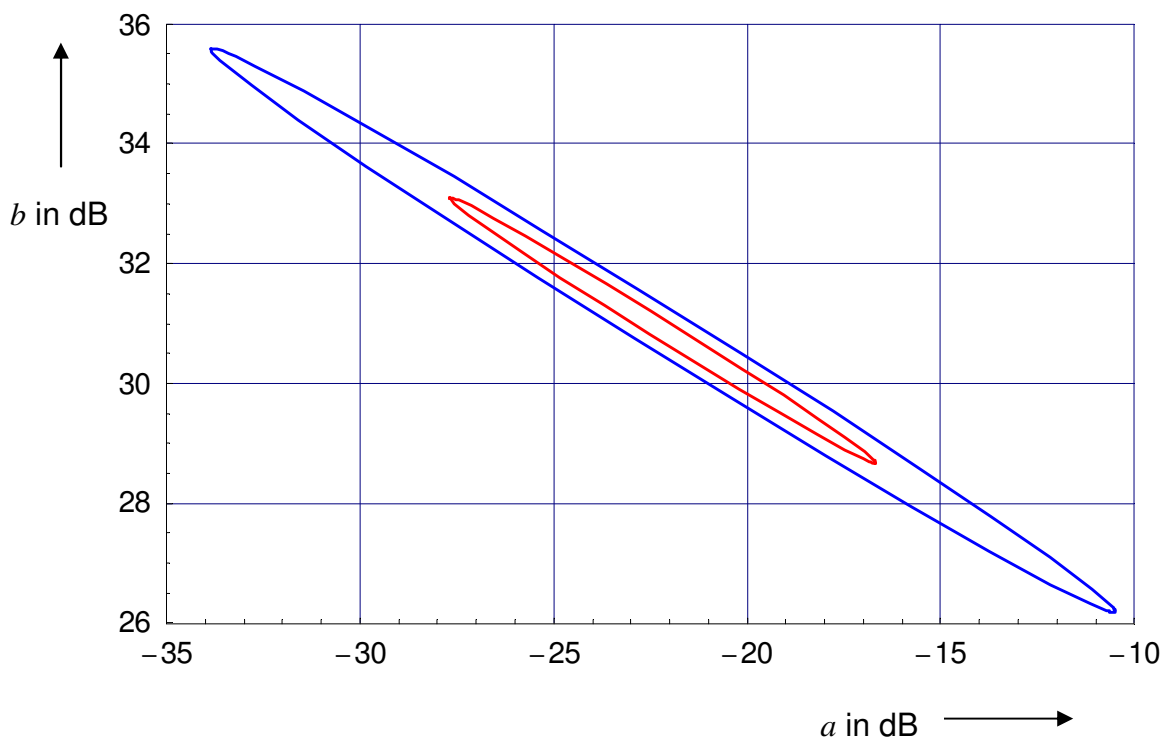
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

und

$$a = \bar{y} - b \bar{x}. \quad (3)$$

Aus den Werten der Tabelle 1 folgen die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} a &= -22,18 \text{ dB} \\ b &= 30,89 \text{ dB} \end{aligned} \quad (4)$$



**Bild 2** Konfidenzbereich für die Parameter  $a$  und  $b$ , 95%-Vertrauensniveau (blau) und 68%-Vertrauensniveau (rot)

Es stellt sich nun die Frage, welche Unsicherheiten den Regressionsparametern beizumessen sind. Dazu seien zunächst die Annahmen getroffen, dass die Unsicherheiten der Flächenmasse und des bewerteten Schalldämm-Maßes in Tabelle 1 vernachlässigt werden können. Dieser Ansatz ist für Regressionsanalysen



üblich [5]. Ein Konfidenzbereich für die Regressionsparameter lässt sich dann unmittelbar mit dem Softwarepaket "mathematica" ermitteln (Bild 2). Die Parameter sind streng miteinander korreliert, so dass sich eine flache Ellipse als Konfidenzbereich ergibt.

Die Unsicherheiten der Regressionsparameter ergeben sich nach folgenden Gleichungen [5]

$$u(a) = s \sqrt{\left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}, \quad (5)$$

$$u(b) = \frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (6)$$

mit der empirischen Standardabweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i)^2}. \quad (7)$$

Sie ist ein Maß dafür, wie sehr die einzelnen Datenpunkte der Tabelle 1 von der Regressionsgeraden abweichen. Für das betrachtete Beispiel ergibt sie sich zu

$$s = 0,71 \text{ dB}. \quad (8)$$

Damit folgt die Unsicherheit der Regressionsparameter

$$u(a) = 3,13 \text{ dB} \quad (9)$$

und

$$u(b) = 1,26 \text{ dB}. \quad (10)$$

Als nächstes soll untersucht werden, welche Unsicherheit der Regressionsgeraden zugeordnet werden kann. Ein Konfidenzstreifen für die Regressionsgerade ist durch folgendes Intervall gegeben [5]

$$[a + b x_0 - C_1; a + b x_0 + C_1] \quad (11)$$

mit

$$C_1 = s t_{n-2; 1-\gamma/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (12)$$

Dabei ist  $t_{n-2; 1-\gamma/2}$  das Quantil der t-Verteilung mit n-2 Freiheitsgraden zum Vertrauensniveau  $1-\gamma/2$ . Für die in der Bauakustik übliche statistische Sicherheit von 68% (zweiseitig) folgt mit

$$1 - \gamma/2 = 0,84 \quad (13)$$

und  $n = 6$

$$t_{4;0,84} = 1,13. \quad (14)$$

Da die Quantile der t-Verteilung für so geringe Sicherheiten kaum tabelliert sind, wurde dieser Wert mit der Software „mathematica“ ermittelt. Die Breite des Konfidenzstreifens  $C$  hängt von der Stelle  $x_0$ , also von der flächenbezogenen Masse ab. Sie beträgt im betrachteten Bereich

$$C_1 = 0,33 \dots 0,61 \text{ dB}. \quad (15)$$

Der Konfidenzstreifen ist damit insgesamt sehr schmal (Bild 3). In der Mitte des abgedeckten Bereichs flächenbezogener Massen ist der Konfidenzstreifen schmäler als an den Rändern.

Der Konfidenzstreifen liefert eine Aussage darüber, in welchem Bereich die Regressionsgerade mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt. Für die Praxis viel wichtiger ist jedoch ein Prognosestreifen, der diejenigen Bau-Schalldämmmaße mit bestimmter Wahrscheinlichkeit beinhaltet, die nicht als Grundlage für die Regressionsrechnung dienen. Nach [5] ergibt sich ein solcher Prognosestreifen für den Wert  $y_0$  an der Stelle  $x_0$  aus

$$[a + b x_0 - D_1; a + b x_0 + D_1] \quad (16)$$

mit

$$D_1 = s t_{n-2;1-\gamma/2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \quad (17)$$

Für die Breite des Prognosestreifens innerhalb des abgedeckten Bereichs flächenbezogener Massen ( $x$ -Werte) folgt somit

$$D = 0,88 \dots 1,02 \text{ dB}. \quad (18)$$

Damit kann in ausreichend guter Näherung

$$D \approx 1,0 \text{ dB} \quad (19)$$

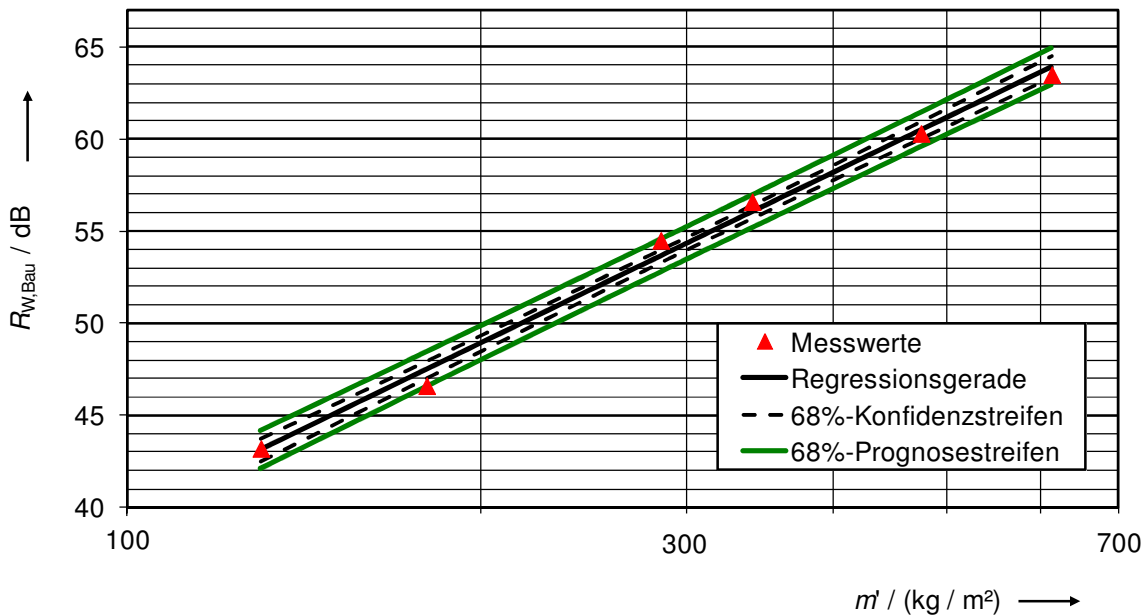
gesetzt werden. Dies führt insgesamt zur Prognosegleichung

$$R_{W,Bau} = \left( 30,9 \lg \left[ \frac{m'}{1 \text{ kg/m}^2} \right] - 22,2 \right) \text{ dB} \quad (20)$$

wobei die Unsicherheit der prognostizierten bewerteten Schalldämm-Maße

$$u(R_{W,Bau}) = 1,0 \text{ dB} \quad (21)$$

beträgt, wenn die halbe Breite des 68%-Prognoseintervalls mit der Unsicherheit identifiziert wird. Ein solches Vorgehen entspricht dem Verständnis einer Unsicherheit nach [7] und [8].



**Bild 3** Gemessene bewertete Schalldämm-Maße (umgerechnet auf den mittleren Bau-Verlustfaktor), Regressionsgerade, Konfidenzstreifen für die Regressionsgerade (Gl. (11)) und Prognosestreifen (Gl. (16)) bei **Vernachlässigung** der Unsicherheiten der Eingangsgrößen aus Tabelle 1 (bewertetes Schalldämm-Maß und flächenbezogene Masse)

### 2.3. Berücksichtigung der Unsicherheit der Eingangsgrößen

Im vorangehenden Abschnitt wurde grundsätzlich davon ausgegangen, dass die Eingangsdaten für die Regressionsrechnung (Werte der Tabelle 1) eine vernachlässigbare Unsicherheit aufweisen. Um zu realistischeren Zahlenwerten zu kommen, sollen in diesem Abschnitt die Unsicherheiten der hier verwendeten Eingangsgrößen - bewertetes Schalldämm-Maß und flächenbezogene Masse - Berücksichtigung finden. Ausgangspunkt für diese Betrachtung ist die Gleichung

$$y_0 = b x_0 + a \quad (22)$$

wobei  $y_0$  für eine spezielle Realisierung des bewerteten Schalldämm-Maßes bei einer bestimmten Flächenmasse  $x_0$  (dekadischer Logarithmus) steht. Unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen  $a$  und  $b$  ergibt sich die Standardunsicherheit des bewerteten Schalldämm-Maßes [7]

$$u(y_0) = \sqrt{u^2(b) c_b^2 + u^2(a) c_a^2 + 2 c_a c_b u(a) u(b) r(a,b)} \quad (23)$$

mit dem Korrelationskoeffizienten [5]

$$r(a,b) = - \frac{\overline{nx}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^6 x_i^2}} \quad (24)$$

Aus den vorliegenden Daten (Tabelle 1) folgt

$$r(a,b) = -0,996. \quad (25)$$

Die Parameter  $a$  und  $b$  sind demnach stark negativ korreliert, was bereits aus Bild 2 ersichtlich wurde. Die Sensitivitätskoeffizienten sind

$$c_a = \frac{\partial y_0}{\partial a} = 1, \quad (26)$$

$$c_b = \frac{\partial y_0}{\partial b} = x_0. \quad (27)$$

Dies führt zur Standardunsicherheit

$$u(y_0) = \sqrt{u^2(b) x_0^2 + u^2(a) + 2 x_0 u(a) u(b) r(a,b)}. \quad (28)$$

Im Folgenden wird nun die Unsicherheit der Parameter  $a$  und  $b$  berechnet, die sich aufgrund der Unsicherheit der bewerteten Schalldämm-Maße und der Flächenmassen ergibt. Dazu werden die gemessenen Schalldämm-Maße und die zugehörigen Flächenmassen als unabhängige Eingangsgrößen betrachtet. Nach [7] ergibt sich die Unsicherheit der Regressionsparameter aus den Unsicherheiten der gemessenen Flächenmassen und der bewerteten Schalldämm-Maße zu

$$u(a) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial a}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial a}{\partial y_i} u(y_i) \right]^2}, \quad (29)$$

$$u(b) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial b}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial b}{\partial y_i} u(y_i) \right]^2}, \quad (30)$$

wobei der funktionale Zusammenhang zwischen den Regressionsparametern und den Eingangsgrößen durch Gln. (2) und (3) hergestellt wird. Für die Unsicherheit der bewerteten Schalldämm-Maße werden 1,2 dB angesetzt [6] und für die Unsicherheit der Flächenmasse 5%

$$u(m') = 0,05 m'. \quad (31)$$

Die Unsicherheit der logarithmierten Flächenmasse ist dann

$$u(x) = \lg\left(\frac{m' + u(m')}{m'}\right) = 0,02. \quad (32)$$

Eine Eingabe der Gln. (29) und (30) in "mathematica" liefert die Werte

$$u(a) = 5,91 \text{ dB} \quad (33)$$

und

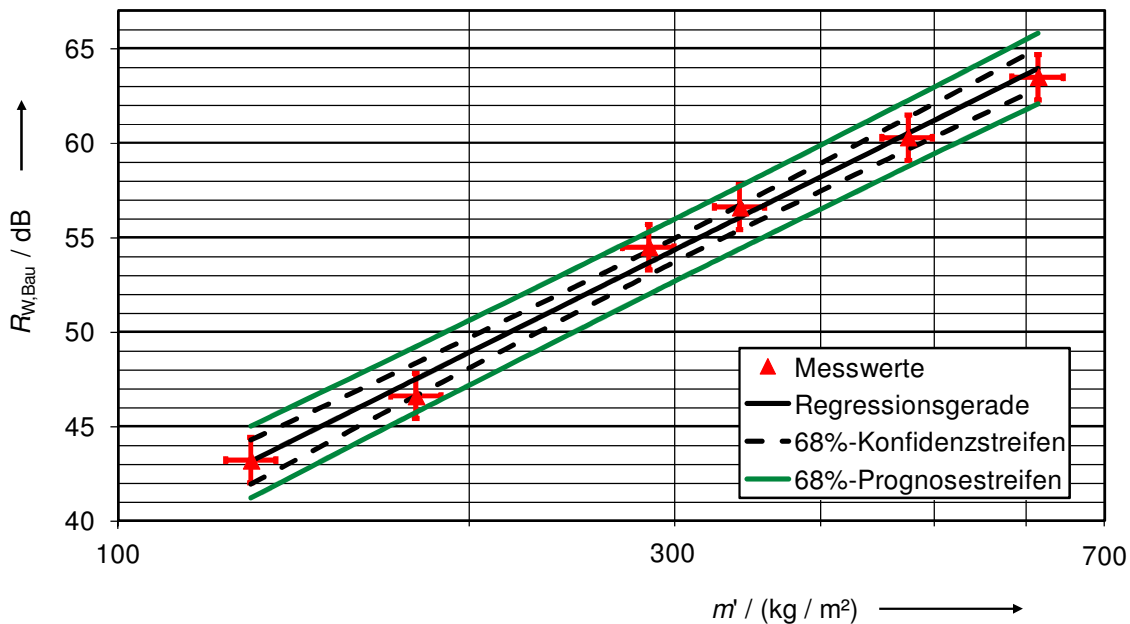
$$u(b) = 2,38 \text{ dB}. \quad (34)$$

Um die Breite eines Konfidenzstreifens für die Regressionsgerade analog zu Gln. (11) und (12) zu ermitteln, wird auch hier der Parameter der t-Verteilung herangezogen. Der Konfidenzstreifen ist somit

$$[a + b x_0 - C_2; a + b x_0 + C_2] \quad (35)$$

mit





**Bild 4** Gemessene bewertete Schalldämm-Maße (umgerechnet auf den mittleren Bau-Verlustfaktor) mit Standard-Messunsicherheiten, Regressionsgerade, Konfidenzstreifen für die Regressionsgerade (Gl.(35)) und Prognosestreifen (Gl. (16)) bei **Berücksichtigung** der Unsicherheiten der Eingangsgrößen aus Tabelle 1 (bewertetes Schalldämm-Maß und flächenbezogene Masse)

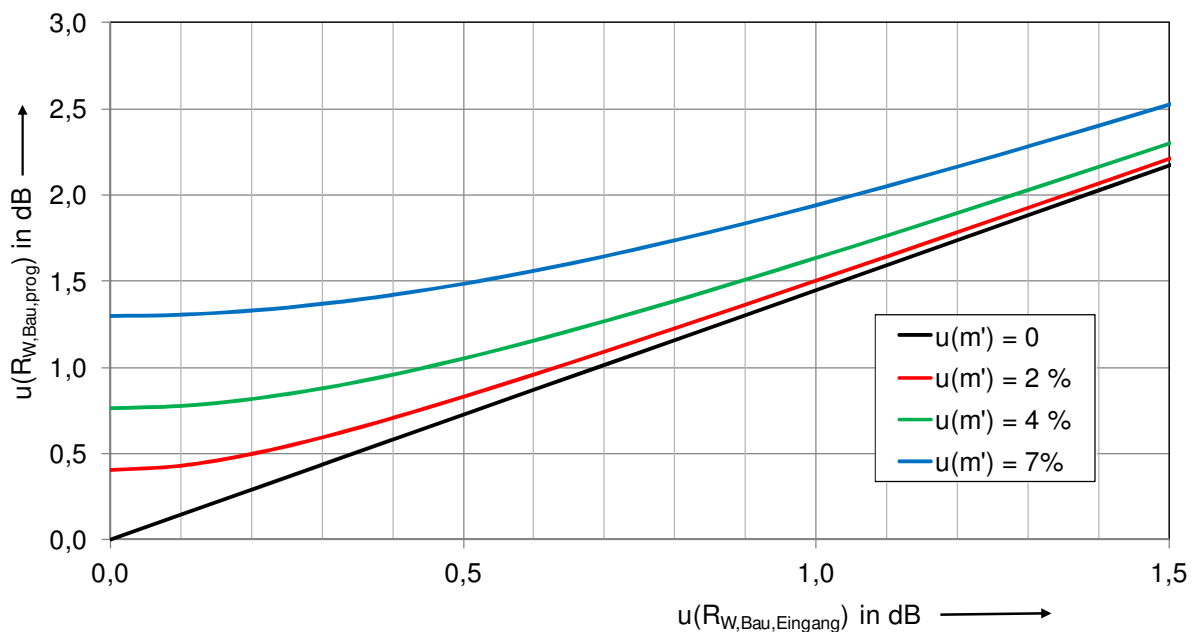
## 2.4. Variation der Unsicherheit der Eingangsgrößen

Die Grundannahme des vorigen Abschnitts bestand darin, dass die Eingangsdaten für die Regressionsrechnung (Tabelle 1) jeweils durch eine einzige Messung erzeugt wurden. Es wäre prinzipiell jedoch auch denkbar, dass Messungen mit der selben flächenbezogenen Masse in verschiedenen Prüfständen durchgeführt wurden. Für den Mittelwert dieser Messungen würde die Unsicherheit dann mit der Wurzel der Anzahl der Messungen  $p$  sinken

$$u(\overline{R_W}) = \frac{u(R_W)}{\sqrt{p}} \quad (37)$$

Der selbe Effekt würde auch für die Unsicherheit der flächenbezogenen Masse eintreten. Um dies zu berücksichtigen, wird der Ansatz aus Abschnitt 2.3 herangezogen. Die Unsicherheit der Flächenmasse und der gemessenen bewerteten Schalldämm-Maße wird jedoch variiert.

Da die Unsicherheiten der verschiedenen Parameter streng korreliert sind (siehe Tabelle 2), wird hier lediglich die vorrangig interessierende Größe  $D_{\max}$  betrachtet, die die maximale halbe Breite des Prognoseintervalls und damit die Standardunsicherheit eines einzelnen prognostizierten bewerteten Schalldämm-Maßes kennzeichnet.



**Bild 5** Unsicherheit eines mit Hilfe der Massekurve prognostizierten bewerteten Schalldämm-Maßes in Abhängigkeit von den Unsicherheiten der flächenbezogenen Masse und der bewerteten Schalldämm-Maße, die als Grundlage für die Ermittlung der Massekurve dienen

Das unmittelbare Rechenergebnis ist in Bild 5 dargestellt. Bei verschwindender Unsicherheit beider Eingangsgrößen verschwindet auch die Unsicherheit des prognostizierten Schalldämm-Maßes. Wenn die Unsicherheit des bewerteten Schalldämm-Maßes gerade gleich der empirischen Standardabweichung nach Gl. (7) ist und die Unsicherheit der flächenbezogenen Masse verschwindet, ergibt sich die Unsicherheit des Prognosewerts zu 1,02 dB. Dieser Wert entspricht genau dem Ergebnis aus Abschnitt 2.2, wodurch die Rechenergebnisse auf diesem Weg unabhängig bestätigt werden.

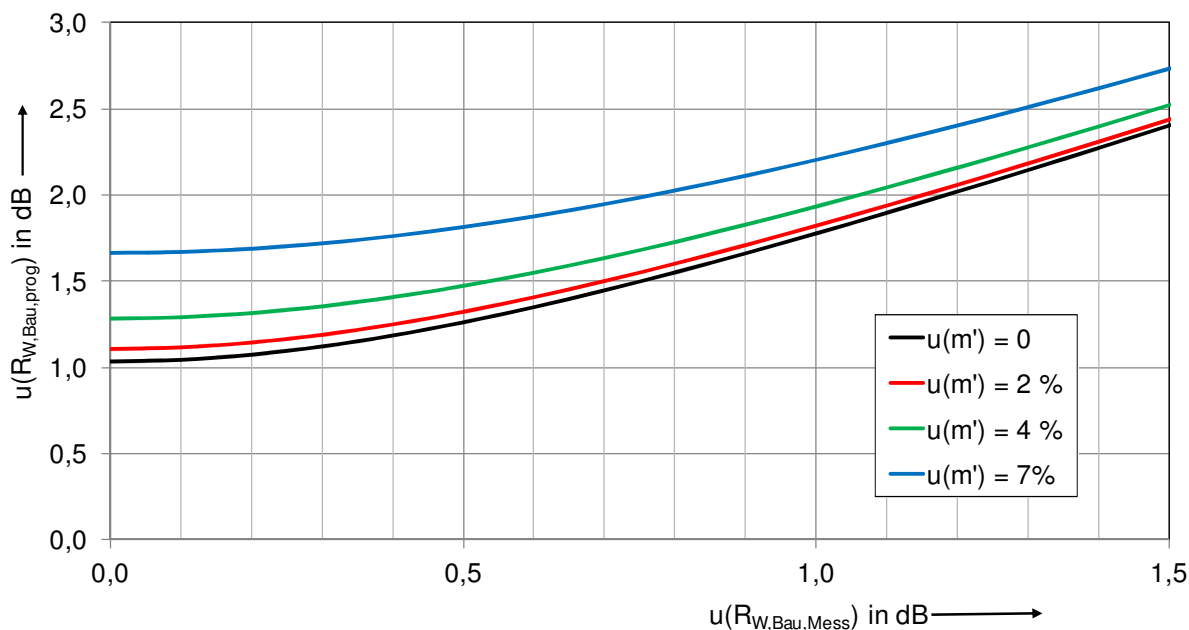
Es stellt sich nun die Frage, in welchem Maße die Unsicherheit des Prognosewerts von der Unsicherheit der Messwerte selbst abhängt. Dazu wird davon ausgegangen, dass sich die Unsicherheit der gemessenen Bau-Schalldämmmaße und die Reststreuung der Regression überlagern. Als Unsicherheit der bewerteten Schalldämm-Maße als Eingangsdaten für die Regression ist also realistischerweise

$$u(R_{W,Bau,Eingang}) = \sqrt{u^2(R_{W,Bau,Mess}) + s^2} \quad (38)$$

anzusetzen. Diese Unsicherheit kann nicht kleiner werden als die empirische Standardabweichung.

Die Unsicherheit des Prognoseergebnisses beträgt nun 1,02 dB bei verschwindenden Unsicherheiten der Messwerte für das bewertete Schalldämm-Maß und die flächenbezogene Masse (Bild 6).

Unter der Voraussetzung, dass für alle Werte aus Tabelle 1 die gleiche Zahl von Messungen vorliegt, kann die Unsicherheit des Prognosewertes unter Verwendung von Gl. (37) aus Bild 6 abgelesen werden. So ergibt sich z.B. für  $p = 4$  eine Prognoseunsicherheit von ca. 1,4 dB bei  $u(m') = 2\%$ .



**Bild 6** Unsicherheit eines mit Hilfe der Massekurve prognostizierten bewerteten Schalldämm-Maßes in Abhängigkeit von der Unsicherheit der flächenbezogenen Masse und der **gemessenen** bewerteten Schalldämm-Maße, die als Grundlage für die Ermittlung der Massekurve dienen

Es sei hier noch angemerkt, dass es jedoch wesentlich transparenter wäre, alle vorhandenen Messwerte einzeln zu erfassen und in die lineare Regression nach Abschnitt 2.2 einzubeziehen. Eine wachsende Zahl der in die Regression eingehenden Wertepaare  $n$  verringert die Breite des Konfidenz- und Prognosestreifens nach Gln. (12) und (17).

## 2.5. Unsicherheiten von Werten aus mehrparametrischen Bemessungskurven

Betrachtet seien gemessene Trittschallminderungen schwimmender Estriche als Funktion von flächenbezogener Masse  $m'$  und dynamischer Steifigkeit  $s'$ . Als überschaubares Beispiel dienen die Daten für schwimmende Estriche auf Gummifasermatten aus dem Bauphysik-Kalender ([9], dort S. 322). Es liegen insgesamt vier Messergebnisse vor (Tabelle 3).

**Tabelle 3** Bewertete Trittschallminderung (sogenannte Rechenwerte nach DIN 4109) schwimmender Estriche auf Gummifaserplatten als Funktion der Flächenmasse und der dynamischen Steifigkeit

$m'$ in kg / m <sup>2</sup>	240	120	180	170
$s'$ in MN / m <sup>3</sup>	15	15	47	34
$\Delta L_{w,R}$ in dB	24	21	18	18

Es wird nun angenommen, dass sich ein linearer Zusammenhang herstellen lässt



$$\underbrace{\Delta R_{w,R}}_y = a + b_1 \underbrace{\lg\left[\frac{m'}{1 \text{ kg/m}^2}\right]}_{x_1} + b_2 \underbrace{\lg\left[\frac{s'}{1 \text{ MN/m}^3}\right]}_{x_2} \quad (39)$$

der die Messergebnisse annähert. Die gesuchten Koeffizienten  $b_1$ ,  $b_2$  und  $a$  können mit einer multiplen Regressionsanalyse [5] ermittelt werden. Dazu werden die bewerteten Trittschallminderungen und die Regressionsparameter zu den Vektoren  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{B}$  zusammengefasst

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Außerdem wird die Matrix  $\mathbf{X}$  benötigt

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \lg(240) & \lg(15) \\ 1 & \lg(120) & \lg(15) \\ 1 & \lg(180) & \lg(47) \\ 1 & \lg(170) & \lg(34) \end{pmatrix}, \quad (41)$$

in der die dekadischen Logarithmen der flächenbezogenen Massen und der dynamischen Steifigkeiten zusammengefasst sind, die die Grundlage der Regressionsanalyse sind. Der gesuchte Vektor  $\mathbf{B}$  ergibt sich nun unmittelbar aus [5]

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (42)$$

Für das Beispiel ergeben sich die Werte

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,82 \\ 10,24 \\ -10,42 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Analog zur Massekurve ist auch hier die empirische Standardabweichung ein Maß für die Qualität der Approximation der Messwerte durch die gefundene Gleichung. Sie berechnet sich mit [5]

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^n (y_i - a - b_1 x_1 - b_2 x_2)^2} \quad (44)$$

zu 0,88 dB. Die Gleichungen (48) und (52) stellen nun ein Modell dar, mit dessen Hilfe die bewertete Trittschallminderung als Funktion von flächenbezogener Masse und dynamischer Steifigkeit prognostiziert werden kann. Die Standardunsicherheit eines solchen Prognosewerts beträgt [5]

$$u = s t_{n-3;1-\gamma/2} \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \quad (45)$$

mit dem Spaltenvektor

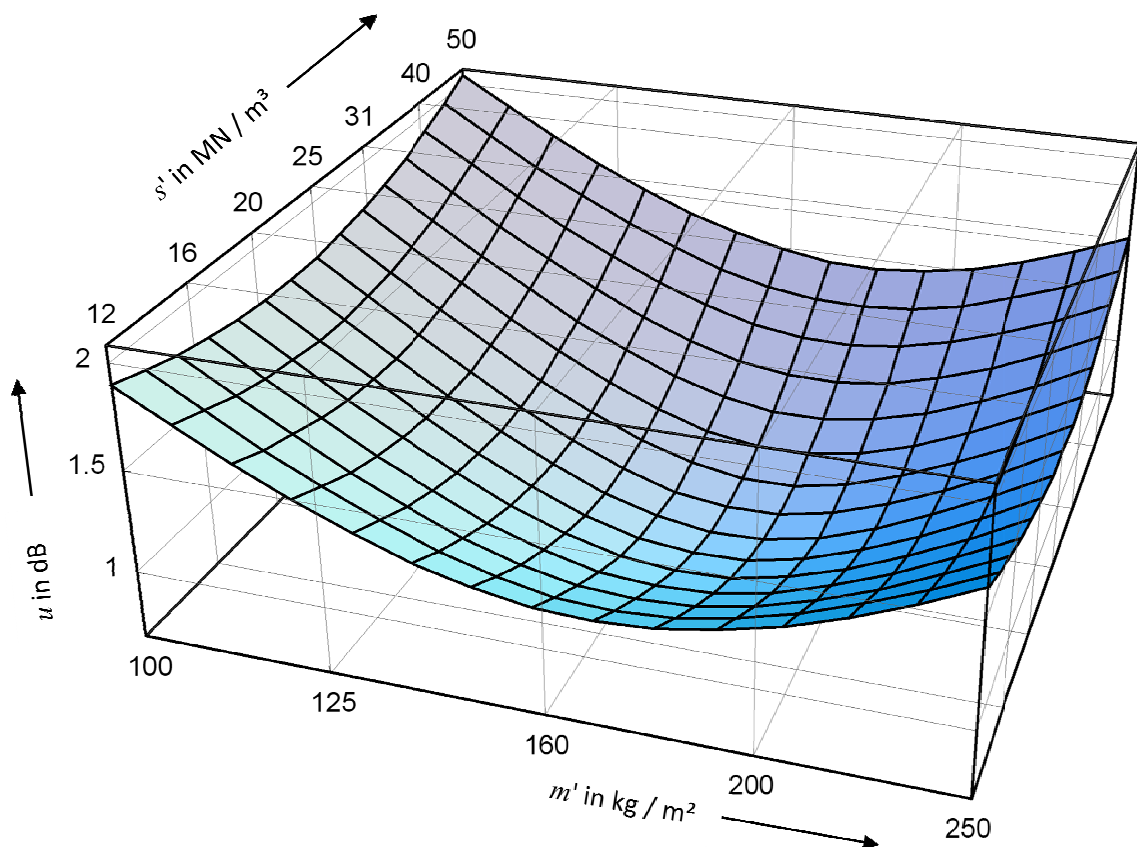
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \quad (46)$$

Der Zahlenwert für den hier anzuwendenden t-Parameter liegt bei

$$t_{n-3;1-\gamma/2} = 1,82 , \quad (47)$$

so dass sich für die Standardunsicherheit Werte zwischen 0,7 und 2,0 dB ergeben (Bild 7).

Bislang wurden die Unsicherheiten der Eingangsgrößen vollständig vernachlässigt. Sie können prinzipiell in Analogie zu Abschnitt 2.3 berücksichtigt werden. Da in der DIN 4109 jedoch keine zweiparametrischen Bemessungskurven enthalten sind, wird auf die entsprechende Ableitung an dieser Stelle verzichtet.



**Bild 7** Unsicherheit einer bewerteten Trittschallminderung als Funktion von flächenbezogener Masse und Steifigkeit bei Vernachlässigung der Unsicherheiten der Eingangsgrößen für die lineare Regression (Tabelle 3)

### 3. Unsicherheiten für Tabellenwerte

Neben den oben behandelten Bemessungskurven wird der Bauteilkatalog der DIN 4109 auch Bemessungstabellen beinhalten. Ein Beispiel ist der Vorschlag für den Holz- und Skelettbau [10]. Die Tabellenwerte entstehen, indem für eine häufig

verwendete Konstruktion mehrere Messungen der interessierenden akustischen Kennwerte durchgeführt werden. Der Tabellenwert ist dann der lineare Mittelwert des akustischen Kennwerts, der hier allgemein mit  $y$  bezeichnet werden soll

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (48)$$

Die Standardabweichung der Messergebnisse

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (49)$$

wie auch die Zahl der verwendeten unabhängigen Messungen  $n$  sollte ebenfalls in der Bemessungstabelle vermerkt sein. Der akustische Kennwert einer weiteren unabhängigen Realisierung des gleichen Bauteils ist dann gleich dem in der Bemessungstabelle angegebenen Mittelwert. Die zugehörige Standardunsicherheit ergibt sich zu

$$u_{\text{input},1} = \sigma \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \quad (50)$$

Für die praktische Anwendung in der DIN 4109 kann die Näherung

$$\sqrt{\frac{1}{n} + 1} \approx 1 \quad (51)$$

angesetzt werden, woraus

$$u_{\text{input},1} \approx \sigma \quad (52)$$

folgt.

Die Unsicherheit kann nur dann mit Gleichung (52) abgeschätzt werden, wenn alle verwendeten Messungen tatsächlich unabhängig sind, d.h. für  $n$  Realisierungen des selben Objekts in  $n$  verschiedenen Prüfständen. In der Praxis stammen die Werte jedoch häufig aus Messreihen aus dem selben Prüfstand. Bei hinreichend vielen Messungen  $n$  beinhaltet die nach Gl.(48) (49) berechnete Standardabweichung dann jedoch nur die Produktstreuung, wohingegen die Messunsicherheit im Prüfstand nicht berücksichtigt ist. In diesem Fall ergibt sich die Unsicherheit für den Eingabewert in die Prognoserechnung zu

$$u_{\text{input},2} = \sqrt{2 \sigma^2 + \sigma_R^2} \quad (53)$$

mit der nach Gl. (49) berechneten Produkt-Standardabweichung und der Vergleichs-Standardabweichung  $\sigma_R$ , die aus Ringversuchen bekannt ist. Sie ist der derzeit beste verfügbare Schätzwert für die Messunsicherheit und beträgt für das bewertete Schalldämmmaß

$$\sigma_R = 1,2 \text{ dB} \quad (54)$$

Da für den Nutzer nicht ersichtlich ist, wie die Werte im Bauteilkatalog entstanden sind und zwischen Gln. (52) und (53) erhebliche Unterschiede auftreten, muss eine praxistaugliche Verfahrensweise gefunden werden. Dazu sei zunächst der Wertebereich der Standardabweichungen  $\sigma$  betrachtet. Dieser umfasst für das be-

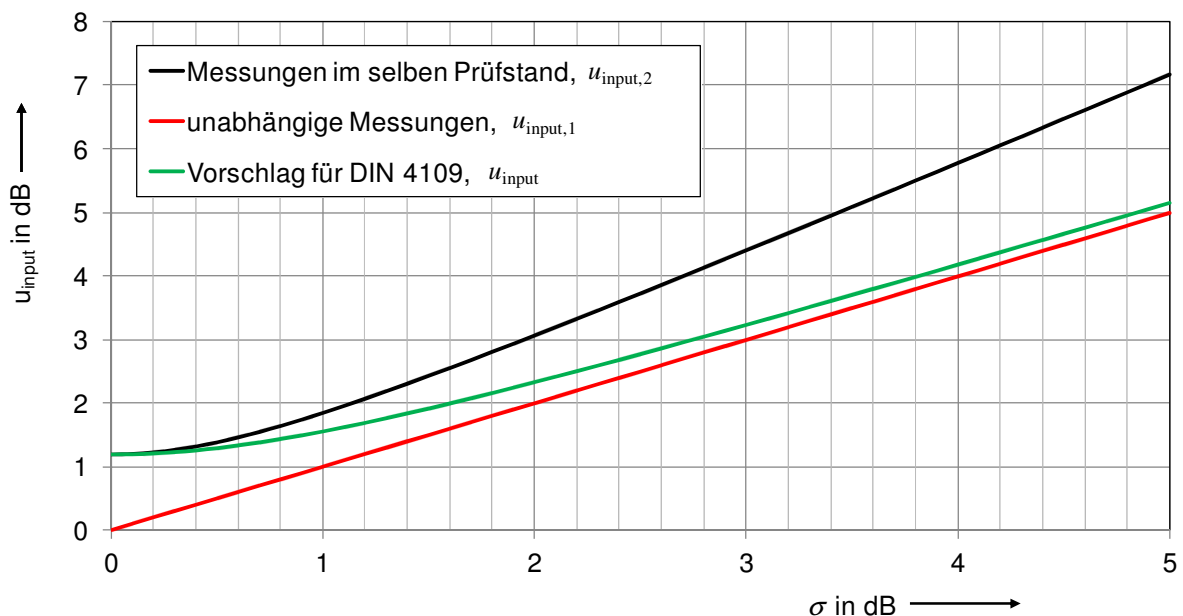
wertete Schalldämmmaß Werte zwischen 0,2 und 5,1 dB [10]. Für die sehr kleinen Standardabweichungen muss davon ausgegangen werden, dass die Messungen im selben Prüfstand erfolgten. Anders lassen sich derart geringe Werte nicht erklären. Dies bedeutet, dass in diesem Grenzfall Gl. (53) anzuwenden ist. Bei den sehr großen Standardabweichungen spielt die Messunsicherheit von 1,2 dB eine nur untergeordnete Rolle. Die Streuungen werden überwiegend durch den Aufbau des Bauteils verursacht. Daher können die Messungen in jedem Fall als unabhängig angesehen werden, selbst wenn sie im gleichen Prüfstand durchgeführt worden wären. Demgemäß ist in diesem Grenzfall Gl. (52) anzuwenden. Um zwischen diesen beiden Grenzfällen einen glatten Übergang sicherzustellen, wurde folgender Ansatz gewählt:

$$u_{\text{input}} = \sqrt{u_{\text{input},2}^2 - u_{\text{input},1}^2} \quad (55)$$

aus dem mit Gln. (52) und (53)

$$u_{\text{input}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_R^2} \quad (56)$$

folgt.



**Bild 8** Unsicherheit eines bewerteten Schalldämm-Maßes aus einer Bemessungstabelle  $u_{\text{input}}$  in Abhängigkeit von der im Bauteilkatalog angegebenen Standardabweichung  $\sigma$  nach Gln. (52), (53) und (56)

Falls für eine Konstruktion nur ein einziger Messwert vorliegt, so ist das in Bild 1 beschriebene Verfahren für Einzelmessungen anzusetzen. Für das bewertete Schalldämm-Maß bedeutet dies

$$u_{\text{input}} = 1,9 \text{ dB} \quad (57)$$

## 4. Empfehlungen für die DIN 4109

### 4.1 Bemessungskurven

Für die Aufstellung von Bemessungskurven und die Angabe der Unsicherheit von Werten, die aus der Bemessungskurve ermittelt wurden, wird folgende Vorgehensweise vorgeschlagen:

1. Zusammentragen der  $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i)$  (z.B.  $x_i$  - flächenbezogene Masse (dekadischer Logarithmus),  $y_i$  - bewertetes Schalldämm-Maß) und der zugehörigen Unsicherheiten  $u(x)$ ,  $u(y)$  und Verwendung des linearen Ansatzes

$$y = b x + a \quad (58)$$

2. Berechnung der Regressionsparameter

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (59)$$

$$a = \bar{y} - b \bar{x} \quad (60)$$

3. Berechnung der halben Breite des Konfidenzstreifens,  $C_1$ , und des Prognosestreifens,  $D_1$ , bei Vernachlässigung der Unsicherheit der Eingangsgrößen

$$C_1 = s \cdot t_{n-2;0,84} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (61)$$

$$D_1 = s \cdot t_{n-2;0,84} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (62)$$

mit

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i)^2} \quad (63)$$

und dem Parameter der t-Verteilung bei  $n-2$  Freiheitsgraden zum Vertrauensniveau 68% (einfache Unsicherheit). Die Breite beider Streifen hängt von der Stelle  $x_0$  (z.B. dekadischer Logarithmus der flächenbezogenen Masse) ab.

**Tabelle 4** Parameter der t-Verteilung zum Vertrauensniveau 68%

$n-2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	>10
$t_{n-2;0,84}$	1,82	1,31	1,19	1,13	1,10	1,08	1,07	1,06	1,05	1,00

4. Berechnung der halben Breite des Konfidenzstreifens,  $C_2$ , bei Berücksichtigung der Unsicherheit der Eingangsgrößen

$$C_2 = t_{n-2;0,84} u(y_0) \quad (64)$$

mit

$$u(y_0) = \sqrt{u^2(b) x_0^2 + u^2(a) + 2 x_0 u(a) u(b) r(a,b)}, \quad (65)$$

wobei

$$u(a) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial a}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial a}{\partial y_i} u(y_i) \right]^2}, \quad (66)$$

$$u(b) = \sqrt{\sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial b}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2 + \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{\partial b}{\partial y_i} u(y_i) \right]^2}, \quad (67)$$

$$r(a,b) = - \frac{\bar{n} \bar{x}}{\sqrt{n \sum_{i=1}^6 x_i^2}} \quad (68)$$

sind.

5. Berechnung der halben Breite des Prognosestreifens,  $D_2$ , unter Berücksichtigung der Unsicherheit der Eingangsgrößen

$$D_2 = \frac{C_2}{C_1} D_1 \quad (69)$$

und Verwendung des auf 0,1 dB gerundeten Maximums dieser halben Breite als Unsicherheit

$$u_{\text{input}} = \text{Max}(D_2) \quad (70)$$

6. Angabe der Regressionsgleichung und der Unsicherheit der aus der Regressionsgleichung abgelesenen Werte in der DIN 4109

## 4.2 Bemessungstabellen

Ferner wird vorgeschlagen, Werten aus Bemessungstabellen eine Unsicherheit von

$$u_{\text{input}} = \sqrt{\sigma^2 + \sigma_R^2} \quad (71)$$

beizumessen, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung derjenigen Werte ist, aus denen der Tabellenwert der Bemessungstabelle ermittelt wurde. Sie ist in der Bemessungstabelle anzugeben.  $\sigma_R$  bezeichnet die Vergleichs-Standardabweichung für das zugrunde liegende Messverfahren. Für das bewertete Schalldämm-Maß liegt dieser Wert bei 1,2 dB, für den Norm-Trittschallpegel bei 1,5 dB und für bewertete Trittschallminderungen bei 1,0 dB.

## Literatur

- [1] DIN 4109 *Schallschutz im Hochbau; Anforderungen und Nachweise*, 1989-11
- [2] Wittstock, V.; *Erarbeitung brauchbarer Schalldämm-Definitionen für die neue DIN 4109*. Abschlussbericht zum gleichnamigen DIBt-Projekt, Braunschweig, Oktober, 2007
- [3] Wittstock, V.; Scholl, W.: *Berechnung der Prognoseunsicherheit nach DIN 4109*. Abschlussbericht zum gleichnamigen DIBt-Forschungsprojekt, Braunschweig, September, 2008
- [4] Wittstock, V.; Scholl, W.: *Berücksichtigung von Unsicherheiten beim Trittschall in der neuen DIN 4109*. Abschlussbericht zum gleichnamigen DIBt-Forschungsprojekt, Braunschweig, März, 2010
- [5] Joachim Hartung: *Statistik*. Oldenbourg Verlag, München, 1986
- [6] Volker Wittstock: *On the uncertainty of single-number quantities for rating airborne sound insulation*. ACUSTICA united with ACTA ACUSTICA, Volume 93, Number 3, May/June 2007, pp. 375-386(12)
- [7] *Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*. JCGM 100:2008
- [8] *International vocabulary of metrology - basic and general concepts and associated terms (VIM)*. JCGM 200:2008
- [9] Fouad, N.A. (Hrsg.): *Bauphysik-Kalender*. Ernst & Sohn, Berlin, 2009
- [10] Scholl, W.; Bietz, H.: *Integration des Holz- und Skelettbaus in die neue DIN 4109*. Abschlussbericht zum gleichnamigen DIBt-Forschungsprojekt, Braunschweig, Juli, 2004

**Die Physikalisch-Technische Bundesanstalt** (PTB) in Braunschweig und Berlin ist das natur- und ingenieurwissenschaftliche Staatsinstitut und die technische Oberbehörde der Bundesrepublik Deutschland für das Messwesen und Teile der Sicherheitstechnik. Die PTB gehört zum Dienstbereich des Bundesministeriums für Wirtschaft und Arbeit. Sie erfüllt die Anforderungen an Kalibrier- und Prüflaboratorien auf der Grundlage der DIN EN ISO/IEC 17025.

Zentrale Aufgabe der PTB ist es, die gesetzlichen Einheiten in Übereinstimmung mit dem Internationalen Einheitensystem (SI) darzustellen, zu bewahren und - insbesondere im Rahmen des gesetzlichen und industriellen Messwesens – weiterzugeben. Die PTB steht damit an oberster Stelle der metrologischen Hierarchie in Deutschland.

Zur Sicherstellung der weltweiten Einheitlichkeit der Maße arbeitet die PTB mit anderen nationalen metrologischen Instituten auf regionaler europäischer Ebene in EUROMET und auf internationaler Ebene im Rahmen der Meterkonvention zusammen. Das Ziel wird durch einen intensiven Austausch von Forschungsergebnissen und durch umfangreiche internationale Vergleichsmessungen erreicht.

***The Physikalisch-Technische Bundesanstalt** (PTB) in Braunschweig and Berlin is the national institute for science and technology and the highest technical authority of the Federal Republic of Germany for the field of metrology and certain sectors of safety engineering. The PTB comes under the auspices of the Federal Ministry of Economics and Labour. It meets the requirements for calibration and testing laboratories as defined in the EN ISO/IEC 17025.*

*It is the fundamental task of the PTB to realize and maintain the legal units in compliance with the International System of Units (SI) and to disseminate them, above all within the framework of legal and industrial metrology. The PTB thus is on top of the metrological hierarchy in Germany.*

*To ensure worldwide coherence of measures, the PTB cooperates with other national metrology institutes within EUROMET on the regional European level and on the international level within the framework of the Metre Convention. The aim is achieved by an intensive exchange of results of research work carried out and by comprehensive international comparison measurements.*

Physikalisch-Technische Bundesanstalt

Bundesallee 100  
D-38116 Braunschweig

Abbestraße 2-12  
D-10587 Berlin