

Michael Herrmann, Werner Sobek

# **Entwicklung gewichtsoptimierter funktional gradierter Elementdecken**

F 2945

Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um die Kopie des Abschlussberichtes einer vom Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung -BMVBS- im Rahmen der Forschungsinitiative »Zukunft Bau« geförderten Forschungsarbeit. Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

2015

ISBN 978-3-8167-9513-1

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69

70504 Stuttgart

Nobelstraße 12

70569 Stuttgart

Telefon 07 11 9 70 - 25 00

Telefax 07 11 9 70 - 25 08

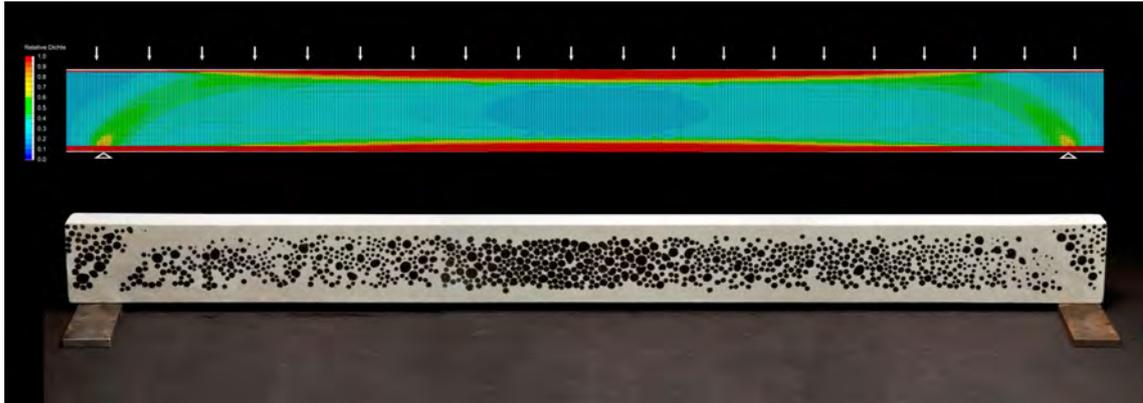
E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

[www.irb.fraunhofer.de/tauforschung](http://www.irb.fraunhofer.de/tauforschung)

## Abschlussbericht

### Entwicklung gewichtsoptimierter funktional gradierter Elementdecken



Universität Stuttgart

Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.h.c. Werner Sobek

Verfasser:

Dipl.-Ing. Michael Herrmann

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.h.c. Werner Sobek

Stuttgart, Juni 2014

Dieser Forschungsbericht wurde mit Mitteln der Forschungsinitiative Zukunft Bau des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung gefördert.

(Aktenzeichen: F20-10-1-053 / II3 – F20-10-38)

Die Verantwortung für den Inhalt des Berichts liegt bei den Autoren.

**Forschungsprojekt**

Entwicklung gewichtsoptimierter funktional gradierter Elementdecken

kurz: Funktional gradierte Elementdecken

**Förderstelle**

Forschungsinitiative Zukunft Bau

Bundesinstitut für Bau-, Stadt- und Raumforschung (BBSR)

Deichmanns Aue 31-37

53179 Bonn (Germany)

**Förderkennzeichen**

F20-10-1-053 / II3 – F20-10-38

**Bearbeitung**

Dipl.-Ing. Michael Herrmann

**Bearbeitungszeitraum**

Januar 2011 – Juni 2014

**Bearbeitungsstelle**

Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren

Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.h.c. Werner Sobek

Pfaffenwaldring 7 + 14

70569 Stuttgart

Telefon 0711 / 685 63599

Telefax 0711 / 685 66968

Abschnitte dieses Forschungsberichts sind eine genehmigte Vorveröffentlichung der Dissertation „Weiterentwicklung der Gradientenbetontechnologie und deren Anwendung auf gewichtsreduzierte einachsige Bauteile“ von Herrn Michael Herrmann und stimmen mit dieser zum Teil inhaltlich und wörtlich überein.

## Danksagung

Die Förderung des Projekts erfolgte durch Mittel der Forschungsinitiative Zukunft Bau des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung.

(Aktenzeichen: F20-10-1-053 / II3 – F20-10-38)

Dank gilt insbesondere den Mitgliedern der Arbeitsgruppe:

Dr.-Ing. Michael Brüggemann

Prof. Dr.-Ing. Prof. h.c. Dr.-Ing. E.h. Hans-Wolf Reinhardt

Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff

Dr.-Ing. Knut Kasten

Besonderer Dank gilt auch den Industriepartnern:

Sebastian Wochner GmbH & Co. KG

Sika Deutschland GmbH

SGL TECHNOLOGIES GmbH

Liaver GmbH & Co. KG

Nicht zuletzt sei den studentischen Hilfskräften und Diplomanden für ihr Engagement herzlich gedankt:

Javier Alvar

Sami Bidier

Roland Falk

Jonas Knörzer

Daniel Lopez

Lena Michael

Christian Noack

Sören Sippel

Rebecca Thierer

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	<b>5</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	<b>8</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>9</b>
1.1 Problemstellung .....	9
1.2 Projektziele .....	10
1.3 Arbeitsprogramm .....	11
<b>2 Entstehung der Gradientenwerkstoffe und -betone</b> .....	<b>13</b>
2.1 Stand der Forschung .....	13
2.2 Anwendungsbereiche von Gradientenbeton .....	14
2.2.1 Grundlagen .....	14
2.2.2 Funktional gradierte Decken .....	15
2.2.3 Funktional gradierte Außenwände .....	15
2.3 Herstellungsverfahren für Bauteile aus gradiertem Beton .....	17
2.3.1 Einleitung.....	17
2.3.2 Schichtweises Gießen .....	17
2.3.3 Gradientensprühetechnik .....	18
2.3.4 Entwicklungsphasen der Gradientenbetontechnologie .....	19
<b>3 Weiterentwicklung der Gradientenbetonmischungen</b> .....	<b>21</b>
3.1 Ausgangssituation Gradientenbetonmischungen .....	21
3.2 Weiterentwicklung der Kernmischung KLM.....	23
3.3 Materialparameter Gradientenbetonmischungen .....	26
<b>4 Bemessung und analytische Betrachtungen zum Tragverhalten gradiert Betonbauteile</b> .....	<b>28</b>
4.1 Allgemeines Tragverhalten .....	28
4.2 Biegung .....	31
4.3 Querkraft .....	32
4.4 Schubkraftübertragung in Fugen .....	33
4.4.1 Nachweis der Schubkraftübertragung in Fugen nach EC 2 .....	33
4.4.2 Analytisches Modell der Schubspannungen in der Längsfuge infolge Schwindens .....	34
4.5 Querschnittswerte im Zustand I und II .....	36
<b>5 Versuche an gradierten Bauteilen</b> .....	<b>38</b>
5.1 Skalierte Versuche .....	38
5.1.1 Skalierung, Geometrie und Randbedingungen.....	38
5.1.2 Versuche zur Biegetragfähigkeit .....	39

5.1.3	Versuche zum Querkrafttragverhalten.....	42
5.2	Versuche der Hauptausführung.....	48
5.2.1	Ziele und Auslegung der Versuche .....	48
5.2.2	Normative Grundlagen und Randbedingungen der Versuche.....	49
5.2.3	Versuchsaufbau und Prüfablauf .....	50
5.2.4	Versuchsserien und Ergebnisse.....	52
5.3	Zusammenfassung der Versuchsergebnisse.....	63
<b>6</b>	<b>Numerische Betrachtungen zum Tragverhalten gradiertes Betonbauteile .....</b>	<b>65</b>
6.1	Nichtlineare Materialtheorie.....	65
6.1.1	Einleitung .....	65
6.1.2	Materialmodell Beton.....	65
6.1.3	Materialmodell Bewehrungsstahl und textile Bewehrung.....	71
6.2	Materiell nichtlineare Simulation der Versuche .....	72
6.2.1	Modellbildung.....	72
6.2.2	Materialeingangsparameter .....	74
6.2.3	Simulation der skalierten Versuche.....	78
6.2.4	Simulation der Versuche der Hauptausführung.....	82
6.2.5	Zusammenfassung der Simulationsergebnisse.....	86
<b>7</b>	<b>Ermittlung des „Gradientenlayouts“ mithilfe numerischer Optimierungsverfahren .....</b>	<b>88</b>
7.1	Grundlagen der numerischen Optimierung .....	88
7.2	Mathematische Beschreibung der Optimierungsaufgabe .....	89
7.3	Lösungsverfahren des Optimierungsproblems .....	92
7.3.1	Verfahren der mathematischen Programmierung - Approximationsverfahren .....	92
7.3.2	Optimalitätskriterienverfahren.....	95
7.3.3	Verwendete Lösungsverfahren .....	96
7.4	Kopplung der Strukturoptimierung an die FEM .....	96
7.5	Der SIMP-Ansatz in der Topologieoptimierung .....	97
7.6	„Gradientenlayout“ durch Topologieoptimierung .....	99
7.7	Materiell nichtlineare Simulation der Optimierungsergebnisse.....	104
7.8	Weiterführende Entwürfe gradiertes Bauteile.....	106
7.9	Zusammenfassung der Optimierungsergebnisse .....	108
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>109</b>
8.1	Zusammenfassung .....	109
8.2	Ausblick .....	111
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>112</b>

---

<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>118</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b> .....	<b>121</b>
<b>Anhang</b>	
<b>A</b> <b>Prüfverfahren</b> .....	<b>123</b>
A.1    Frischbetonprüfungen .....	123
A.2    Festbetonprüfungen .....	123
<b>B</b> <b>Umrechnung von Betonkennwerten</b> .....	<b>126</b>
B.1    Umrechnung auf die einaxiale Druckfestigkeit .....	126
B.2    Umrechnung der Betonzugfestigkeit .....	127
B.3    Rechenwerte der Betondruck- und Betonzugfestigkeit .....	128
<b>C</b> <b>Materialkennwerte</b> .....	<b>129</b>
C.1    Premix Betonmischungen .....	129
C.2    Konsistenz der Mischungen .....	129
C.3    Mischtablette Premix .....	130
C.4    Bewehrungsmaterialien .....	130
<b>D</b> <b>Textile Bewehrung zum Einsatz in gradierten Betonbauteilen</b> .....	<b>131</b>
D.1    Grundlagen .....	131
D.2    Zugtragverhalten von Textilbeton .....	133
D.3    Untersuchte Materialien .....	135
D.4    Versuche .....	135
<b>E</b> <b>Auslegung der Versuche in der Hauptausführung</b> .....	<b>141</b>
<b>F</b> <b>Dokumentation der Versuche der Hauptausführung</b> .....	<b>148</b>
F.1    Herstellung .....	148
F.2    Serie 0 .....	148
F.3    Serie 1 .....	150
F.4    Serie 2 .....	152
F.5    Serie 3 .....	156
F.6    Serie 4 .....	158
<b>G</b> <b>Optimalitätskriterienverfahren unter Verwendung des SIMP-</b> <b>Ansatzes</b> .....	<b>159</b>

## Abkürzungsverzeichnis

$M_u$	Bruchmoment im Versuch
$M_{flex}$	berechnetes Biegebruchmoment
$\beta_{flex}$	Verhältnis des Moments beim Bruch $M_u$ zum Biegebruchmoment $M_{flex}$
$a/d$	Schubslankheit
$a$	Abstand Einzellast von der Auflagerachse
$b$	Bauteilbreite
$d$	statische Nutzhöhe
$\rho_l$	Längsbewehrungsgrad
$\eta$	Korrekturfaktoren für Leichtbeton
EC 2	Eurocode 2, Teil 1-1:2011-01
$f_{lck}$	Zylinderdruckfestigkeit Leichtbeton
DM	Deckschichtmischung
KM1 - KM7	Kernmischungen
BM	Sika Basismischung
M2	Sika Matrix 2
$w$	Verformung in z-Richtung
$w_B$	Biegeverformung bei Sandwichbauteilen
$w_S$	Schubverformung bei Sandwichbauteilen
$n = E_c/E_{Lc}$	Reduktionszahl
U	Wärmedurchgangskoeffizient
RA	Referenzmischung Außen
KM	Kernmischung
G07 – G01	Gradientenmischungen
KAM	Kernmischung Aerogel Mikrohohlkugeln
KLM	Kernmischung Liaver Mikrohohlkugeln
KM1	äußerer querkraftbeanspruchter Kernbereich eines Gradientenbalkens
KM2	mittlerer querkraftfreier Kernbereich eines Gradientenbalkens
V1.1	Prüfkörper der Hauptausführung
SV1.1	skalierter Prüfkörper

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Die gebaute Umwelt steht nicht nur für ca. 35 % des Energieverbrauchs und 35 % der Emissionen, sondern auch für 60 % des Ressourcenverbrauchs und – zumindest in Zentraleuropa – für mehr als 50 % des Massenmüllaufkommens. Das Bauwesen spielt somit eine zentrale Rolle bei der Bewahrung oder Zerstörung unseres Planeten [1]. Klar ist ebenso, dass wir angesichts der hinreichend bekannten Fakten wie Erderwärmung, zur Neige gehende Rohstoffe, steigende Energiekosten und zunehmende Zerstörung unseres Ökosystems endlich handeln müssen. Durch die Entwicklung von leichteren, sortenrein rezyklierbaren Bauteilen kann das Bauwesen zu einer signifikanten Reduktion des weltweiten Ressourcenverbrauchs, des Müllaufkommens, der Emissionen und des Energieverbrauchs beitragen. Ein wichtiger Schritt zur Entwicklung solcher Bauteile ist die Gradierung der zugrundeliegenden Werkstoffe.

Eine Gradierung der Eigenschaften ermöglicht es, die innere Struktur eines Bauteils optimal auf die Erfüllung der Anforderungen abzustimmen. Hoch beanspruchte Zonen werden dabei mit hochfesten Betonen belegt, in niedrig beanspruchten Zonen werden porige Betone mit einer der Beanspruchungshöhe kontinuierlich oder in Stufen angepassten Porengröße und/oder Porendichte angeordnet. Durch diese Gradierung wird beispielsweise bei biegebeanspruchten Bauteilen wie Deckenkonstruktionen eine wesentlich höhere Materialeffizienz erreicht.

Mit gradierten Bauteilen können sortenreine sowie multifunktionale Bauteile hergestellt werden. Rein mineralische funktional gradierte Wandbauteile sind in der Lage, die Anforderungen an die Tragfähigkeit, die Dauerhaftigkeit, das architektonische Erscheinungsbild und den Wärmeschutz gleichzeitig zu erfüllen. Dichte und hochfeste Bereiche werden innerhalb des Bauteilquerschnitts mit hochporösen niedrigfesten Zonen durch fließende Porositätsverläufe homogen und dauerhaft verbunden. Die Vorteile der angestrebten Lösung liegen in der sehr guten Rezyklierbarkeit, einer Massenersparnis von über 60 %, einer CO<sub>2</sub>-Reduktion von über 35 % im Vergleich zu herkömmlichen Massivbauteilen, dem Gewinn an Nutzfläche und der Energieeinsparung in allen Phasen des Produktlebenszyklus.

Die Idee der Gradientenbetone wurde von Werner Sobek zuerst formuliert. Die Weiterentwicklung erfolgt am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK) der Universität Stuttgart im Rahmen der Forschungsvorhaben „Gradientenwerkstoffe im Bauwesen“ [2], „Funktional gradierte Elementdecken“ (beide gefördert durch die Forschungsinitiative Zukunft Bau des BMVBS) und „Optimalstrukturen aus funktional gradiertem Beton“ (gefördert durch die DFG im Rahmen des SPP 1542). Im Fokus der Forschungsanstrengungen stehen dabei folgende drei Fragestellungen:

1. Wie kann die Porosität im Beton erzeugt werden?
2. Wie kann die Porosität im Bauteil zielgenau verändert werden?
3. An welcher Stelle im Bauteil muss welche Eigenschaft angeordnet werden?

## 1.2 Projektziele

Die Projektziele im Wortlaut der Beantragung:

„Die Projektziele sollen durch eine sinnvoll aufeinander abgestimmte Kombination von Versuchen sowie theoretischen und numerischen Untersuchungen erreicht werden.

Durch eine optimale Verknüpfung der Forschungsstelle mit den Industriepartnern, die untereinander in privatwirtschaftlicher Kooperation stehen, können die ermittelten Grundlagen unter Einbeziehung aller Projektpartner direkt in die Baupraxis überführt werden.

Die Grundlagen der Herstellungs- und Berechnungsverfahren für funktional gradierte Elementdecken werden durch theoretische und numerische Untersuchungen gelegt. Diese werden in einem nächsten Schritt in größenskalierte Versuchskörper umgesetzt. Anhand statischer und dynamischer Versuche werden die Entwurfs- und Berechnungsansätze validiert. Mit den verifizierten numerischen Modellen werden Dichteoptimierungen durchgeführt und mit diesen Erkenntnissen ein erstes Bemessungsmodell aufgestellt. Zur Umsetzung des Wissenstandes auf die Fertigteilproduktion werden die Abläufe im Werk analysiert und die erforderlichen Prozesse eingegliedert. Dann werden die Probekörper unter Beteiligung der Kooperationspartner im Maßstab 1:1 gefertigt. Diese werden weiteren statischen Prüfungen unterzogen, die eine Überprüfung und gegebenenfalls eine Korrektur des aufgestellten Bemessungsmodells ermöglichen.

Das beantragte Forschungsvorhaben steht im Kontext der funktional gradierten Betonbauweise. Ziel ist das ressourcenschonende, rezyklierbare Bauen mit dem Großvolumenwerkstoff Beton, dessen Bindemittel Zement allein 5-10 % der weltweiten CO<sub>2</sub>-Emission verursacht.“

## 1.3 Arbeitsprogramm

Das Projekt wird in folgende Arbeitspakete unterteilt:

### 1. Arbeitspaket: (Kapitel 4)

Im ersten Teil der Forschungsarbeit werden die theoretischen Grundlagen der auf Labormaßstab skalierten Versuchskörper gelegt und erste rechnergestützte Untersuchungen durchgeführt. Dies umfasst die theoretische Entwicklung der optimalen Dichtegradierung der Elemente für variierende statische Randbedingungen und die Skalierbarkeit der Deckenelemente von Real- auf Labormaßstab.

### 2. Arbeitspaket: (Kapitel 3 und 6.2)

Mit dem Kooperationspartner Sika werden die im vorangegangenen Forschungsvorhaben „Gradientenwerkstoffe“ vom ILEK entwickelten Mischungsentwürfe für Gradientenbeton auf die Produktion im Fertigteilwerk abgestimmt. Für die eingesetzten Materialien Gradientenbetone und Glasfaserbewehrung werden die charakteristischen Materialparameter ermittelt und in ein Materialmodell implementiert.

### 3. Arbeitspaket: (Entfällt zugunsten von Detailuntersuchungen zur Schubkraftübertragung in der Längsfuge)

In diesem Arbeitspaket werden theoretische Untersuchungen zu Detailproblematiken der Elementdecken wie das Durchstanzen hoher Einzellasten durch die möglichst dünnen Deckschichten durchgeführt.

### 4. Arbeitspaket: (Kapitel 5.1 und 6.2.3)

Die gewonnenen Erkenntnisse werden in Form von skalierten Versuchskörpern im Labormaßstab umgesetzt. Diese werden statischen sowie dynamischen Versuchen unterzogen (Zug- und Druckfestigkeit, 4-Punkt-Biegung). Die Ergebnisse der Versuche werden mithilfe von Finite-Elemente-Programmen (Ansys, Diana) nachvollzogen.

### 5. Arbeitspaket: (Kapitel 7 und 4)

An den so validierten Berechnungsmodellen werden numerische Dichteoptimierungen durchgeführt, die zu Erkenntnissen über die optimale Dichteverteilung unter den statischen Randbedingungen im Bauteil führen. Hieraus wird ein erstes Bemessungsmodell für funktional gradierte Elementdecken abgeleitet.

### 6. Arbeitspaket: (Kapitel 3.2 und 5.2)

Die Herstellungsprozesse und Arbeitsroutinen im Fertigteilwerk werden hinsichtlich der Möglichkeiten zur Produktion funktional gradierter Bauteile analysiert. Die Ergebnisse der vorangegangenen Arbeitspakete werden nun auf die Fertigteilproduktion des Kooperationspartners Wochner übertragen. Es erfolgt die Fertigung von Bauteilen im Maßstab 1:1, die anschließend an der Materialprüfungsanstalt der Universität Stuttgart statischen Bauteilversuchen unterzogen werden.

7. Arbeitspaket: (Kapitel 5.2 und 6.2.4)

Auswertung der Großversuche und Validierung der Übertragbarkeit des Labormaßstabs auf reale Bauteilgrößen. Überprüfung und gegebenenfalls Korrektur des Bemessungsmodells.

8. Arbeitspaket:

Verfassen eines Abschlussberichts. Dieser dokumentiert die Versuche und macht die Ergebnisse der Bauforschung und -praxis zugänglich.

## 2 Entstehung der Gradientenwerkstoffe und -betone

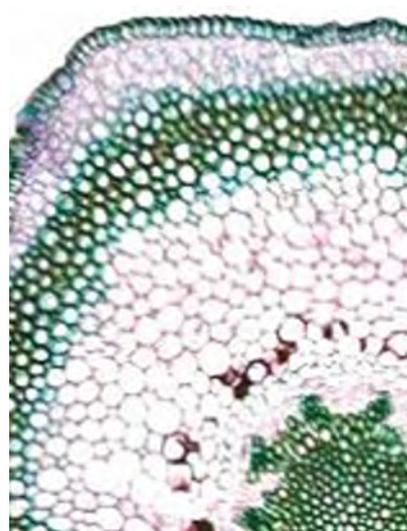
### 2.1 Stand der Forschung

Die Technologie der Gradientenbetone wurde am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK) erfunden. Sie wird dort derzeit in mehreren Forschungsvorhaben auf breiter Ebene weiter erforscht und fortentwickelt. Gemäß dem Anforderungs- und Beanspruchungsprofil innerhalb eines Bauteils können mit der Technologie der Gradientenbetone die Eigenschaften des Werkstoffs Beton wie Dichte, Porosität, Wärmeleitfähigkeit und Festigkeit innerhalb des Bauteils selbst kontinuierlich angepasst werden. Mit gradierten Betonen wird somit erstmals eine vollständige „Optimierung des Bauteilinneren“ möglich. Das Gewicht, der Ressourcenverbrauch, das Abfallaufkommen, die Emissionen und der Energieverbrauch bei der Herstellung von Bauteilen aus Beton können damit weit über bisher bekannte Maße hinaus reduziert werden.

Als Gradientenwerkstoffe werden solche Materialien bezeichnet, bei denen sich eine oder mehrere Eigenschaften, etwa die Härte, die Dichte, die Porosität oder die chemische Zusammensetzung, in mindestens einer Raumrichtung über eine bestimmte Länge kontinuierlich ändern [3–5]. Die Natur bietet vielfältige Beispiele für dieses Optimierungsprinzip wie etwa die gradierten zellartigen Strukturen (Spongiosa) im Inneren von Knochen (Abb. 2-1 a) [6] und funktionale Übergänge im zellularen Aufbau von Pflanzen (Abb. 2-1 b) oder der Haut [7].



a)



b)

Abb. 2-1: Schnitt durch den Oberschenkelhalsknochen (a), Psilotumstengel (b)

Der Forschungsbereich der Gradientenwerkstoffe wurde 1971 von Forschern des Massachusetts Institute of Technology (MIT) durch die englische Bezeichnung „Functionally Graded Materials“ (FGM) eingeführt. Erste Anwendungen erfolgten 1984 in Japan, wobei die Temperaturbeständigkeit des Hitzeschildes eines Raumfahrzeugs durch den fließenden Übergang von Keramik zu Metall verbessert werden konnte [8]. Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms 733 „Gradientenwerkstoffe“ (1995-2003) [9] wurden insbesondere Gradierungen zwischen Keramiken und Metallen, Metallen und Metallen sowie Keramiken und Polymeren untersucht. Diese Gradierungen haben in der Regel eine Ausdehnung von einigen hundert Mikrometern bis zu mehreren Millimetern.

Die Entwicklung des Gradientenbetons stellt einen neuen Forschungszweig dar, welcher erstmals vom ILEK aufgenommen wurde. Die Grundlagen konnten im Projekt „Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen“, kurz „Gradientenwerkstoffe im Bauwesen“ [2], erforscht werden. Die Anwendung der Gradientenbetone auf biegebeanspruchte Bauteile wurde im Projekt „Entwicklung gewichtsoptimierter funktional gradierter Elementdecken“, kurz „Gradierte Elementdecken“ untersucht. Beide Projekte wurden dankenswerterweise durch die Forschungsinitiative Zukunft Bau ermöglicht.

Die Weiterentwicklung der Automatisierung der Herstellungsverfahren wird derzeit im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms 1542 „Leicht Bauen mit Beton“ im Teilprojekt „Optimalstrukturen aus funktional gradierten Betonbauteilen“ in einer Kooperation mit dem Institut für Systemdynamik und dem Institut für Werkstoffe im Bauwesen am ILEK erforscht.

## **2.2 Anwendungsbereiche von Gradientenbeton**

### **2.2.1 Grundlagen**

Die Anwendung des Konzepts der funktionalen Gradierung bei Bauteilen aus Beton bzw. Stahlbeton ist insbesondere dann vielversprechend, wenn innerhalb eines Bauteils inhomogene oder verschiedenartige Anforderungen auftreten. Mögliche Anwendungsbereiche sind, neben vorwiegend biegebeanspruchten Bauteilen wie Balken und Platten, auch Stützen und Wände sowie Rohre, Schalentragerwerke und Bauteile mit freier Geometrie.

Im Folgenden werden die aus Sicht der Autoren besonders relevanten Anwendungsbereiche Geschossdecken und Außenwände exemplarisch dargestellt.

## 2.2.2 Funktional gradierte Decken

Bei herkömmlichen Geschossbauten tragen die Decken mit ihrem Eigengewicht zu bis zu 70 % der Gesamtmasse der Konstruktion bei. Der Abtrag dieser hohen Eigengewichtslasten bedingt dabei sowohl eine große Menge an Bewehrungsstahl in den Decken selbst als auch entsprechend dimensionierte Bauteile wie Stützen, Wände und Fundamente. Gleichzeitig wird bei herkömmlichen massiven Betondecken ein großer Teil des eingebauten Betonvolumens nicht oder nur sehr gering beansprucht. Es liegt deshalb nahe, das Prinzip der Bauteilgradierung auf Decken zu übertragen. In Bereichen mit niedrigerer Druckbeanspruchung kann die Festigkeit des Betons deutlich reduziert werden, was beispielsweise den Einbau von Zonen mit hoher Porosität und somit geringerer Rohdichte nahelegt. Hierdurch wird das Eigengewicht der Decken und damit auch das der gesamten Konstruktion deutlich reduziert. Die funktional gradierte Geschossdecke steht im Fokus dieser Arbeit.

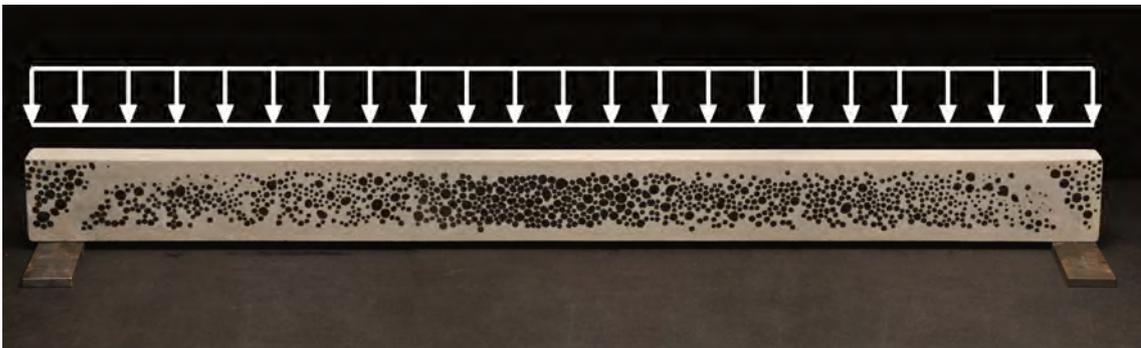


Abb. 2-2: Porositätsverteilung eines Plattenstreifens unter Gleichlast

## 2.2.3 Funktional gradierte Außenwände

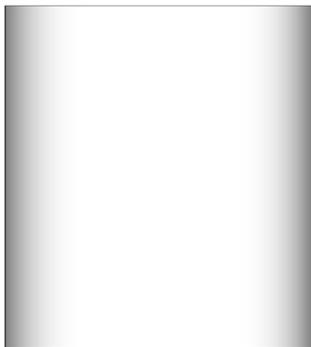
Eine weitere für den Massenmarkt vielversprechende Anwendung des Prinzips der Gradierung stellen funktional gradierte Wände dar. Hierbei wird die mögliche Multifunktionalität der Gradientenbetone bei gleichzeitiger Gewichts- und CO<sub>2</sub>-Reduktion ausgenutzt. Durch die Gradierung der Eigenschaften Tragen und Dämmen kann ein tragfähiges und zugleich wärmedämmendes Bauteil mit einer dichten Sichtbetonoberfläche entstehen, das sortenrein vorliegt und das als rein mineralisches Bauteil sehr gut rezyklierbar ist. Reinhardt und Kümmel kommen in [10] zum Ergebnis, dass es analog zum RC-Beton möglich ist, RC-Leichtbeton mit Zuschlägen aus Leichtbeton herzustellen. Beim Gradientenbeton muss dem Vorgang eine Sortierung der Leichtbetonzuschläge in verschiedene Rohdichteklassen vorausgehen.

Die EnEV 2014 fordert von Außenwänden einen Wärmedurchgangskoeffizienten U von 0,24 W/m<sup>2</sup>K. Diese Anforderungen können mit einem Wärmedämmverbundsystem inkl. tragendem Wandaufbau von ca. 40 cm erfüllt werden. Signifikante Nachteile dieser Konstruktionsweise sind der Verzicht auf reine Sichtbetonkonstruktionen

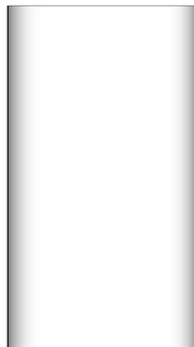
und – bedingt durch die Verklebung – ein kaum noch rezyklierbares Verbundbauteil. Mit homogenen Dämmbetonen, wie sie noch vor wenigen Jahren für tragende und dämmende Wände (z.B. in der Schweiz [11,12]) zum Einsatz kamen, sind die genannten Anforderungen an den Wärmedurchgangskoeffizienten nur noch mit wirtschaftlich nicht mehr vertretbaren Wandstärken in der Größenordnung von 80 cm realisierbar. Die Gradierung von Außenwänden erscheint daher ein zielführender Ansatz.

Bei den untersuchten funktional gradierten Außenwänden wurden zwei unterschiedliche Aufbauten hergestellt. Beide Wände weisen einen fünfschichtigen Aufbau auf, der aus möglichst dünnen, tragenden Deckschichten, gradierten Übergängen und der hochwärmedämmenden Kernschicht besteht. Bei dem ersten Wandaufbau (Abb. 2-3 a) wurde Blähglas als Leichtzuschlag verwendet. Bei einer Wandstärke von 0,40 m ergibt sich ein Wärmedurchgangskoeffizient von 0,275 W/m<sup>2</sup>K. Somit kann mit dieser Lösung das System Mauerwerk plus Wärmedämmverbundsystem durch ein sortenreines Bauteil mit gleicher Gesamtwandstärke ersetzt werden.

Mit dem zweiten Wandaufbau (Abb. 2-3 b) wurden die beschriebenen Werte sogar noch übertroffen. Unter Einsatz von Aerogel als Leichtzuschlag kann bei einer Gesamtsystemdicke von 0,22 m ein U-Wert von 0,22 W/m<sup>2</sup>K erzielt und damit die EnEV 2012 erfüllt werden.



a)  
 $U = 0,27 \text{ W/m}^2\text{K}$   
 $d = 40 \text{ cm}$



b)  
 $U = 0,22 \text{ W/m}^2\text{K}$   
 $d = 22 \text{ cm}$

Abb. 2-3: Gradientenwand mit Blähglasbetonkern (a), Gradientenwand mit Aerogelbetonkern (b)

## 2.3 Herstellungsverfahren für Bauteile aus gradiertem Beton

### 2.3.1 Einleitung

Nachfolgend werden die im Rahmen dieses Forschungsvorhabens wichtigen Herstellungsverfahren kurz beschrieben. Weitere Versuche zu den Verfahren Kontrolliertes Entmischen, Betondrücken, Infiltration, Gradiertes Mischen und Herstellung mit reversiblen Platzhaltern sind im Abschlussbericht des Forschungsvorhabens „Gradientenwerkstoffe im Bauwesen“ [2] beschrieben.

### 2.3.2 Schichtweises Gießen

Die in Kapitel 5 hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit geprüften Bauteile wurden in einem Schichtenverfahren hergestellt. Bei diesem Verfahren werden die zur Verfügung stehenden Mischungen unterschiedlichen Bereichen innerhalb eines Bauteils so zugeordnet, dass sie das dort vorhandene Anforderungsprofil erfüllen. Anschließend werden die Mischungen parallel in einem Zwangsmischer angemischt und eingebaut.

Die Eigenschaftssprünge über das Bauteil können durch die Anzahl und Dicke der Schichten sowie den Grad der Variation der Zusammensetzung von Schicht zu Schicht gesteuert werden. Die Eigenschaften der einzelnen Schichten können punktgenau über die jeweils verwendete Betonmischung gewählt werden. Die Schichtengrenzen verbinden sich aufgrund des Nass-in-Nass-Einbaus und stellen bei einer ausreichend feinen Auflösung keine tragstrukturelle Schwachstelle dar. Unterschiedliche Schwind- und Kriechbeiwerte sowie thermische Ausdehnungskoeffizienten müssen durch eine genügend feine Abstufung angeglichen und bei der Dimensionierung berücksichtigt werden.



Abb. 2-4: Geschichteter Porositätsgradient, Zuschlag (Blähglas), 4 x 4 x 16 cm

Es wurden vertikale und horizontale Schichtungen untersucht. Bei einer Schichtung in zwei Richtungen kommen in horizontaler Richtung zusätzlich Trennbleche zum Einsatz. Diese dienen als Einbringhilfe und werden vor dem Verdichten gezogen. Versuche mit alkalisch löslichen Trennlagen haben zu einer Auflösung der Trennlage geführt, die Rückstände verbleiben jedoch als Trennfuge im Bauteil. Abb. 2-5 zeigt die Herstellung eines skalierten Gradientenbetonbalkens (vgl. auch Abb. 5-1) für den

Vier-Punkt-Biegeversuch im Umkehrverfahren. Der Träger besteht aus drei Schichten in vertikaler und in horizontaler Richtung. Die maximal zulässige Herstellzeit ist abhängig von der zulässigen Verarbeitungszeit der einzelnen Mischungen und lag bei den eigenen Versuchen unter einer Stunde. Auf die obere 10 mm starke Deckschicht werden die 90 mm starken Kernschichten eingebaut. Anschließend werden die Trennbleche gezogen und die untere 10 mm starke Deckschicht, welche die Bewehrung enthält, aufgelegt. Die Kernschichten müssen eine ausreichende Grünstandfestigkeit besitzen, damit es nicht zu einer Gestaltänderung und somit zu ungleichförmigen Deckschichten kommt.

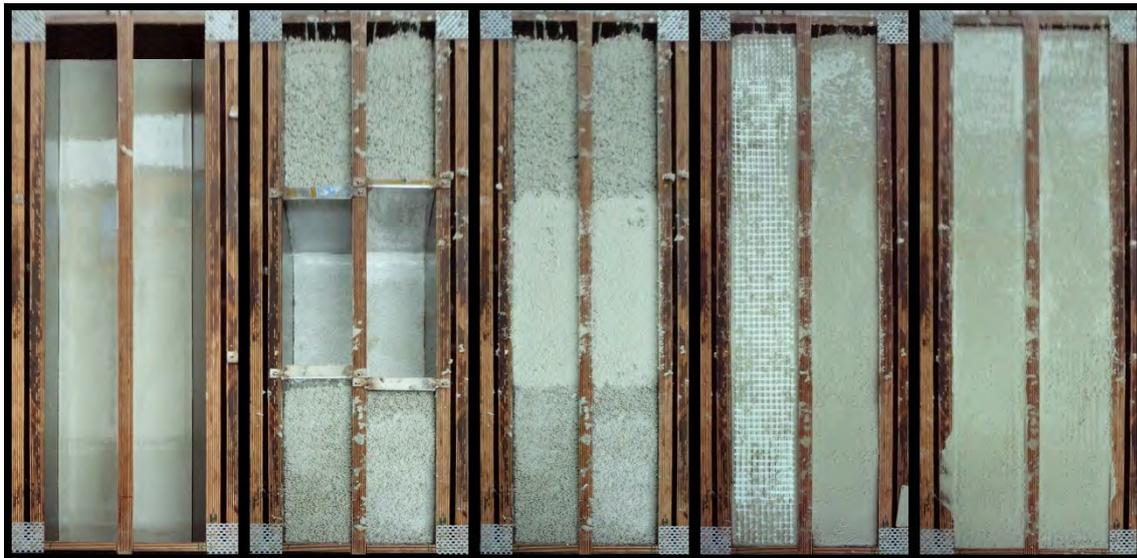


Abb. 2-5: Fertigung eines Gradientenbetonträgers im Schichtenverfahren

Eine Automatisierung des Schichtenverfahrens birgt Potential zur wirtschaftlichen Herstellung einachsig gespannter funktional gradierter Plattenbauteile wie Fassadenelementen und Elementdecken. Die Automatisierung kann zum einen durch die Verfahrbarkeit der Ausbringvorrichtung und zum anderen durch das Verfahren der Schalung erfolgen. Es bleibt jedoch das Problem der vielen erforderlichen Betonmischungen und der diskreten Schichtengrenzen bestehen.

### 2.3.3 Gradientensprühtechnik

Weitere Versuchsserien haben gezeigt, dass sich Sprühverfahren besonders gut zur Herstellung gradierter Betonbauteile eignen. Bei dem im Rahmen des Forschungsvorhabens „Gradientenwerkstoffe im Bauwesen“ entwickelten Gradienten-Sprühverfahren (vgl. Abb. 2-6) werden zwei förderbare, homogene Beton- bzw. Materialmischungen eingesetzt. Die Gradientenbildung erfolgt im Sprühkopf oder im Sprühnebel mithilfe der zugeführten Druckluft (bis 15 bar und 400 l/min beim Nassspritzen). Eine Volumenstromregelung der Pumpen ermöglicht eine stufenlose Einstellung des

Gradienten von niedrig bis hochfest, von schwer bis ultraleicht und weiter bis zu wärmedämmenden Eigenschaften.

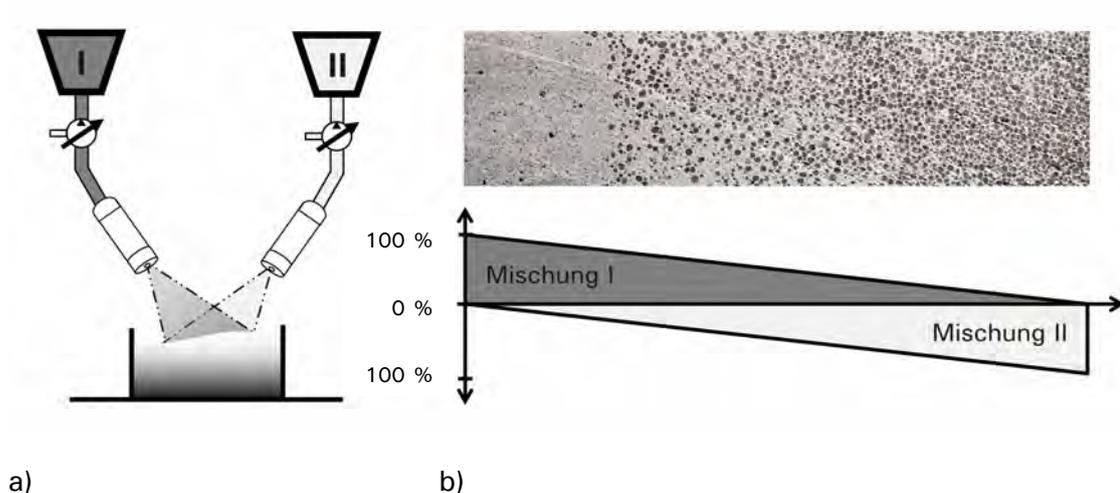


Abb. 2-6: Schema des Gradientensprühens (a) und Sprühprobe 4 x 4 x 16 cm (b)

Die Sprühtechnik weist gegenüber schichtweisen Gießtechniken eine Reihe von Vorteilen auf. Während bei gegossenen Betongradienten der Eintrag von Verdichtungsenergie zu einer Aufhebung des vormals kontrolliert eingestellten Gradienten führen kann, kann bei Anwendung der Gradientensprühtechnik eine weitere Verdichtung entfallen, da der Beton bereits durch den Aufprall verdichtet wird. Der Materialauftrag in dünnen Schichten ermöglicht eine feine Auflösung und das Betonieren auf gekrümmten Schalungen. Zudem lässt sich das Verfahren automatisieren und sowohl im Fertigteilwerk wie auch auf der Baustelle (dort mithilfe der Großraumrobotik) umsetzen.

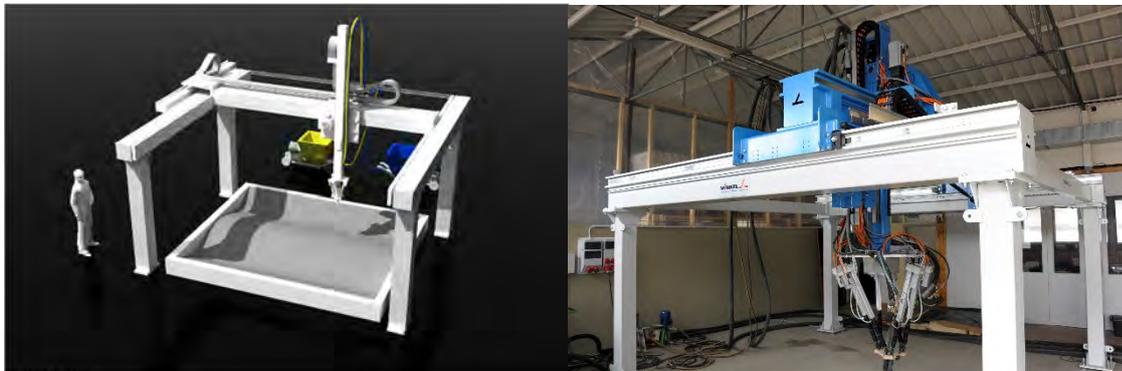
### 2.3.4 Entwicklungsphasen der Gradientenbetontechnologie

Es kann zwischen gradierten Betonbauteilen der ersten und der zweiten Entwicklungsphase unterschieden werden (vgl. Tabelle 2-1). In der ersten Entwicklungsphase lag der Schwerpunkt auf einer ersten Evaluierung des Potentials der Bauweise. Während der derzeitigen zweiten Entwicklungsphase wird das volle Leistungspotential der neuen Technologie erschlossen. Die zweite Entwicklungsstufe wird erst durch die Automatisierung der Herstellungsverfahren ermöglicht.

Tabelle 2-1: Entwicklungsphasen der Gradientenbetontechnologie

Entwicklungsphase	I	II
Herstellung	manuelle Schichtverfahren, manuelle Sprühverfahren	automatisierte Schicht- und Sprühverfahren
Auflösung der Gradierung	diskreter adäquater Schichtaufbau, z.B. Sandwich mit gradiertem Kern	kontinuierliche dreidimensionale Eigenschaftsverläufe
Materialien	Betonrezepturen mit abgestuften Eigenschaften; Bewehrungsstahl u. Textilbewehrung	freie Eigenschaftsverläufe durch Ver- hältnismischung zweier Ausgangsmi- schungen; Textilbewehrung
Bauteilgeometrie	eben und einachsig	räumlich gekrümmt
Gradientenlayout	aus bekannten Ingenieur- modellen abgeleitet	aus numerischen Optimierungsverfahren
Bemessung	angepasste normative Ansätze für Biegung, Querkraft und Schubfugen	materiell nichtlineare Simulationen zur Bestimmung des Tragverhaltens
Prüfverfahren	normative Prüfungen zur Bestimmung der betontechnologischen Eigenschaf- ten der verwendeten Mischungen und Bauteilversuche	individuelle Prüfverfahren zur Bestim- mung der Eigenschaftsverläufe und zerstörungsfreie Bauteilprüfung

Im Rahmen des DFG Projekts „Optimalstrukturen aus gradiertem Beton“ wird derzeit ein Manipulator zur Herstellung funktional gradiertter Bauteile mit räumlich freien Gradierungen entwickelt. Der Manipulator kann aus zwei konträren Ausgangsmischungen, die eine besonders leicht und die andere besonders fest, durch Einstellung unterschiedlicher Mischungsverhältnisse alle dazwischen liegenden Eigenschaften mischen und durch ein Portalsystem räumlich positionieren (Abb. 2-7).



a)

b)

Abb. 2-7: Automatisierte Herstellung gradiertter Betonbauteile: Visualisierung (a) und umgesetzter Manipulator (b)

### 3 Weiterentwicklung der Gradientenbetonmischungen

#### 3.1 Ausgangssituation Gradientenbetonmischungen

Eine Gradierung von Bauteilen aus Beton kann durch Anordnung unterschiedlicher Porositäten, Einbringen diverser Zuschlagstoffe (bis hin zu Hohlkörpern oder Zuschlägen mit bestimmten, gezielt gewählten Steifigkeiten), Verwendung unterschiedlicher Betone oder durch Kombination der vorher genannten Maßnahmen erfolgen. Nachfolgend werden einige Ergebnisse vorgestellt, bei denen kontinuierliche Eigenschaftsverläufe durch eine Variation der Dichte von einem minimalen hin zu einem maximalen Luftporengehalt erzielt wurden.

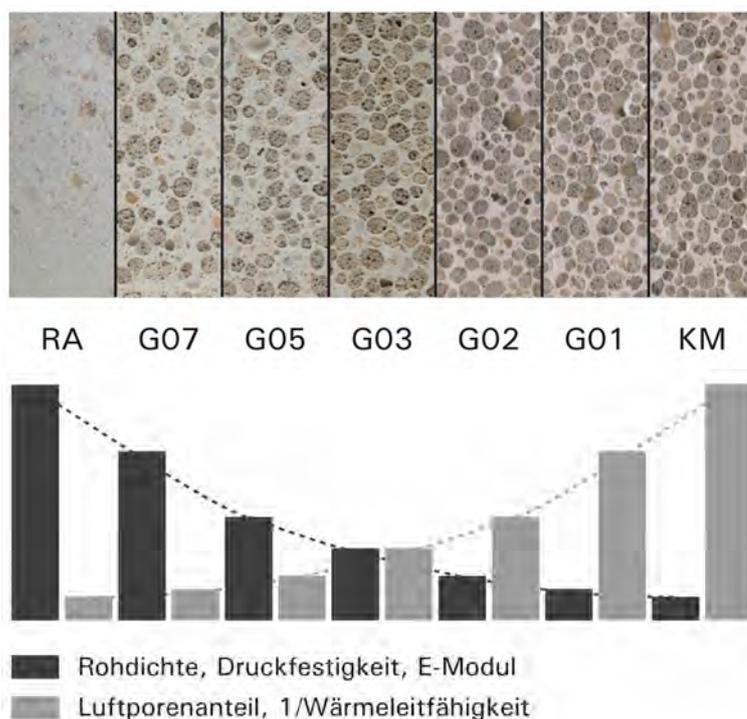
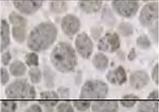
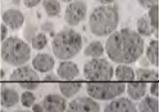
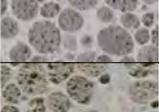
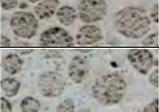
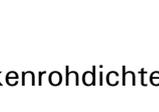


Abb. 3-1: Verlauf der Festbetoneigenschaften bei einer schrittweisen Erhöhung der Porosität

Als gefügedichtes Extremum (Referenzmischung Außen RA) wird ein höherfester Feinkornbeton gewählt. Für den Entwurf eines solchen Feinkornbetons gibt es zahlreiche Beispiele in der Literatur, z.B. [13,14]. Das poröse Extremum, die sogenannte Kernmischung KM, bildet ein haufwerksporiger Leichtbeton mit porosierter Matrix, auch als matrixporiger Leichtbeton in der Literatur bezeichnet [15]. Durch eine Minimierung der Porosität werden die statischen Eigenschaften verbessert, durch eine Maximierung der Porosität die Wärmedämmeigenschaften und das Eigengewicht. Zwischen diesen beiden Mischungen können die Eigenschaften durch eine Anpassung der Porosität innerhalb der Grenzen frei variiert werden (Gradientenmischungen

G07-G01). Exemplarisch und zur Definition der Eigenschaftsverläufe wurde dies in sieben Schritten im Grundlagenforschungsprojekt [2] durchgeführt. Diese homogenen Betonmischungen in gradierter Abstufung (vgl. Tabelle 3-1) dienen als Ausgangsbasis für die weiteren Berechnungen, Simulationen und betontechnologischen Untersuchungen. Die Druck- und Biegezugfähigkeiten wurden an Prismen der Abmessung 40 x 40 x 160 mm nach DIN EN 196-1 [16] geprüft, die E-Moduln an Zylindern der Abmessung 100 x 200 mm nach DIN 1048 Teil 5 [17].

Tabelle 3-1: Übersicht der geprüften Festbetoneigenschaften nach 28 Tagen

Mischung	Betongefüge (Schliffbild)	$\rho_{Tr,10}$	$\rho_{FB}$	$f_{1c,cu}$	$f_{c,cyl}$	$f_{ctm}$	$E_c$	$\lambda_{Tr}$
		kg/dm <sup>3</sup>	kg/dm <sup>3</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	N/mm <sup>2</sup>	W/mK
KAM		0,21	0,32	0,26	0,27	0,13	163	0,03
KLM		0,33	0,49	1,63	1,72	0,66	1023	0,09
G01LM		0,59	0,70	5,27	5,55	1,06	3044	0,17
G02LM		0,81	0,96	8,00	8,42	1,36	5232	0,27
G03L		1,00	1,11	6,83	7,19	1,98	7070	0,37
G05L		1,35	1,69	21,06	22,17	3,17	14040	-
G07L		1,77	2,07	33,22	34,97	4,58	22841	-
RA		2,08	2,23	57,46	60,48	6,16	35050	-

mit:

$\rho_{Tr,10}$	Trockenrohdichte	$\rho_{FB}$	Frischbetonrohdichte
$f_{1c,cu}$	einaxiale Druckfestigkeit	$f_{c,cyl}$	Zylinderdruckfestigkeit
$f_{ctm}$	mittlere einaxiale Zugfestigkeit	$E_c$	E-Modul
$\lambda_{Tr}$	Wärmeleitfähigkeit		

Die Eigenschaften der leichten Kernmischungen KAM und KLM sind zusammenfassend in Abb. 3-2 dargestellt. Als Referenz dienen die Eigenschaften des Porenbetons. Die Achsen wurden mit den Porenbetonkennwerten normiert. Werte, die außerhalb der Fläche liegen, welche durch die Porenbetoneigenschaften aufgespannt

wird, sind als günstiger anzusehen. Dieser Vergleich zeigt, dass mit der KLM-Mischung ein lufthärtender Beton entwickelt wurde, der über Eigenschaften im Bereich von Porenbeton der Rohdichteklasse 0,35 nach DIN V 20000-404 [18] verfügt. Im Gegensatz zum Porenbeton muss jedoch keine Aushärtung im Autoklaven erfolgen. Weiterhin zeigt Abb. 3-2 die sehr guten wärmedämmenden Eigenschaften des Aerogelbetons KAM. Mit einer geprüften Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{tr}$  von 0,03 W/mK ergeben sich für diese Mischungen Wärmedämmeigenschaften im Bereich von Dämmstoffen wie EPS und Steinwolle ( $\lambda = 0,03 - 0,035$  W/mK), aber auch sehr geringe Festigkeiten (vergleichbar mit Schaumbeton). Daher eignen sich die Mischungen der Serie G..AM besonders für Bauteile mit hohen bauphysikalischen und geringen statischen Anforderungen wie Fassaden und Wandbauteile.

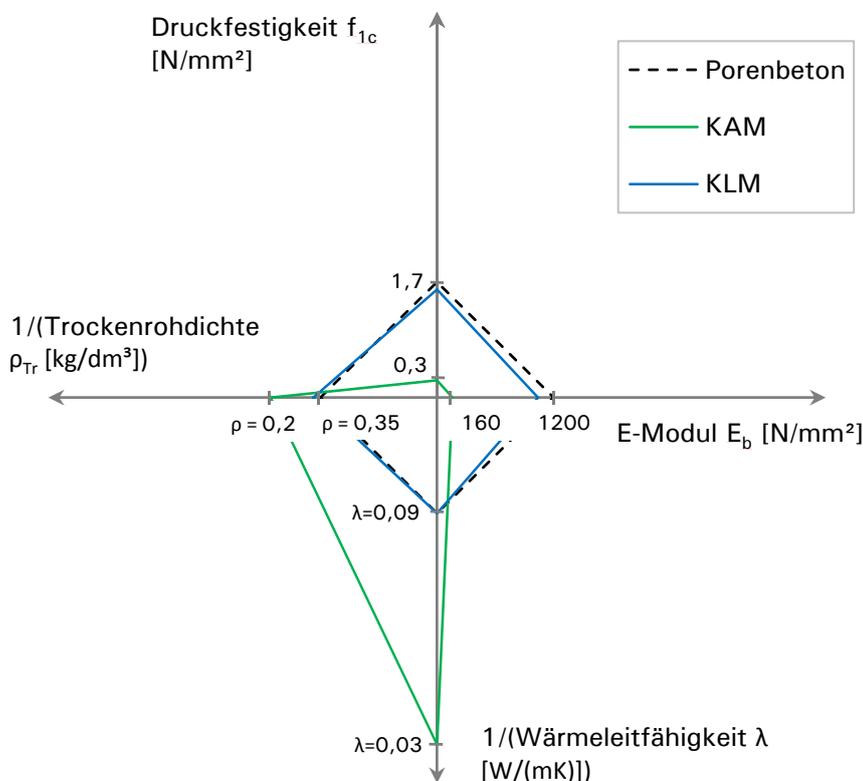


Abb. 3-2: Vergleich der Eigenschaften zweier Kernmischungen mit Porenbeton

### 3.2 Weiterentwicklung der Kernmischung KLM

Die KLM-Mischung erreicht bei den leichten Kernmischungen den höchsten Quotienten aus Festigkeit zu Rohdichte. Daher wird für Gradientenbetonbauteile, bei denen nur tragstrukturelle Anforderungen bestehen, auf Mischungen mit Blähglas als Leichtzuschlag und Mikrohohlkugeln als Matrixporosierungsmittel zurückgegriffen.

Der querkraftfreie Kernbereich KM2 (vgl. Abb. 5-1) wird bei allen Bauteilen mit der Mischung KLM ausgeführt. Die Fertigung der Bauteile erfolgt im Umkehrverfahren. So wird z.B. auf eine 160 mm starke Kernschicht eine 30 mm starke Feinkornbetonschicht aufgelegt. Die Kernschicht muss daher eine ausreichende Grünstandfestigkeit besitzen, damit es nicht zu einer Gestaltänderung und somit zu ungleichförmigen Deckschichten kommt. Die Grünstandfestigkeit beruht auf den Kapillarkräften zwischen den Körnern des Betons. Die Gründruckfestigkeit als Maß der Grünstandfestigkeit ist abhängig von der Packungsdichte und dem Wassergehalt des Frischbetons [19]. Die Grünstandfestigkeit steigt mit zunehmender Verdichtung und sinkendem Wasseranteil.

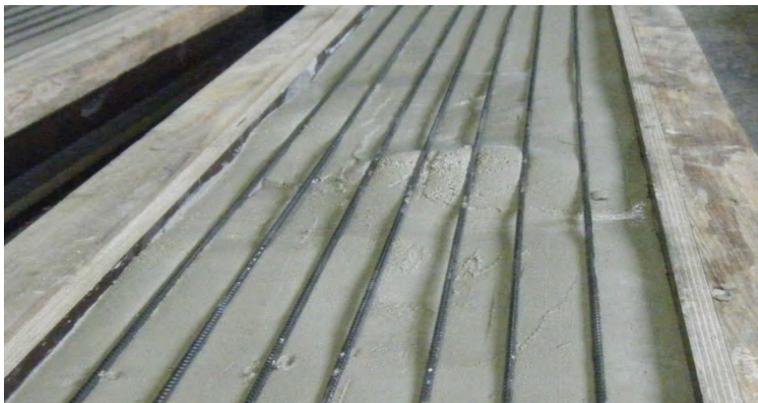


Abb. 3-3: Mangelnde Grünstandfestigkeit der Mischung KLM

Die Kernmischung KLM zeigte bei der Betonage der ersten Charge der Versuche der Hauptausführung VO eine mangelnde Grünstandfestigkeit (vgl. Abb. 3-3). Dies führte zu Verwerfungen in der aufgelegten Deckschicht mit lokal stark differierenden Deckschichtdicken. Zur Homogenisierung der Deckschicht wurden in der zweiten Charge die Deckschichten mithilfe eines Mörtelschlittens aufgelegt. Weiterhin wurden Versuche zur Erhöhung der Grünstandsfestigkeit durchgeführt.

Die Optimierung erfolgte in mehreren Schritten, von denen die Ausgangsmischung, ein Zwischenstand (KLM Opt. 1) und das Ergebnis der Optimierung (KLM Opt. 2) in Tabelle 3-2 dargestellt sind. Die Strategie der Optimierung war, den hohen Wasseranteil zu reduzieren, wobei die Verarbeitbarkeit durch Zugabe von Fließmittel sichergestellt wurde. Eine Beschleunigung der Hydratation wurde durch die Zugabe von Erstarrungsbeschleuniger und eine Erhöhung der Wassertemperatur auf 38 °C erreicht.

Tabelle 3-2: Mischungszusammensetzung und Mischvorgang KLM/m<sup>3</sup>

Bezeichnung		KLM Ausgang		KLM Opt. 1		KLM Opt. 2	
		$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	m [kg]	V [m <sup>3</sup> ]	m [kg]	V [m <sup>3</sup> ]	m [kg]
Zement Z	3100,00	120,00	0,04	125,01	0,04	129,74	0,04
Wasser W <sub>Z</sub>	1000,00	60,00	0,06	41,67	0,04	48,65	0,05
Liaver L	300,00	180,00	0,60	187,51	0,63	194,60	0,65
Mikrohohlkugeln M	200,00	48,25	0,24	50,26	0,25	52,16	0,26
Wasser W <sub>M</sub>	1000,00	60,00	0,06	41,67	0,04	0,00	0,00
Zusatzmittel FM	---	0,00		0,63		2,40	
Zusatzmittel BE	---	0,00		1,39		2,40	
Summe $\Sigma$	---	468,25	1,00	446,11	1,00	425,15	1,00
Kennwerte	---	w/z 1,0		w/z 0,66		w/z 0,35	
		$\rho_{FB,soll}$	468,27	$\rho_{FB,soll}$	446,11	$\rho_{FB,soll}$	425,15

mit:

W<sub>M</sub> mit Mikrohohlkugeln angemischtes Wasser

Mit diesen Maßnahmen konnte im Optimierungsschritt 2 ein Probekörper erstellt werden, der nach 30 Minuten ohne Beschädigungen ausgeschalt wurde (vgl. Abb. 3-4). Der Einsatz dieser Mischung für die Fertigung der Prüfkörper der Hauptausführung zeigte, dass mit dieser Anpassung die erforderliche Grünstandfestigkeit erreicht werden kann.



Abb. 3-4: Frischbetonwürfel KLM mit ausreichender Grünstandfestigkeit (Kantenlänge 150 mm)

### 3.3 Materialparameter Gradientenbetonmischungen

Parallel zur Fertigung der gradierten Betonbauteile der Prüfserie 1 der Hauptausführung wurden Kontrollkörper hergestellt, um die Festbetoneigenschaften der verwendeten Gradientenbetonmischungen zu bestimmen. Im Vorgängerprojekt wurden die Festbetoneigenschaften ausschließlich an Mörtelprismen mit den Abmessungen 40 x 40 x 160 mm bestimmt. Mit den nachfolgend beschriebenen Versuchen soll eine Korrelation zwischen den Prüfergebnissen der Mörtelprismen und den Ergebnissen aus Prüfung der Würfel und Zylinder hergestellt werden.

Bei den Bauteilen der Prüfserie 1 kamen drei Mischungen zum Einsatz. In Tabelle 3-3 werden die geprüften Festbetoneigenschaften und die zugehörigen Prüfkörper beschrieben. Die Prüfkörper wurden bis zur Prüfung 28 Tage bei 100 % Luftfeuchte gelagert. Die grau unterlegten Kennwerte dienen als Referenz und stammen aus dem Vorläuferprojekt.

Tabelle 3-3: Festbetoneigenschaften der Begleitprüfungen

Mischung	$\rho_{FB,soll}$	$\rho_{FB,ist}$	$f_{c,cu,40}$	$f_{c,cu}$	$f_{c,cyl,150/300}$	$f_{ct,fl}$ (40x40x160)	$f_{ct,fl}$ (75x75x450)	$f_{ct,sp}$	$E_b$	$\lambda_{Tr}$
	[kg/dm <sup>3</sup> ]	[kg/dm <sup>3</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[W/mK]
KLM	0,5	0,5	2,5			1,5			1023,6	0,09
KLM neu			1,2	2,0	1,4	0,6	0,5	0,3	988,3	
GO,2LM	0,8	1,0	12,3			3,1			5232,5	0,27
GO2LM neu			3,4	2,9	1,3	1,5	0,6	0,3	1816,0	
RA	2,3	2,2	88,4			14,0			35049,8	
RA neu			81,6	61,8	61,8	11,6	10,2	4,5	29711,3	

Mischung	$D_o$	$D_o$	$D_o$	$D_o$	$D_o$	$D_r$	$D_r$	$D_r$	$D_r$	$D_r$
	[kg/dm <sup>3</sup> ]									
Prüfkörper	40x40 x160	150 <sup>s</sup>	75x75 x450	150 x300	100 x250	40x40 x160	150 <sup>s</sup>	75x75 x450	150 x300	100 x250
KLM	0,33	0,33	0,30	0,37	0,38	0,51	0,41	0,38	0,43	0,48
GO,2LM	0,81	0,63	0,62	0,69	0,66	0,89	0,72	0,70	0,76	0,76
RA	2,08					2,23	2,18	2,24	2,18	2,19

mit:

$f_{c,cu,40}$	Würfeldruckfestigkeit aus gespaltenem Mörtelprisma 40 x 40 x 160
$f_{c,cu}$	Druckfestigkeit Würfel 150 x 150 x 150
$f_{ct,fl}$	Biegezugfestigkeit Prismen 40 x 40 x 160 bzw. 75 x 75 x 450, Stützweite 100 bzw. 225
$E_b$	E-Modul Zylinder 150 x 300
$f_{c,cyl,150/300}$	Druckfestigkeit Zylinder 150 x 300
$f_{ct,sp}$	Spaltzugfestigkeit Zylinder 100 x 250
$D_o$	Festbetonrohddichte ofentrocken
$D_r$	Festbetonrohddichte im Anlieferungszustand

Die geprüften Eigenschaften werden auf die Bezugsbasis aller Bemessungen von Konstruktionsbeton, die einaxiale Druckfestigkeit des Betons  $f_{1c}$ , zurückgeführt

(siehe Anhang B.1). Aus den Rückrechnungen ergeben sich die in Tabelle 3-4 aufgeführten einaxialen Druckfestigkeiten.

Tabelle 3-4: Umrechnung der Prüfergebnisse auf die einaxiale Druckfestigkeit

Mischung	$f_{c,cu,40}$	$f_{1c,cu}$	$f_{c,cu}$	$f_{1c,cu}$	$f_{c,cyl,150/300}$	$f_{1c,cyl}$	$f_{1c,\emptyset}$	$f_{ck,\emptyset}$
	[N/mm <sup>2</sup> ]							
KLM neu	1,2	<del>0,7</del>	2,0	1,5	1,4	1,4	1,4	1,5
G02LM neu	3,4	2,2	2,9	2,1	1,3	<del>1,3</del>	2,2	2,3
RA neu	81,6	53,0	61,8	46,4	61,8	58,7	52,7	55,5

Ebenso werden alle Ergebnisse der Zugversuche auf die einaxiale Zugfestigkeit zurückgeführt (siehe Anhang B.2) und es ergeben sich die in Tabelle 3-5 aufgeführten Werte.

Tabelle 3-5: Umrechnung der Prüfergebnisse auf die einaxiale Zugfestigkeit

Mischung	$f_{ct,fl (40x40x160)}$	$f_{1ct}$	$f_{ct,fl (75x75x450)}$	$f_{1ct}$	$f_{ct,sp}$	$f_{1ct}$	$f_{1ct,\emptyset}$
	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]
KLM neu	0,63	0,28	0,46	0,25	0,27	0,24	0,26
G02LM neu	1,50	0,66	0,58	0,32	0,32	0,29	0,42
RA neu	11,60	5,10	10,15	5,58	4,46	4,01	4,90

Die Ergebnisse der Umrechnung streuen stark. Besonders bei den beiden leichten Mischungen lagen die Werte der Druck- und der Zugfestigkeit deutlich unter den anzunehmenden Werten aus dem Vorgängerprojekt. Aufgrund der geringen erreichten Festigkeiten kam es bei den Bauteilen der Prüfserie 1 zu einem frühzeitigen Versagen der Längsfugen. Dies wird in Abschnitt 5.2.4 ausführlich diskutiert. Bei den Leichtbetonmischungen mit geringen Festigkeiten spielt die Herstellung, die Verdichtung und die Prüfgeschwindigkeit der Prüfkörper eine große Rolle. Die geringen Festigkeiten insbesondere der Mischung G02LM neu werden zu einem großen Teil der zu langen Mischzeit und der zu späten Verarbeitung bei der Herstellung der Prüfkörper der Serie 1 im Fertigteilwerk zugeschrieben.

Aufgrund der Insolvenz des Kooperationspartners wurden die Bauteile der Hauptausführung der Prüfserie 2 selbsttätig an der MPA Stuttgart hergestellt. Kürzere Misch- und Einbauzeiten bedingt durch kürzere Wege führten wieder zu höheren geprüften Festigkeiten. Die erreichten Druckfestigkeiten jeder Prüfserie sind im Dokumentation der Versuche der Hauptausführung F dokumentiert. Diese wurden wieder an Mörtelprismen ermittelt.

Ebenso wurden begleitend zu den skalierten Bauteilversuchen Mörtelprismen zur Überwachung der Eigenschaften entnommen.

## 4 Bemessung und analytische Betrachtungen zum Tragverhalten gradierter Betonbauteile

### 4.1 Allgemeines Tragverhalten

Die Dimensionierung erfolgt für gradierete Betonbauteile mit Schichtaufbau in Anlehnung an Eurocode 2, Teil 1-1:2011-01 [20] und DIN EN 1520:2011-06 „Vorgefertigte Bauteile aus haufwerksporigem Leichtbeton mit statisch anrechenbarer und nicht anrechenbarer Bewehrung“ [21]. Im EC 2 werden konstruktive Leichtbetone mit einer Trockenrohddichte zwischen 800 und 2200 kg/m<sup>3</sup> erfasst. Die gewählten Kernmischungen unterschreiten dagegen mit einer Trockenrohddichte von 330 kg/m<sup>3</sup> die untere Grenze deutlich. Die DIN EN 1520, welche komplementär zum EC 2 gilt, regelt tragende und nichttragende Konstruktionen aus haufwerksporigem Leichtbeton mit Trockenrohddichten zwischen 400 und 2000 kg/m<sup>3</sup> und liegt damit näher an den verwendeten leichten Betonmischungen.

Beide Normen verfolgen für Leichtbeton ein angepasstes Bemessungskonzept mit den Korrekturfaktoren  $\eta$ . Zentraler Kennwert der Bemessungsgleichungen ist der charakteristische Wert der Zylinderdruckfestigkeit des Leichtbetons  $f_{\text{ck}}$ .

Nachfolgend wird die Auslegung eines gradierten Einfeldträgers beschrieben, welcher auch den gewählten Versuchsaufbau für die Bauteilversuche darstellt. Das Gradientenlayout wird so gewählt, dass die äußeren Deckschichten für das maximal einwirkende Moment im Bauteil bemessen werden. Diese Deckschichten haben eine konstante Dicke über die Bauteillängsrichtung. Die Kernmischung wird in Abhängigkeit von der einwirkenden Querkraft und der Querkrafttragfähigkeit der Mischung gewählt. Hierdurch ergibt sich der in Abb. 4-1 dargestellte Bauteilaufbau mit konstanten Deckschichten (DM für Deckschichtmischung), einem abgestuften gradierten Kern (KM1 bis KM7 stehen hier für Kernmischung) und der Bewehrung  $A_s$ . Durch diesen Aufbau entstehen harte Eigenschaftssprünge und die Schubtragfähigkeit der Verbundfugen muss nachgewiesen werden.

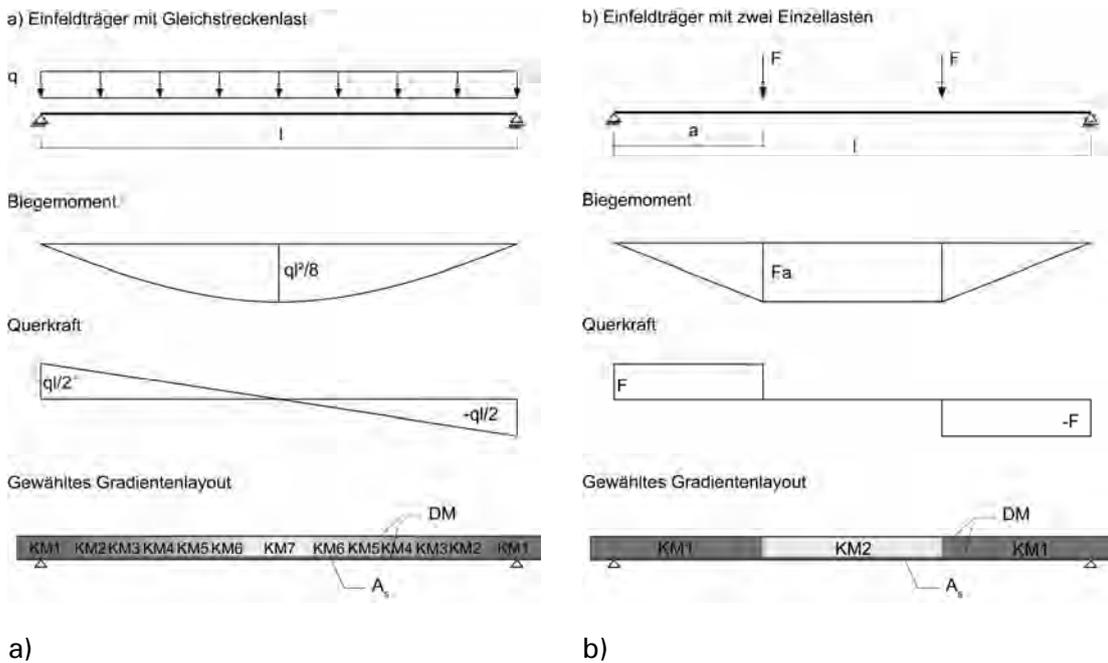


Abb. 4-1: Herleitung des Gradientenlayouts für einen Einfeldträger mit Gleichstreckenbelastung (a) und mit zwei Einzellasten (b)

Die in Abb. 4-1 dargestellten gradierten Betonbauteile ordnen sich mit ihrem Tragverhalten zwischen Bernoulli-Balken und Sandwich mit biegeweichen Deckschichten ein.

Biegebeanspruchte Sandwichbauteile mit biegeweichen Deckschichten tragen das einwirkende Moment durch ein Kräftepaar, welches Membranspannungszustände in den Deckschichten hervorruft, ab. Die Querkraft wird über den Kern abgetragen. Die Durchbiegung setzt sich aus den Anteilen der Biegeverformung  $w_B$  und der Schubverformung  $w_S$  zusammen (vgl. Abb. 4-2).

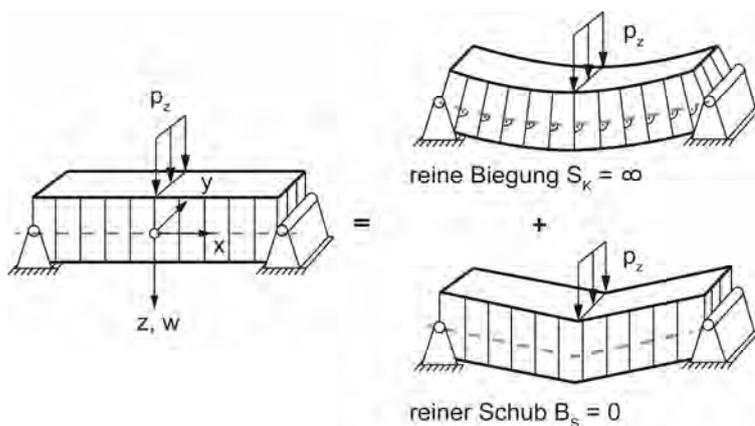


Abb. 4-2: Biege- und Schubverformungen eines Sandwichbalkens nach [22]

Nach der Methode der Partialdurchsenkungen werden diese Anteile zur Gesamtverformung aufaddiert [23].

$$w(x) = w_B(x) + w_S(x) \quad (4-1)$$

Die Differentialgleichung lautet:

$$w'' = w_B'' + w_S'' = -\frac{M}{B_S} + \frac{Q'}{S_K} \quad (4-2)$$

mit:

$$B_S = E_D \cdot I_S \quad \text{Biegesteifigkeit des Sandwichbalkens}$$

$$E_D; I_S \quad \text{E-Modul der Deckschichten; Trägheitsmoment des Sandwichbalkens}$$

$$S_K = G_K \cdot A_K \quad \text{Schubsteifigkeit der Kernschicht}$$

$$G_K = E_K / [2 \cdot (1 + \mu)] \quad \text{Schubmodul der Kernschicht nach [24]}$$

$$\mu = 0,2 \quad \text{Querdehnzahl haufwerksporiger Leichtbeton im elastischen Bereich}$$

$$\mu = 0 \quad \text{Querdehnzahl haufwerksporiger Leichtbeton gerissen [21]}$$

Für den statisch bestimmten Sonderfall des Einfeldträgers hat die Schubsteifigkeit des Kerns ausschließlich Auswirkungen auf die Verformungen. Bei statisch unbestimmten Systemen hängen auch die Schnittkraftverläufe von den Steifigkeitsverteilungen ab.

Für die Verformungen in Feldmitte des Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast gilt nach [23]:

$$w_{\max} = w_{B,\max} + w_{S,\max} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot B_S} + \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot S_K} \quad (4-3)$$

Mit dieser Formel wurde eine Referenzverformungsberechnung eines Einfeldträgers mit einer Spannweite von 5 m, einem konstanten Querschnitt über die Bauteillänge, einer Gesamtquerschnittshöhe von 200 mm, Deckschichtstärken von jeweils 10 mm der RA-Mischung aus Tabelle 3-1 und einer Kernschicht mit einer Höhe von 180 mm der KLM-Mischung vorgenommen. Hieraus ergibt sich für die Verformung infolge von Schub ein Anteil von 3 % an der Gesamtverformung. Die gewählte Kernmischung kommt jedoch nur in Feldmitte in Bereichen sehr geringer Querkraftbeanspruchungen zum Einsatz. Der gradierte Kernaufbau in Abb. 4-1 führt zu wesentlich geringeren Schubverformungsanteilen, so dass für die weiteren Betrachtungen biegebeanspruchter gradiertter Betonbauteile vom Tragverhalten des Bernoulli-Balkens ausgegangen werden kann. Die Sandwichbetrachtungen müssen jedoch für die Verwendung noch leichter, besonders wärmedämmender Kernschichten erneut durchgeführt werden.

## 4.2 Biegung

Es gelten die Bernoullischen Annahmen. Weiterhin wird von starrem Verbund zwischen den Schichten ausgegangen. Die unterschiedlichen Steifigkeiten der Materialien im Querschnitt werden über folgende Idealisierung berücksichtigt. Anhand von Reduktionszahlen  $n = E_c/E_{LC}$  wird der Querschnitt auf ein Material (Normalbeton) reduziert. Dabei wird der leichte Kern in einen Steg mit den Materialeigenschaften des Deckschichtbetons überführt (vgl. Abb. 4-3). Bei der Bemessung wird davon ausgegangen, dass der Beton keinen Zug aufnehmen kann. Da der untere Flansch als gerissen angenommen wird, kann der Querschnitt für Biegung analog zu einem Plattenbalken bemessen werden. Weiterhin wird, analog zum Plattenbalken, die Dehnung in der vollständig überdrückten Platte in Plattenmitte auf  $\epsilon_{c2}$  begrenzt. Dadurch wird auch die Dehnung des Leichtbetonkerns auf  $\epsilon_{c2}$  begrenzt. Die Dehnung  $\epsilon_{c2}$  bei Erreichen der Festigkeitsgrenze liegt nach EC 2 sowohl für Normalbeton, als auch für Leichtbeton bei 2 ‰. Als Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird das Parabel-Rechteck-Diagramm verwendet.

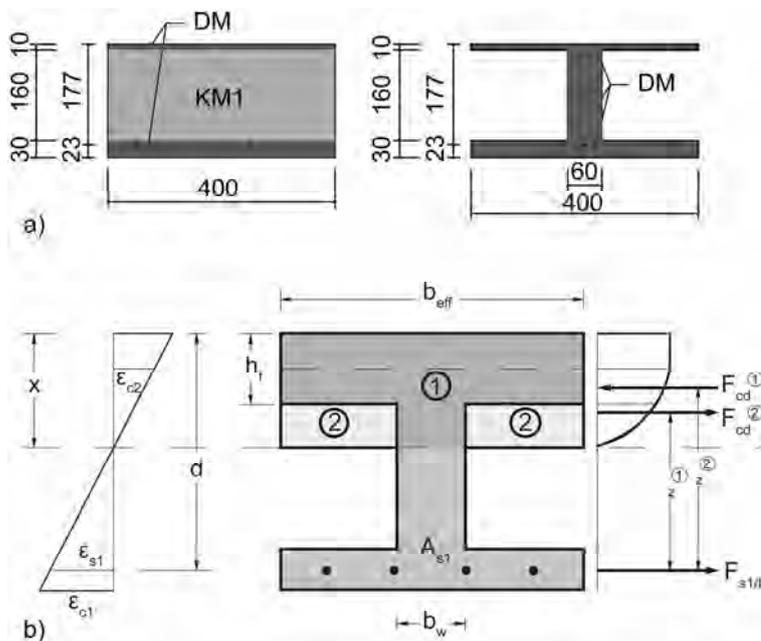


Abb. 4-3: Idealisierung des Querschnitts (a) und Aufteilung der Druckzone von Gradientenbalken (b)

Aus den Gleichgewichtsbetrachtungen ergibt sich:

$$N_{Ed} = N_{Rd} = F_{s1d} + F_{cd}^{(1)} - F_{cd}^{(2)} \quad (4-4)$$

$$M_{Eds} = M_{Rds} = -F_{cd}^{(1)} \cdot (d - k_a^{(1)} \cdot x) + F_{cd}^{(2)} \cdot (d - h_f - k_a^{(2)} \cdot x) \quad (4-5)$$

Für den Fall, dass die Dehnungsnulllinie in der oberen Deckschicht liegt, erfolgt die Bemessung am Rechteckquerschnitt und  $F_{cd}^{(2)}$  wird zu Null.

### 4.3 Querkraft

In den nachfolgenden skalierten Versuchsreihen wurde die Vorhersagegenauigkeit der Bemessungsformeln für den Querkraftwiderstand eines gradierten Betonbauteils ohne Querkraftbewehrung untersucht. Es wurden die Bemessungsformeln nach EC 2 und die zwei möglichen Varianten nach DIN EN 1520 verglichen. Der Ansatz nach EC 2 ist fast deckungsgleich mit der ersten Variante der DIN EN 1520 und ergibt die beste Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Daher wird dieser für die Dimensionierung herangezogen (vgl. Kapitel 5.1.3). Für Stahlbetonbauteile aus Leichtbeton ohne Längskräfte gilt nach EC 2:

$$V_{IRd,c} = [C_{IRd,c} \cdot \eta_1 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{lck})^{1/3}] \cdot b_w \cdot d \quad (4-6)$$

$$\geq \eta_1 \cdot v_{l,min} \cdot b_w \cdot d \quad (4-7)$$

mit:

$$C_{IRd,c} = \frac{0,15}{\gamma_c} \quad \text{empirischer Kalibrierungsfaktor für den Bezugszeitraum von 50 Jahren für die ständige und vorübergehende Bemessungssituation}$$

$$\eta_1 = 0,4 + 0,6 \cdot \rho / 2200 \quad \text{Korrekturwert der Zugfestigkeit für Leichtbeton}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad \text{Einfluss der Bauteilhöhe (Maßstabsfaktor)}$$

$$\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 2,0 \quad \text{Längsbewehrungsgrad}$$

$$b_w \quad \text{kleinste Querschnittsbreite in der Zugzone}$$

$$v_{l,min} = 0,028 \cdot k^{3/2} \cdot f_{lck}^{1/2} \quad \text{Mindestwert der Querkrafttragfähigkeit für Leichtbeton}$$

Zur Berechnung der Querkrafttragfähigkeit von textil bewehrten Bauteilen ohne Querkraftbewehrung wird ein angepasster Ansatz analog zu Voss [25] verwendet:

$$V_{IRd,c} = \left[ C_{IRd,c} \cdot \eta_1 \cdot k \cdot \left( 100 \cdot \rho_1 \cdot \frac{\sigma_{tex}}{f_{yk}} \cdot f_{lck} \right)^{1/3} \right] \cdot b_w \cdot d \quad (4-8)$$

mit:

$$\sigma_{tex} \quad \text{Textilbruchspannung}$$

## 4.4 Schubkraftübertragung in Fugen

### 4.4.1 Nachweis der Schubkraftübertragung in Fugen nach EC 2

Unter Längsfugen versteht man die horizontalen Grenzflächen zwischen Betonen unterschiedlichen Alters bei abschnittsweiser Herstellung. Sie stellen eine Störung im Gefüge dar. Um ein monolithisches Tragverhalten bei zusammengesetzten Querschnitten zu ermöglichen, müssen die Fugen stets kraftschlüssig sein und einen starren Verbund aufweisen. Der starre Verbund in der Fuge, insbesondere ohne Bewehrung, wird durch den Haftverbund der Schichten (Adhäsion und mikromechanische Verzahnung) sichergestellt [26].

Im Fall der gradierten Betonbauteile wird zwar das gesamte Bauteil zu einem Zeitpunkt gefertigt, es entstehen jedoch Gefügestörungen durch den Schichtenaufbau. Der Nachweis der Schubkraftübertragung in Fugen erfolgt nach EC 2:

$$v_{Edi} \leq v_{Rdi} \quad (4-9)$$

Der Bemessungswert der Schubkraft in der Fuge infolge der einwirkenden Querkraft ist:

$$v_{Edi} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{(z \cdot b_i)} \quad (4-10)$$

mit:

$\beta = \frac{F_{cdj}}{F_{cd}}$  Verhältnis der Normalkraft in der Ergänzung  $F_{cdj}$  (z.B. Gurtkraftanteil eines abgetrennten Druckgurts) und der Gesamtnormalkraft im Querschnitt  $F_{cd}$

$V_{Ed}$  Bemessungswert der einwirkenden Querkraft

$z$  Hebelarm des zusammengesetzten Querschnitts

$b_i$  Breite der Fuge

Der Bemessungswert der Schubtragfähigkeit der Fuge wird berechnet zu:

$$v_{Rdi} = c \cdot f_{ctd} + \mu \cdot \sigma_n + \rho \cdot f_{yd} \cdot (\mu \cdot \sin \alpha + \cos \alpha) \leq 0,5 \cdot v \cdot f_{cd} \quad (4-11)$$

mit:

$0,025 \leq c \leq 0,5$  Beiwert zur Berücksichtigung der Rauigkeit der Fuge nach EC 2 (Haftanteil)

$0,5 \leq \mu \leq 0,9$  Beiwert zur Berücksichtigung der Rauigkeit der Fuge nach EC 2 (Reibanteil)

$f_{ctd}$  Bemessungswert der Betonzugfestigkeit

$\sigma_n$  Spannung infolge der minimalen Normalkraft rechtwinklig zur Fuge

$\rho = \frac{A_s}{A_i}$	Verbundbewehrungsgrad
$A_s$	Querschnittsfläche der die Fuge kreuzenden Verbundbewehrung
$A_i$	Fläche der Fuge, über die Schub übertragen wird
$45^\circ < \alpha < 90^\circ$	Neigungswinkel der Verbundbewehrung
$v = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$	Abminderungsbeiwert der Betonfestigkeit bei Schubrisen

#### 4.4.2 Analytisches Modell der Schubspannungen in der Längsfuge infolge Schwindens

Das analytische Modell von Silfwerbrand erlaubt es, die Dehnungen und Spannungen in der Verbundfuge von zusammengesetzten Betonquerschnitten unterschiedlichen Alters infolge Schwindens zu errechnen. Mit diesem Modell kann sowohl voller als auch nachgiebiger Verbund berücksichtigt werden. Das Modell basiert auf einer linearen Beziehung zwischen Schlupf- und Schubspannung in der Verbundzone. Es wurde anhand von Versuchen validiert und liefert realitätsnahe Ergebnisse [27]. Ausgegangen wird von einem in Abb. 4-4 dargestellten zweischichtigen Aufbau aus einer Lage älteren Bestandsbetons (2) und einer Lage jüngeren Aufbetons (1).

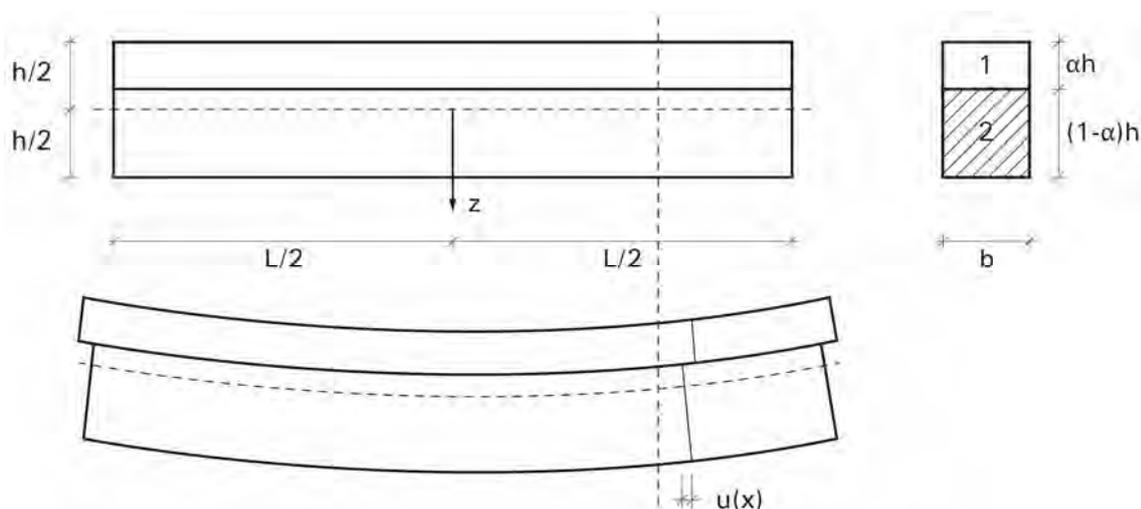


Abb. 4-4: Aus zwei Abschnitten zusammengesetzter Betonbalken [27]

Der geometrische Ursprung wird in Balkenmitte festgelegt. Laut Vorzeichendefinition bedeutet eine positive Schwinddehnung eine Stauchung, eine positive Dehnung eine Ausdehnung und eine positive Spannung eine Zugspannung. Das statische System ist ein statisch bestimmter Einfeldträger und die Querschnitte bleiben eben. Die Schwindverformungen über den Querschnittsabschnitt sind konstant. Das Schwin-

den des Bestandsabschnitts ist abgeschlossen und die Betone in beiden Lagen verhalten sich linear elastisch. Die Schubspannung in der Verbundfuge ist proportional zum Schlupf in der Fuge. Mit diesen Vereinfachungen können die Schubspannungen in der Verbundfuge  $\tau(x)$  aus der Verbundkonstanten  $K$  und dem Schlupf  $u(x)$  in der Verbundfuge berechnet werden.

$$\tau(x) = K \cdot u(x) \quad (4-12)$$

Nach weiterem Auflösen ergibt sich die Beziehung:

$$\tau(x) = - \frac{m\alpha(1-\alpha)[1-3\alpha(1-\alpha) + (m-1)(1-\alpha)^3]}{m + (m+1)[m(1-\alpha)^4 - \alpha^4]} \cdot E_1 \cdot \Delta\varepsilon_{sh} \cdot \frac{h}{L} \cdot \lambda L \cdot \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \frac{\lambda L}{2}} \quad (4-13)$$

mit:

$$m = \frac{E_2}{E_1} \quad \text{Verhältnis zwischen den E-Moduln}$$

$$\alpha = \frac{h_1}{h_{ges}} \quad \text{Verhältnis zwischen der Höhe Aufbeton und der Gesamtbauteilhöhe}$$

$$\Delta\varepsilon_{sh} \quad \text{Schwinddifferenz zwischen den beiden Lagen}$$

$$\lambda \quad \text{Verbundkonstante}$$

$$z^* \quad \text{z-Koordinate der Verbundfuge}$$

$$L \quad \text{Gesamtlänge des Bauteils}$$

Die Formulierung  $\lambda L$  beschreibt den Verbund in der Fuge und kann folgendermaßen berechnet werden:

$$(\lambda L)^2 = \frac{m + (m-1)[m(1-\alpha)^4 - \alpha^4]}{m \cdot \alpha(1-\alpha)[1-3\alpha(1-\alpha) + (m-1)(1-\alpha)^3]} \cdot \frac{KL^2}{E_1 h} \quad (4-14)$$

Weiterhin gilt für die Krümmung des Gesamtquerschnitts:

$$\kappa(x) = \frac{6m\alpha(1-\alpha)}{m + (m-1)[m(1-\alpha)^4 - \alpha^4]} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{sh}}{h} \cdot \left(1 - \frac{\cosh \lambda x}{\cosh \frac{\lambda L}{2}}\right) \quad (4-15)$$

Die Dehnungen und Normalspannungen an der Stelle  $(x, z)$  des Balkens sind:

$$\varepsilon_1(x, z) = \left[ \frac{1 + (m-1)(1-\alpha)^3}{\alpha} \frac{h}{6} + z \right] \cdot \kappa(x) - \Delta\varepsilon_{sh}; \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{z}{h} \leq \alpha - \frac{1}{2} \quad (4-16)$$

$$\sigma_1(x, z) = E_1 \left[ \frac{1 + (m-1)(1-\alpha)^3}{\alpha} \frac{h}{6} + z^* \right] \cdot \kappa(x); \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{z}{h} \leq \alpha - \frac{1}{2} \quad (4-17)$$

Der Schlupf in der Verbundfuge ergibt sich zu:

$$u(x) = -\Delta\varepsilon_{sh}L \cdot \frac{\sinh \lambda x}{\lambda L \cdot \cosh \frac{\lambda L}{2}} \quad (4-18)$$

Mit diesen Beziehungen kann die einwirkende Schubkraft in der Verbundfuge bestehend aus einem Schwindanteil und einem Anteil aus der äußeren Belastung berechnet werden.

## 4.5 Querschnittswerte im Zustand I und II

Die Querschnittskennwerte im Zustand I werden am idealisierten Querschnitt berechnet. Die Berechnung erfolgt vereinfachend mit den Bruttoquerschnittswerten, d.h. die Bewehrungsflächen werden in der Berechnung mit den Materialkennwerten des Normalbetons angesetzt. Die Reduktionszahl  $n$  ergibt sich je nach verwendeter Leichtbetonmischung im Kernbereich zu:

$$n = \frac{E_{DM}}{E_{KM}} \quad (4-19)$$

Hiermit werden die reduzierten Querschnittswerte der Kernschicht ermittelt.

$$A_{Ke,red} = \frac{A_{Ke}}{n}; \quad I_{Ke,red} = \frac{I_{Ke}}{n} \quad (4-20)$$

Die ideellen Querschnittswerte Querschnittfläche  $A_i$ , Schwerpunktskoordinate bezgl. der Bauteiloberkante  $z_i$ , Flächenträgheitsmoment zweiten Grades  $I_i$  und Widerstandsmoment  $W_i$  des Gesamtquerschnitts am Doppel-T-Profil ergeben sich zu:

$$A_i = A_{Do} + A_{Ke,red} + A_{Du} \quad (4-21)$$

$$z_i = \frac{A_{Do} \cdot z_{Do} + A_{Ke,red} \cdot z_{Ke} + A_{Du} \cdot z_{Du}}{A_i} \quad (4-22)$$

$$I_i = I_{Do} + A_{Do} \cdot \Delta z_{Do}^2 + I_{Ke} + A_{Ke,red} \cdot \Delta z_{Ke}^2 + I_{Du} + A_{Du} \cdot \Delta z_{Du}^2 \quad (4-23)$$

$$W_{i,o} = \frac{I_i}{z_i}; \quad W_{i,u} = \frac{I_i}{h - z_i} \quad (4-24)$$

Das Rissmoment des Querschnitts ergibt sich dann zu

$$M_{cr} = W_i \cdot f_{ct,eff} \quad (4-25)$$

mit:

$\Delta z_*$  Abstand Teilschwerpunkt zum Gesamtschwerpunkt

\*<sub>DM</sub> Deckschicht Mischung

\*<sub>Do</sub>; \*<sub>Du</sub> Deckschicht oben bzw. unten

\*<sub>KM</sub> Kernschicht Mischung

\*<sub>Ke</sub> Kernschicht

\*<sub>i,o</sub>; \*<sub>i,u</sub> oben bzw. unten

Hiermit liegt im idealisierten Querschnitt nur noch das Material der Deckschichten vor.

Die Querschnittswerte im reinen Zustand II sind nur von der Druckzonenhöhe und der Bewehrung abhängig. Nach [26] kann das Flächenträgheitsmoment im Zustand II für einen einfach bewehrten Rechteckquerschnitt folgendermaßen berechnet werden:

$$I^{II} = \frac{b \cdot x^3}{3} + \alpha_s \cdot A_{s1} \cdot (d - x)^2 \quad (4-26)$$

mit:

$\alpha_s = \frac{E_s}{E_{DM}}$  Verhältnis der E-Moduln von Bewehrungsstahl und Deckschichtbeton

$x = \xi \cdot d$  Druckzonenhöhe

Die Druckzonenhöhe für einen Rechteckquerschnitt kann aus folgender Formel errechnet werden:

$$\xi = -\alpha_s \rho_{s1} + \sqrt{(\alpha_s \rho_{s1})^2 + 2\alpha_s \rho_{s1}} \quad (4-27)$$

Es ist zu überprüfen, ob die Druckzonenhöhe tatsächlich innerhalb der oberen Deckschicht liegt. Liegt der Dehnungsnulldurchgang im Steg, ist die Druckzonenhöhe für einen Plattenbalken zu berechnen [26].

## 5 Versuche an gradierten Bauteilen

### 5.1 Skalierte Versuche

#### 5.1.1 Skalierung, Geometrie und Randbedingungen

Als Referenz zur Auslegung der Versuche dient eine 5 m spannende, 20 cm starke Flachdecke aus Normalbeton, welche alle Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit und die Tragfähigkeit erfüllt (vgl. Anhang E). Die gradierten Bauteile sollen bei gleichen Randbedingungen und gleicher Bauteilhöhe ebenso die Anforderungen an die Tragfähigkeit und die Gebrauchstauglichkeit erfüllen.

Skalierte Versuche bieten die Möglichkeit, das Tragverhalten von Bauteilen anhand von Versuchen im Labormaßstab zu untersuchen. Werden dabei die Modellgesetze beachtet, ergibt sich Spannungs- und Dehnungsgleichheit im Modellversuch und in der Hauptausführung (Bauteil im Originalmaßstab) und somit ein identisches Tragverhalten im Modellversuch [28]. Die wichtigsten Eckpunkte bei der Skalierung der Prüfkörper sind hierbei:

- Materialgleichheit in Modell und Hauptausführung
- E-Modulmaßstab  $E_v = \frac{E_M}{E_H} = 1$
- Kräftemaßstab ist nur von den geometrischen Maßstäben abhängig
- Spannungs- und Dehnungsgleichheit  $\varepsilon_v = \sigma_v = 1$  zwischen Modell und Hauptausführung.

Die gewählten Maßstäbe im Versuch sind der Längenmaßstab  $l_v = \frac{l_M}{l_H} = \frac{1}{5}$ , der Breitenmaßstab  $b_v = \frac{b_M}{b_H} = \frac{1}{10}$  und der Höhenmaßstab  $h_v = \frac{h_M}{h_H} = \frac{1}{2}$ . Hieraus ergibt sich eine Skalierung der Prüfkraft im Modell zu  $F_M = F_H \cdot \frac{b_v \cdot h_v^2}{l_v} = \frac{1}{8}$  und eine Skalierung der Momente im Modell zu  $M_M = M_H \cdot b_v \cdot h_v^2 = \frac{1}{40}$ .

Die Geometrie der skalierten Prüfkörper wurde nach den Ähnlichkeitsgesetzen der Modellstatik und nach Randbedingungen wie der maximalen Prüflast der Prüfmaschine, der Handhabbarkeit der Prüfkörper und den Abmessungen der verwendeten Materialien wie Größtkorn und Bewehrungsdurchmesser gewählt. Die Abmessungen der Versuchskörper und eine dem Vier-Punkt-Biegeversuch angepasste Gradierung sind in Abb. 5-1 dargestellt.

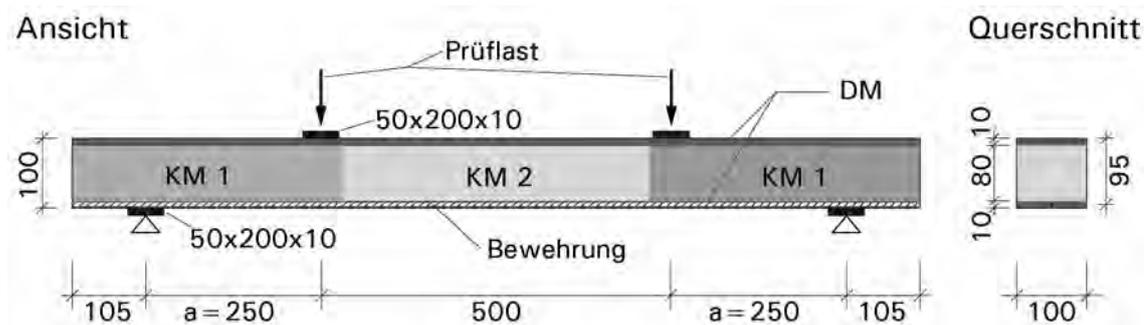


Abb. 5-1: Aufbau skaliertes Prüfkörper (Abmessungen in mm)

Es wurden insgesamt 15 Prüfserien mit jeweils 2 bis 8 skalierten Prüfkörpern untersucht. Die Versuchsserien SV1 bis SV10 stellen erste Tastversuche und Versuche zur Biegetragfähigkeit des Bauteils bei Variation der Bewehrung dar. Dabei wurden nicht nur die Bewehrungsgrade variiert, sondern auch die Bewehrungsmaterialien. Textile Bewehrungen wie Glas- und Kohlefasergelege eignen sich besonders gut zur Verwendung in den sehr dünnen, gefügedichten Deckschichten. Die Verwendung von Stahlbewehrung verspricht eine schnellere Umsetzbarkeit der Technologie im Fertigteilwerk.

Beim Nachweis der Längsfugen unter Berücksichtigung der entstehenden Schubkräfte in der Verbundfuge infolge unterschiedlichen Schwindens nach [27] wurde das Versagen in der Fuge in den Versuchen nicht maßgebend. Daher wurden keine Versuche zur Schubkraftübertragung in Fugen durchgeführt.

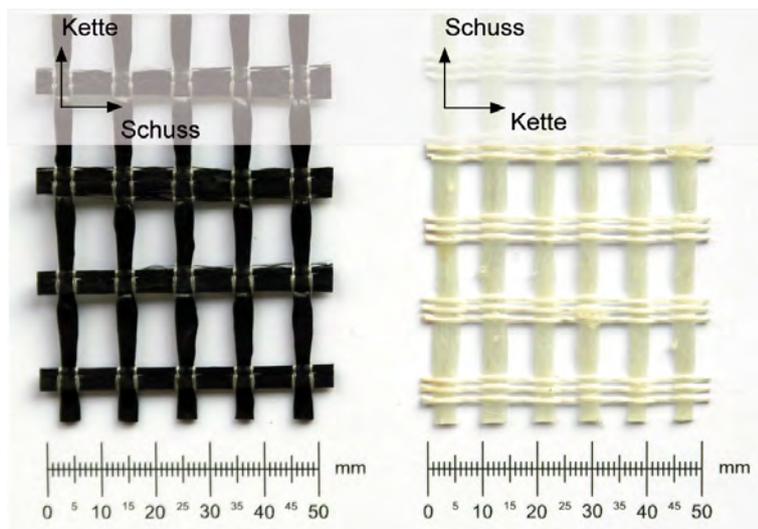
Alle Proben wurden weggesteuert mit einer Geschwindigkeit von 0,1 mm/s belastet. Gemessen wurden die Prüfkraft, der Traversenweg und die Durchbiegung auf beiden Seiten des Balkens in Feldmitte mit einer Abtastrate von 2 Hz. Alle Auflager und Lasteinleitungen sind um die y-Achse gelenkig gelagert und an den zwei Lasteinleitungspunkten und einem der Auflager ist eine horizontale Verschiebung möglich.

Alle Probekörper wurden nach DIN EN 12390-2 in einer Klimakammer (20 °C, 100 % rel. Luftfeuchte) 28 Tage gelagert und dann geprüft.

### 5.1.2 Versuche zur Biegetragfähigkeit

In gradierten Betonbauteilen können verschiedene Bewehrungsmaterialien zum Einsatz kommen. Die mittleren Bruchspannungen  $\sigma_{\text{tex}}$  der textilen Bewehrungen aus Glas- und Carbonfasern müssen zuvor in Zugversuchen experimentell bestimmt werden. Die entsprechenden Dehnkörperversuche wurden in Anlehnung an Voss [25] an Zugknochen durchgeführt. Abb. 5-2 zeigt die für die Bauteilversuche verwendeten textilen Bewehrungen SIGRATEx® Grid 600 und Plastofom Panzer. Insgesamt wurden Untersuchungen an zwei verschiedenen Carbonfasergelegen und einem Glasfasergelege in Kombination mit zwei Feinkornbetonmischungen durchgeführt.

Bei den Kohlefasergelegen handelt es sich um die von der TU Dresden [13] gemeinsam mit der Firma SGL Carbon entwickelten Gelege SIGRATEDX® Grid 300 (ca. 270 g/m<sup>2</sup> incl. Beschichtung, 50 k Carbon (3500 tex)) und Grid 600 (ca. 609 g/m<sup>2</sup> incl. Beschichtung, 50 k Carbon (3500 tex)) [29]. Beim Glasfasergelege handelt es sich um ein alkalibeständig beschichtetes E-Glas-Gelege (Plastoform Panzer) mit einem Flächengewicht von ca. 540 g/m<sup>2</sup> incl. Beschichtung [30].



a)

b)

Abb. 5-2: Verwendete textile Bewehrung: SIGRATEDX® Grid 600 (a) und Plastoform Panzer (b)

Die Carbonfasern ermöglichen aufgrund ihrer hohen Filamentzugfestigkeit den Einbau der Bewehrung in dünnen Deckschichten und eignen sich daher besonders gut für gewichtsminimierte Bauteile. Die textilen Bewehrungen weisen jedoch im Vergleich zu Bewehrungsstahl, dessen Querschnitt und Steifigkeit aufgrund plastischen Umlagerungsvermögens voll ausgenutzt werden können, Nachteile auf. So lässt sich die Filamentzugfestigkeit bei den untersuchten Carbongelegen von 4.000 N/mm<sup>2</sup> nur zu ca. 40 % ausnutzen, was im Bereich der Herstellerangaben mit  $\sigma_{\text{tex}} = 1.671 \text{ N/mm}^2$  liegt [29]. Auf die Hintergründe des Unterschieds zwischen der reinen Filamentzugfestigkeit und der Zugfestigkeit des im Beton eingebetteten Geleges soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden und es wird auf die Literatur (z.B. [13]) verwiesen. Der Elastizitätsmodul von Glasfasern liegt bei 74.000 - 80.000 N/mm<sup>2</sup> und damit um den Faktor 3 niedriger als der von Stahl. Tabelle 5-1 zeigt eine Übersicht über die durchgeführten skalierten Bauteilversuche mit dem Versuchsaufbau nach Abb. 5-1. Die Versuchsserien SV3 und SV4 besitzen einen gradierten Aufbau und eine textile Glasfaserbewehrung, die Versuche SV10.1 und SV10.2 einen gradierten Aufbau mit Betonstahl. Die Versuche SV10.3 und SV10.4 bestehen aus

einem Vollquerschnitt aus dem Deckschichtbeton mit Betonstahl und dienen als Vergleichsbasis.

Tabelle 5-1: Ergebnisse der skalierten Versuche mit Biegezugversagen

Versuchsserie	SV3 – SV4	SV10.1 – SV10.2	SV10.3 – SV10.4
Anzahl [Stück]	je 4	je 1	je 1
Gradierung DM/KM1/KM2	RA/G02LM/KLM	RA/G05L/KLM	RA/RA/RA
Bauteilgewicht [kg]	11,2	20,4	27,6
∅ Massenersparnis [%]	59	26	-
Bewehrung	E-Glas	Stabstahl	Stabstahl
∅ Textilbruchspannung $\sigma_{tex}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	451	-	-
Bewehrungsfläche $A_s$ [mm <sup>2</sup> ]	19,2	28,00	28,00
Längsbewehrungsgrad $\rho_l$ [%]	0,20	0,29	0,29
Moment aus Skalierung [kNm]	0,89	1,14	1,14
∅ Prüflast [kN]	8,5	12,8	12,9
Prüfmoment $M_u$ [kNm]	1,06	1,60	1,61
rechn. Biegebruchmoment $M_{flex}$ [kNm]	1,03	1,37	1,47
$\beta_{flex} = M_u/M_{flex}$	1,03	1,17	1,10
Versagensart	Biegezug	Biegezug	Biegezug

Alle Bauteile erreichten den Bemessungswert der Biegetragfähigkeit und wiesen Biegezugversagen auf. Die errechneten Momente aus der Skalierung nach Abschnitt 5.1 werden von allen Bauteilen erreicht, so dass im Rückschluss auch die erforderliche Biegetragfähigkeit in der Hauptausführung erfüllt wäre.

Abb. 5-3 zeigt die Durchbiegungen der Einfeldträger in Feldmitte in Abhängigkeit von der im Versuch aufgebrauchten Prüflast.

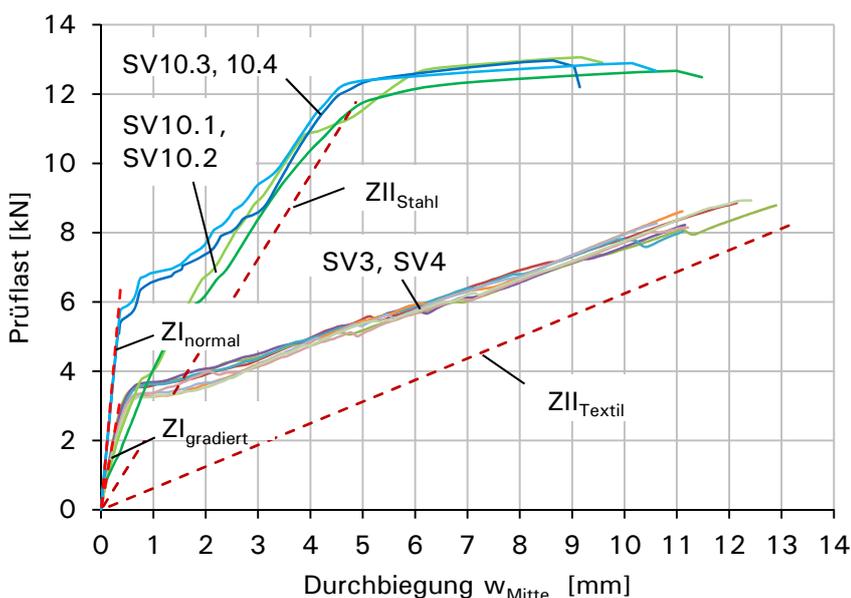


Abb. 5-3: Kraft-Durchbiegungs-Linien der Serien SV3, SV4 und SV10

Während die mit Stahl bewehrte Versuchsserie SV10 bei großer Verformungszunahme die Prüflast nach Erreichen der Fließgrenze der Bewehrung noch leicht steigern kann, ist in den Versuchsserien SV3 und SV4 die Bruchkraft mit Erreichen der Textilbruchspannung erreicht. Ein Fließen der textilen Bewehrung ist nicht möglich, es kommt zu einem spröden Bauteilversagen.

Die Steifigkeit im Zustand I der gradierten Betonbauteile  $Z_{I\text{gradiert}}$  lässt sich gut am idealisierten Doppel-T-Querschnitt errechnen. Das Rissmoment des Querschnitts ergibt sich aus den Querschnittsabmessungen und der mittleren einaxialen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  der Deckschichtmischung. Die Menge und Art der Bewehrung hat hierauf keinen Einfluss. Die Steifigkeit und die Erstrisslast des gradierten Querschnitts beträgt ungefähr 50 % des Vollquerschnitts aus Normalbeton  $Z_{I\text{normal}}$ . Die Steifigkeiten im reinen Zustand II  $Z_{II\text{Stahl}}$  und  $Z_{II\text{Textil}}$  hängen maßgeblich von den Faktoren Bewehrungsmenge und Dehnsteifigkeit der Bewehrung ab. Die Höhe der Betondruckzone hat in den untersuchten Beispielen einen geringen Einfluss. Die Kraft-Verformungskurven der gradierten Prüfkörper SV10.1 und SV10.2 treffen sich mit den Kurven SV10.3 und SV10.4 der Normalbetonträger beim Erreichen der Fließgrenze der Bewehrung. Es kommt nur zu geringen Abweichungen der Fließ- und Bruchmomente und der zugehörigen Durchbiegungen bei gleichem Bewehrungsgrad  $\rho_i$ .

Die Unterschiede im Tragverhalten des gradierten Aufbaus im Vergleich zum Vollquerschnitt liegen also in der Steifigkeit im Zustand I und der Höhe des Erstrisses. Hierdurch ergeben sich bei geringerem Lastniveau größere Verformungen. Gleichzeitig wird jedoch das Eigengewicht im Vergleich zum Bauteil aus Normalbeton reduziert.

### 5.1.3 Versuche zum Querkrafttragverhalten

Stahlbetonbauteile ohne Querkraftbewehrung können auf Biegung versagen oder ein Querkraftversagen aufweisen. Ein Querkraftversagen tritt plötzlich auf, die Stahlspannung in der Längsbewehrung kann weit unterhalb der Streckgrenze liegen. Dies wird in dem „Schubtal“ von Kani [31] deutlich, in dem für die geprüften Balken unter Einzellasten das Verhältnis  $\beta_{flex}$  des Moments beim Bruch  $M_u$  zum Biegebruchmoment  $M_{flex}$  in Abhängigkeit von den wesentlichen Parametern  $a/d$  und  $\rho_i$  abgetragen ist (vgl. Abb. 5-4).

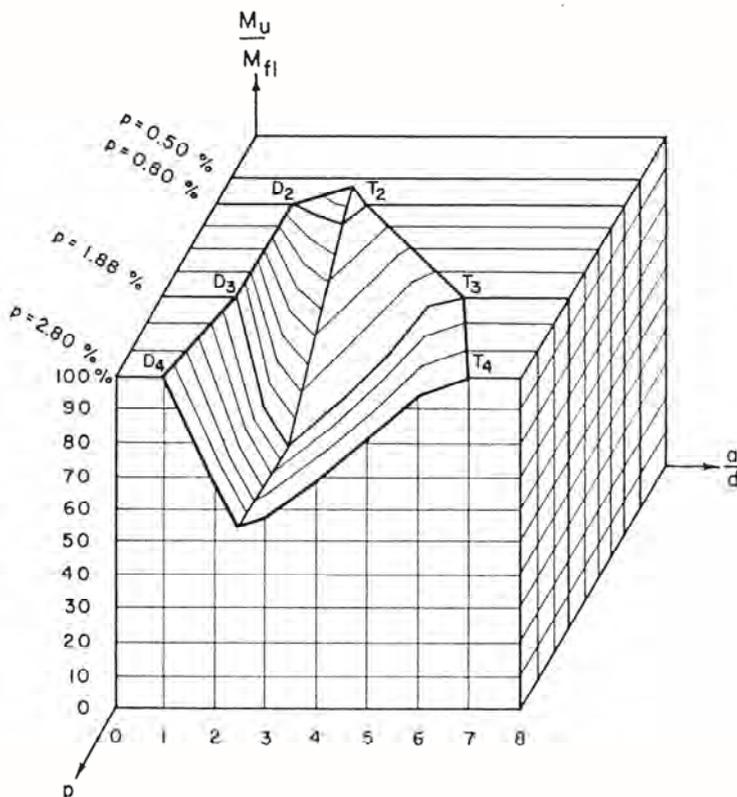


Abb. 5-4: Interaktion von Querkraft- und Biegetragfähigkeit - Schubtal von Kani [31]

Dabei sind:

$$\beta_{flex} = \frac{M_u}{M_{flex}} \quad \beta_{flex} < 1 = \text{Querkraftversagen}; \beta_{flex} \geq 1 = \text{Biegeversagen}$$

$$\frac{a}{d} \quad \text{Schubslankheit} = \text{Abstand Einzellast vom Auflager} / \text{Nutzhöhe}$$

$$\rho_l = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \text{Längsbewehrungsgrad}$$

Ein weiterer wichtiger Parameter ist die Betonzugfestigkeit, die im Allgemeinen indirekt über die Betondruckfestigkeit erfasst wird.

Das Schubtal kennzeichnet den Bereich des vorzeitigen und spröden Versagens der Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken ohne Querkraftbewehrung. Bei der Bemessung wird üblicherweise so vorgegangen, dass zuerst die Längsbewehrung durch eine Biegebemessung ermittelt und dann die Querkrafttragfähigkeit überprüft wird. Bei einem gradierten Bauteil bedeutet dies, das Kernmaterial so zu wählen, dass die Querkrafttragfähigkeit gerade ausreicht. Daher ist die genaue Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit des Bauteils von erheblicher Bedeutung. In ersten Versuchsserien wurde die Abhängigkeit der Querkrafttragfähigkeit von der Schubslankheit und dem Bewehrungsgrad untersucht.

## Versuchsprogramm

Im Versuchsprogramm wurden die Parameter Schubslankheit und Längsbewehrungsgrad variiert. Die Abmessungen der Prüfkörper entsprechen Abb. 5-1 mit nur einer verwendeten Kernschichtmischung für die Bereiche KM1 und KM2. Als Bewehrung dienten Stabstähle BSt 500 mit einem Durchmesser von 6 mm. Je Versuchsserie wurden sechs Prüfkörper hergestellt, die jeweils beidseitig geprüft wurden. Die zweifache Prüfung eines Balkens wurde durch eine eigens entwickelte Stahlmanschette zur Überbrückung der bereits zerstörten Balkenhälfte möglich. Die im zweiten Versuchsdurchgang erreichten Prüflasten mit Manschette lagen, unter Berücksichtigung der Streuung der Versuchsergebnisse, im Größenordnungsbereich der im ersten Versuchsdurchgang ohne Manschette erzielten Prüfergebnisse der Balken. Daher wird gefolgert, dass die Manschette keinen Einfluss auf die erreichte Prüflast hatte. Somit konnten mit 30 Prüfkörpern 60 Prüfergebnisse erzielt werden. Die angegebenen Prüflasten stellen den Mittelwert aus jeweils vier Versuchsergebnissen dar, da jeweils zwei gleiche Balken hergestellt wurden.

In Tabelle 5-2 sind die skalierten Versuche zum Querkrafttragverhalten gradiertter Betonbauteile aufgeführt.

Tabelle 5-2: Übersicht über die skalierten Querkraftversuche an Rechteckbalken

Serie	SV12.3 - SV12.8*			SV13.1 - SV13.6			SV11.1 - SV11.6			SV14.1 - SV14.6			SV15.1 - SV15.6		
Probekörper [Stück]	6			6			6			6			6		
Gradierung DM/KM1/KM2	RA/G02LM			RA/G02LM			RA/G02LM			RA/G02LM			RA/G02LM		
a/d	0,95			1,89			2,84			3,79			4,74		
Bewehrungsgrad $\rho_l$ (%)	0,29	0,60	0,89	0,29	0,60	0,89	0,29	0,60	0,89	0,29	0,60	0,89	0,29	0,60	0,89
Prüflast [kN]	19,5*	21,2*	22,3*	6,2	8,9	13,2	6,60	10,6	10,6	5,8	8,7	9,6	4,9	7,7	8,4
$\eta_{flex} = M_u/M_{flex}$	0,67	0,36	0,26	0,43	0,30	0,31	0,68	0,54	0,37	0,80	0,60	0,45	0,84	0,66	0,49
Versagen	Biegeschub			Biegeschub			Biegeschub			Biegeschub			Biegeschub		

\* Die Prüferserie SV12 wurde mit einer Stahlbewehrung Durchmesser 8 mm ausgeführt. Hierdurch ergaben sich Bewehrungsgrade von 0,53 %, 1,06 % und 1,59 %. Um auch diese Ergebnisse für die Auswertung nutzen zu können, wurden die erreichten Prüflasten im Verhältnis zum Bewehrungsgrad aufgetragen und durch Inter- und Extrapolation für die angegebenen Bewehrungsgrade ermittelt.

## Versuchsergebnisse

Abb. 5-5 zeigt den Verlauf der im Versuch erzielten dimensionslosen Querkrafttragfähigkeit  $u_{Test}$  über die Schubslankheit für drei Bewehrungsgrade. Die Querkrafttragfähigkeit steigt mit zunehmendem Längsbewehrungsgrad erwartungsgemäß an. Das Querkrafttragverhalten der gradierten Balken entspricht dem Verhalten von Normalbetonbalken, welches z.B. von Kani [31] untersucht wurde. Bei sehr auflagernahen Lasten wird ein großer Anteil der Last direkt über eine Druckstrebe ins Auflager abgetragen (Sprengwerk). Bei zunehmender Schubslankheit nimmt dieser Anteil ab, die Querkrafttragfähigkeit sinkt und das Tragverhalten kann mit einem Kamm-

oder Zahnmodell, z.B. nach Reineck [32], beschrieben werden, welches jedoch bisher noch nicht für gradierte Betonbauteile untersucht wurde. Zum Vergleich wurde auch die aus dem rechnerischen Biegebruchmoment ermittelte Querkraft  $U_M$  abgetragen. Alle durchgeführten Versuche stellen Querkraftversagen dar, da alle Versuchsergebnisse deutlich unter den zugehörigen  $U_M$ -Kurven liegen.

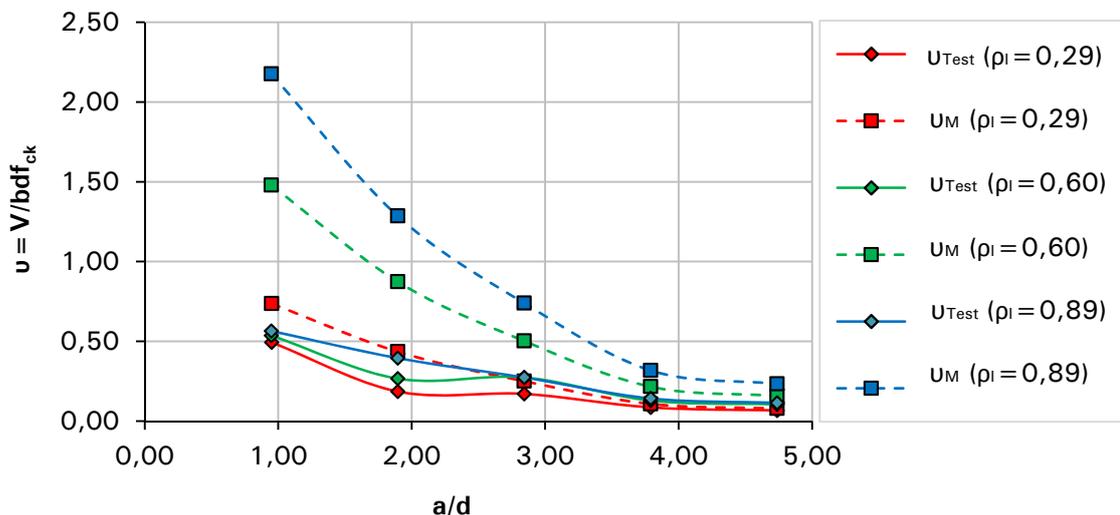


Abb. 5-5: Dimensionsfreie Querkrafttragfähigkeiten - Schubschlankheit für die geprüften Bewehrungsgrade

Dabei ist:

$$u = \frac{V}{(b \cdot d \cdot f_{ck})} \tag{5-1}$$

Abb. 5-6 zeigt die Werte  $\beta_{flex}$  für den untersuchten Bereich des Schubtals von Kani.

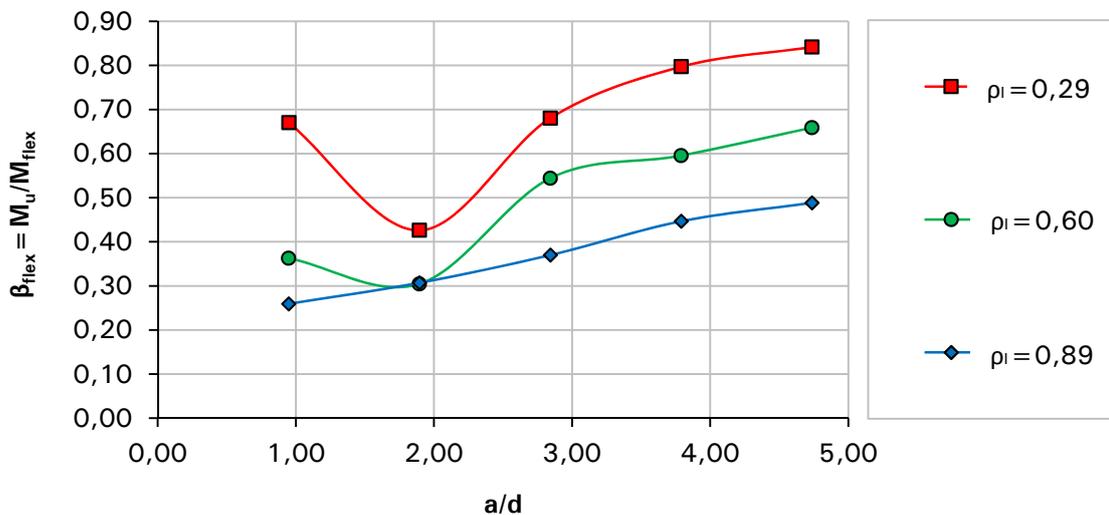


Abb. 5-6: Kani-Diagramm der eigenen Versuche

Im Vergleich zu Abb. 5-4 wurde in den durchgeführten Versuchen ein deutlich geringeres Niveau von  $\beta_{flex}$  für die gewählten Bewehrungsgrade erreicht. Eine Erklärung hierfür liefert der gradierte Aufbau. Während die Querkrafttragfähigkeit mit der Anordnung der leichten und geringer festen Kernmischung deutlich abnimmt, bleibt die Biegetragfähigkeit, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, im Vergleich zum Normalbetonbalken konstant. Je höher der Bewehrungsgrad gewählt wird, desto tiefer ist das Niveau von  $\beta_{flex}$ . Bei geringen Bewehrungsgraden lässt sich eine linke Talhälfte feststellen, welche jedoch mit steigendem Bewehrungsgrad flacher wird und bei der Serie mit  $\rho_l = 0,89$  nicht festgestellt werden konnte. Abb. 5-4 zeigt jedoch ein steileres Ansteigen der linken Talhälfte für steigende Bewehrungsgrade. Daher kann das Schubtal von Kani mit den bisher durchgeführten Versuchen für gradierte Betonbalken nicht bestätigt werden.

Abb. 5-7 zeigt das Verhältnis zwischen Versuchsergebnis  $V_{test}$  und der berechneten Querkrafttragfähigkeit  $V_{pred}$  auf charakteristischem Lastniveau in Abhängigkeit von der Schubschlankheit für die in Absatz 4.3 beschriebenen Nachweise aus EC 2 [20] und DIN EN 1520 [21]. Die Bemessung der Querkrafttragfähigkeit erfolgte unter der Annahme eines homogenen Querschnitts aus Leichtbeton über die gesamte Querschnittshöhe. Hierdurch wird für alle Schubschlankheiten die Querkrafttragfähigkeit auf der sicheren Seite liegend abgeschätzt, da die höherfesten Deckschichten als Leichtbeton mit in die Berechnung eingehen. Alle drei Normansätze liegen über 1,0 und damit auf der sicheren Seite. Alle drei Normansätze berücksichtigen nicht die Schubschlankheit und ergeben für  $a/d < 2,5$  sehr konservative Bemessungswerte.

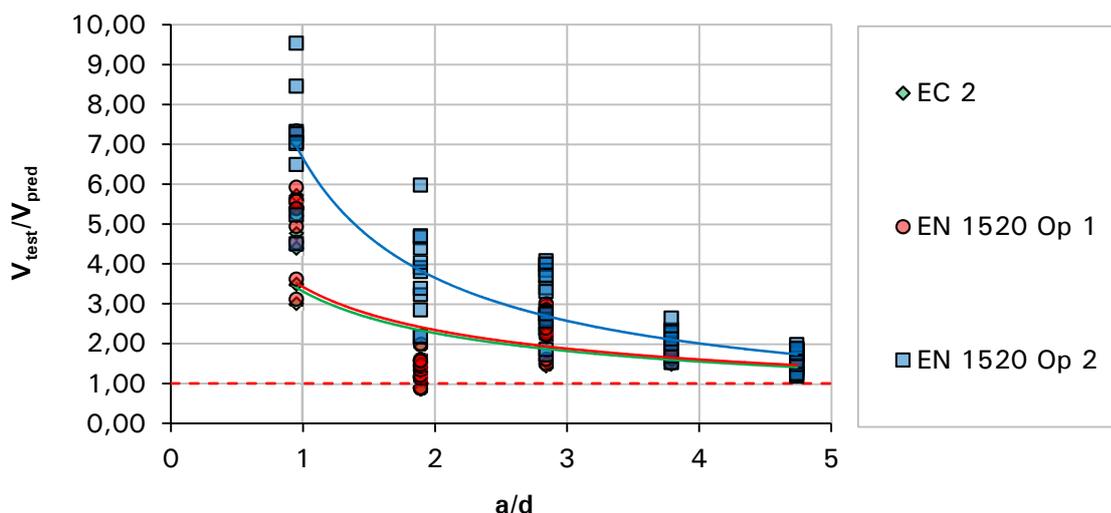


Abb. 5-7: Verhältnis Versuchsergebnis - Bemessungsergebnis für EC 2 und DIN EN 1520

Der Einfluss der Bauteilhöhe wird nach Norm durch den Faktor  $\kappa$  berücksichtigt. Allerdings ist dieser für Bauteilhöhen unterhalb von 200 mm konstant. Die Güte dieses

Ansatzes wird im Heft 597 des DAfStb [33] für Bauteile bis 75 cm untersucht und scheint die Versuche zu treffen.

Bei der Durchführung der Versuche wurden drei Versagensarten festgestellt:

Bei sehr weichen Kernmaterialien kann es zu Stegzugversagen kommen. Hierbei entstehen Stegrisse unabhängig von den Biegerissen und die Zugzone bleibt ungerissen. Die Querkrafttragfähigkeit des Kernbereichs sollte jedoch bei der Dimensionierung stets so gewählt werden, dass Stegzugversagen ausgeschlossen werden kann.

Bei hohen Schlankheiten und nahe am Biegezugversagen findet ein Versagen analog zum Normalbeton mit Bildung mehrerer Biegerisse und Schrägrisse statt. Hieraus entwickelt sich der kritische Schrägriss, der in Höhe der Längsbewehrung auf das Auflager zuschreitet und zu einer Einschnürung der Druckzone führt. Er trennt somit den Zuggurt vom Druckgurt. Abschließend versagt die verbleibende Druckzone unter kombinierter Biege- und Querkraftbeanspruchung und weicht meist nach oben aus.

Bei auflagnaher Lasteinleitung versagt die untere horizontale Fuge zwischen der Deckschicht und der leichten Kernschicht (vgl. Abb. 5-8).

Der Wechsel zwischen den Versagensarten zwei und drei findet bei der gewählten Kernmischung zwischen den Schubslankheiten  $a/d = 2,84$  und  $a/d = 3,79$  statt. Für  $a/d < 2,84$  versagt die Schubfuge bei fortschreitendem Risswachstum. Bei einem Verhältnis von  $a/d > 3,79$  versagt die Druckzone. Beide Versagensarten sind spröde und eine Folge des Wachstums des kritischen Schrägrisses.

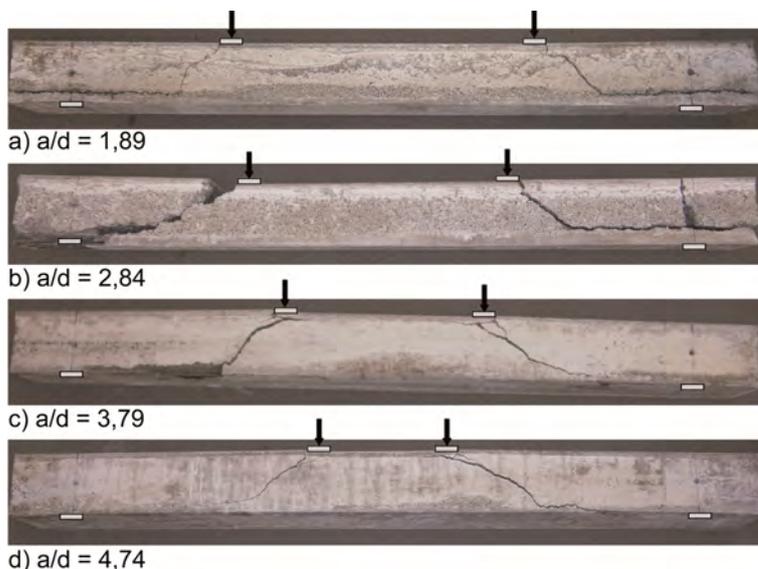


Abb. 5-8: Versagen der Längsfuge (a) und (b), Biegeschubversagen (c) und (d)

## 5.2 Versuche der Hauptausführung

### 5.2.1 Ziele und Auslegung der Versuche

Die Versuche der Hauptausführung werden mit nachfolgenden Zielen ausgeführt. Die Ergebnisse der Hauptausführung sollen die Ergebnisse der skalierten Versuche bestätigen und deren Übertragbarkeit auf den Maßstab 1:1 belegen. Die Ergebnisse der gradierten Bauteile sollen sich direkt mit massiven Bauteilen realen Maßstabs vergleichen lassen. Die Herstellbarkeit gradierten Bauteile im Fertigteilwerk soll überprüft werden. Es soll untersucht werden, ob es zu Detailproblematiken wie dem Delaminieren der Deckschichten kommen kann. Wie bei den skalierten Versuchen werden Bauteile mit Bewehrungsstahl und mit textiler Bewehrung geprüft.

Die in Kapitel 4 aufgeführten Bemessungsprinzipien werden verwendet, um die skalierten Bauteile und die Bauteile in den Hauptausführungen für die Versuche auszuliegen. Im Anhang E wird die Auslegung der Hauptausführung exemplarisch für die Bauteile V2 beschrieben.

Zur Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit einer massiven, einachsigen gespannten Platte werden die Abmessungen der Gradientendecke aus der Vordimensionierung einer Flachdecke hergeleitet. Die konstruktiven Vorgaben des EC 2 wie die Mindestbetondeckungen werden eingehalten. Die Breite des Plattenstreifens wird zur doppelten Bauteilhöhe gewählt, um den einachsigen Lastabtrag einer Platte sicher abzubilden. Nach DIN 1045-1:2008 ergibt sich auf Grundlage eines empirischen Ansatzes folgende Grenzschlankheit für ein Bauteil mit einer Spannweite von fünf Metern und mit erhöhten Anforderungen an die Begrenzung der Durchbiegung ( $f/l_i = 1/500$ ):

$$\frac{l_i}{d} \leq \frac{150}{l_i} \text{ mit } l_i = \alpha \cdot l_{eff} \rightarrow d = 0,167 \text{ m} \quad (5-2)$$

$$h = d + c_{nom} + \frac{d_s}{2} = 0,17 + 0,02 + 0,005 = 0,20 \text{ m} \quad (5-3)$$

Diese Biegeschlankheit von  $l/d = 30$  lässt sich nach den Vorgaben des EC 2 nicht mehr erreichen. Eine vergleichbare Vordimensionierung nach EC 2 würde eine Schlankheit von  $l/d = 22$  ergeben. Andererseits entspricht dieses Beispiel dem ersten Beispiel der DBV-Beispielsammlung [34], einer einachsigen gespannten Vollplatte im Hochbau mit einer Spannweite von 5 m und einer Bauhöhe von 200 mm bei einer Betongüte C20/25. Daher wird diese Vordimensionierung als adäquat angesehen. In einem zweiten Schritt wird die Spannweite auf die maximal mögliche Spannweite der Prüfeinrichtung reduziert. Die Versuche werden auf dem Nutentisch der MPA Stuttgart mit einer maximalen Spannweite von 4 m und einer maximalen Prüflast von 400 kN durchgeführt.

### 5.2.2 Normative Grundlagen und Randbedingungen der Versuche

Bei Aufnahme der Produktion von Bauteilen aus haufwerksporigem Leichtbeton ist nach DIN EN 1520:2011 ein definiertes Paket an Erstprüfungen zu absolvieren (vgl. Tabelle 5-3). Die Abkürzung FLM steht hierbei für tragende Deckenbauteile.

Tabelle 5-3: Erstprüfprogramm für haufwerksporige Leichtbetonbauteile [21]

Eigenschaft	Arte der Prüfung	Bauteilart <sup>a</sup>									Referenzprüfung/ Überwachung
		Für tragende Zwecke					Für nichttragende Zwecke				
		WLS WLH WLM	WRS	RLS, FLS RLH, FLH RLM, FLM	BLS BLH	PLS	CNS	WNS WNH WNM	BNH	NB	
Rohdichte	LAC <sup>h</sup>	x	x	x	x	x	x	x	x	x	EN 992
Druckfestigkeit	LAC <sup>h</sup>	x	x	x	x	x	x		x	x	EN 1354
Biegezugfestigkeit	LAC <sup>h</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	EN 1521
Elastizitätsmodul	LAC <sup>h</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	EN 1352
Kriechen	LAC <sup>h</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>					EN 1355
Betondeckung der Bewehrung	Bauteil	x	x	x	x	x	x	x	x	x	Physikalische Messung
Korrosionsschutz	Bauteil	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	x <sup>e</sup>	EN 990
Frost-Tau-Widerstand	LAC <sup>h</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>		x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	i
Abmessungen	Bauteil	x	x	x	x	x	x	x	x	x	EN 991
Stahl: –Streckgrenze –Zugfestigkeit	Stahl	x	x	x	x	x	x	x	x	x	EN 10080 EN ISO 6892-1 oder ggf. Überprüfung des Zertifikats (siehe 4.2.2)
Tragwiderstand bei Belastung quer zur Bauteilebene	Bauteil		x	x	x						EN 1356
Tragwiderstand unter vorwiegend in Längsrichtung wirkender Belastung	Bauteil	x				x	x			x	EN 1740
Trocknungsschwinden	LAC <sup>h</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	x <sup>d</sup>	EN 1355, Werte der Schwindprobekörper
Wärmeleitfähigkeit	LAC <sup>h</sup>	x <sup>c</sup>		x <sup>c</sup>	x <sup>c</sup>	x <sup>c</sup>					EN 12664, EN 12 667 oder EN 12939 (EN 992 für die Rohdichte im Falle von λ-Werten aus Tabellen)
Feuerwiderstand	Bauteil	x	X	x	x	x	x	x		X	EN 1364-1 EN 1365-1 EN 1365-2 EN 1365-3 EN 1365-4
Brandverhalten	Bauteil	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	x <sup>f</sup>	EN ISO 1182 EN ISO 1716
Luftschalldämmung	Bauteil	x <sup>b</sup>		x <sup>b</sup>			x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>		x <sup>b</sup>	EN 1793-2 <sup>g</sup> EN ISO 140-3 EN ISO 717-1 EN 12354-1
Trittschalldämmung	Bauteil			x <sup>b</sup>							EN ISO 140-6 EN ISO 717-2 EN 12354-2
Schallabsorptionskoeffizient	Bauteil	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>		x <sup>b</sup>	EN 1793-1 <sup>g</sup> EN ISO 354
Fugentragwiderstand	Bauteil	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	x <sup>b</sup>	EN 1739 EN 1741
Scherfestigkeit zwischen den Schichten mehrschichtiger Bauteile	LAC <sup>h</sup>	x <sup>h</sup>	x <sup>h</sup>	x							EN 1742

<sup>a</sup> Bauteilart: Benennung nach Tabelle 10.  
<sup>b</sup> Nur wenn bei der Bemessung auf der Grundlage eines deklarierten Wertes verwendet, der aus Messungen abgeleitet wurde.  
<sup>c</sup> Nicht erforderlich, wenn die Werte für die Wärmeleitfähigkeit aus anerkannten Tabellen entnommen werden.  
<sup>d</sup> Nicht erforderlich, wenn das Trocknungsschwinden nach dem 1. Satz in 4.2.9 zu 0,75 mm/m angenommen wird.  
<sup>e</sup> Nur erforderlich für ein Bauteil mit tragender Bewehrung, bei dem die Bewehrung in LAC eingebettet ist.  
<sup>f</sup> Eine Prüfung zur Ermittlung des Brandverhaltens ist nur erforderlich, wenn der Gehalt an organischen Bestandteilen 1% in Massenanteilen oder Volumenanteilen übersteigt. (Der höhere Wert ist maßgebend.)  
<sup>g</sup> Nur für Lärmschutzeinrichtungen an Straßen.  
<sup>h</sup> Wenn dasselbe Material für verschiedene Bauteiltypen verwendet wird, braucht das Material nur bei einem Bauteiltyp geprüft zu werden.  
<sup>i</sup> Nach dem an der Verwendungsstelle der Bauteile gültigen Prüfverfahren.

Zur Bestimmung der tragstrukturellen Eigenschaften für biegebeanspruchte Bauteile wie Decken oder Balken ist ein wichtiger Punkt die Ermittlung des Tragwiderstands bei Belastung quer zur Bauteilebene. Daher orientieren sich die durchgeführten Versuche an den Vorgaben der DIN EN 1356:1997-02 „Bestimmung des Tragverhaltens von vorgefertigten bewehrten Bauteilen aus dampfgehärtetem Porenbeton oder aus haufwerksporigem Leichtbeton unter quer zur Bauteilebene wirkender Belastung“ [35]. Begleitend werden an Kontrollprismen die Festbetoneigenschaften geprüft.

### 5.2.3 Versuchsaufbau und Prüfablauf

Der Probekörper wird so ausgewählt, dass er repräsentativ für das zu untersuchende Produkt ist. Die Temperatur darf zwischen  $+5\text{ °C}$  und  $+40\text{ °C}$  liegen. Die Richttemperatur ist  $+20\text{ °C}$ , Abweichungen von mehr als 5 K sind im Prüfbericht vermerkt. Die Belastung erfolgt durch zwei über die Querschnittsbreite konstant verteilte Einzellasten bis zum Versagen. Die Breite der Lasteinleitung beträgt 120 mm und die hierdurch entstehende örtliche Pressung darf nicht mehr als 80 % der Druckfestigkeit des Betons betragen. Die Einzellasten werden normalerweise in den äußeren Viertelpunkten eingeleitet. Aufgrund der Skalierung von 5 m auf 4 m Spannweite entspricht hier der Abstand zum Auflager  $1,25\text{ m} = 0,25 \times 5\text{ m}$ .

Die Last wird weggesteuert, kontinuierlich und stoßfrei aufgebracht. Die Kraft darf mit einer Fehlergrenze von bis zu 3 % gemessen werden. Die Durchbiegungen des Bauteils unter den Einzellasten werden jeweils auf beiden Seiten des Bauteils in Feldmitte, auf der Belastungslinie für Querkraftversagen und am Auflager auf der linken Hälfte des Bauteils mit einer Genauigkeit von mind. 0,1 mm bestimmt (vgl. Abb. 5-10). Vor Beginn der Prüfung wird die durch das Eigengewicht des Bauteils verursachte Durchbiegung in Feldmitte auf 0,5 mm genau bestimmt. Das Eigengewicht des Bauteils wird auf 3 % genau mit einer Wägevorrückung am Kran gewogen und/oder rechnerisch aus den Begleitprüfkörpern bestimmt.

Die Belastung wird bis zur Bemessungslast in vier Stufen aufgebracht, wobei jede Belastungsstufe innerhalb von 30 s erreicht sein sollte. Jede dieser Belastungsstufen wird dann zwischen 30 s und 2 min konstant gehalten. Nach Erreichen der Bemessungslast wird das Bauteil in weiteren 5 bis 15 min zum Bruch gefahren. Die Belastungsgeschwindigkeit wird zu 3 mm/min gewählt.

Nach [35] müssen für jedes Bauteil die nachfolgenden Versuchsdaten bestimmt werden: die Durchbiegung und größte Rissbreite bei der vorgegebenen Belastung, die Erstrisslast, die Bruchlast (Grenzzustand der Tragfähigkeit), die bleibende Durchbiegung nach Wegnahme der Belastung und das Last-Verformungs-Diagramm. Nach erfolgter Belastungsprüfung wird die Bruchstelle und die Art des Bruches dokumentiert. Abb. 5-9 zeigt ein zu erwartendes Last-Verformungs-Diagramm für einen weg-

gesteuerten Vierpunkt-Biegeversuch ohne Anhalten an den Belastungsstufen. Hierbei ist der linear elastische Bereich (Zustand I) mit der Steifigkeit  $EI'$  bis zum ersten Riss dargestellt. Mit Einsetzen der Biegerisse geht der Querschnitt in den Zustand II über. Das innere Moment wird durch ein Kräftepaar bestehend aus Stahlzugkraft und Betondruckkraft abgetragen. Die Steifigkeit sinkt deutlich ab. Mit zunehmendem Risswachstum schnürt sich die Betondruckzone immer weiter ein und es kommt zu plastischen Verformungen des auf Druck beanspruchten Betons. Wird das Fließen des Betonstahls erreicht, kann die Last nur noch durch eine weitere Einschnürung der Betondruckzone gesteigert werden. Das Kräftepaar kann aufgrund des Erreichens der Streckgrenze des Stahls auch bei zunehmender Dehnung nicht weiter gesteigert werden. Das Bauteil versagt entweder mit dem Erreichen der Betonbruchdehnung oder dem Erreichen der Stahlzugdehnung.

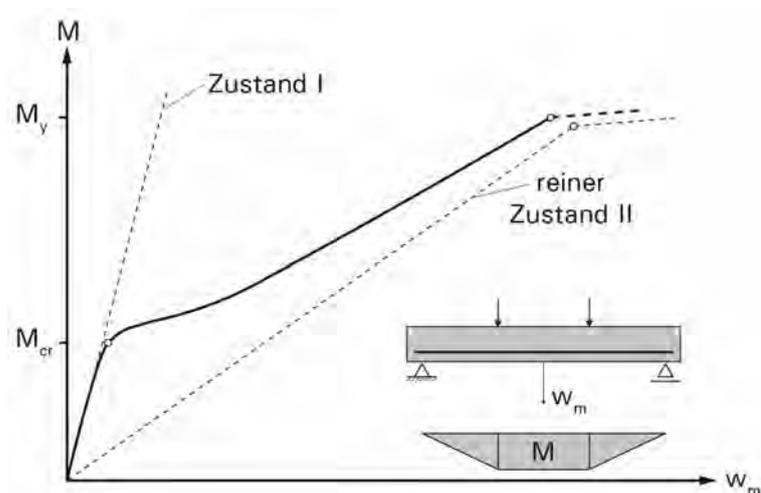
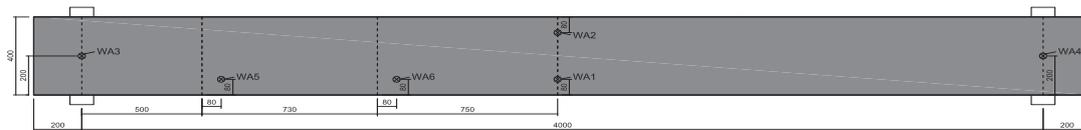


Abb. 5-9: Last-Verformungs-Diagramm für einen Vierpunkt-Biegeversuch [26]

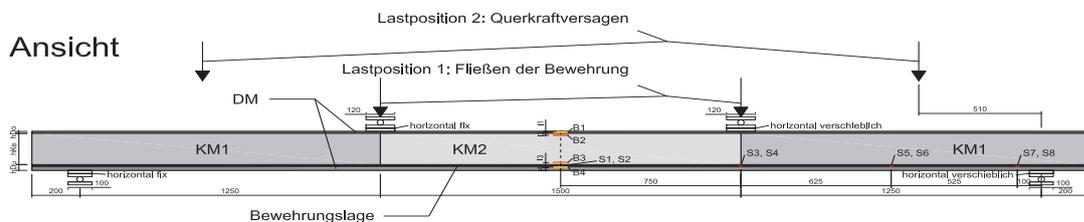
Zur Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit des Bauteils wird bei Erreichen der Fließgrenze des Stahls das Bauteil entlastet und die Lasteinleitung auf den Abstand  $3d = 500 \text{ mm}$  zu den Auflagern verschoben, so dass bei erneuter Belastung Querkraftversagen eintritt. Das Erreichen der Fließgrenze wird mit Dehnmessstreifen am Betonstahl in Feldmitte bestimmt.

Abb. 5-10 zeigt den Versuchsaufbau mit den Messstellen in Aufsicht und Ansicht sowie den zwei Belastungssituationen für das Fließen der Bewehrung und das anschließende Querkraftversagen. Die Traverse zur Belastung in den Lasteinleitungspunkten besteht aus zwei U160-Profilen und besitzt ein Eigengewicht von  $1,4 \text{ kN}$ . Die gelenkigen Lager besitzen jeweils ein Eigengewicht von  $0,4 \text{ kN}$ . Von den vier gelenkigen Lagern sind die linken horizontal fix, indem eine Kartonzwischenschicht zwischen zwei Stahlplatten eingebaut wird, die rechten Lager sind horizontal verschieblich mit einer gefetteten Teflonschicht aufgebaut.

## Aufsicht



## Ansicht



Meßstellen  
 B1-B4 DMS auf Betonoberfläche Typ PL-60-11 von TML  
 S1-S8 DMS an jeweils 2 Stäben Typ FLA 6-11-3L von TML  
 WA1-WA6 Induktive Wegaufnehmer Typ WA/100MM-T von HBM

Abb. 5-10: Prüfaufbau der Hauptausführung (Abmessungen in mm)

## 5.2.4 Versuchsserien und Ergebnisse

Es wurden zwei zeitlich versetzte Prüfserien durchgeführt. Die erste Prüfserie (V0.1 und V0.2) wurde beim Kooperationspartner Wochner im Fertigteilwerk im Schichtenverfahren mit dem Ziel möglichst leichter betonstahlbewehrter Bauteile hergestellt. Die zweite Prüfserie (V1.1-V4.1) bestand aus insgesamt sieben Bauteilen, die selbsttätig an der MPA Stuttgart gefertigt wurden. Bei diesen Bauteilen wurden die Erkenntnisse aus der ersten Prüfserie genutzt. Die Prüfserie 2 untergliedert sich in vier verschiedene Bauteilaufbauten. Die Bauteile V1.1-V3.2 wurden in einem Schichtenverfahren hergestellt, das Bauteil V4.1 in einem Gradientenspritzverfahren. Die Prüfkörper V1.1 und V1.2 sind textil bewehrt und bestehen im Querkraftbereich KM1 aus einer Kernmischung mit erhöhter Festigkeit. Mit diesen Prüfkörpern wurde ein Biegebruchversagen geprüft. Die Prüfkörper V2.1 und V2.2 sind mit Betonstahl bewehrt und so ausgelegt, dass sie alle Anforderungen an Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit erfüllen. Die Prüfkörper V3.1 und V3.2 sind textil bewehrt und mit einer möglichst leichten Kernschicht ausgeführt. Ziel dieser Serie war, Bauteile herzustellen, die möglichst leicht sind und die Anforderungen an die Tragfähigkeit erfüllen. Der Prüfkörper V4.1 ist das erste gespritzte Bauteil und wurde textil bewehrt. In Tabelle 5-4 sind alle Prüfkörper beschrieben.

Tabelle 5-4: Übersicht über die Prüfergebnisse der Hauptausführung im Vergleich zur Bauteilauslegung

Prüfserie	Serie 1				Serie 2				
	V0.1	V0.2	V1.1	V1.2	V2.1	V2.2	V3.1	V3.2	V4.1
Prüfkörper	RA/G02LM/KLM		RA/G05/KLM		RA/G05/KLM		RA/G02LM/KLM		RA/0,5RA + 0,5KLM/KLM
geprüfte Betondruckfestigkeiten $f_{ck}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	55,5/2,3/1,5		vgl. Anhang F.3		vgl. Anhang F.4		vgl. Anhang F.5		vgl. Anhang F.6
Schichtenaufbau $h_{Du}/h_{Ke}/h_{Do}$ [mm]	30/160/10		10/180/10		40/140/20		10/180/10		10/180/10
Vorschädigungen (vgl. Anhang F)	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja	ja
Bauteilmasse gewogen [kg]	310 (berechnet)		472	460	537	547	342	351	554
Massenersparnis [%]*	59		42	43	34	32	58	57	32
Bewehrung	Stabstahl 7Ø6 BSt 500		27 Rovings à 1,83 mm <sup>2</sup> (Sigratex 600)		Stabstahl 4Ø8 BSt 500		27 Rovings à 1,83 mm <sup>2</sup> (Sigratex 600)		37 Rovings à 1,83 mm <sup>2</sup> (Sigratex 600)
$\sigma$ Textilbruchspannung $\sigma_{tex}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	-		1645		-		1645		1645
Bewehrungsfläche $A_s$ [mm <sup>2</sup> ]	198,0		49,4		201,0		49,4		67,7
Längsbewehrungsgrad $\rho_l$ [%]	0,28		-		0,30		-		-
berechnetes Biegebruchmoment $M_{flex}$ [kNm]	17,2		15,4		17,3		15,4		21,0
Eigengewicht + Lager + Traverse [kN]	2,1 + 0,8 + 1,4		2,8 + 0,8 + 1,4		3,4 + 0,8 + 1,4		2,3 + 0,8		3,4 + 0,8
Prüflast Lastposition 1 + Auflast [kN]	4,3	5,3+4,3	14,5+5,0	13,4+5,0	21,5+5,6	22,2+5,6	6,4+3,1	8,9+3,1	23,2 + 4,2
Prüfmoment $M_u$ [kNm]	2,7	6,0	12,2	-**	16,9	17,4	5,9	7,5	17,1
$\beta_{flex} = M_u/M_{flex}$	0,16	0,35	0,79	-**	0,98	1,01	0,38	0,49	0,82
berechnete Querkrafttragfähigkeit $V_{pred EC2}$ [kN]	17,5	17,5	29,4	29,4	28,9	28,9	17,2	17,2	-
Prüflast Lastposition 2 [kN]**	-	-	-	30,0**	61,5	60,7	-	-	-
Prüfquerkraft $V_{test}$ [kN]	-	-	-	15,0**	30,8***	30,4***	4,8	6,0	-
$V_{test}/V_{pred}$	-	-	-	-	1,07****	1,05****	0,28	0,35	-
Versagensart	untere Längsfuge		Biegezug	-	Biegezug	Biegezug	Biegeschub	Biegeschub	Biegezug

\* Referenzmasse Normalbeton: 44 dm x 4 dm x 2 dm x 2,3 kg/dm<sup>3</sup> = 810 kg

\*\* Ohne Bruch abgebrochen, da möglicher Verfahrweg zu kurz

\*\*\* Eigengewicht und Auflast durch Traverse und Lager nicht berücksichtigt

\*\*\*\* Kein Querkraftversagen, sondern erneutes Fließen der Längsbewehrung

Abb. 5-11 zeigt den eingebauten Prüfkörper VO.2 mit den induktiven Wegaufnehmern, die von oben auf die Bauteiloberfläche aufsetzen.



Abb. 5-11: Prüfaufbau der Hauptausführung auf dem Nutentisch der MPA Stuttgart

Während bei den skalierten Versuchen das Eigengewicht vernachlässigt wurde (z.B. SV10.1 und SV10.2: Prüflast 12,8 kN, Eigengewicht 0,2 kN, Anteil Eigengewicht  $< 2\%$ ), muss bei den Versuchen der Hauptausführung das Eigengewicht berücksichtigt werden. Dies geschieht durch eine Rückrechnung über das einwirkende Moment. Bei den Prüfkörpern V2.1 und V2.2 beträgt das Eigengewicht ca. 5,4 kN (vgl. Tabelle 5-4). Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Rohdichtenverteilung im Bauteil ein einwirkendes Moment von 2,14 kNm. Eine Prüflast von 3,4 kN in der Lastposition 1 würde ein einwirkendes Moment derselben Größenordnung erzeugen. Daher werden auf die im Versuch erzielte Prüflast 3,4 kN als Substitution für das Eigengewicht addiert. Die Verformung unter Eigengewicht wird aus der geprüften Steifigkeit im Zustand I extrapoliert.

In Abb. 5-12 a) sind die Rohmessdaten in einem Diagrammausschnitt der Prüfkraft über die Feldmittendurchbiegung der Versuche V3.1, V3.2 und V4.1 dargestellt. In dieser Darstellung hat die Verformung unter Eigengewicht bereits stattgefunden. Die Verformungsmessung begann, bevor die Lager für die Lasteinleitung auf der Balkenoberseite aufgelegt wurden. Das Auflegen der beiden Lager mit zusammen 0,8 kN ist im Diagramm als anfängliche Zunahme der Feldmittendurchbiegung ohne Laststeigerung zu erkennen. Bei den Versuchen VO.1 bis V2.2 wurde die Traverse zur Lastaufbringung vor Beginn der Messung aufgelegt. Bei den Prüfkörpern V3.1, V3.2 und V4.1 war die Traverse an der Prüfmaschine befestigt, um die Risslast aufzeichnen zu können. Die Risslast liegt bei den Prüfkörpern mit 10 mm unterer Deckschicht in der Höhe des Belastungszustands durch Eigengewicht und Lasteinleitungs-konstruktion. Die Traverse liegt bei ca. 1,4 kN im Diagramm auf dem Prüfkörper auf. Anschließend erfolgt eine kurze Belastungspause, da zur weiteren Laststeigerung

der Hydraulikkolben das Spiel zwischen Kolben und Traverse überwinden muss. In dieser Phase kommt es bei den Versuchskörpern V3.1 und V3.2 zu einer Zunahme der Verformungen ohne Steigerung der Last, da die Risslast erreicht ist. Der Prüfkörper V4.1 zeigt kein horizontales Plateau, da die Rissbildung und damit der Übergang in den Zustand II erst bei einer höheren Prüflast stattfindet.

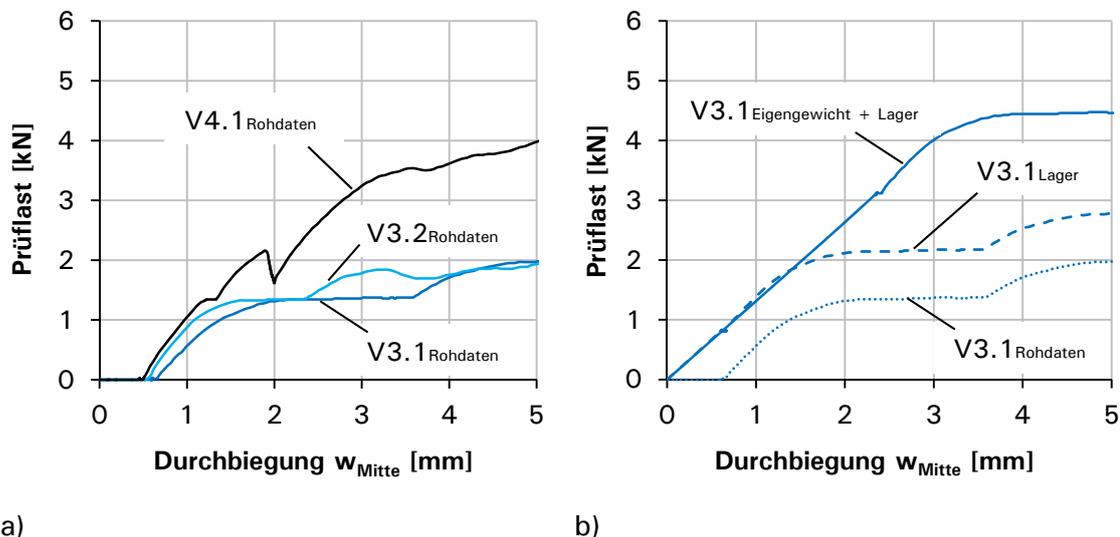


Abb. 5-12: Prüflast zur Feldmittendurchbiegung der textil bewehrten Versuche ohne Berücksichtigung des Eigengewichts der Lasteinleitungs-konstruktion (a) Ergänzung der Rohmessdaten um Eigengewicht und Lasteinleitungs-konstruktion (b)

In den nachfolgenden Diagrammen der Versuche wurden die in den Rohdaten nicht aufgezeichneten Anteile aus Eigengewicht der Prüfkörper und der Lasteinleitungs-konstruktion nachträglich ergänzt, um einen besseren Vergleich zu den Auslegungsergebnissen und der nachfolgenden Simulation zu haben. Dies ist exemplarisch für den Versuch V3.1 in Abb. 5-12 b) dargestellt. In einem ersten Schritt wird das Eigengewicht der Stahlager mit 0,8 kN zur Lasteinleitung ergänzt, in einem zweiten Schritt wird das substituierte Eigengewicht ergänzt und die Verformung im Zustand I extrapoliert.

### Versuchsergebnisse der Prüfsrie 2

Die Bauteile V1.1, V1.2, V2.1, V2.2 und V4.1 versagten wie berechnet auf Biegezug durch Reißen bzw. Fließen der Bewehrung. Bei den mit Stahl bewehrten Bauteilen V2.1 und V2.2 konnte das Prüfmoment beim Fließen der Bewehrung auf 2 % genau berechnet werden.

Die Bauteile V1.1 und V4.1 versagten durch Reißen der textilen Bewehrung unter Biegezug unter der rechten (V1.1) bzw. 35 cm links von der linken Lasteinleitung (V4.1). Bei beiden Versuchen konnte das rechnerische Biegebruchmoment nur zu

ca. 80 % erreicht werden. Da beide Bauteile durch Reißen der textilen Bewehrung in einem Biegeriss versagten, wird nachfolgend untersucht, welche Effekte zu einer Erhöhung der Spannungen in der Textilbewehrung unter dem Auflager führen konnten. Der Versuch V1.2 war der erste Versuch der Prüfserie 2 und musste nach 100 mm Traversenweg in Feldmitte gestoppt werden, da der Träger auf dem Nutentisch aufsaß. Der mögliche Traversenweg wurde für die nachfolgenden Versuche auf 200 mm durch Unterfütterung der Auflager erhöht.

Die Bauteile V3.1 und V3.2 waren im Bereich der maximal einwirkenden Querkraft mit der leichteren und geringer festen Mischung G02LM ausgeführt, was zu einem Querkraftversagen durch ein Ausknicken der eingeschnürten Druckzone führte (vgl. Anhang F). Das Verhältnis der im Versuch erreichten Prüfquerkraft  $V_{\text{test}}$  zur berechneten Querkrafttragfähigkeit nach EC 2  $V_{\text{pred EC2}}$  liegt bei beiden Versuchen zwischen 0,28 und 0,35. Dies bedeutet, dass beide Probekörper weit unter der berechneten Querkrafttragfähigkeit versagten. Da sich das Querkraftversagen bereits in Belastungsposition 1 ereignete, betrug die Schubslankheit  $\lambda$  in diesem Fall 6,4. Die an Begleitprüfkörpern geprüfte Zylinderdruckfestigkeit der Mischung G02LM betrug zwischen 6,8 und 7,2 N/mm<sup>2</sup> und nicht wie für die Bemessung aus Tabelle 3-1 angenommen 8,4 N/mm<sup>2</sup>. Hierdurch ergibt sich eine reduzierte rechnerische Querkrafttragfähigkeit  $V_{\text{pred EC2}}$  von 16 kN, was immer noch deutlich über der Prüflast liegt. Dieses frühzeitige Versagen entspricht nicht den Ergebnissen aus den skalierten Versuchen zur Querkrafttragfähigkeit, bei welchen das Verhältnis  $V_{\text{test}}/V_{\text{pred}}$  stets größer als 1,0 war (vgl. Abb. 5-7). Einen Hinweis auf dieses frühe Versagen könnte das in diesen Versuchen erstmals aufgetretene Ausknicken der oberen Deckschicht geben.

In Abb. 5-13 sind die Durchbiegungen der Prüfkörper in Feldmitte in Abhängigkeit der einwirkenden Prüfkraft zusammenfassend dargestellt.

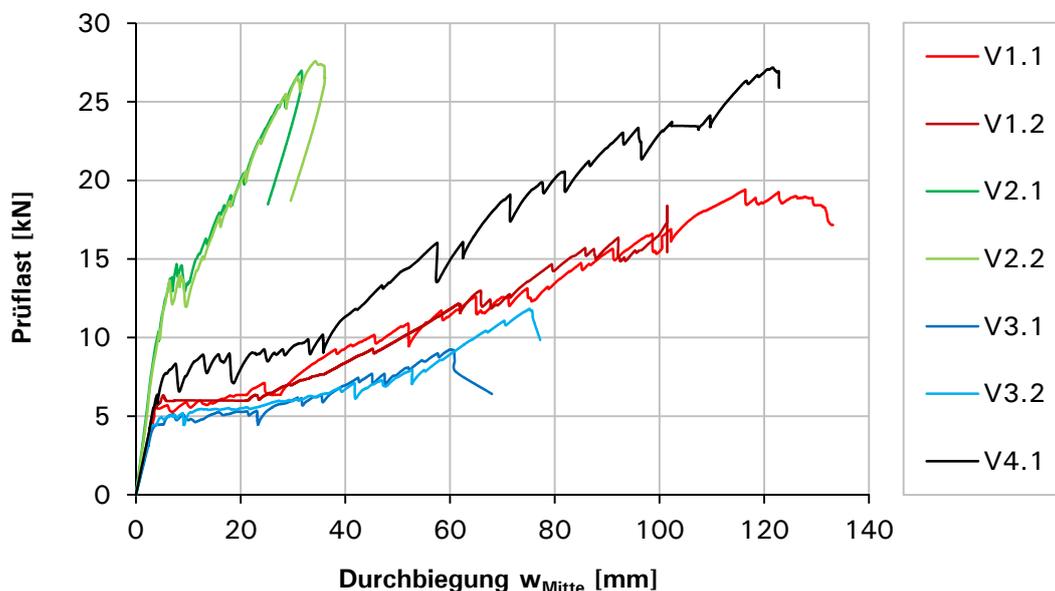


Abb. 5-13: Kraft-Durchbiegungs-Linien der Versuche der Hauptausführung

Der Steifigkeitsunterschied zwischen den stahlbewehrten Versuchen V2 und den übrigen textilbewehrten Versuchen ist sowohl im Zustand I als auch im Zustand II deutlich zu erkennen. Auch die Erstrisslast im Versuch ist bei den stahlbewehrten Bauteilen aufgrund des Unterschieds in der unteren Deckschichtdicke deutlich höher als bei den anderen Prüfkörpern.

Ein Vergleich mit den rechnerischen Steifigkeiten und Risslasten wird nachfolgend getrennt je nach Bewehrung der Bauteile diskutiert. Die Querschnittswerte der Bauteile wurden nach den Berechnungsannahmen in Abschnitt 4.5 ermittelt. Die zugehörigen Durchbiegungen in Feldmitte wurden mit dem Stabwerksrechner StaR unter Annahme bereichsweise konstanter Querschnittswerte errechnet.

Abb. 5-14 zeigt das Kraft-Durchbiegungs-Diagramm in Feldmitte der stahlbewehrten Bauteile im Vergleich zu den rechnerischen Steifigkeiten im Zustand I bis zum Rissmoment  $M_{cr}$  und im reinen Zustand II bis zum Fließmoment  $M_y$ .

Im Zustand I stimmt das rechnerische Rissmoment nach Formel (4-25) gut mit dem im Versuch erreichten Rissmoment überein. Die Zugfestigkeit bei der Berechnung des Rissmoments wird aus der Druckfestigkeit der Deckschichtmischung errechnet. Die rechnerische Steifigkeit im Zustand I wird jedoch deutlich unterschritten, was auf die Vorschädigung der Bauteile mit jeweils drei Biegerissen (vgl. Anhang F) zurückzuführen ist. Die Prüfkurven und die Gerade der rechnerischen Steifigkeit im reinen Zustand II treffen sich in etwa am rechnerischen Punkt des Fließmoments.

Der Abstand zwischen den Versuchen und dem reinen Zustand II kann auf das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen zurückgeführt werden.

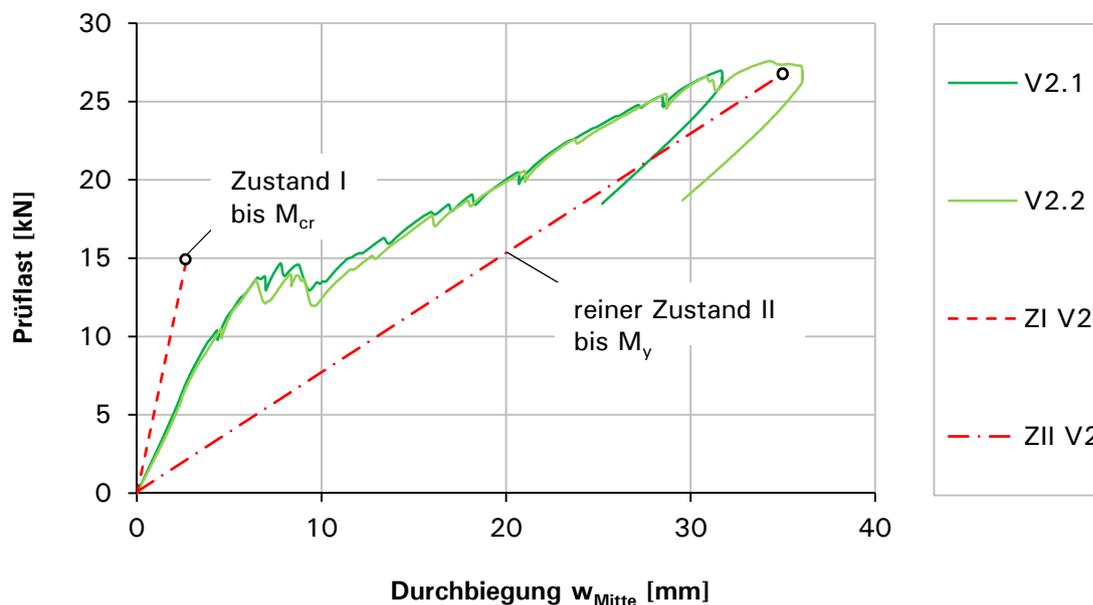
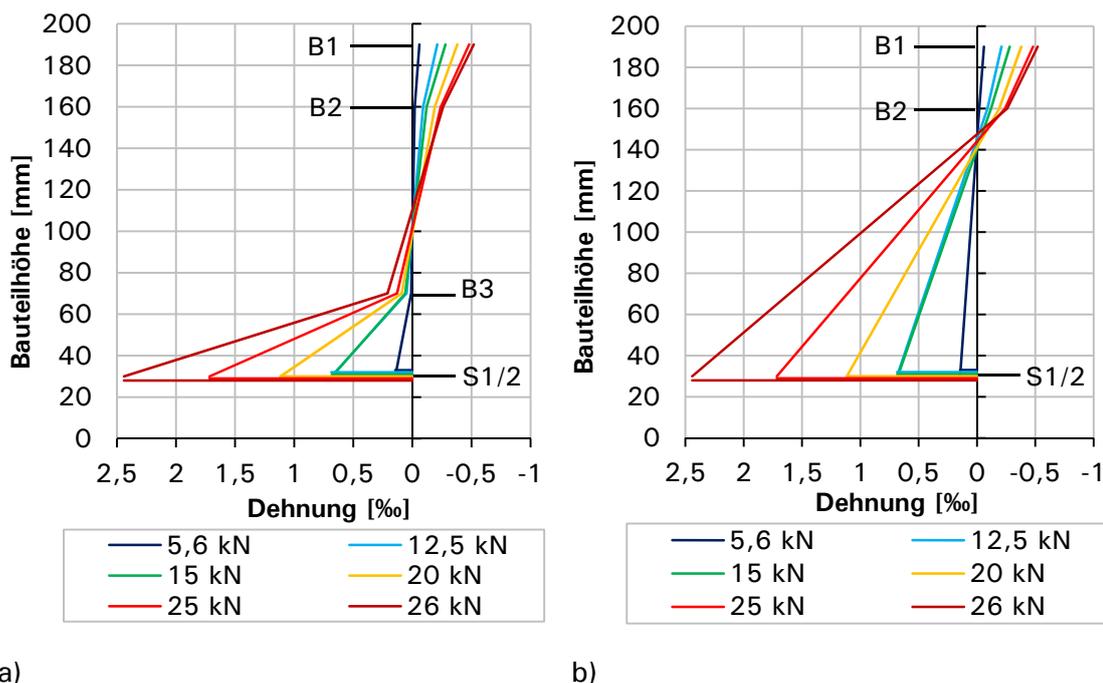


Abb. 5-14: Kraft-Durchbiegungs-Linien der stahlbewehrten Prüfkörper

Abb. 5-15 zeigt für den Prüfkörper V2.1 die gemessenen Betondehnungen B1 bis B3 und die Stahldehnungen S1 und S2 über die Bauteilhöhe in Feldmitte zu charakteristischen Belastungszeitpunkten. Die Betondehnungen B4 der Zugdeckschicht liefern keine verwertbaren Erkenntnisse, da bereits unter Eigengewicht ein Riss in unmittelbarer Nähe des DMS auftritt. Bezieht man die Betondehnungen am gezogenen Rand der Kernschicht B3 mit in die Dehnungsbetrachtung ein (Abb. 5-15 a), so ergibt sich ein nichtlinearer Dehnungsverlauf über den Querschnitt, was der Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte widersprechen würde. Da sich jedoch auf Höhe der Dehnungsmessung B3 schnell Biegerisse einstellen, lokalisieren sich die Dehnungen in den Rissen und die gemessenen Dehnungen fallen kleiner aus als die mittleren Dehnungen. In Abb. 5-15 b) wurden nur die Betonstauchungen B1 und B2 und die Stahldehnungen S1/2 aufgetragen, was zu einem annähernd linearen Dehnungsverlauf über den Querschnitt führt. Erst bei Erreichen der Fließgrenze nehmen die Stahldehnungen überproportional zu. Diese Messergebnisse sprechen für ein Ebenbleiben der Querschnitte und damit die Richtigkeit der getroffenen Bemessungsannahme.



a)

b)

Abb. 5-15: Dehnungsverlauf über die Bauteilhöhe des Prüfkörpers V2.1 in Feldmitte an den Messstellen B1,B2,B3 und S1/2 (a) und an den Messstellen B1,B2 und S1/2 (b)

In Abb. 5-16 ist das Kraft-Durchbiegungs-Diagramm in Feldmitte der textilbewehrten Bauteile dargestellt. Auch bei den textilbewehrten Prüfkörpern waren alle Bauteile bereits durch Biegerisse vorgeschädigt, was den Unterschied zur berechneten Steifigkeit im Zustand I erklärt. Das rechnerische Rissmoment korrespondiert mit einer unteren Deckschichtdicke von 12 mm, welche bei den Bauteilen V1.1, V1.2, V3.1 und V3.2 vorlag (vgl. Anhang F). Bei dem Bauteil V4.1 handelt es sich um den gespritzten Prüfkörper. Das Rissmoment liegt höher, da die untere Deckschichtdicke stärker ausgefallen ist.

Die Steifigkeit im Zustand II hängt maßgeblich von der Bewehrungsmenge und der Dehnsteifigkeit der Bewehrung ab. Bei einer rechnerischen Bruchdehnung von 16 ‰ und einer Textilbruchspannung des Rovings von 1645 N/mm<sup>2</sup> ergibt sich ein effektiver E-Modul von 103.000 N/mm<sup>2</sup> der Kohlefaserbewehrung. Durch die hohe Bruchspannung und die geringe Steifigkeit der Kohlefaserbewehrung zeigt sich im Vergleich zur Stahlbewehrung eine deutlich geringere Bauteilsteifigkeit im Zustand II und es kommt zu großen Verformungen in Feldmitte. Die um 37 % größere Bewehrungsmenge des Bauteils V4.1 zeigt sich in einem proportional steiferen Bauteilverhalten im Zustand II. Weiterhin ist zu erkennen, dass das spröde Bauteilversagen bei den Bauteilen V1.1 und V1.2 bei ca. 80 % der rechnerischen Tragfähigkeit stattfindet. Dies gilt auch für das Bauteil V4.1, dessen rechnerische Bruchkraft bei 33,6 kN liegt. Die verwendete Bewehrung Grid 600 stammt aus zwei Lieferchargen, die nach Angabe des Herstellers SGL die gleichen Eigenschaften haben. Bei Begleitversuchen

an Zugknochen hat sich gezeigt, dass die Textilbruchspannung der ersten Charge im Mittel bei  $1645 \text{ N/mm}^2$  lag, bei der zweiten Charge im Mittel bei  $1305 \text{ N/mm}^2$  (-20%). Die Auslegung der Versuche der Hauptausführung erfolgte mit einer Textilbruchspannung von  $1645 \text{ N/mm}^2$ , es wurde aber das Gelege der zweiten Charge verwendet, was den Unterschied im Traglastniveau erklärt.

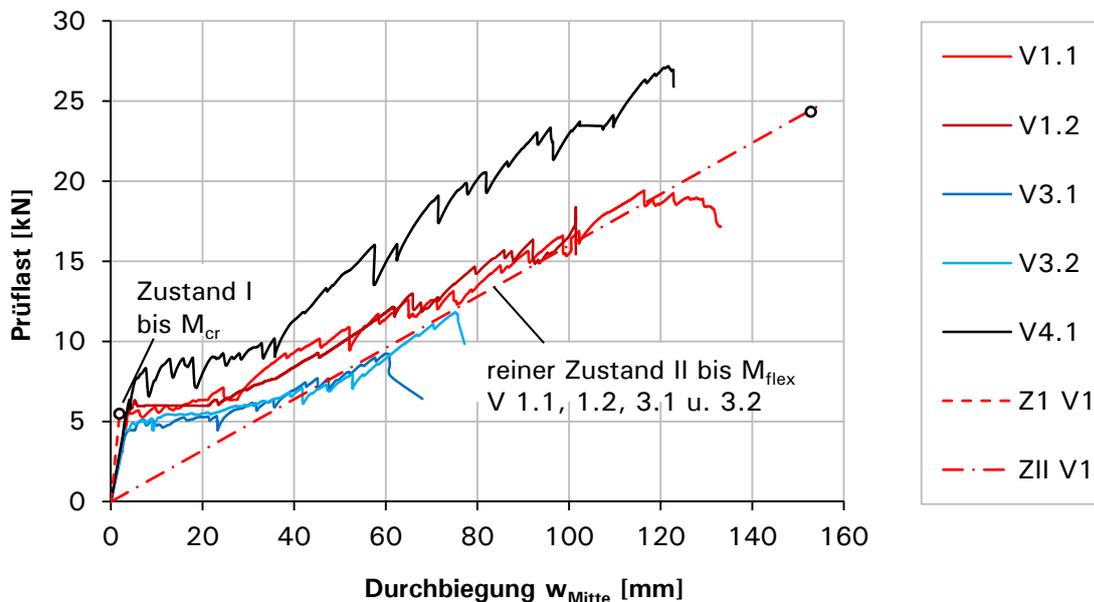


Abb. 5-16: Kraft-Durchbiegungs-Linien der textilbewehrten Prüfkörper

Weiterhin könnte Abb. 5-17 einen zusätzlichen Anhaltspunkt für das geringere Traglastniveau geben. Dargestellt sind die Stahllängsdehnungen der Bewehrungsstäbe im Versuch V2.2, aufgetragen für ausgewählte Prüflastzustände. Zu Beginn des Versuchs sind die Dehnungen in Feldmitte an den DMS S1 und S2 am größten. Bei 8,5 kN liegen die Stahldehnungen an den DMS S3 und S4 unter der Lasteinleitung gleichauf mit S1 und S2. Nachfolgend steigen jedoch die Stahldehnungen S3 und S4 schneller und erreichen bei einer Prüflast von 24,2 kN zuerst die Fließgrenze von 2,5 ‰. Die rechnerische Prüflast wird jedoch erst nach Fließen in Feldmitte erreicht. Dieses Phänomen ist z.B. auch in [36] Fig.3-7] zu erkennen.

Ausgehend von einer ähnlichen Längsdehnungsverteilung in der textilen Bewehrung würde das Bauteil bei Erreichen der Textilbruchdehnung, noch vor Erreichen der rechnerischen Prüflast, unter der Lasteinleitung versagen.

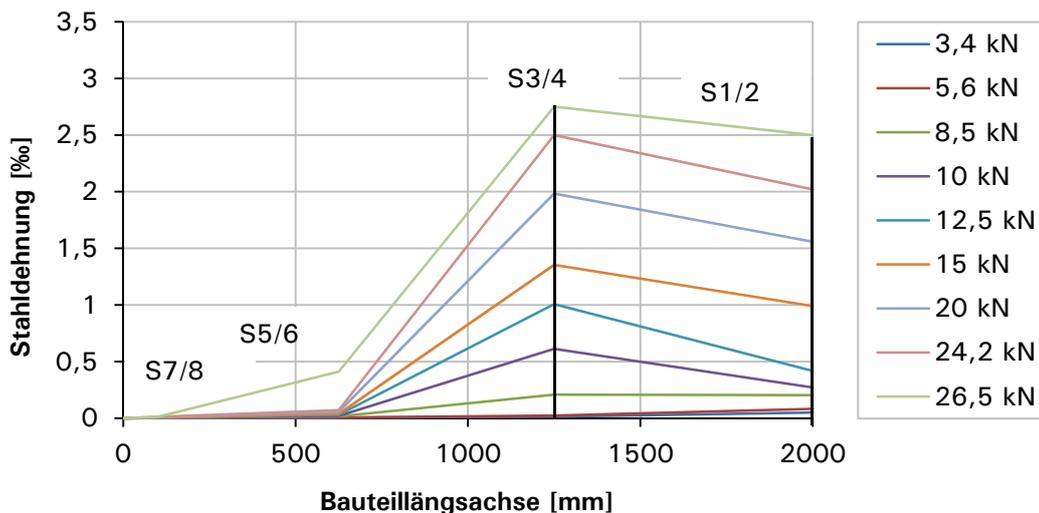


Abb. 5-17: Stahllängsdehnungen entlang der Bauteillängsachse im Versuch V2.2

### Versuchsergebnisse der Prüfsreihe 1

Die Bauteile V0.1 und V0.2 der Prüfsreihe 1 versagten deutlich unter dem berechneten Biegebruchmoment in der Verbundfuge, die zum Zeitpunkt der Prüfung stark vorgeschädigt war.

Die beim Kooperationspartner Wochner gefertigten Bauteile wurden zwei Tage vor der Prüfung angeliefert und in der Versuchshalle akklimatisiert. Bereits beim Ausschalen zeigten sich Vorschädigungen. Die Fertigung der Bauteile und die bestehenden Vorschädigungen der Prüfsreihe 1 sind im Anhang F.2 dargestellt. Deutlich zu erkennen sind die horizontalen Trennrisse, die sich von außen kommend über den gesamten Bereich des äußeren Kerns zwischen der unteren Deckschicht und der Kernschicht erstrecken. Diese horizontalen Risse können auf unterschiedliche Schwinddehnungen und geringere erreichte Betonfestigkeiten zurückgeführt werden. Die zweite Vorschädigung, die vertikalen Risse zwischen den beiden Kernschichten, welche sich auch durch die obere Deckschicht ziehen, sind zum einen auf den Verzicht einer Bewehrung in der Druckzone zurückzuführen. Zum anderen kam es durch verschiedene Bauzustände bei der Fertigung und beim anschließenden Transport – die Druckzone wurde zuerst gefertigt, das Bauteil also auf dem Kopf betoniert – zu Zugbelastungen der Druckzone beim Drehen des Bauteils und somit zum Reißen der Druckzone. Diese Schädigung ist jedoch nicht als für die Traglast kritisch zu beurteilen, da die Risse in der Druckzone beim Versuch überdrückt werden.

Trotz der umfangreichen Vorschädigungen wurden die Bauteile wie geplant belastet. Der Prüfkörper V0.1 versagte beim Aufsetzen der Belastungstraverse auf den Prüfkörper spröde durch Schubversagen in der Verbundfuge zwischen der unteren Deckschicht und dem Kern. Abb. 5-18 zeigt das Bauteil nach dem Bruch. Auf beiden Seiten war der gesamte äußere Kernbereich KM1 horizontal als Block abgeschert.

Die Bruchfuge lief durch den bereits aus der Vorschädigung bestehenden Riss. Der Bruch verlief direkt neben der Fuge durch den haufwerksporigen Leichtbeton mit Kornbruch des Leichtzuschlags. Hieraus ist zu folgern, dass die Schubspannungen in der Verbundfuge  $v_{Edi}$  zu groß waren und die Schubtragfähigkeit des Leichtbetons  $v_{Rdi}$  nicht ausreichte. Der Prüfkörper V0.2 versagte analog zum Prüfkörper V0.1, allerdings konnte er mit einer Prüflast von 5,34 kN beaufschlagt werden.



Abb. 5-18: Versagen des Bauteils 0.1 in der unteren Längsfuge

Die Nachrechnung der unteren Verbundfuge, die im Versuch vorzeitig versagte, wird mit den in Tabelle 5-5 aufgeführten Eingangsparametern zur Berechnung der Schubspannung aus Schwinddifferenzen nach Absatz 4.4.2 durchgeführt. Die hierfür erforderlichen Betonkennwerte sind den Ergebnissen der betontechnologischen Begleitprüfungen entnommen. Diese lagen für die Mischung G02LM mit einer Druckfestigkeit  $f_{ck,ist} = 2,3 \text{ N/mm}^2$  zu  $f_{1c,soll} = 8,4 \text{ N/mm}^2$  nur bei 28 % der Sollfestigkeit. Ebenso erreichte die geprüfte Zugfestigkeit  $f_{ctm,ist} = 0,42 \text{ N/mm}^2$  zu  $f_{ctm,soll} = 1,36 \text{ N/mm}^2$  nur 31 % der Sollfestigkeit.

Tabelle 5-5: Eingangsparameter in die Berechnung der Schubspannung aus Schwinddifferenz

$m = E_2/E_1$	18	RA/G02LM
$\alpha = h_1/g_{ges}$	0,85	
$\epsilon_{cs}(28,1)_{RA}$	$-4,59 \cdot 10^{-4}$	Gesamtschwinddehnung RA nach EC 2
$\epsilon_{cs}(28,1)_{G02LM}$	$-1,16 \cdot 10^{-4}$	Gesamtschwinddehnung G02LM nach EC 2
$\Delta\epsilon_{sh}^{**}$	$-3,43 \cdot 10^{-4}$	Schwinddifferenz
$\lambda L$	$22 \pm 25 \%$	aus [27]
$z^*$	-70 mm	
L	4400 mm	

$$** \quad \Delta\epsilon_{sh} = \epsilon_{cs}(28,1)_{RA} - \epsilon_{cs}(28,1)_{G02LM}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4-13) ergibt sich ein maximaler Wert am Balkenende von  $\tau_{sh} = 0,099 \text{ N/mm}^2$ . Unter Berücksichtigung, dass der Wert  $\lambda L$  um  $\pm 25 \%$  streut, ergibt sich ein Wertebereich der maximalen Schubspannung aus Schwinddifferenzen von  $\tau_{sh} = 0,074 - 0,12 \text{ N/mm}^2$ .

Der Bemessungswert der Schubtragfähigkeit der Fuge ergibt sich aus Gleichung (4-11) je nach Rauigkeit der Fuge zu  $v_{Rd} = 0,084 - 0,21 \text{ N/mm}^2$  (glatt - verzahnt).

Die Analyse zeigt, dass allein die Schubspannungen aus Schwinddifferenzen im gewählten Aufbau mit der Kernmischung G02LM ausreichen können, um die Tragfähigkeit im unbelasteten Zustand zu überschreiten.

### 5.3 Zusammenfassung der Versuchsergebnisse

In Kapitel 5 wurden die Bauteilversuche an gradierten einachsig gespannten Plattenstreifen beschrieben. Die Vier-Punkt-Biegeversuche gliedern sich in skalierte Versuche mit einer Spannweite von 1 m und die Versuche der Hauptausführung mit einer Spannweite von 4 m. Es wurden jeweils Versuche zur Biege- und zur Querkrafttragfähigkeit durchgeführt. Weiterhin wurden verschiedene Gradierungen, Bewehrungsmaterialien und Herstellungsverfahren untersucht.

Bei den skalierten Versuchen zur Biegetragfähigkeit hat sich gezeigt, dass die Gradierung einen maßgebenden Einfluss auf die Steifigkeit im Zustand I sowie die Höhe der Erstrisslast hat. Dieser Einfluss lässt sich gut am idealisierten Querschnitt erfassen, indem eine Reduktion des Gesamtbauteils auf die Mischung RA durchgeführt wird. Mit dem Einsatz textiler Bewehrung ließ sich eine Massenersparnis von 59 % bei Erreichen der rechnerischen Prüflast im Grenzzustand der Tragfähigkeit realisieren.

Die genaue Bestimmung der Querkrafttragfähigkeit gradiertter Betonbauteile spielt eine wichtige Rolle, da durch die Gradierung des Bauteilinneren die Versagenszustände Biege- und Querkraftversagen näher beieinander liegen, das spröde Querkraftversagen jedoch stets auszuschließen ist. Analog zu Normalbetonbalken zeigte sich in den Versuchsserien eine deutliche Abhängigkeit der Querkrafttragfähigkeit von der Längsbewehrung und der Schubschlankheit. Die experimentell ermittelte Querkrafttragfähigkeit nimmt mit zunehmender Schubschlankheit ab. Sie verbleibt jedoch für die untersuchten Schubschlankheiten (bis  $a/d = 5$ ) stets über der rechnerischen Querkrafttragfähigkeit nach EC 2. Diese wurde unter der Annahme eines homogenen Querschnitts aus dem leichten Kernbeton bestimmt. Je nach Schubschlankheit konnten die drei Querkraftversagensarten des Stegzugversagens, des Biegeschubversagens und des Versagens der unteren Längsfuge festgestellt werden.

Bei der ersten Prüfsérie der Hauptausführung kam es zu einem vorzeitigen Versagen der Längsfuge zwischen der unteren Deckschicht und der Kernschicht KM1. Bei der zweiten Prüfsérie konnte die Tragfähigkeit der Verbundfugen infolge äußerer Einwirkungen und Schwindens mithilfe eines analytischen Ansatzes sichergestellt werden. Die Versuche zur Biegetragfähigkeit bestätigen die Erkenntnisse aus den skalierten Versuchen. Die stahlbewehrten Bauteile V2 mit der Mischung G05L ( $f_{1,c} = 21 \text{ N/mm}^2$ )

im querkraftbeanspruchten Kernbereich erreichen die rechnerische Biege- und Querkrafttragfähigkeit bei einer Massenreduktion von 34 %. Durch den Einsatz textiler Bewehrung bei gleichem Aufbau (V1) können insgesamt 43 % an Masse eingespart werden. Die leichtere Mischung G02L ( $f_{1,c} = 8 \text{ N/mm}^2$ ) im querkraftbeanspruchten Kern führt bei den Bauteilen V3 zu einem vorzeitigen Querkraftversagen, welches unter der rechnerischen Querkrafttragfähigkeit liegt.

Die gemessenen Stahldehnungen deuten auf die Richtigkeit der getroffenen Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte hin. Das erstmals beim Bauteil V4.1 eingesetzte Spritzverfahren führt im Vergleich zu den geschichteten Bauteilen zu einer Reduzierung der Gefügestörungen.

## 6 Numerische Betrachtungen zum Tragverhalten gradierter Betonbauteile

### 6.1 Nichtlineare Materialtheorie

#### 6.1.1 Einleitung

In diesem Kapitel soll eine materiell nichtlineare numerische Simulation zur zutreffenden Beschreibung des Tragverhaltens gradierter Betonbauteile entwickelt werden. Am numerischen Modell können Parameterstudien zum Einfluss einzelner Kenngrößen ohne zeitaufwändige Versuche durchgeführt werden. Auf numerischer Ebene lassen sich Maßstabssprünge vollziehen und Optimierungen vornehmen. Ein numerisches Modell ist jedoch nur so gut, wie es die Wirklichkeit abbildet. Voraussetzung für eine zutreffende Beschreibung eines Bauteils ist eine möglichst realitätsnahe Abbildung des Materialverhaltens. Die experimentell ermittelten Materialkennwerte müssen für die Verwendung in der Simulation aufbereitet und in die Materialmodelle implementiert werden. Die Validierung erfolgt anhand von Benchmark\_Berechnungen und der Nachrechnung bestehender Versuche. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Simulationen mit dem kommerziellen Finite-Elemente-Programm Abaqus ausgeführt, welches mehrere materiell nichtlineare Modelle für den Werkstoff Beton bietet.

#### 6.1.2 Materialmodell Beton

Der Werkstoff Beton besitzt ein ausgeprägtes nichtlineares und richtungsabhängiges Materialverhalten. In Handbüchern und Schulungsunterlagen des Programmpakets Abaqus [37],[38] wird die Verwendung der Materialgesetze *Concrete Smeared Cracking* und *Concrete Damaged Plasticity* für die Abbildung des Betonmaterialverhaltens empfohlen. Der Vergleich beider Materialmodelle in der Diplomarbeit von Bidier [39] hat gezeigt, dass das Materialmodell Concrete Damaged Plasticity besser zur Abbildung der vorliegenden Probleme geeignet ist. Bei Verwendung des Materialgesetzes Concrete Smeared Cracking kam es zu Konvergenzproblemen in entfestigten zugbeanspruchten Bereichen. Diese konnten nur unter Zuhilfenahme starker stabilisierender Dämpfungskräfte und einer damit verbundenen Verfälschung der Simulationsergebnisse kompensiert werden. Bei beiden Modellen handelt es sich um verschmierte Rissmodellierungen, bei denen Risse durch die Reduzierung der Steifigkeit und eine starke Zunahme der plastischen Dehnungen betroffener Elemente näherungsweise erfasst werden. Im Gegensatz zu einer diskreten Rissmodellierung wird

dadurch keine Anpassung des FE-Netzes bei fortschreitender Rissbildung erforderlich. Bei dem Materialmodell Concrete Damaged Plasticity, kurz CDP, handelt es sich um ein elastisch-plastisches Schädigungsmodell, welches zur Abbildung von bewehrtem Beton entwickelt wurde, aber auch das Materialverhalten von unbewehrtem Beton wiedergeben kann. Es kann das Betonmaterialverhalten unter vorwiegend Zug- und Druckspannungsbeanspruchungen, aber auch unter zyklischen und dynamischen Belastungen wiedergegeben werden. Versagensmodi unter hohem hydrostatischen Druck und damit verbundene starke Festigkeitszunahmen im Betonmaterialverhalten sind in diesem Materialmodell nicht implementiert [40], für die vorliegenden Probleme aber auch nicht erforderlich. Die verwendeten Formulierungen basieren auf der Weiterentwicklung der Drucker-Prager-Fließbedingung durch Lubliner [41] und Lee [42] und werden in [43] zusammenfassend für die Anwendung in Abaqus vorgestellt.

### Beton unter Druckbeanspruchung

Die Beanspruchbarkeit und das Versagensverhalten von Beton unter Druck sind stark abhängig von dem vorliegenden räumlichen Spannungszustand, der Belastungsgeschwindigkeit und der Art des Betons. Unter kurzzeitiger einaxialer Druckbeanspruchung (vgl. Abb. 6-1) liegt bis ca.  $0,4 f_{cm}$  ein nahezu linear elastisches Verhalten vor. In der anschließenden Phase bis zur mittleren Betondruckfestigkeit  $f_{cm}$  führt das Wachstum von Mikrorissen parallel zur Belastungsrichtung an den Kontaktflächen zwischen Zementstein und Zuschlag zu einem Abfall der Steifigkeit bei zunehmender Längsdehnung. Die anschließende Ausbildung von makroskopischen Längsrissen führt zur Auflockerung des Gefüges und zu einem Abfall der Spannungen bei zunehmender Dehnung [26].

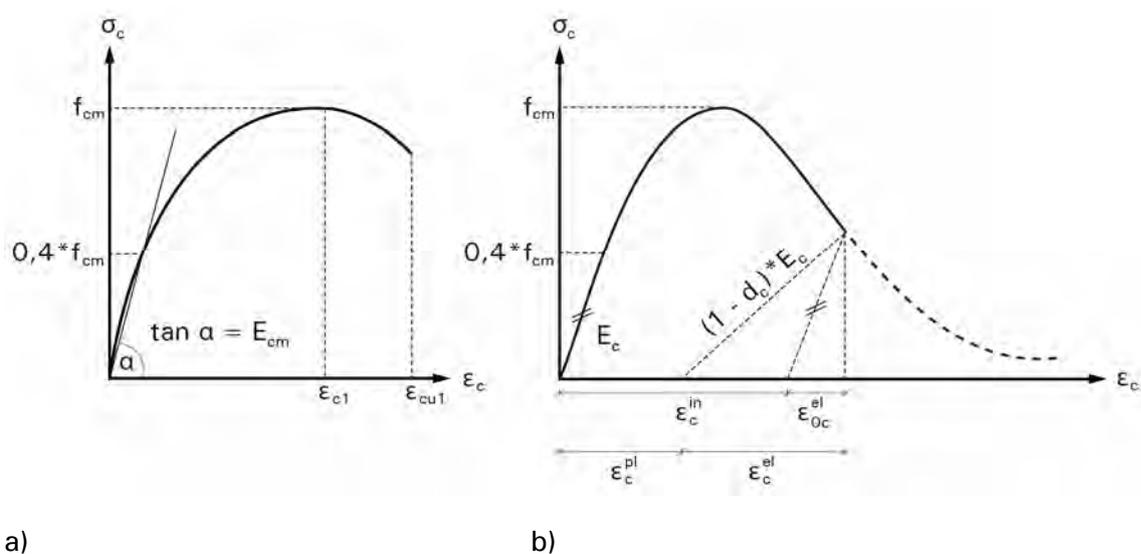


Abb. 6-1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton und Druckbeanspruchung nach EC 2 [20] (a) und Abaqus CDP [38] (b)

Für höherfeste Betone und Leichtbetone gelten angepasste Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Bei beiden Materialien fallen die Spannungen im Nachbruchbereich schneller ab, da die Festigkeit der Matrix und der Zuschläge näher beieinander liegen, was zu einem spröderen Versagen führt.

Die Konfiguration des CDP-Materialmodells (vgl. Abb. 6-1 b) erfolgt im linear elastischen Bereich bis  $0,4 f_{cm}$  über die Eingabe des E-Moduls  $E_c$  und der Querdehnzahl, die bei ungerissenem Beton bei 0,2 liegt [26]. Die weitere Definition der einachsigen Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfolgt über die Eingabe von Druckspannungen  $\sigma_c$  und zugehörigen inelastischen Dehnungen  $\epsilon_c^{in}$ . Die Gesamtdehnungen setzen sich zusammen aus den elastischen und den inelastischen Dehnungen.

$$\epsilon_c = \epsilon_{0c}^{el} + \epsilon_c^{in} = \epsilon_c^{el} + \epsilon_c^{pl} \quad \text{mit } \epsilon_{0c}^{el} = \frac{0,4 f_{cm}}{E_c} \quad (6-1)$$

Die elastische Steifigkeitsabnahme beim Auftreten plastischer Dehnungen wird mithilfe einer Schädigungsformulierung beschrieben. Der Schädigungsparameter im Druckbereich  $d_c$  beschreibt den Zusammenhang zwischen plastischen und inelastischen Dehnungen (er kann zwischen 0 = keine Schädigung und 1 = volle Schädigung liegen) und wird z.B. von Mark [44] basierend auf Versuchsauswertungen zu 0,7 angesetzt.

$$\epsilon_c^{pl} = d_c \cdot \epsilon_c^{in} \quad (6-2)$$

Der Ausdruck  $(1-d)$  kann auch als Verhältnis der tatsächlich zur Lastabtragung verbliebenen Querschnittsfläche zur ursprünglichen Querschnittsfläche angesehen werden. Bei zyklischer Beanspruchung kommt es bei einem Wechsel von Zug auf Druck zum Schließen der entstandenen Risse und zu einem Rückgewinn der vollen Steifigkeit, bei einem Wechsel von Druck auf Zug zu einem teilweisen Rückgewinn der Steifigkeit. Dies kann über die Parameter  $s_t$  und  $s_c$  berücksichtigt werden.

### Beton unter Zug

Abb. 6-2 zeigt das Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchung. Bis 70 % der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  liegt ein linear elastisches Verhalten vor. Anschließend beginnen Wachstum und Vereinigung bereits im unbelasteten Zustand vorhandener Mikrorisse quer zur Belastungsrichtung. Das Zusammenwachsen zu einem Makroriss wird als das Lokalisieren des Risses in der Rissprozesszone bezeichnet. Die Dehnungen steigen dort lokal stark an, während die Dehnungen außerhalb im linear elastischen Bereich verbleiben. Der abfallende Ast der  $\sigma$ - $\Delta l$ -Beziehung beschreibt die rissüberbrückende Wirkung des Zuschlags bis zur vollständigen Trennung der Rissufer. Die Längenänderung  $\Delta l$  des Probekörpers setzt sich somit aus einem elastischen Anteil und der Öffnung des Makrorisses  $w_{cr}$  zusammen.

$$\Delta l = \frac{\sigma_c}{E_c} \cdot l + w_{cr} \quad (6-3)$$

Hierdurch ergibt sich eine Abhängigkeit von der Probenlänge, die durch die Einführung der Bruchenergie  $G_f$  als Materialkonstante eliminiert werden kann. Die  $\sigma$ - $\Delta l$ -Beziehung wird dafür um die elastische Dehnung zur  $\sigma$ - $w_{cr}$ -Beziehung bereinigt. Die Bruchenergie bezeichnet diejenige Energie, die erforderlich ist, um einen Trennriss über eine Einheitsfläche zu erzeugen, und bildet sich aus der Fläche unter der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung.

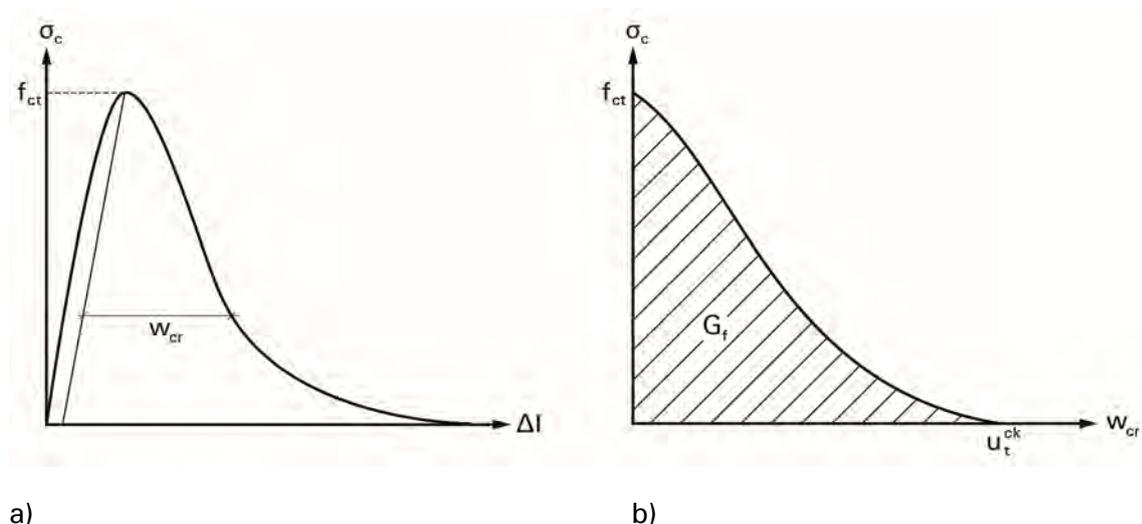


Abb. 6-2: Beton unter Zugbeanspruchung nach [48]:  $\sigma$ - $\Delta l$ -Beziehung (a) und  $\sigma$ - $w_{cr}$ -Beziehung (b)

Nach Modelcode 2010 [45] berechnet sich die Bruchenergie von Normalbeton wie folgt:

$$G_f = 0,073 \text{ N/mm} \cdot f_{cm}^{0,18} \quad (6-4)$$

Nach Modelcode 1990 wurde die Bruchenergie in Abhängigkeit des Größtkorns (8, 16 und 32 mm) mit abnehmender Bruchenergie bei abnehmendem Größtkorn berechnet. Da im untersuchten Fall ein Größtkorn von 2 mm für den Feinkornbeton bzw. 4 mm für den Leichtbeton zum Einsatz kommt, ist eine geringere Bruchenergie als nach Formel (6-4) zu erwarten. Daher wird die Bruchenergie nach der Formel aus Modelcode 1990 für Normalbeton mit einem Größtkorn von 8 mm berechnet:

$$G_f = 0,025 \text{ N/mm} \cdot \left( \frac{f_{cm}}{10 \text{ N/mm}^2} \right)^{0,7} \quad (6-5)$$

Für die Bruchenergie von gefügedichtem Leichtbeton mit normalem Sand gilt [45]:

$$G_{f,l} = 0,024 \text{ N/mm} + 16 \cdot f_{lctm} \quad (6-6)$$

Versuche von Faust [15] haben jedoch gezeigt, dass mit abnehmender Rohdichte der Leichtbeton in Abhängigkeit von der verwendeten Matrix deutlich spröder versagt als Normalbeton. Bei der verwendeten porosierten Matrix ist von einer geringen Bruchenergie auszugehen. Für den vorliegenden haufwerksporigen Leichtbeton mit porosierter Matrix ab G02LM wird, analog zu Leichtbeton mit Leichtsand in Anlehnung an [45], die Bruchenergie unter Berücksichtigung des Volumenanteils der gefüglichten Matrix wie folgt berechnet:

$$G_{f,l} = \frac{\text{gefüglichtes Matrixvolumen}}{\text{Gesamtmatrixvolumen}} \cdot 0,024 \text{ N/mm} + 16 \cdot f_{lctm} \quad (6-7)$$

Die Rissverschiebung  $u_t^{ck}$  bei vollständiger Rissöffnung (Restzugfestigkeit  $0,01 f_{ctm}$ ) und Annahme einer linearen Beziehung zwischen Bruchenergie und Rissöffnung berechnet sich zu:

$$u_t^{ck} = \frac{2G_f}{f_{ctm}}, \quad \text{bei } \sigma_{ct} = 0,01 f_{ctm} \quad (6-8)$$

Ein bilinearer Zusammenhang findet sich im Modelcode 2010, welcher auch von Mark [44] mit Experimenten von Reinhardt und Cornelissen [46] verglichen wurde. Dieser setzt sich zusammen aus den Punkten:

$$u_t^1 = \frac{G_f}{f_{ctm}}, \quad \text{bei } \sigma_{ct} = 0,2 f_{ctm} \quad (6-9)$$

$$u_t^{ck} = \frac{5G_f}{f_{ctm}}, \quad \text{bei } \sigma_{ct} = 0,01 f_{ctm} \quad (6-10)$$

Abaqus bietet zwei Eingabemöglichkeiten für das einaxiale Zugverhalten. Über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung oder über Eingabe der Bruchenergie und der Rissöffnung nach Hillerborg [47]. Die Eingabe über die Bruchenergie empfiehlt sich für unbewehrten Beton. Unter Berücksichtigung der vorliegenden Elementlänge wird die Rissöffnung in eine Rissdehnung umgerechnet [48], was zu einer Netzunabhängigkeit führt (vgl. Abschnitt 6.2.2).

Die Definition einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung für unbewehrten Beton führt zu einer Netzgrößenabhängigkeit. Sie ermöglicht jedoch für bewehrten Beton, den Tension-Stiffening-Effekt über eine Berücksichtigung im Nachbruchverhalten auf einfache Weise abzubilden. Das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen führt zu einer höheren Steifigkeit im Vergleich zum reinen Zustand II (vgl. Abb. 6-3 b). Bei Vorhandensein einer Bewehrung verteilen sich die Risse über die Bauteillänge und die Netzabhängigkeit sinkt auf ein unkritisches Maß [49].

Die Definition der Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfolgt über die Eingabe von Zugspannungen und zugehörigen Rissdehnungen  $\varepsilon_t^{\text{ck}}$  vgl. Abb. 6-3 a). Es gilt:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{0t}^{\text{el}} + \varepsilon_t^{\text{ck}} = \varepsilon_t^{\text{el}} + \varepsilon_t^{\text{pl}} \quad \text{mit } \varepsilon_{0t}^{\text{el}} = \frac{f_{\text{ctm}}}{E_c} \quad (6-11)$$

Wie im Druckbereich kann eine Schädigung der elastischen Steifigkeit bei Auftreten plastischer Dehnungen über den Zugschädigungsparameter  $d_t$  definiert werden, für den analog zu Mark [44] basierend auf Versuchsauswertungen ein Wert von 0,1 angesetzt wird.

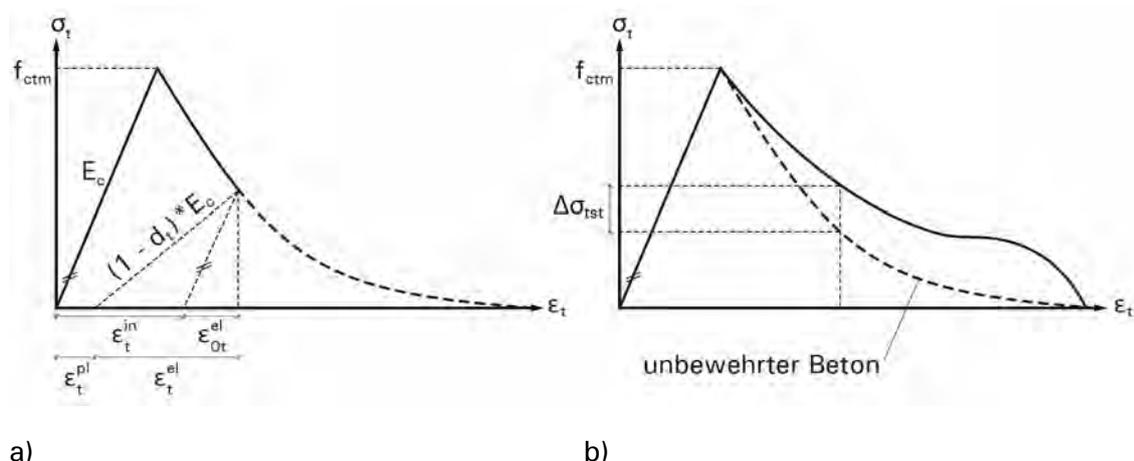


Abb. 6-3: Steifigkeitsschädigung unter einaxialem Zug [37] (a) und Berücksichtigung des Tension-Stiffening-Effekts (b)

### Mehraxiale Festigkeit von Beton

In der Realität liegt selten ein einaxialer Spannungszustand vor. Daher muss berücksichtigt werden, wie sich verschiedene Spannungszustände in den drei Raumrichtungen gegenseitig beeinflussen. Querspannungen führen zu einer Reduzierung der Festigkeit, Querdruckspannungen zur einer Steigerung. Abb. 6-4 a) zeigt den Zusammenhang der Festigkeiten im ebenen Spannungszustand. Während bei biaxialer Zugbeanspruchung die Festigkeit unabhängig von der Größe der Beanspruchung in Querrichtung ist, nimmt die Druckfestigkeit bei Zug in Querrichtung deutlich ab. Unter biaxialem Druck kann die Festigkeit im Vergleich zur einaxialen Druckfestigkeit um bis zu 25 % gesteigert werden. Abb. 6-4 b) zeigt die Bruchspannungsfläche für Beton im Hauptspannungsraum. Sie begrenzt alle zulässigen Spannungs kombinationen. Entlang der hydrostatischen Achse weitet sich die Deviatorenebene von einer Dreiecksfläche zu einer Kreisfläche auf. Mit zunehmendem hydrostatischen Anteil können deutlich größere Festigkeiten erreicht werden. Diese Bruchspannungsfläche gilt es als Bruchspannungskriterium mathematisch zu beschreiben.

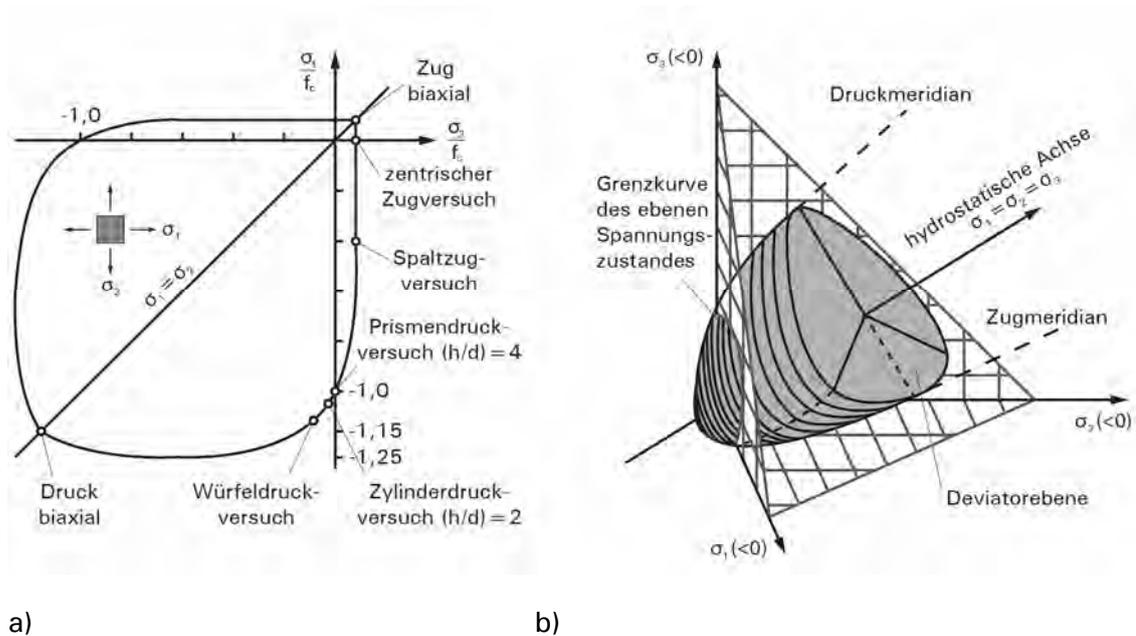


Abb. 6-4: Mehraxiale Spannungszustände von Beton: Festigkeit bei ebenem Spannungszustand nach [50] (a) Bruchspannungsfläche für Beton im Hauptspannungsraum nach [26] (b)

Dies erfolgt beim Materialmodell Concrete Damaged Plasticity mithilfe eines angepassten Drucker-Prager-Bruchkriteriums, welches z.B. für geotechnische Werkstoffe und für Betone Anwendung findet. Es unterscheidet sich durch die Abhängigkeit der Festigkeiten vom hydrostatischen Anteil von Bruchkriterien wie von Mises, welche für Werkstoffe wie Stahl Anwendung finden. Die Definition der dreidimensionalen Bruchspannungsfläche basierend auf dem bisher definierten einachsigen Materialverhalten erfolgt mithilfe der Parameter Dilettanzwinkel  $\psi$ , Abweichung in der Deviatorrebene  $K_c$  und in der Meridianebene  $\alpha_e$  sowie dem Verhältnis zwischen einachsiger und biaxialer Druckfestigkeit  $\alpha_f$  aus [38] (vgl. Abb. 6-4). Diese entsprechen größtenteils den von Mark [44] experimentell ermittelten Parametern.

### 6.1.3 Materialmodell Bewehrungsstahl und textile Bewehrung

Auch das Materialverhalten der Bewehrungsmaterialien Glasfaser, Kohlefaser und Betonstahl muss mit einem Materialmodell erfasst. Glas- und Kohlefaser weisen ein ausgeprägtes lineares Materialverhalten bis zum Bruch auf. Für diese Materialien wird ein linear elastisches Materialmodell verwendet. Um den spröden Bruch des Materials nicht explizit zu simulieren, wird nach Erreichen der Textilbruchspannung ein plastisches Plateau angefügt. Für den Bewehrungsstahl wird ebenfalls ein elastisch-plastisches Materialgesetz mit isotroper Verfestigung verwendet. Abb. 6-5 zeigt den Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung der Bewehrungsmaterialien.

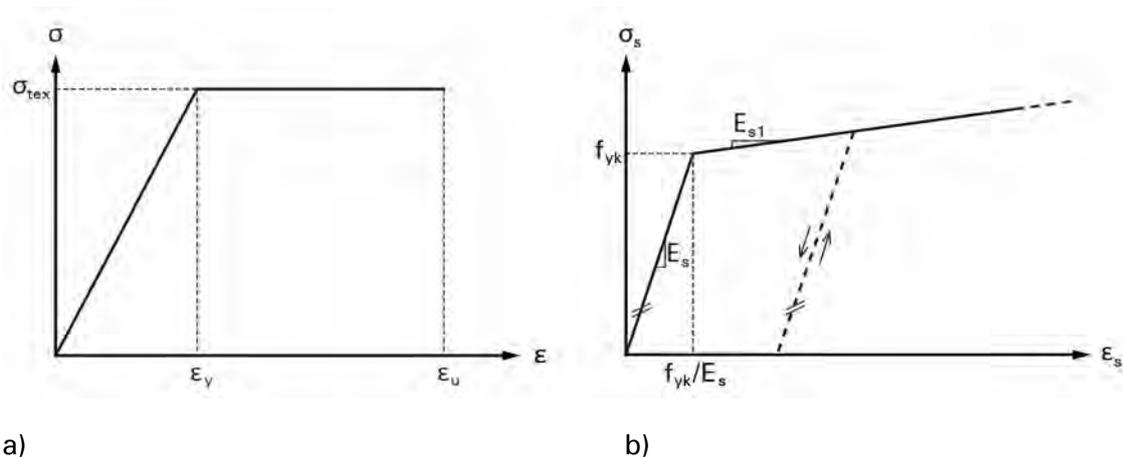


Abb. 6-5: Elastisch-plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung: Textilien (a) und Betonstahl (b)

## 6.2 Materiell nichtlineare Simulation der Versuche

### 6.2.1 Modellbildung

Im diesem Abschnitt wird der Aufbau des Modells, die Elementwahl, die Lösungsstrategie, die Lastaufbringung und die Abbildung der Bewehrung im numerischen Modell beschrieben.

#### Modellaufbau und Elementwahl

Nachfolgend werden die in Kapitel 5 experimentell untersuchten Träger numerisch abgebildet. Dabei handelt es sich um einachsige gespannte Träger, die sich im Maßstab, den verwendeten Materialien, dem Querschnittsaufbau und der zum Einsatz kommenden Bewehrung unterscheiden. Da mit dem einachsigen gespannten Träger ein ebenes Spannungsproblem vorliegt, können entweder Schalenelemente (S4R) oder Kontinuumsselemente (C3D8I) verwendet werden. Vergleichende Untersuchungen [39] der beiden Elementtypen haben gezeigt, dass die Versuchsergebnisse mit den Volumenelementen realitätsnäher abgebildet werden können, die auch einen anschließenden Übertrag auf räumliche Probleme ermöglichen.

Bei den C3D8I-Kontinuumsselementen handelt es sich um achtknotige Elemente mit linearer Ansatzfunktion, die für biegebeanspruchte Problemstellungen eingesetzt werden. Durch die Verwendung von zusätzlichen inkompatiblen Verschiebungsansätzen können „shear locking“-Effekte vermieden und „volume locking“-Effekte stark reduziert werden [51]. Eine weitere Verbesserung könnte mit quadratischen Ansatzfunktionen wie dem rechenintensiven 20-knotigen C3D20-Kontinuumsselement erreicht werden. Dies ist aber für das vorliegende Problem nicht erforderlich. Die Verwendung von Elementen mit einer Kantengröße von 5 mm für die skalierten

Bauteile und 20 mm für die Bauteile der Hauptausführung hat sich im Rahmen einer Elementgrößenstudie für die abzubildenden Probleme und die nachfolgende Topologieoptimierung als zielführend erwiesen. In Tiefenrichtung wird nur ein Element verwendet und somit das Problem implizit auf ein ebenes Problem reduziert. Die Übergänge zwischen zwei Betonschichten sowie zwischen Beton und Bewehrung werden nicht explizit modelliert und somit voller Verbund simuliert.

### Integration der Bewehrung

Die Bewehrung kann als diskrete Einzelstäbe oder als verschmierte Bewehrungslage abgebildet werden. Eine Modellierung der Einzelstäbe wird bei Detailuntersuchungen z.B. des Verbunds verwendet [38], ist aufwändiger und wird hier nicht weiter verfolgt. Die vorliegende einachsige Bewehrungslage wird im Volumenmodell als äquivalente Querschnittsfläche in Form von Schalen- oder Surface-Elementen eingebettet. Die äquivalente Dicke der Bewehrungsschicht  $t$  wird über den Quotienten aus der Querschnittsfläche  $A_s$  eines Einzelstabes und den Stababstand  $s$  errechnet. Es werden die vierknotigen dreidimensionalen Surface-Elemente SFM3D4 verwendet, die ausschließlich die Informationen der Bewehrungslage beinhalten. Die Ansatzfunktion und das Integrationsschema werden von den Surface-Elementen der darunterliegenden Kontinuumselemente übernommen. Die Querschnittsfläche der Bewehrung wird nicht von der Gesamtquerschnittsfläche abgezogen. Der Verbund zwischen Beton und Bewehrung wird indirekt über die Definition des Betonzugverhaltens und des tension stiffenings berücksichtigt.

### Randbedingungen, Lösungsverfahren und Ergebnisausgabe

Das System ist statisch bestimmt gelagert, Geometrie und Abmessungen entsprechen den Versuchen (vgl. Abb. 6-6). Die Lastaufbringung erfolgt verschiebungsgesteuert an den Lasteinleitungspunkten. Die Verschiebung wird kontinuierlich zunehmend über den Gesamtzeitschritt 1,0 aufgebracht. Die Berechnung in Abaqus Standard erfolgt mit einem impliziten Gleichungslöser mit einer maximalen Schrittweite von 0,01. Aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens führt dies zu einer Rechenzeit der großen Balken im Bereich von 30 min.

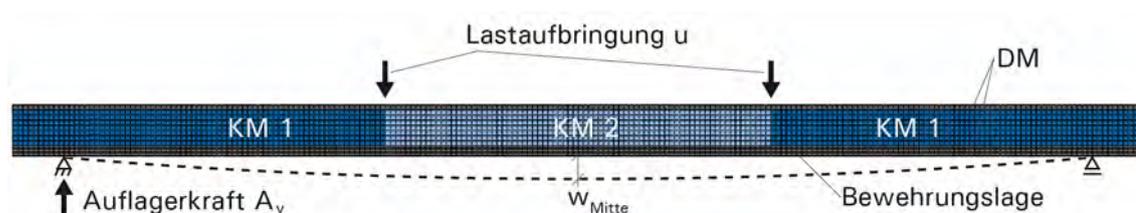


Abb. 6-6: Modellbildung und 20-mm-Vernetzung der Prüfkörper der Hauptausführung

Als maßgebende Reaktion des Systems werden wie im realen Versuch die Verformungen in Feldmitte gegen die Auflagerreaktionen, die der Prüflast entsprechen, aufgetragen. Weitere Parameter wie elastische und plastische Dehnungen, Spannungen im Beton und in der Bewehrung werden zu fest definierten Zeitschritten ausgewertet.

## 6.2.2 Materialeingangsparameter

Die im Bauteil vorkommenden Betone und Bewehrungen werden über die in Kapitel 6.1 beschriebenen Materialmodelle abgebildet. Für das Betontragverhalten stellt die Konfiguration des einachsigen Zug- und Druckverhaltens die wichtigste Eingabe dar. Die Tabelle 6-1 führt die Eingangsparameter zur Konfiguration der CDP Materialmodelle in Abaqus auf.

Tabelle 6-1: Eingabeparameter zur Beschreibung des Betonmaterialverhaltens

		Material	RA	G07L	G05L	G03L	G02LM	G01LM	KLM
Elastisch	Rohdichte [kg/mm <sup>3</sup> ]		2,23 E-06	2,07 E-06	1,69 E-06	1,11 E-06	0,96 E-06	0,70 E-06	0,49 E-06
	E-Modul [N/mm <sup>2</sup> ]		35050	22841	14040	7070	5232	3044	1023
	Querdehnzahl		0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Compression	1	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	22,98	13,29	8,42	2,73	3,20	2,11	0,65
		$\epsilon_c^{in}$ [‰]	0	0	0	0	0	0	0
	2	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	57,46	33,22	21,06	6,83	8,00	5,27	1,63
		$\epsilon_c^{in}$ [‰]	0,81	0,62	0,30	0,30	0,20	0,56	0,78
	3	$\sigma_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	57,46	33,22	21,06	6,83	8,00	5,27	1,63
		$\epsilon_c^{in}$ [‰]	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
Tension	1	$\sigma_{ct}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	3,80	2,83	1,82	0,75	0,77	0,53	0,21
		$u_t$ [mm]	0	0	0	0	0	0	0
	2	$\sigma_{ct}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	0,040	0,030	0,020	0,010	0,010	0,005	0,002
		$u_t^{ck}$ [mm]	0,045	0,049	0,059	0,096	0,073	0,030	0,014
		$G_f$ [N/mm]	0,085	0,069	0,054	0,036	0,028	0,016	0,003

Eingabeparameter zur Beschreibung der Bruchfläche des mehraxialen Spannungszustands

	$\Psi$ [°]	$\alpha_e$	$\alpha_f$	$K_c$	Viskositätsparameter
nach Abaqus [38]	31	0,1	1,16	0,6667	0,0001
nach Mark [44]	30	0,1	1,16	0,6667	-

Der inelastische Anteil der Betondehnung (2. Eingabewert von  $\epsilon_c^{in}$ ) wird aus Formel (6-1) berechnet. Die Gesamtbetondehnung  $\epsilon_c$  bei Erreichen der Druckfestigkeit wird nach EC 2 folgendermaßen berechnet:

$$\epsilon_{c1} = -0,7 \cdot (f_{cm})^{0,31} \leq -2,8 \quad (6-12)$$

Als Betonbruchdehnung (3. Eingabewert von  $\epsilon_c^{in}$ ) wird für alle Betone der Wert  $\epsilon_{cu1} = 3,5 \text{ ‰}$  nach EC 2 verwendet. Abweichend von dem in Kapitel 6.1.2 für Beton unter Druckbeanspruchung beschriebenen abfallenden Ast wird nach Erreichen der Druckfestigkeit ein konstantes Plateau wie bei einer Parabel-Rechteck-Beziehung angenommen, da der Nachbruchbereich experimentell nicht bestimmt wurde. Da die Druckspannungen bei einem Biegezugversagen die Druckfestigkeit nicht erreichen, hat die getroffene Vereinfachung keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Als Betonzugfestigkeit wird die aus der Druckfestigkeit errechnete einaxiale mittlere Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  angesetzt. Die in Tabelle 3-1 aufgeführte Zugfestigkeit wurde rechnerisch aus der an Prismen geprüften Biegezugfestigkeit ermittelt (vgl. Anhang B.2). Sie scheint die zentrische Zugfestigkeit deutlich zu überschätzen. Für die Mischung RA wird die aus zentrischen Zugversuchen an textil bewehrten Proben [52] ermittelte Zugfestigkeit von  $f_{ctm} = 3,8 \text{ N/mm}^2$  angesetzt. Diese liegt nochmals unter der aus der Druckfestigkeit gerechneten Zugfestigkeit mit  $f_{ctm} = 4,37 \text{ N/mm}^2$ .

Tabelle 6-2 führt die Eingangsparameter der Materialmodelle der Bewehrungsmaterialien auf. Die Materialkennwerte der textilen Bewehrung wurden experimentell ermittelt (vgl. Anhang C.3). Wie in Abschnitt 5.2.4 beschrieben, wurden die kohlefaserbewehrten Versuche für eine Textilbruchspannung von  $\sigma_{tex} = 1645 \text{ N/mm}^2$  ausgelegt. Weitere Versuche an dem für die Balken verwendeten Gelege ergaben jedoch eine mittlere Textilbruchspannung von  $\sigma_{tex} = 1305 \text{ N/mm}^2$ . Daher wird die Textilbruchspannung in der Simulation zu  $\sigma_{tex} = 1300 \text{ N/mm}^2$  gewählt und der Unterschied nachfolgend nochmals bei der Nachrechnung der Versuche diskutiert.

Die E-Moduln der Textilien sind die im Versuch ermittelten E-Moduln der Rovings im einbetonierten Zustand. Die Zugtragfähigkeit der Glasfaserbewehrung an Verbundknochen wurde zu  $\sigma_{tex} = 451 \text{ N/mm}^2$  bei einer Bruchdehnung von  $5,81 \text{ ‰}$  bestimmt. Hieraus lässt sich ein E-Modul von  $E_{fil} = 77625 \text{ N/mm}^2$  berechnen. Dieses Versuchsergebnis muss noch wie in [52] beschrieben um den experimentell ermittelten Tragfähigkeitsbeiwert  $k_{fl} = 1,29$  auf  $\sigma_{tex} = 582 \text{ N/mm}^2$  erhöht werden. Dieser Beiwert berücksichtigt die Steigerung der Bruchspannung der textilen Bewehrung im Biegeversuch, was nach [53] auf die Umlenkpressung und damit auf die bessere Aktivierung der inneren Filamente der Rovings zurückzuführen ist.

Tabelle 6-2: Eingabeparameter zur Beschreibung der Bewehrung

Material	Dichte	E-Modul	$\mu$	$\sigma_{s1}$	$\epsilon_{s1}^{pl}$	$\sigma_{s2}$	$\epsilon_{s2}^{pl}$
	[kg/mm <sup>3</sup> ]	[N/mm <sup>2</sup> ]		[N/mm <sup>2</sup> ]	[‰]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[‰]
BSt 500	7,85 E-06	200000	0,30	500	0	525	22,5
Sigratex Grid 600	1,80 E-06	103000	0,00	1300	0	1301	22,5
E-Glas Panzer	2,60 E-06	77625	0,18	582	0	583	22,5

Die Materialmodelle werden mehreren Eielement-Simulationen unter Verwendung einer verschiebungsgesteuerten Belastung unterzogen. Hierdurch können die Materialmodelle verifiziert und Abhängigkeiten wie z.B. von der Elementgröße erkannt werden. In Abb. 6-7 ist das Verhalten der verwendeten Mischungen unter Druckbeanspruchung dargestellt. Hierbei ist der Steifigkeitsabfall bei  $0,4 f_{cm}$  und der Übergang zu einem Spannungsplateau bei  $f_{cm}$  zu erkennen.

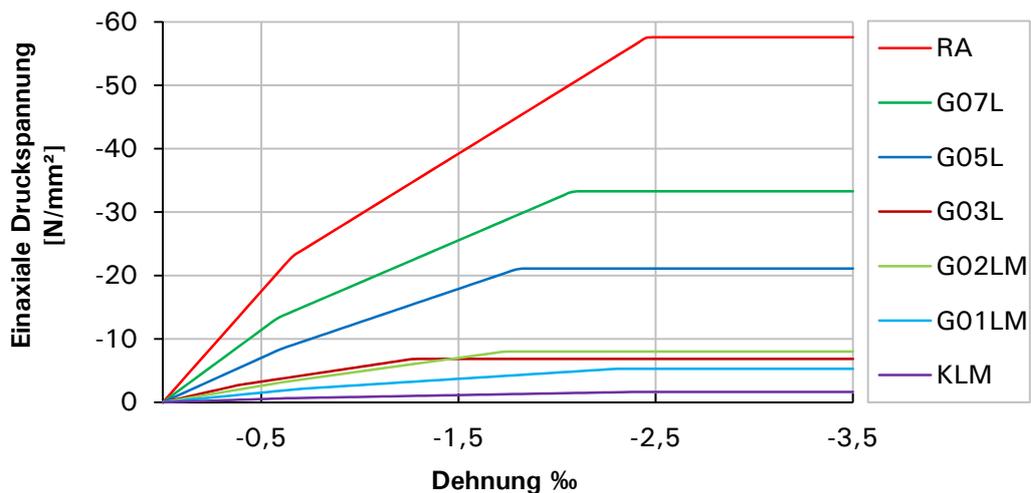


Abb. 6-7: Spannungs-Dehnungs-Antwort eines finiten Elements unter zentrischer Druckbeanspruchung

In Abb. 6-8 sind die Dehnungsanteile der Mischung RA über die Belastungszeit bei einer verschiebungsgesteuerten Eielementsimulation dargestellt.

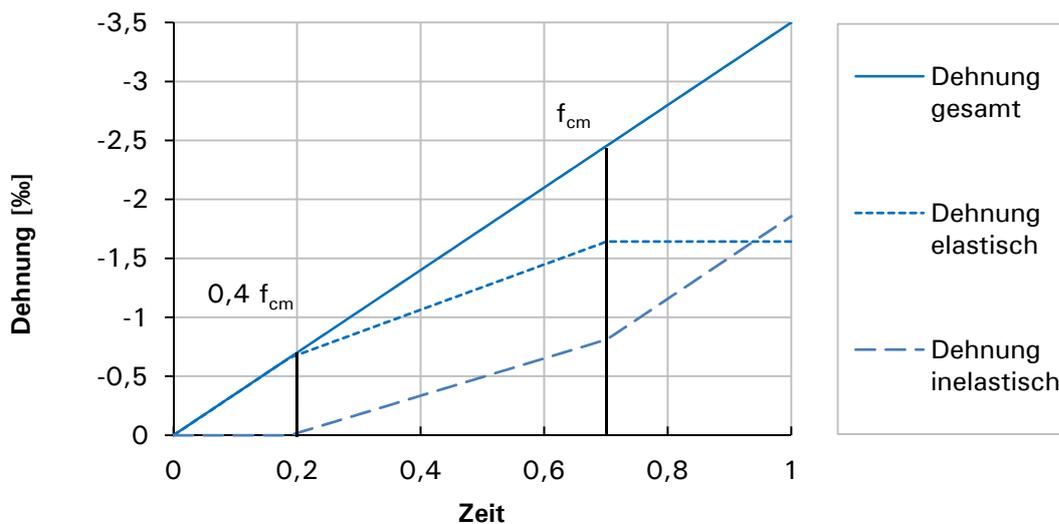


Abb. 6-8: Dehnungsanteile der Mischung RA unter einaxialem Druck

Wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, liegt ein linear elastisches Verhalten bis  $0,4 f_{cm}$  vor. Ab diesem Punkt setzt sich die Gesamtdehnung aus einem elastischen und einem inelastischen Dehnungsanteil zusammen. Nach Erreichen von  $f_{cm}$  wird das Material ausschließlich inelastisch verformt. Bei anschließender Entlastung würde der inelastische Dehnungsanteil verbleiben.

In Abb. 6-9 sind die Materialkennlinien der Bewehrungsmaterialien dargestellt. Bei der Kohlefaserbewehrung findet ein sprödes Versagen nach Erreichen der Bruchdehnung statt. Dieses würde zu numerischen Instabilitäten führen und wird durch Definition eines anschließenden plastischen Plateaus vermieden. Bei einer Textilbruchspannung von  $1645 \text{ N/mm}^2$  liegt die Bruchdehnung bei  $16 \text{ ‰}$ . Die reduzierte Textilbruchspannung von  $1300 \text{ N/mm}^2$  geht auch mit einer reduzierten Bruchdehnung einher und deckt sich gut mit der am Zugknochen ermittelten Spannungs-Dehnungs-Beziehung.

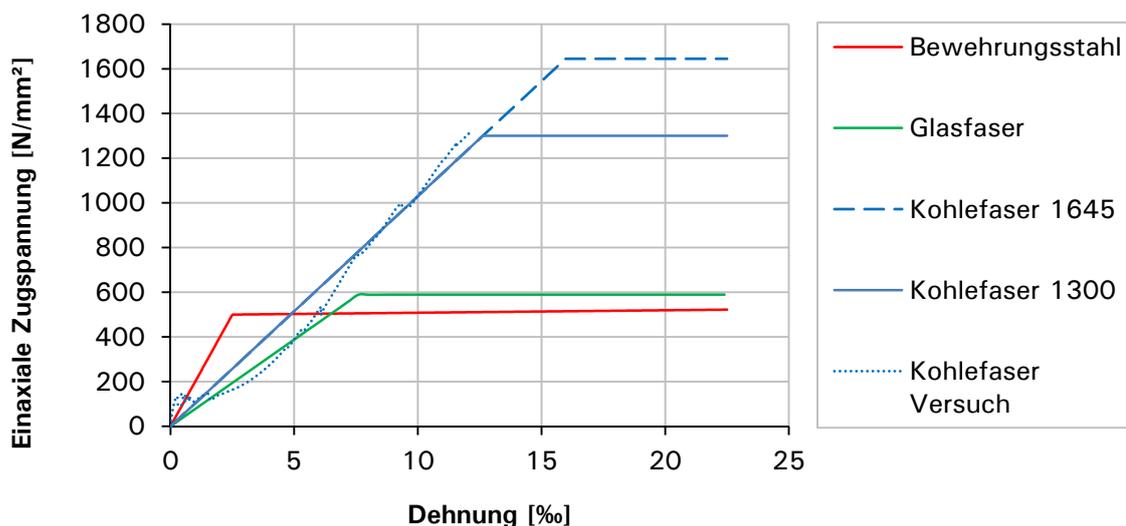


Abb. 6-9: Spannung-Dehnungs-Beziehungen der Bewehrungsmaterialien

In Abb. 6-10 sind vergleichende Untersuchungen zur Elementgrößenabhängigkeit der Zugfestigkeit dargestellt. Es wurden die Elementgrößen 5, 10 und 20 mm unter Eingabe der Zugfestigkeit über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung ( $\epsilon$ ) oder eine Definition über die Bruchenergie ( $G_f$ ) untersucht. Auf ein einzelnes Element wurde jeweils eine Verschiebung von 0,05 mm aufgebracht. Die Definition des Zugtragverhaltens über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung erfolgt mit einer Grenzdehnung von  $1 \text{ ‰}$ . Hierdurch ergibt sich in der Simulation der Abfall der Zugfestigkeit bis 0,005 mm bei einer Elementgröße von 5 mm, 0,01 mm bei 10 mm und 0,02 mm bei 20 mm und somit eine Elementgrößenabhängigkeit in der Spannungs-Längenänderungs-Beziehung (vgl. Abb. 6-2). Die Definition über die Bruchenergie zeigt hingegen unabhängig von der verwendeten Elementgröße eine vollständige Rissöffnung

bei 0,045 mm für die Mischung RA. Die Definition des Zugverhaltens über die Bruchenergie bildet daher das Materialverhalten von Beton mit der charakteristischen Öffnung eines Makrorisses realistischer ab.

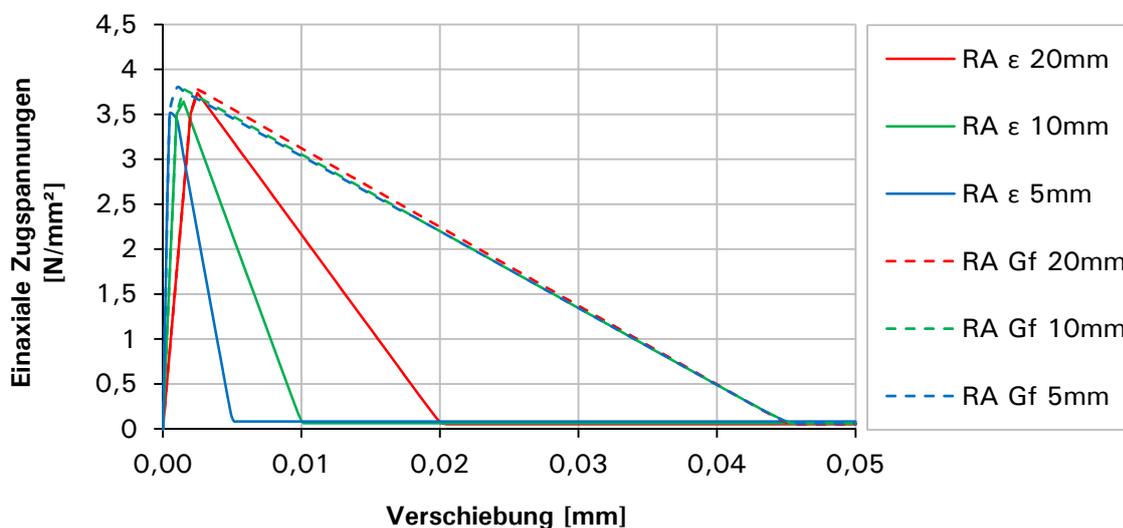


Abb. 6-10: Vergleich zur Elementgrößenabhängigkeit der Betonzugfestigkeit

### 6.2.3 Simulation der skalierten Versuche

In diesem Abschnitt wird die Simulation der skalierten Versuchskörper aus Abschnitt 5.1 beschrieben und ausgewertet. Es werden die Materialmodelle, die Elementwahl und die Modellierung auf deren Abhängigkeiten von verschiedenen Eingangsparametern untersucht. Die Nachrechnung und Kalibrierung der Simulation erfolgt an den gradierten Bauteilen mit Glasfaser-Bewehrung der Serie SV 3 (Abb. 6-11). Weiterhin erfolgt ein Abgleich mit den stahlbewehrten Balken aus Normalbeton SV 10.3 und 10.4.

Der Prüfaufbau ist in Abb. 5-1 dargestellt, die Eigenschaften der Bauteile sind in Tabelle 5-1 beschrieben.

Bei allen Versuchen handelt es sich um Bauteile mit Biegezugversagen bei Erreichen der Bruch- bzw. Fließspannung der Bewehrung. In der Simulation wird dieses Versagen durch das Erreichen der Bruch- bzw. Fließspannung in einem Bewehrungselement wiedergegeben. Dieses Versagen lässt sich besser in die Simulation übertragen als ein Querkraftversagen.

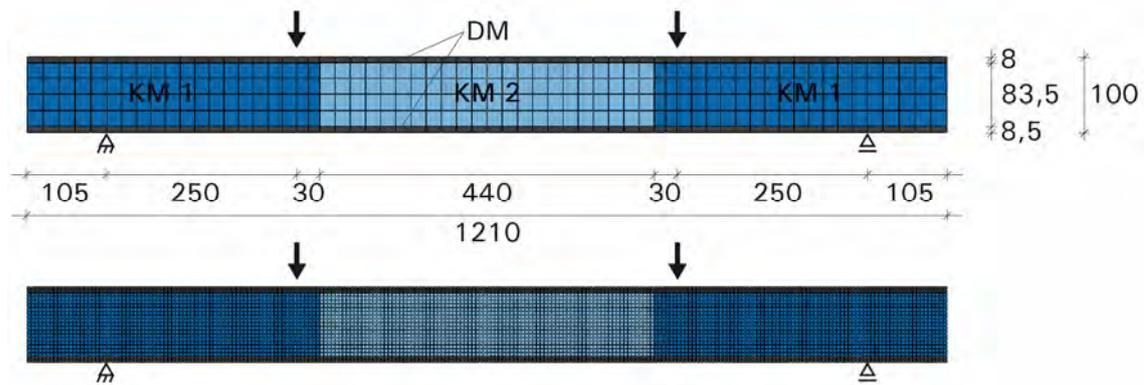


Abb. 6-11: Finite-Elemente-Diskretisierung des Prüfkörpers SV 3 mit 20 mm und 5 mm Kantenlänge

Die Simulation erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird das Referenzbauteil ohne textile Bewehrung simuliert, um Einflüsse auf das Tragverhalten im Zustand I zu untersuchen.

In Abb. 6-12 sind die Simulationsergebnisse der Bauteile SV 3 und SV 10 in Form der Reaktionskräfte über die Durchbiegung in Feldmitte im Vergleich zu den Versuchsergebnissen dargestellt. Es werden die Simulationsergebnisse der Elementgröße 5 und 20 mm bei einer Definition des Zugtragverhaltens über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung oder über eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung verglichen.

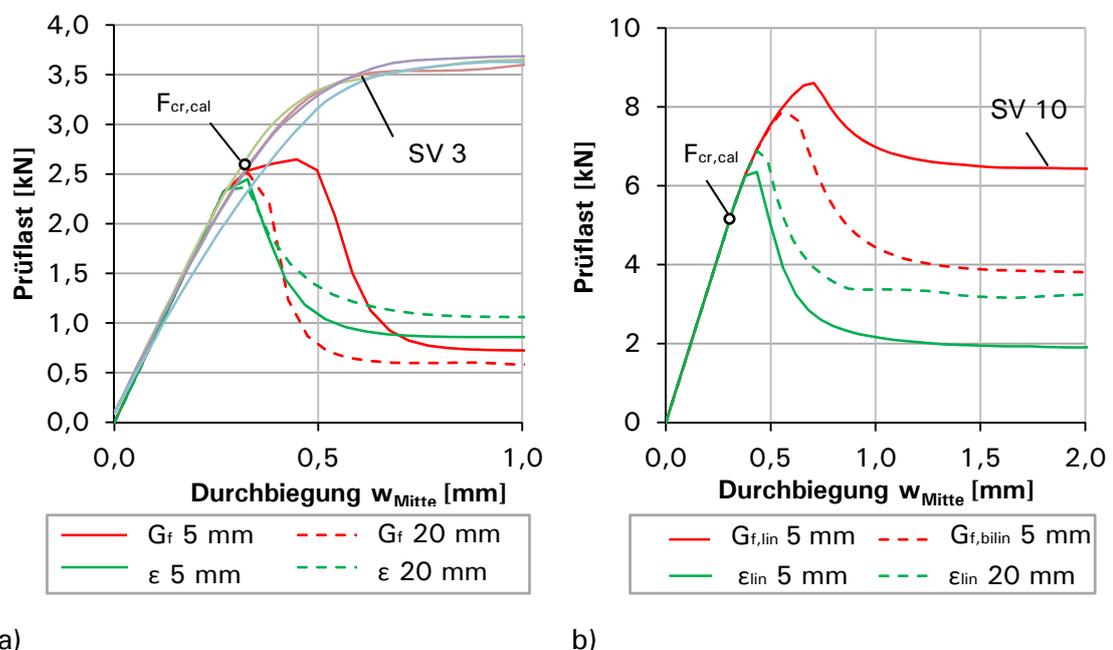


Abb. 6-12: Ergebnisse der unbewehrten Simulation der Bauteile SV 3 (a) und SV 10 (b)

Die Steifigkeit im Zustand I der Versuche wird in der Simulation gut getroffen. Die Risslasten liegen im Fall der Versuchsserie SV 3 unter den Risslasten im Versuch, was jedoch nicht abschließend bewertet werden kann, da es sich bei den Versuchsergebnissen um bewehrte Bauteile handelt (vgl. Abb. 6-12 a). Die textile Bewehrung besitzt nach Aussage von Voss [25] eine rissunterdrückende Wirkung. Die analytische Risslast  $F_{cr,cal}$  der Serie SV 3 von 2,6 kN wird von allen Simulationen gut getroffen. Der Nachbruchbereich hängt stark von der verwendeten Definition des Zugtragverhaltens und der Elementgröße ab. Bei allen Simulationen fällt die hohe verbleibende Resttragfähigkeit des Bauteils von bis zu 40 % der Risslast auf. Aus numerischen Gründen verbleibt eine Restzugfähigkeit in der Materialdefinition von 1 % der Betonzugfestigkeit, die jedoch nicht zu der hohen Resttragfähigkeit des Bauteils führen kann.

Die Risslasten in der Simulation der Bauteile SV 10 liegen über der rechnerischen Risslast von 5,3 kN (vgl. Abb. 6-12 b). Die Steifigkeit fällt jedoch nach Erreichen der rechnerischen Risslast bei allen Simulationen ab. Eine Definition des Zugtragverhaltens durch einen linearen Verlauf der Spannung über die Rissöffnung im Nachbruchbereich  $G_{f,lin}$  nach Gleichung (6-8) führt zur höchsten Risslast und zur höchsten Resttragfähigkeit. Dies kann durch eine bilineare Definition  $G_{f,bilin}$  nach den Gleichungen (6-9) und (6-10) reduziert werden. Die beste Übereinstimmung der Risslast und die geringste Resttragfähigkeit liefert eine Definition des Zugtragverhaltens über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung  $\epsilon_{lin}$  bei einer Elementgröße von 5 mm. Auch hier verbleibt eine sehr hohe Resttragfähigkeit, die nachfolgend über Querschnittsbetrachtungen untersucht wird.

Im nächsten Schritt werden die Referenzversuche der Serie SV 3 einschließlich der Bewehrung mit einer Elementgröße von 5 mm materiell nichtlinear simuliert. In Abb. 6-13 sind die Versuchsergebnisse den Simulationsergebnissen gegenübergestellt.

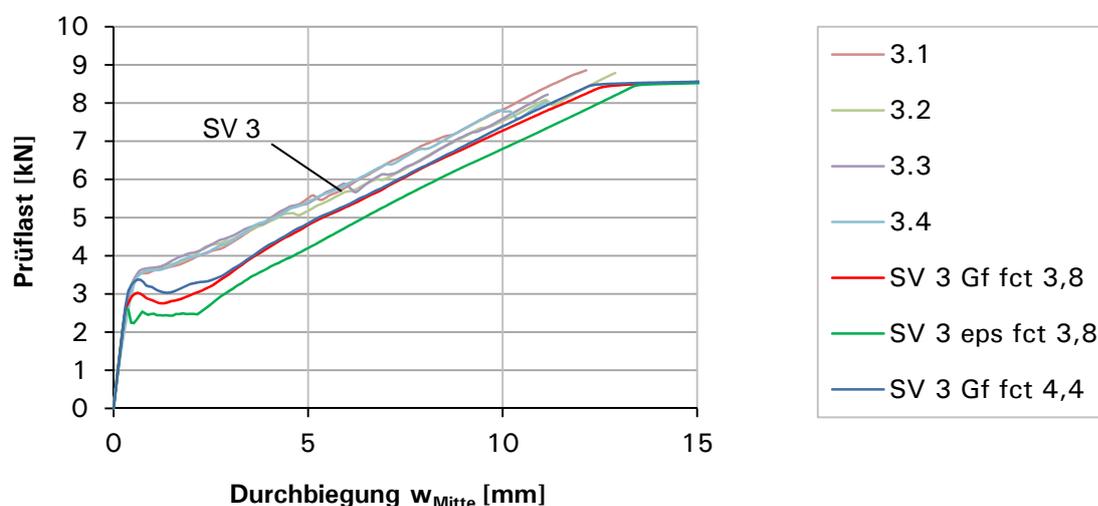


Abb. 6-13: Versuchs- und Simulationsergebnisse des Referenzbauteils SV 3

Es kann ein leichter Einfluss der Bewehrung auf die Risslast festgestellt werden. Im Vergleich zur unbewehrten Modellierung mit einer Risslast von 2,6 kN, liegt die Risslast der Simulation (SV 3  $G_{f,lin}$ ) jetzt bei 3,1 kN. Wie bei der unbewehrten Simulation führt eine Beschreibung des Zugtragverhaltens mit einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung zur geringsten Risslast. Die Rissbildungsphase ist zu stark ausgeprägt, was zu einer erhöhten Feldmittendurchbiegung führt.

Bisher wurde die Deckschichtmischung RA mit der geringsten im Zugversuch ermittelten zentrischen Zugfestigkeit von 3,8 N/mm<sup>2</sup> angesetzt. Die Betonzugfestigkeit streut jedoch deutlich mehr als die Druckfestigkeit. Weiterhin unterliegt die Biegezugfestigkeit einem deutlichen Maßstabseffekt mit abnehmender Bauteilgröße. Daher wird eine weitere Simulation (SV 3  $G_{f,lin}$   $f_{ct}$  4,4) mit einer aus der Druckfestigkeit errechneten zentrischen Zugfestigkeit von 4,37 N/mm<sup>2</sup> untersucht. Dies führt zu einer weiteren Annäherung an die Risslast im Versuch.

Die Traglast wird in allen Simulationen durch Fließen der Bewehrung erreicht und korrekt wiedergegeben. Die Traglast ist weitestgehend unabhängig von der Spannungsantwort des Betons. Die Steifigkeit im Zustand I und im Zustand II wird von allen Simulationen gut getroffen.

Abb. 6-14 zeigt den Normalspannungsverlauf über die Bauteilhöhe in Feldmitte des Bauteils SV3.

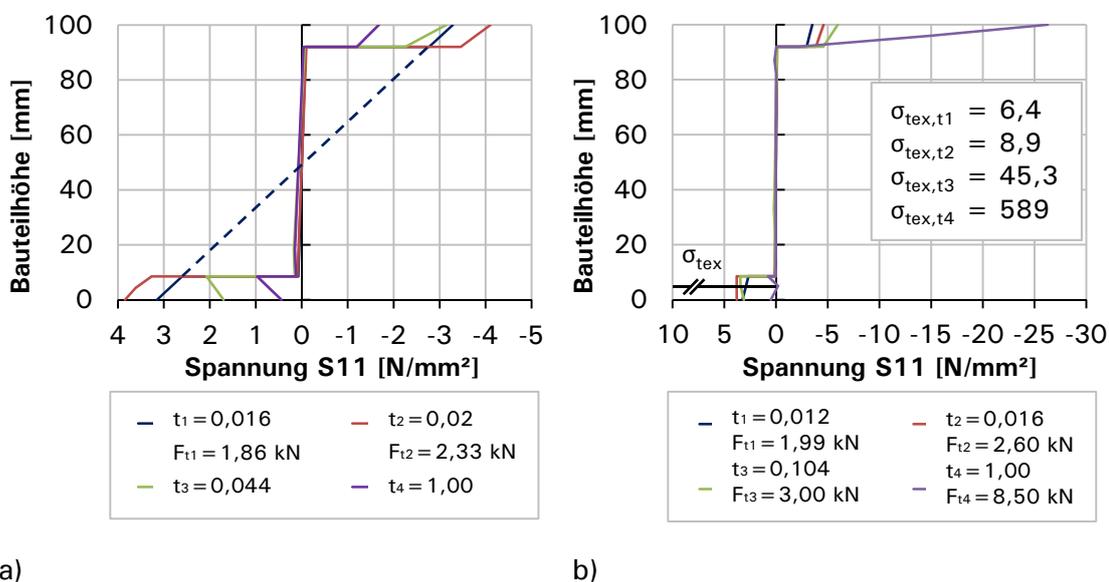


Abb. 6-14: Normalspannungen des Bauteils SV 3 in Feldmitte über die Bauteilhöhe zu definierten Belastungszeitpunkten unbewehrt (a) und bewehrt (b)

Abb. 6-14 a) zeigt ein unbewehrtes Bauteil. Wenn der Balken homogen aus einem Material bestehen würde, würde im ungerissenen Zustand ein linearer Spannungsverlauf über die Bauteilhöhe vorliegen. Der Quotient des Spannungssprungs von

2,6 N/mm<sup>2</sup> auf 0,076 N/mm<sup>2</sup> zum Zeitpunkt  $t_1$  zwischen Deckschicht und Kern beträgt gerade die Reduktionszahl  $n$  der E-Moduln von 34,3 (vgl. Anhang E). Nach Erreichen der Zugfestigkeit von 3,8 N/mm<sup>2</sup> in der Zugzone ab dem Zeitpunkt  $t = 0,02$  gehen die Betonzugspannungen zurück. Die Betonzugspannungen am unteren Rand können jedoch diesen Wert kurzfristig leicht überschreiten, da der Dehnungsverlauf aus den Integrationspunkten des Elements extrapoliert wird. Im unbewehrten Bauteil fallen mit zunehmender Verschiebung der Lasteinleitungspunkte die Betonspannungen weiter ab, verbleiben aber bei den Zugspannungen auf einem Niveau von 1 N/mm<sup>2</sup>. Dieser Wert liegt deutlich über der verbleibenden definierten Restzugfähigkeit des Betons von 0,04 N/mm<sup>2</sup> und führt zu der in Abb. 6-12 dargestellten verbleibenden hohen Resttragfähigkeit des unbewehrten Bauteils.

Im Fall des bewehrten Bauteils (vgl. Abb. 6-14 b) übernimmt die textile Bewehrung die Zugkraft aus dem Beton, dessen Zugspannung zum Zeitpunkt  $t = 1$  auf nahezu Null zurückgeht. Das sich einstellende innere Kräftepaar zwischen oberer Deckschicht und Textilbewehrung lässt sich gut erkennen. Die Prüfkraft kann nach Erreichen der Textilbruchspannung nicht weiter gesteigert werden.

#### 6.2.4 Simulation der Versuche der Hauptausführung

In diesem Abschnitt wird die Simulation der Versuchskörper der Hauptausführung (vgl. Abschnitt 5.2) beschrieben und ausgewertet. Dabei werden einige maßgebende Parameter des numerischen Modells auf ihren Einfluss auf das Simulationsergebnis untersucht. In Abb. 6-15 sind die Simulationsergebnisse des stahlbewehrten Versuchs V2 dargestellt. Die maximale Kantenlänge eines Elements wurde zu 20 mm gewählt. Je nach Deckschichtstärke ergeben sich kleinere Elementkantenlängen (vgl. Abb. 6-6). In Bauteilquerrichtung entspricht die Kantenlänge der Bauteilbreite.

In Abb. 6-15 sind vier Simulationen dargestellt, die sich bei der Eingabe des Betonzugtragverhaltens unterscheiden. Die Steifigkeit im Zustand I wird von allen Simulationen im Vergleich zur analytischen Steifigkeit im Zustand I gut getroffen. Die Versuche erreichen aufgrund ihrer Vorschädigung durch Biegerisse eine geringere Steifigkeit. Die Traglast wird von allen Simulationen übereinstimmend wiedergegeben.

Die Simulation mit einer Definition des Zugtragverhaltens durch einen linearen Verlauf der Spannung-Rissöffnungs-Beziehung im Nachbruchbereich (V2  $G_{f,lin}$ ) nach Gleichung (6-8) führt zu einer leichten Überschätzung der Risslast. Die Rissbildungsphase wird durch ein Abfallen der Prüflast um 30 % gekennzeichnet. Anschließend steigt die Last-Verformungs-Kurve parallel zur analytischen Gerade des reinen Zustands II bis zum Erreichen der Fließgrenze des Stahls an. Darauf folgte nur noch eine geringe Laststeigerung bis zum Erreichen der Bruchdehnung des Stahls. Durch eine bilineare Definition (V2  $G_{f,bilin}$ ) nach den Gleichungen (6-9) und (6-10) kann die

Prüflast bei Erstriss reduziert werden, die Last-Verformungs-Kurve sinkt im Anschluss an die Risslast noch tiefer ab.

Eine ähnliche Überschätzung der Erstrisslast ergibt sich bei der Definition des Zugtragverhaltens über eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung mit linear abfallendem Ast ( $V2 \epsilon_{lin}$ ). Bei dieser Definition ist jedoch eine anschließende ausgeprägte Rissbildungsphase zu sehen. Eine bilineare Definition des abfallenden Asts der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ( $V2 \epsilon_{bilin}$ ) mit einem schnelleren Abfall auf die verbleibende Restzugfestigkeit führt zu einer leichten Unterschätzung der Erstrisslast. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bleibt bei dieser Definition unberücksichtigt.

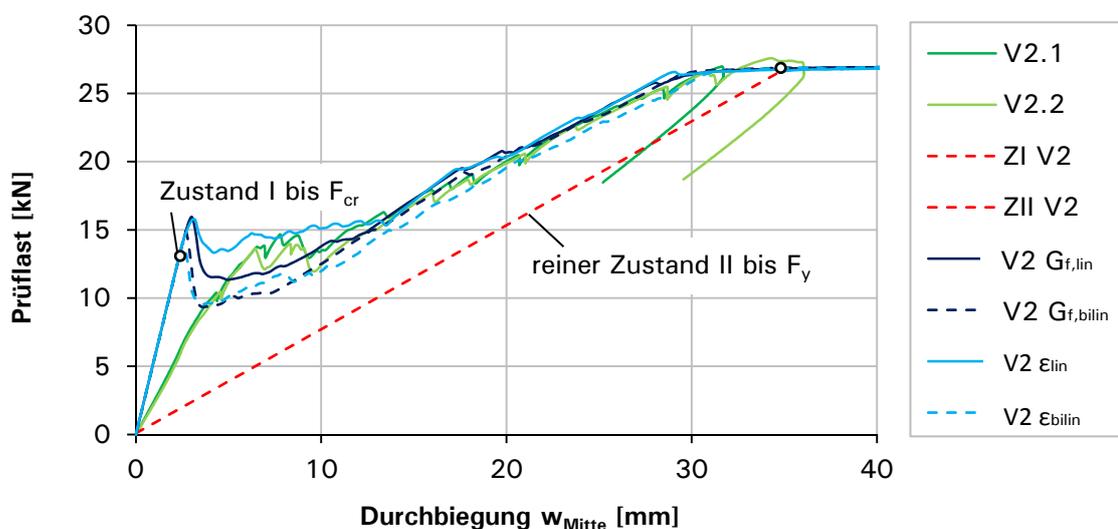


Abb. 6-15: Simulationsergebnisse der Bauteile V2

In Abb. 6-16 sind die Simulationsergebnisse des textilbewehrten Versuchs V1 mit Biegezugversagen dargestellt. Der Versuch V1.1 versagte, wie in Kapitel 5.2.4 beschrieben, 21 % unter der analytischen Traglast. Diese legte jedoch die ursprünglich in Zugversuchen ermittelte Textilbruchspannung  $\sigma_{tex} = 1645 \text{ N/mm}^2$  zugrunde. Wird auch in der Simulation  $\sigma_{tex} = 1645 \text{ N/mm}^2$  angesetzt ( $V1 \epsilon_{lin} 10 \sigma_{tex} 1645$ ) stimmt diese mit der analytischen Bruchlast überein, überschätzt aber den Versuch. Wird die Textilbruchspannung zu  $\sigma_{tex} = 1300 \text{ N/mm}^2$  angesetzt ( $V1 \epsilon_{lin} 12 \sigma_{tex} 1300$ ) stimmen Versuch und Simulation gut überein. Weiterhin ist zu erkennen, dass der Versuch V1.2 aufgrund eines zu geringen möglichen Verfahrenswegs vorzeitig beendet wurde.

Der geplante Aufbau der Bauteile V1.1 und V1.2 besteht aus zwei 10 mm starken mit Kohlefasern bewehrten Deckschichten. Da im vorliegenden Fall die Risslast von der ursprünglichen Simulation ( $V1 \epsilon_{lin} 10 \sigma_{tex} 1645$ ) unterschätzt wurde, dieselbe Definition die Risslast des Versuchs V2 jedoch leicht überschätzt, wurde die Deckschichtdicke des Versuchs V1.1 nachgemessen. Die Überprüfung ergab eine Variation der Deckschichtdicke zwischen 10 und 14 mm (vgl. Anhang F.3). Daher wurde

in den weiteren Simulationen (V1  $\epsilon_{iin} 12 \sigma_{tex} 1300$ ) und (V1  $G_{f,lin} 12 \sigma_{tex} 1300$ ) die gezogene Deckschicht auf mittlere 12 mm erhöht, was zu einer guten Übereinstimmung mit dem Versuch führt.

Die Steifigkeit im Zustand I und II sowie die Risslast und die Traglast kann in der Simulation korrekt abgebildet werden. Die Definition des Zugtragverhaltens liefert sowohl für die Spannungs-Rissöffnung-Beziehung als auch für die Spannungs-Dehnungs-Beziehung ähnliche Ergebnisse.

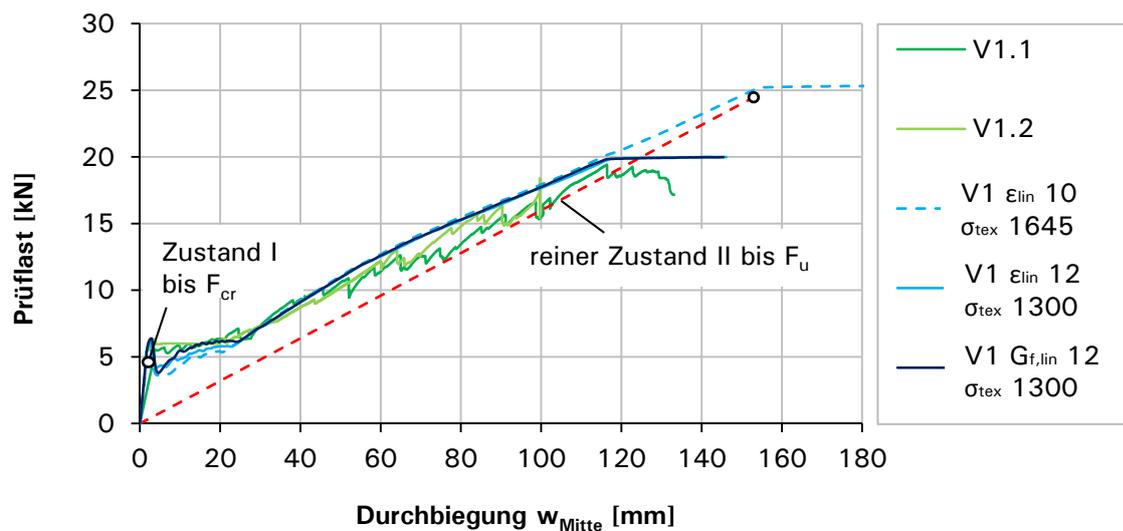


Abb. 6-16: Simulationsergebnisse der Bauteile V1

In Abb. 6-17 sind die Stahllängsdehnungen des Versuchs V 2.2 zu definierten Belastungszeitpunkten über die halbe Bauteillänge dargestellt. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Messwerte, die durchbrochenen stammen aus der numerischen Simulation (V2  $G_{f,lin}$ ). Unterhalb der Erstrissbildung (5,6 kN und 10 kN) fallen die Stahldehnungen in der Simulation geringer als die geprüften Dehnungen aus. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die DMS sowohl in Feldmitte (S1 und S2) als auch unter der Lasteinleitung (S3 und S4) in unmittelbarer Nähe der Vorschädigung liegen (Biegerisse) und damit größere Stahldehnungen zu erwarten sind. Das starke Ansteigen der Stahldehnungen in der Simulation korrespondiert mit dem Fortschreiten der Rissfront. Bei der Laststufe 26,5 kN ist die Rissbildung im Versuch bereits weit auf das Auflager zugewandert und die Stahldehnungen im Abstand 625 mm vom Auflager (S5 und S6) fallen höher aus als in der Simulation. Dies lässt sich mit dem im Modell angenommenen starren Verbund zwischen Beton und Bewehrung erklären, der außerhalb des Rissbereichs zu schnell abfallenden Stahldehnungen führt. Weiterhin fällt auf, dass im gerissenen Zustand die Stahldehnungen unter der Lasteinleitung und in Feldmitte auf gleichem Niveau liegen und damit bei gleicher Prüflast Stahlfließen eintritt.

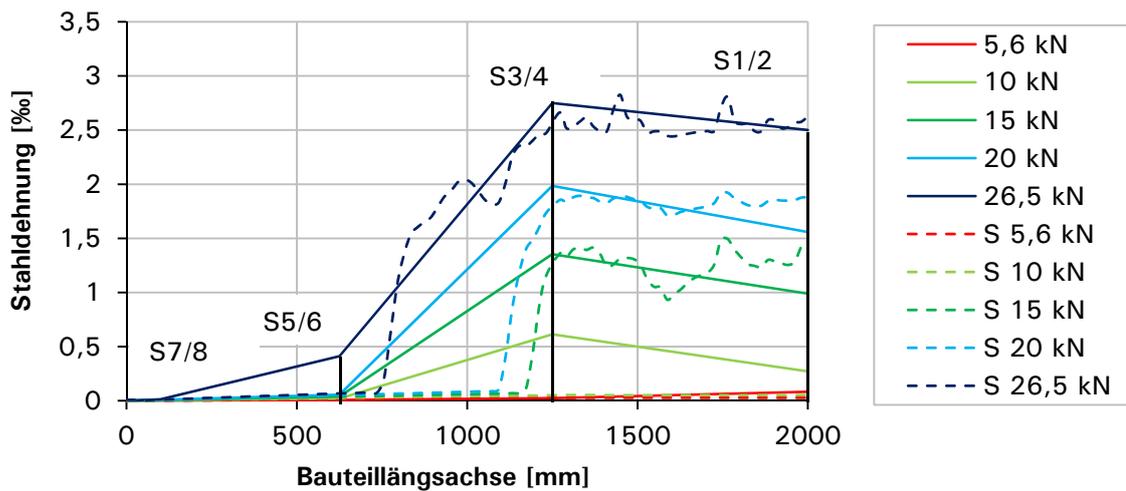


Abb. 6-17: Stahllängsdehnungen entlang der Bauteillängsachse im Versuch V2.2 und der Simulation

Abb. 6-18 zeigt die plastischen Dehnungen des Betons bei Erreichen der Traglast. Diese korrespondieren mit dem Rissbild im Versuch. Im Bereich des konstanten Moments stellen sich mehrere Dehnungsbänder ein, die durch Fließen der Bewehrung zum Versagen des Bauteils führen. Da in diesen Bereichen theoretisch identische Spannungszustände vorliegen, lokalisiert das Versagen nicht wie im Versuch durch Öffnung eines Risses. Eine weitere Möglichkeit zur Approximation des Rissbildes würde eine Auswertung der Zugschädigung der Elemente bieten [54].

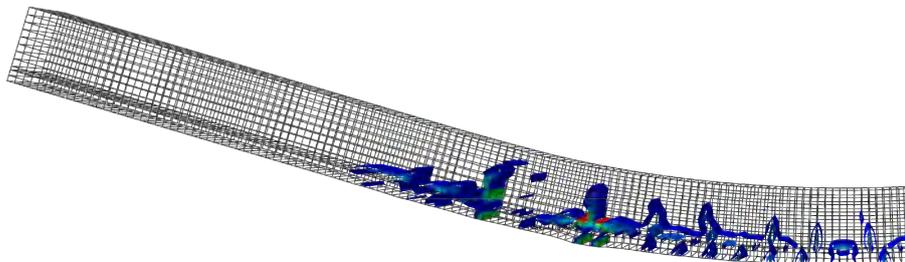


Abb. 6-18: Plastische Betondehnungen der Ausgangssimulation im Traglastzustand des Versuchs V2

Neben dem Biegezugversagen können auch weitere Versagensarten wie Querkraftversagen und das Versagen der unteren Längsfuge für gradierete Betonbalken maßgebend werden. Das Erreichen der Querkrafttragfähigkeit kann durch mehrere Versagensmechanismen ausgelöst werden (vgl. Abb. 5-8). Mehrere Autoren wie z.B. [54,55] haben gezeigt, dass es mithilfe der materiell nichtlinearen FEM-Analyse möglich ist, typische Zustände des Querkrafttragverhaltens wie die Querkrafttragfähigkeit, das Verformungsverhalten und die Rissbildung zu beschreiben. Um dies zu erreichen, muss nach [54] von einem impliziten Lösungsalgorithmus (Abaqus Standard) auf eine explizite Methode zur Lösung eines quasi-statischen Problems (Abaqus

Explicit) übergegangen werden. Bei der expliziten Simulation wurde ein großer Einfluss der Geschwindigkeit der Lastaufbringung auf das Ergebnis beobachtet. Latte [54] schließt, dass die explizite Simulation des Querkrafttragverhaltens bei einer iterativen Anpassung der Belastungsgeschwindigkeit zur Nachrechnung von Versuchen geeignet ist, sich eine Entwurfsvorhersage aber schwer evaluieren lässt.

### 6.2.5 Zusammenfassung der Simulationsergebnisse

In Kapitel 6 wurden die verschiebungsgesteuerten Versuche aus Kapitel 5 mithilfe einer materiell nichtlinearen Simulation in Abaqus nachvollzogen. Der Modellaufbau in der Simulation entspricht dem Versuchsaufbau.

Das verwendete Materialmodell Concrete Damaged Plasticity konnte auf Grundlage der vorhandenen experimentell ermittelten Betonkennwerte kalibriert werden. Mithilfe von Kennwerten aus der Literatur wurde es auf drei Dimensionen erweitert und bildet das komplexe materiell nichtlineare Tragverhalten von Beton gut ab. Auch die Versuchsergebnisse zum Tragverhalten der Bewehrungsmaterialien konnten in ein nichtlineares Materialmodell implementiert werden.

Das Tragverhalten der gradierten Bauteile konnte mithilfe der materiell nichtlinearen Simulation gut abgebildet werden und es kommt zu einer guten Übereinstimmung der Last-Verformungs-Kurven in den Versuchen und der Simulation sowie der analytisch ermittelten Kennpunkte. Dies liegt auch an dem Biegezugversagen in den Versuchen, welches mit der vollständigen Plastifizierung der Bewehrung genau abgebildet werden kann. Die Systemantwort bei Erreichen der Traglast ist relativ unabhängig von den Betonmaterialparametern, da das Fließen der Bewehrung maßgebend wird.

Bei der numerischen Abbildung weiterer Versagensarten wie dem Querkraftversagen wäre die Modellierung des abfallenden Astes des Betons unter Druckbeanspruchung notwendig, der in den bisherigen Versuchen nicht aufgezeichnet wurde.

Die Steifigkeiten im Zustand I und II sowie die Risslasten und die Traglasten stimmen im Rahmen der zu erwartenden Abweichungen überein. Die im Versuch gemessenen Stahl- und Betondehnungen können mithilfe der Simulation nachvollzogen werden.

Bei der Nachrechnung der skalierten massiven Prüfkörper (SV10.3 und SV10.4) ergab sich eine höhere Risslast als im Versuch. Die Beschreibung des einaxialen Betonverhaltens unter Zug hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Risslast. Daher werden die zwei möglichen Definitionen über die Spannungs-Dehnungs-Beziehung und die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung (Bruchenergie) verglichen. Für den vorliegenden Fall von bewehrten Bauteilen lieferten beide Definitionen ähnliche Ergebnisse. Aufgrund der Elementgrößenunabhängigkeit der Definition über die Bruchenergie wird diese Eingabemöglichkeit favorisiert.

Das numerische Modell bietet eine gute Ausgangsbasis für Parameterstudien und für die Bewertung der Ergebnisse aus den nachfolgenden Topologieoptimierungen.

## 7 Ermittlung des „Gradientenlayouts“ mithilfe numerischer Optimierungsverfahren

### 7.1 Grundlagen der numerischen Optimierung

Die Verwendung von dichtegradienten Strukturen hat das tragstrukturelle Ziel, mit einem Minimum an Materialeinsatz eine gegebene Belastung unter Einhaltung von Verformungsbegrenzungen abzutragen. Die Entwicklung der optimalen Eigenschafts- und Materialverteilung im Bauteil, das sogenannte „Gradientenlayout“, stellt dabei eine besondere Herausforderung dar. Bei einfachen Tragwerken können noch natürliche Vorbilder oder aus der Literatur bekannte Größen wie die Hauptspannungstrajektorien zur Orientierung herangezogen werden. Spezielle Optimierungsprobleme wie Michell-Strukturen lassen sich analytisch lösen [56]. Dies ist jedoch bei räumlich komplexen Tragwerken nicht mehr möglich. Um diese Entwurfsaufgabe erfüllen zu können, müssen automatisierte numerische Routinen entwickelt und die Lösung in einem iterativen Prozess gefunden werden. Dass die Strukturoptimierung dieser Zielsetzung entspricht, zeigt die Formulierung Bletzingers zur Definition der Optimierungsaufgabe:

„Finde das Tragwerk, das möglichst leicht [...] ist, das also die Gütekriterien der gewählten Zielfunktion möglichst gut erfüllt und gleichzeitig bei allen denkbaren Lastfällen die physikalischen, technischen oder sonstigen Anforderungen erfüllt.“ [57]

In der Strukturoptimierung wird zwischen den drei Anwendungsbereichen Dimensionierung, Formoptimierung und Topologieoptimierung unterschieden (vgl. Abb. 7-1). Die Dimensionierung wird eingesetzt, um skalare Größen wie Blechdicken oder Wandstärken zu optimieren. Bei der Formoptimierung wird die äußere Gestalt verändert, um beispielsweise Spannungsspitzen an Schweißnähten zu minimieren. Die Topologieoptimierung beschäftigt sich mit der optimalen Materialverteilung in einem Entwurfsraum. Dabei wird im Laufe der Optimierungsschleifen Material entnommen oder umgelagert. Die verbleibende gelochte Struktur ist unter einer gegebenen Belastung möglichst voll ausgenutzt. Ziele und Herangehensweise der Topologieoptimierung decken sich mit dem Ansatz der Dichtegradierung eines Bauteils. Daher wird dieser Lösungsansatz weiterverfolgt.

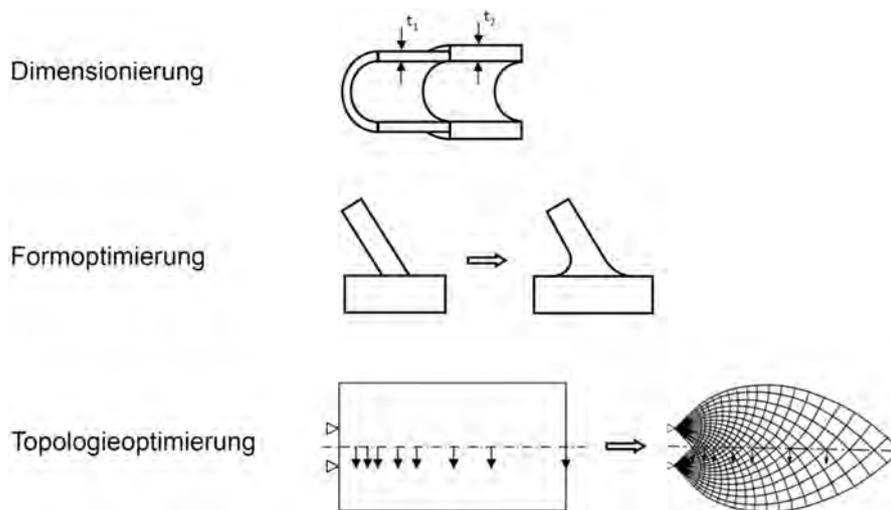


Abb. 7-1: Veranschaulichung der Optimierungsverfahren nach [58]

## 7.2 Mathematische Beschreibung der Optimierungsaufgabe

Das Optimierungsziel wird als skalare Zielfunktion  $f(\mathbf{x})$  in Abhängigkeit der Entwurfsvariablen  $\mathbf{x}$  formuliert. Ist der Lösungsraum beschränkt, werden diese Restriktionen durch Gleichheitsnebenbedingungen  $h(\mathbf{x})$  oder Ungleichheitsnebenbedingungen  $g(\mathbf{x})$  berücksichtigt. Während der Optimierungsschleifen wird der Entwurfsvariablenvektor  $\mathbf{x}$  variiert, so dass die Zielfunktion unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen einen Extremwert, in der Regel ein Minimum annimmt. Eine Maximierung kann meist leicht durch einen Vorzeichenwechsel der Zielfunktion in eine Minimierungsaufgabe transformiert werden [58]. Die mathematische Formulierung des Optimierungsproblems wird in der Literatur [59–62] wie folgt definiert:

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (7-1)$$

mit:

$$g_j(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad j = 1 \dots n_g \quad (7-2)$$

$$h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad j = 1 \dots n_h \quad (7-3)$$

Der Optimierungsalgorithmus verändert die Entwurfsvariable  $\mathbf{x}$  innerhalb des zulässigen Wertebereichs. Dieser wird durch eine untere  $\mathbf{x}^L$  und eine obere  $\mathbf{x}^U$  Grenze definiert.

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad i = 1 \dots n \quad (7-4)$$

Startpunkt der Optimierung ist ein zulässiger erster Entwurf („first guess“)  $\mathbf{x}^0$ . Der iterative Prozess der Optimierung lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k-1} + \Delta \mathbf{x}^{k-1} \quad (7-5)$$

Der gewählte Optimierungsalgorithmus bestimmt in jeder Iteration die Änderung aller Variablen  $\mathbf{x}^{k-1}$  in der k-ten Iteration um den Faktor  $\Delta \mathbf{x}^{k-1}$ . Ein optimierter Entwurf ist gefunden, wenn mit dem aktuellen Satz Entwurfsvariablen die Zielfunktion nicht weiter verbessert werden kann und die Nebenbedingungen eingehalten sind. Dies wird über ein Abbruchkriterium wie die Konvergenz der Zielfunktion überprüft. Das Abbruchkriterium kann aber auch eine festgelegte Anzahl an Iterationen darstellen. Bei dieser Variante lässt sich jedoch nicht sicherstellen, dass ein Optimum erreicht wird.

Sollen mehrere konkurrierende Optimierungsziele wie Volumen und Steifigkeit gleichzeitig verfolgt werden, spricht man von einer Mehrkriterien- oder Pareto-Optimierung [63]. Eine gleichzeitige optimale Erfüllung aller Ziele ist nicht möglich. Das Ergebnis stellt einen Kompromiss der Zielfunktionswerte dar.

Abb. 7-2 stellt eine geometrische Interpretation der Begrifflichkeiten der Strukturoptimierung für den Fall von zwei Designvariablen  $x_1$  und  $x_2$  dar. Der zulässige Bereich  $X$  wird durch die Ungleichheitsnebenbedingung  $g(\mathbf{x})$  eingeschränkt. Funktionswerte der Zielfunktion, die außerhalb liegen ( $g(\mathbf{x}) > 0$ ), sind unzulässig. Die Isolinien stellen dabei Linien gleicher Zielfunktionswerte ( $f(\mathbf{x}) = \text{konst.}$ ) dar. Das Optimum stellt den kleinsten Zielfunktionswert im zulässigen Bereich dar.

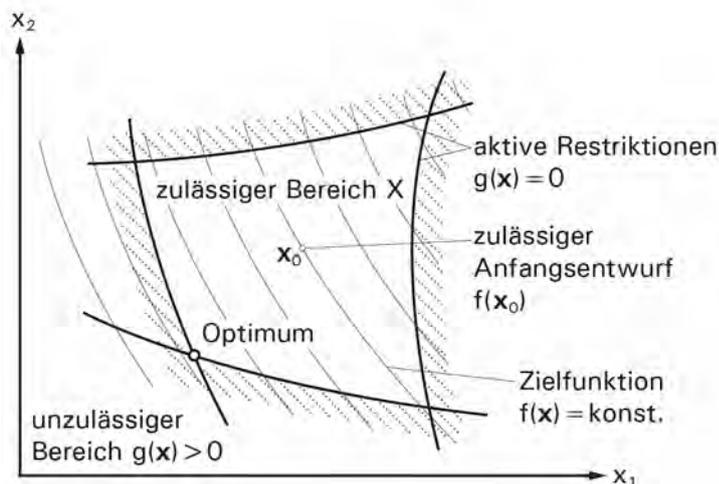


Abb. 7-2: Begrifflichkeiten der Strukturoptimierung nach [60]

Bildlich kann das Optimierungsproblems mit einer Gebirgslandschaft und die Linien gleicher Zielfunktionswerte mit Höhenlinien veranschaulicht werden [58]. Die Restriktionen können als Zäune in der Gebirgslandschaft aufgefasst werden, die nicht passierbar sind. Die Suche nach dem Optimum ist die Suche nach dem tiefsten Punkt der Gebirgslandschaft innerhalb des eingezäunten Bereichs. Geht man von einem

Startpunkt aus immer den steilsten möglichen Pfad bergab, endet man in einem Minimum (tiefster Punkt). Dieses Minimum kann unabhängig von den Restriktionen sein oder eine oder mehrere Restriktionen werden aktiv. Bestehen im zulässigen Bereich mehrere Täler, so kann man sich in einem lokalen Minimum verlaufen. Ob mehrere Extremstellen in einem Entwurfsraum vorhanden sind, kann über das Kriterium der Konvexität überprüft werden (vgl. z.B. [58]). Da in der Praxis jedoch nicht bekannt ist, ob ein konvexes Problem vorliegt, kann man nicht sagen, ob ein lokales oder globales Optimum erreicht wurde. Jedoch stellt auch ein lokales Optimum eine Verbesserung zum Ausgangsentwurf dar und ist somit erstrebenswert.

Die Optimierungsaufgabe wird als mathematisches Problem so formuliert, dass sie mithilfe von Verfahren der mathematischen Programmierung gelöst werden kann. Hierfür wird das Optimierungsproblem, welches meist durch Nebenbedingungen beschränkt ist, mithilfe der Einführung der Lagrange-Funktion in ein unbeschränktes Problem überführt.

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T h(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\gamma}^T g(\mathbf{x}) \quad (7-6)$$

Die notwendige Bedingung für ein lokales Minimum der Zielfunktion in  $\mathbf{x}^*$  wird über die Kuhn-Tucker-Bedingungen [64] ausgedrückt, die einen Sattelpunkt der Lagrange-Funktion definiert.

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\lambda}^T \nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (7-7)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = h(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (7-8)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^* \nabla_{\boldsymbol{\gamma}} L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) = \boldsymbol{\gamma}^* g(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{mit } \boldsymbol{\gamma}^* \geq \mathbf{0} \quad (7-9)$$

Hierbei bezeichnet  $(\cdot^*)$  die Lösung und  $\nabla(\cdot)$  stellt die Ableitung nach der jeweiligen Größe dar.

Abb. 7-3 veranschaulicht diese Bedingungen. Die 1. Kuhn-Tucker-Bedingung - Gleichung (7-7) - bedeutet, dass im Optimum die Gradienten der Zielfunktion und der aktiven Restriktionen antiparallel stehen. Gleichung (7-8) sagt aus, dass die Gleichheitsnebenbedingung erfüllt sein muss. Gleichung (7-9) bedeutet, dass im Fall der aktiven Ungleichheitsnebenbedingung  $g(\mathbf{x})$  zu null und  $\boldsymbol{\gamma}$  ungleich null wird oder falls die Ungleichheitsnebenbedingung nicht aktiv, aber erfüllt ist,  $\boldsymbol{\gamma}$  zu null wird. Die notwendige Bedingung wird um die positive Definitheit der Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion zur hinreichenden Bedingung erweitert.

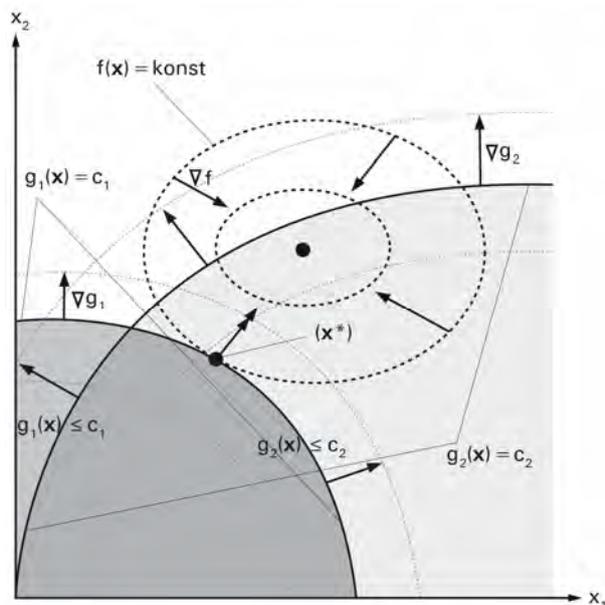


Abb. 7-3: Veranschaulichung der Kuhn-Tucker-Bedingungen

## 7.3 Lösungsverfahren des Optimierungsproblems

Der Optimierungsalgorithmus bestimmt die Änderung der Entwurfsvariablen zum nächsten Analysesatz. In der Literatur besteht eine Vielzahl an Verfahren und Kategorisierungen, daher sollen nur die für diese Arbeit wesentlichen genannt werden. Es erfolgt eine Differenzierung in *Approximationsverfahren* als Untergruppe der Verfahren der mathematischen Programmierung und *Optimalitätskriterienverfahren* nach Harzheim [58]. Eine dritte wichtige Gruppe stellen die *Heuristischen Verfahren* wie die Monte-Carlo-Methode oder die Evolutionsstrategien dar. Diese führen zu sehr großem numerischen Aufwand, da eine Vielzahl zufällig gewählter Zielfunktionswerte berechnet werden müssen. Sie bieten aber auch die Möglichkeit, das globale Extremum zu finden. Auf die heuristischen Verfahren wird nicht weiter eingegangen, da sie im Rahmen dieser Arbeit nicht zum Einsatz kommen.

### 7.3.1 Verfahren der mathematischen Programmierung - Approximationsverfahren

Bei den Verfahren der mathematischen Programmierung werden die lokalen Eigenschaften der Zielfunktion und der Restriktionen verwendet, um die Veränderung der Entwurfsvariablen zu berechnen. Mithilfe der gesammelten Informationen über die Umgebung des aktuellen Entwurfs wird die neue Suchrichtung und Schrittweite bestimmt [65]. Dies kann auf Grundlage der Zielfunktionswerte (gradientenfreie Verfahren) oder unter Einbeziehung der Ableitungen der Zielfunktion geschehen (gradientenbasierte Verfahren). Da bei großen FEM-Systemen häufig die Berechnung der Strukturantwort einen Großteil der Iterationszeit im Vergleich zur Berechnung der

Gradienten der Zielfunktion einnimmt, werden häufig gradientenbasierte Verfahren verwendet, die mit weniger Iterationen zur Konvergenz führen.

Bei den *Approximationsverfahren* [66] werden anstatt der aufwändigen Berechnung der Systemantworten die Zielfunktion und die Restriktionen mithilfe einfacher Funktionen approximiert, um Rechenzeit zu sparen. Sie werden in lokale und globale Approximationsverfahren unterteilt. Eine lokale Approximation liefert nur hinreichend genaue Werte in der näheren Umgebung des aktuell untersuchten Punktes und wird in jeder Iteration neu berechnet. Im Gegensatz dazu kann die globale Approximation im gesamten Entwurfsraum verwendet werden. Das nachfolgend verwendete Verfahren der MMA (Method of Moving Asymptotes) [67] ist ein lokales Approximationsverfahren, daher wird auf die globalen Approximationsverfahren nicht näher eingegangen.

Zur Approximation einer Funktion  $f(x)$  wird häufig eine Taylor-Reihenentwicklung verwendet. Die Approximation kann linear, quadratisch oder höherer Ordnung, je nach Abbruch der Taylor-Reihe, erfolgen. Eine Veranschaulichung der Approximationsverfahren ist in [58] zu finden. Bei dem *SLP-Verfahren* (Sequentiel Linear Programming) werden die Zielfunktion und die Restriktionen linear approximiert. Das lineare Ersatzproblem besitzt nur ein Extremum, falls es vollständig restringiert ist. Um dieses Problem zu lösen, werden so genannte *Move Limits* definiert, welche die Schrittweite innerhalb einer Iteration einschränken, bis die Restriktionen aktiv werden. Eine weitere Möglichkeit dieses Problem zu lösen, stellt eine quadratische Approximation der Zielfunktion, wie beispielsweise beim *SQP-Algorithmus* (Sequentiel Quadratic Programming), dar.

Bei der *reziproken Approximation* fließt die Kenntnis über die Systemantwort in die Wahl des Approximationsansatzes mit ein. Größen wie Spannungen und Verschiebungen weisen einen reziproken Zusammenhang zu Abmessungen wie der Bauteildicke auf. Daher ist eine reziproke Approximation, d.h. eine Entwicklung der Taylorreihe nach dem Kehrwert der Entwurfsvariable zielführend.

Das *CONLIN-Verfahren* [68] stellt einen hybriden Ansatz dar, welcher zu einem konvexen und separierbaren Optimierungsproblem führt. Je nach Vorzeichen der ersten Ableitung der Zielfunktion wird eine lineare oder reziproke Approximation verwendet. Bei einer positiven Steigung wird linear approximiert, bei einer negativen reziprok. Hierdurch lassen sich die Systemantworten besser annähern.

Die *MMA* stellt einen verallgemeinerten Ansatz des CONLIN-Verfahrens dar. Mit der Einführung oberer und unterer Asymptoten in der Approximation werden alle Zwischenstufen zwischen linearer und reziproker Approximation möglich. Move Limits verhindern das Erreichen der Asymptoten und damit verbundene numerische Instabilitäten. Die oberen und unteren Asymptoten werden in jedem Iterationsschritt angepasst. Hierbei muss die Forderung nach einer konservativen Approximation der



### 7.3.2 Optimalitätskriterienverfahren

Bei den Optimalitätskriterienverfahren werden Kriterien aufgestellt, bei deren Erfüllung vom Erreichen des Optimums ausgegangen wird. Im Gegensatz zu den Approximationsverfahren wird der Entwurfsraum nicht geometrisch durchschritten, sondern über eine Redesignformel versucht, das Optimalitätskriterium zu erfüllen und damit zum Optimum zu gelangen.

Einerseits können als Optimalitätskriterien physikalisch anschauliche Bedingungen definiert werden wie beispielsweise die volle Ausnutzung des Materials im Tragwerk beim *Fully Stressed Design* oder natürliche Wachstumsregeln. Die adaptiven biologischen Wachstumsregeln wurden vom Wachstum der Bäume oder Knochen abgeleitet und am Forschungszentrum Karlsruhe entwickelt [70–72]. Die Entwurfshypothese beruht auf der Beobachtung, dass Spannungsspitzen in der Oberfläche durch die Wachstumsform vermieden werden.

Andererseits können Optimalitätskriterien mathematisch hergeleitet werden, z.B. basierend auf den Kuhn-Tucker-Bedingungen.

#### Fully Stressed Design

Beim Fully Stressed Design wird davon ausgegangen, dass bei voller Ausnutzung aller Tragwerksteile das Gesamtgewicht minimal wird. Aus dieser Annahme wird dann eine Iterationsvorschrift entwickelt, welche die Entwurfsvariable dahingehend verändert, dass das Optimalitätskriterium erfüllt wird [73].

Ein Stabtragwerk ist voll beansprucht, wenn jeder Stab  $i$  entweder den minimal möglichen Querschnitt  $x_i = x_i^L$  besitzt oder in einem Lastfall mit  $\sigma_i = \sigma_i^{\text{zulässig}}$  beansprucht wird. Der Iterationsalgorithmus für das Fully Stressed Design lautet dann:

$$x_i^{(k+1)} = \max\left(x_i^L, x_i^{(k)} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^{\text{zulässig}}}\right) \quad (7-10)$$

Das Fully Stressed Design stellt jedoch nur für statisch bestimmte Systeme, oder für statisch unbestimmte Systeme mit nur einem Einzellastfall das Gewichtsminimum dar [58]. Gegenbeispiel ist der Stabdreischlag mit zwei Lastfällen (vgl. z.B. [74,75]).

#### Optimalitätskriterien basierend auf den Kuhn-Tucker-Bedingungen

Die Kuhn-Tucker-Bedingungen stellen die mathematisch exakte Lösung des Optimierungsproblems dar. Lässt sich für ein vorliegendes Optimierungsproblem eine Iterationsvorschrift generieren, die gegen die Kuhn-Tucker-Bedingungen konvergiert, so kann diese als Optimalitätskriterium verwendet werden. Im Rahmen der Topologieoptimierung wird dieser Ansatz zur Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit unter Verwendung des SIMP-Ansatzes und der Berücksichtigung einer Volumenrestriktion erfolgreich eingesetzt. Die Herleitung dieses Ansatzes ist im Anhang G ausgeführt.

Die Verfahren der Optimalitätskriterien sind sehr schnell und effizient, jedoch nur für diejenigen Problemklassen einsetzbar, für die sie hergeleitet wurden. Für jede Optimierungsaufgabe muss das Vorgehen und die Redesingformel angepasst werden.

### 7.3.3 Verwendete Lösungsverfahren

Die Topologieoptimierungen im Rahmen dieser Arbeit wurden mit dem kommerziell verfügbaren Optimierungspaket ATOM (Abaqus Topology Optimization Module) durchgeführt. Das Programmpaket stellt sowohl ein Approximations- als auch ein Optimalitätskriterienverfahren zur Verfügung [76], welche auch in [77] beschrieben werden.

Das Approximationsverfahren wird als „Sensitivity Based Optimization Algorithm“ bezeichnet. Es handelt sich um die duale Methode in Kombination mit dem MMA-Verfahren. Die Vorteile dieses Verfahrens sind die freie Wahl der Zielfunktion und der Restriktionen. Auch Mehrkriterienoptimierungen lassen sich hiermit durchführen. Folgende Größen können sowohl als Zielfunktion als auch als Restriktionen verwendet werden: Formänderungsenergie, Volumen, Gewicht, Verschiebungen, Verdrehungen, Eigenfrequenzen, Auflagerkräfte, Schnittkräfte, Schwerpunkt und Flächenträgheitsmoment. Bei der gefundenen Lösung kann es sich um ein lokales Extremum handeln.

Das Optimalitätskriterienverfahren wird als „Controller Based Optimization for Stiffness“ bezeichnet. Die Zielfunktion beschränkt sich auf das Ziel der Minimierung der Verzerrungsenergie zur Maximierung der Steifigkeit. Als Restriktion kann einzig eine Volumenrestriktion eingesetzt werden. Der Algorithmus führt nach [76] zum globalen Optimum.

Beide Verfahren werden eingesetzt und die Lösungen analysiert. Die Abaqus-Hilfe empfiehlt als Strategie, mit dem Optimalitätskriterienverfahren zu beginnen, um eine erste Vorstellung der Lösung zu erhalten. Die Optimierung kann anschließend mithilfe des Approximationsverfahrens auf weitere Zielfunktionen ausgedehnt werden.

## 7.4 Kopplung der Strukturoptimierung an die FEM

Der iterative Ablauf einer Strukturoptimierung ist in Abb. 7-5 dargestellt [57,60]. Startpunkt ist ein Ausgangsentwurf im Entwurfsmodell. Das Analysemodell liefert nach jeder Optimierungsschleife eine Strukturantwort auf einen aktuellen Satz Entwurfsvariablen. Im Optimierungsmodell wird mit der Strukturantwort aus dem Analysemodell der aktuelle Zustand der Zielfunktion bestimmt und ein verbesserter Satz an Entwurfsvariablen errechnet. Je nach gewähltem Optimierungsverfahren wird zusätzlich die Sensivität, d.h. die Empfindlichkeit der Struktur auf die Veränderung der Entwurfsparameter, überprüft. Mit den hieraus erhaltenen Informationen lässt sich

ein verbesserter Satz neuer Entwurfsvariablen erzeugen. Auf die Sensitivitätsanalyse wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen und auf die Literatur, z.B. [75,78,79], verwiesen. Erreicht die Zielfunktion im Optimierungsmodell ihr Extremum und sind die Restriktionen eingehalten, ist ein optimierter Entwurf gefunden. Das Entwurfsmodell wird in Abaqus Standard aufgebaut. Anschließend werden die Optimierungsparameter im Optimierungsmodell mit Abaqus ATOM festgelegt. Als Analysemodell dient in jedem Iterationsschritt Abaqus Standard.

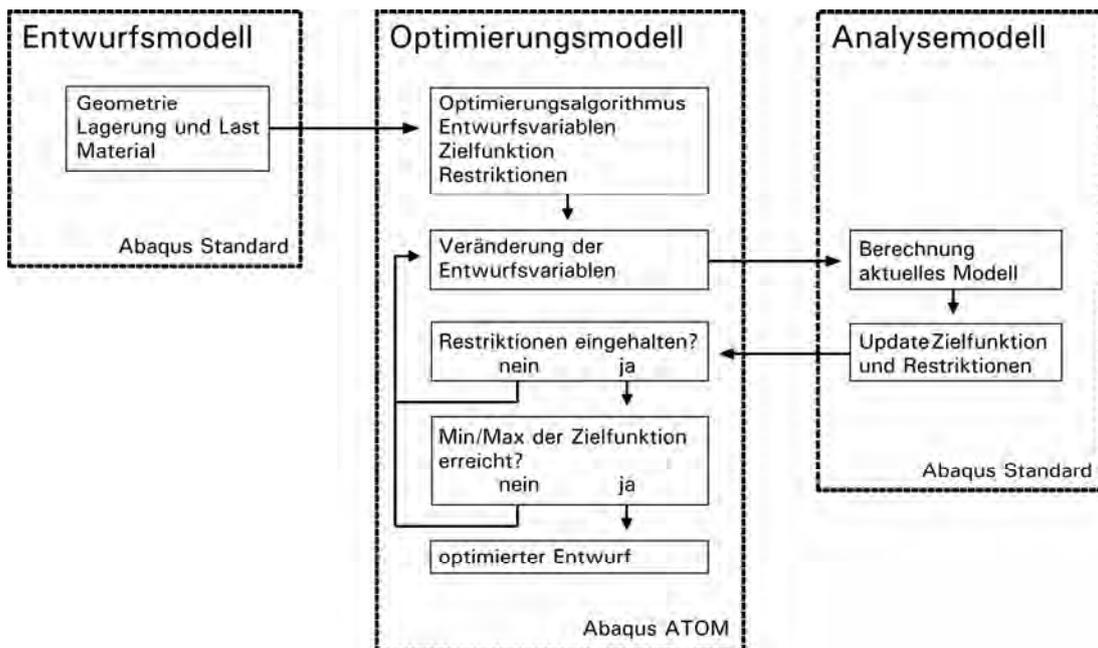


Abb. 7-5: Modell der Strukturoptimierung

## 7.5 Der SIMP-Ansatz in der Topologieoptimierung

Die Topologieoptimierung als Teil der Strukturoptimierung befasst sich mit der Verteilung des zur Verfügung stehenden Materials im Entwurfsraum und damit mit dem prinzipiellen Layout einer Struktur. Ziel ist es, das Material dort anzulagern, wo es für die Erfüllung des Entwurfsziels einen maximalen Beitrag liefert. Die Topologieoptimierung ist die flexibelste Form der Optimierung. Hiermit lassen sich Brückentypologien [79] entwickeln oder ein Materiallayout entwerfen. Lipka [61] unterscheidet im Rahmen der Topologieoptimierung zwischen einem geometrischen, einem materiell diskreten und einem materiell kontinuierlichen Ansatz.

Unter dem *geometrischen Ansatz* wird das definierte Einbringen von Löchern im Entwurfsraum verstanden, deren Größe und Form in einem zweiten Schritt angepasst wird. Beim *materiell diskreten Ansatz* werden endlich viele Stab- und Balkenelemente im Entwurfsraum optimal angeordnet. Die beiden Ansätze eignen sich weniger für die Optimierung einer inneren Porenstruktur.

Beim *materiell kontinuierlichen Ansatz* werden die Löcher nicht tatsächlich eingebracht, da ansonsten die Vernetzung angepasst werden müsste, sondern simuliert. Dies geschieht über die stetige Veränderung des E-Moduls für jedes Element  $i$ , der über die Entwurfsvariable  $x_i$  gesteuert wird. Bei der Entwurfsvariablen  $x_i$  handelt es sich um die auf 1 normierte Dichte  $x_i = \rho_i/\rho_i^0$ , die auch als relative Dichte bezeichnet wird. Für den unteren Grenzwert  $x_i^L$  nimmt der E-Modul einen unteren Grenzwert  $E_{\min}$  ein. Klassischerweise wird ein Element mit  $E_{\min}$  als Loch angesehen. Liegt für die Entwurfsvariable der obere Grenzwert  $x_i^U = 1$  vor, nimmt der E-Modul den oberen Grenzwert  $E_{\max}$  an und es liegt ein massives Element vor. Zwischen den Grenzwerten besteht ein stetiger Zusammenhang von der Entwurfsvariable und dem E-Modul, z.B. ein Potenzansatz beim SIMP-Ansatz. Als Nebenbedingung begrenzt ein Füllgrad  $\zeta$  die im Entwurfsraum zur Verfügung stehende Gesamtmasse (z.B.  $\zeta = 0,3$ ). Aus Gründen der numerischen Stabilität kann die untere E-Modulgrenze  $E_{\min}$  nicht null sein.

Beim SIMP-Ansatz (Solid Isotropic Material with Penalization) [59,80] wird der Zusammenhang zwischen dem E-Modul  $E_i$  und der Designvariablen  $x_i$  über folgenden Potenzansatz beschrieben:

$$E_i = (x_i)^p E_i^0, \quad p > 1 \quad (7-11)$$

$$x_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^0} \quad (7-12)$$

$E_i^0$  ist der E-Modul eines massiven Elements,  $\rho_i^0$  die Dichte eines massiven Elements. Abb. 7-6 zeigt den Zusammenhang zwischen normiertem E-Modul und relativer Dichte für variierende Exponenten  $p$ .

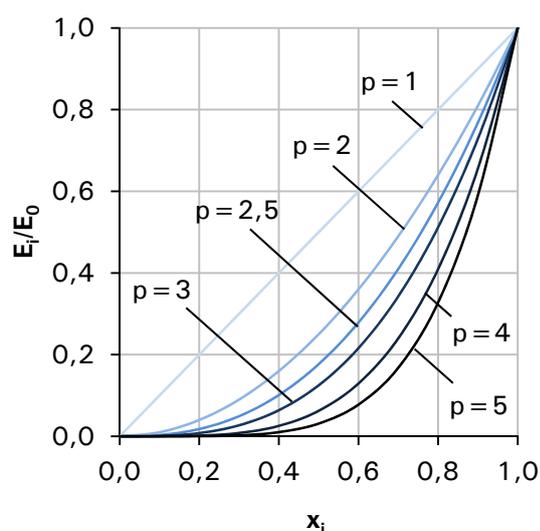


Abb. 7-6: Der SIMP-Ansatz für verschiedene Exponenten  $p$  nach [58]

Der Ansatz wurde mit dem Ziel einer 0-1-Verteilung entwickelt. Der nichtlineare Verlauf zwischen  $x_i^L$  und  $x_i^U$  wurde zur Sicherstellung der numerischen Stabilität eingeführt. Mit steigendem Exponenten  $p$  werden die mittleren Dichten unökonomischer für den Algorithmus. Mit einem Mehreinsatz von Masse wird weniger Steifigkeit erreicht. Daher entwickelt sich die Entwurfsvariable hin zu der oberen und unteren Grenze. Nach [58] muss häufig ein Exponent von  $p \geq 3$  verwendet werden, um „scharfe“ 0-1-Entwürfe zu erzeugen. Diese sind bei klassischen Anwendungen der Topologieoptimierung wie einer Achsaufhängung durchaus erwünscht, da bei der Herstellung nur Vollmaterial oder kein Material realisiert werden kann. Die Dichtegradierung von Bauteilen ermöglicht jedoch die zielgenaue, kontinuierliche Einstellung der Dichte und mittlere Dichten lassen sich erstmals realisieren.

## 7.6 „Gradientenlayout“ durch Topologieoptimierung

Zur Entwicklung des Gradientenlayouts wurden die nachfolgend ausgeführten zwei Ansätze der Topologieoptimierung untersucht. Das Entwurfsmodell der Optimierung ist in Abb. 7-7 dargestellt. Es zeigt den Startentwurf in Abaqus, belastet mit vier Einzellasten zu je 100 N in der Lastposition 1 (1250 mm vom Auflager). Da die Optimierung mit linear elastischen Materialmodellen durchgeführt wird, hat das Spannungsniveau der Elemente und damit die Höhe der Belastung keinen Einfluss auf das Optimierungsergebnis. Jedes Betonelement des Startentwurfs ist homogen mit den Eigenschaften der gefügedichten Mischung RA belegt. Die Bewehrung ist wie in Kapitel 6 beschrieben in das Modell eingebettet. Die bewehrten Bereiche werden zur Sicherstellung des Verbundes und der Dauerhaftigkeit von der Optimierung ausgenommen, jedoch bei der Berechnung Systemantwort berücksichtigt. Im Laufe der Optimierung hat sich gezeigt, dass die Elementtiefenausdehnung, welche bisher immer zur tatsächlichen Bauteilbreite von 400 mm angesetzt wurde, einen großen Einfluss auf das Optimierungsergebnis hat (insbesondere bei der Materialverteilungsstrategie). Daher wird die Elementtiefenrichtung  $t$  auf 20 mm reduziert, was bei den meisten Elementen zu einer Würfelform führt. In [39] konnte gezeigt werden, dass die Verwendung von Schalenelementen oder würfelförmigen Volumenelementen zu annähernd denselben Optimierungsergebnissen führt.

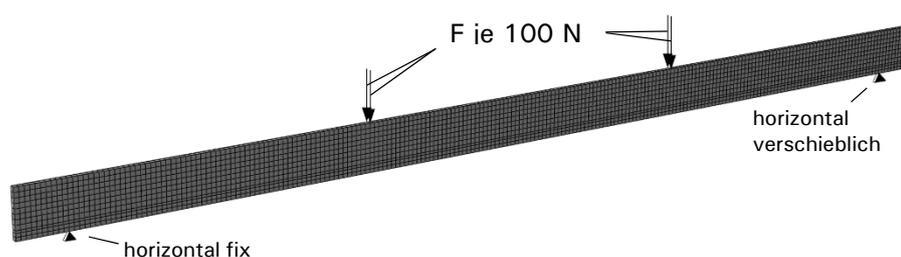


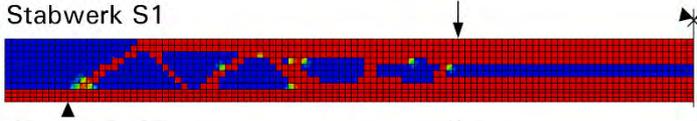
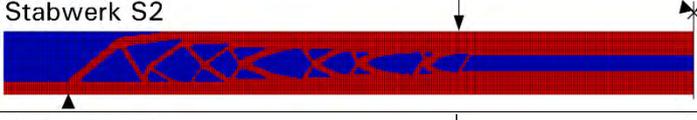
Abb. 7-7: Entwurfsmodell der Topologieoptimierung (4400 x 200 x 20 mm)

## Stabwerkstrategie

Ziel dieses Vorgehens ist es, mithilfe eines möglichst feinen FE-Netzes eine fein verästelte 0-1-Struktur zu erreichen. Das Optimum einer möglichst steifen Konstruktion zur Lastabtragung einer Kraft ist nach Michells [56] analytischer Lösung ein unendlich feines Stabtragwerk mit einer Ausrichtung der Stäbe in die Hauptspannungsrichtungen (vgl. Abb. 7-1 unten). Durch eine anschließende Homogenisierung des Stabwerks ließe sich eine kontinuierlich gradierte Struktur entwickeln.

In Tabelle 7-1 sind die Entwurfsergebnisse einer Elementgrößenstudie mit Kantenlängen von 20 mm, 5 mm und 2 mm im Vergleich zum Referenzentwurf des Versuchs V2 aufgeführt. Die Volumenrestriktion der Optimierung wurde so gewählt, dass alle Bauteile eine möglichst gleiche Masse aufweisen. Als Optimierungsalgorithmus wurde das in Abschnitt 7.3.3 beschriebene Optimalitätskriterienverfahren verwendet. Über die relative Dichte jedes Elements als Entwurfsvariable  $x_i$  werden die Elementsteifigkeiten variiert. Die einzig mögliche Zielfunktion ist die Minimierung der Gesamtverzerrungsenergie, was der Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit entspricht. Als Nebenbedingung wird eine Volumen-/Massenrestriktion so gewählt, dass das optimierte Bauteilgewicht dem Bauteilgewicht der Versuche (z.B. V2) entspricht:  $\zeta = m_{V2}/m_{hom} = 551 \text{ kg}/785 \text{ kg} = 0,702$ . Dabei ist  $m_{V2}$  die rechnerische Masse des Versuchs V2 und  $m_{hom}$  die rechnerische Masse eines homogenen Bauteils aus der Mischung RA. Als Abbruchkriterium wird eine maximale Anzahl an Iterationen definiert.

Tabelle 7-1: Optimierungsergebnisse der Stabwerkstrategie

Materialverteilung <span style="color:red">■</span> RA <span style="color:green">■</span> G05L <span style="color:blue">■</span> KLM	Elemente [Stk.]	C [Nm]	m [kg]	$\Delta C$ [%]
Referenzversuch V2 	2.420 à 20 mm	238	551	-
Stabwerk S1 	2.420 à 20 mm	161	554	-32
Stabwerk S2 	35.200 à 5 mm	159	556	-33
Stabwerk S3 	220.000 à 2 mm	158	555	-34

C Gesamtverzerrungsenergie

m Gesamtmasse der Bauteile

$\Delta C$  Veränderung der Gesamtverzerrungsenergie (Steifigkeitsgewinn)

Der Optimierungsansatz bildet zwischen Lasteinleitung und Auflager eine Stabwerkstruktur, bestehend aus Vollmaterial (Mischung RA), aus. Die Zwischenräume werden mit dem Material mit der geringsten Steifigkeit gefüllt. Bei dem gewählten Algorithmus lässt sich die untere E-Modulgrenze  $E_{\min}$  nicht frei wählen. Der minimale E-Modul im Optimierungsmodell liegt mit  $7 \text{ N/mm}^2$  deutlich unter dem E-Modul der leichtesten Mischung KLM. Nach erfolgreicher Optimierung erfolgt ein Austausch des leichten Materials durch die Mischung KLM und anschließend die erneute Bestimmung der Verzerrungsenergie sowie der Gesamtmasse, die durch dieses Vorgehen leicht schwankt.

Im Bereich des konstanten Moments zwischen den beiden Lasteinleitungen stellt sich eine obere Druck- und eine untere Zugstrebe konstanter Dicke ein. Die Ergebnisse zeigen, dass sich das Stabwerk zwischen Lasteinleitung und Auflager mit einer Netzverfeinerung weiter ausdifferenzieren lässt. Auch die beim Stabwerk S1 noch in wenigen Elementen vorhandenen mittleren Steifigkeiten lassen sich mit einer Netzverfeinerung beseitigen.

Gegenüber dem Referenzentwurf sind durch einen Stabwerkentwurf hohe Steifigkeitsgewinne realisierbar. Die Netzverfeinerung führt zwar zu einer Verfeinerung des Stabwerks, aber nur noch zu geringen Steifigkeitszuwächsen. Mit einem feineren Stabwerk würde sich im zweiten Schritt eine bessere Materialverteilung bei der Homogenisierung errechnen lassen. Gleichzeitig wachsen aber die Rechenzeiten stark an. Dies gilt sowohl für die linear elastische Optimierung, bei der nach jedem Optimierungsschritt eine Strukturanalyse durchgeführt wird, als auch für die abschließende materiell nichtlineare Simulation. Die Rechenzeit der materiell nichtlinearen Strukturanalyse des Stabwerkentwurfs S3 mit 222.200 Volumenelementen liegt derzeit mit einem i7-Prozessor mit 3,4 GHz und 16 GB Ram bei Parallelisierung bei ca. 24 h.

Weiterhin wird nach einem Ansatz gesucht, der möglichst direkt zu gradierten Strukturen führt und ein gut handhabbares Verfahren für allgemeine räumliche Probleme darstellt. Der Stabwerkansatz könnte über die geplante Verschmierung der Materialeigenschaften in eine gradierte Struktur überführt werden, was eine Neumodellierung des Bauteils erforderlich macht. Dies führt jedoch zu einer Reduzierung der Steifigkeit, da die Mischung RA das wirtschaftlichste Verhältnis zwischen E-Modul und Rohdichte aufweist. Daher wird die Stabwerkstrategie nicht weiterverfolgt.

### **Materialverteilungsstrategie mit dem SIMP-Ansatz**

Der SIMP-Ansatz kann so kalibriert werden, dass er ein reales Materialverhalten bzw. eine Materialgruppe abbildet. Für Materialien wie Metallschäume, aber auch Betone besteht ein exponentieller Zusammenhang zwischen dem normierten E-Modul und der normierten Rohdichte. Ashby [81,82] beschreibt den Zusammenhang zwischen E-Modul  $E_s$  und Rohdichte  $\rho_s$  des Zellwandmaterials, also das homogene Material,

mit den verschmierten porösen Materialeigenschaften  $E_h$  und  $\rho_h$  von offenporigen Metallschäumen mit dem Exponenten  $p = 2$ :

$$\frac{E_h}{E_s} = C_1 \cdot \left(\frac{\rho_h}{\rho_s}\right)^2, \quad C_1 = 1,0 \quad (7-13)$$

Von Lipka [61] wird dieser Ansatz der Topologieoptimierung zur Dichteverteilung von z.B. Sandwichbauteilen mit gradiertem Aluminiumschaumkern aufgegriffen.

Der Exponent  $p$  des SIMP-Ansatzes ist daher so zu wählen, dass der Zusammenhang zwischen E-Modul und Dichte eines Materials möglichst zutreffend abgebildet wird. Abb. 7-8 zeigt die Anpassung des SIMP-Ansatzes an die bisher entwickelten Gradientenbetonmischungen.

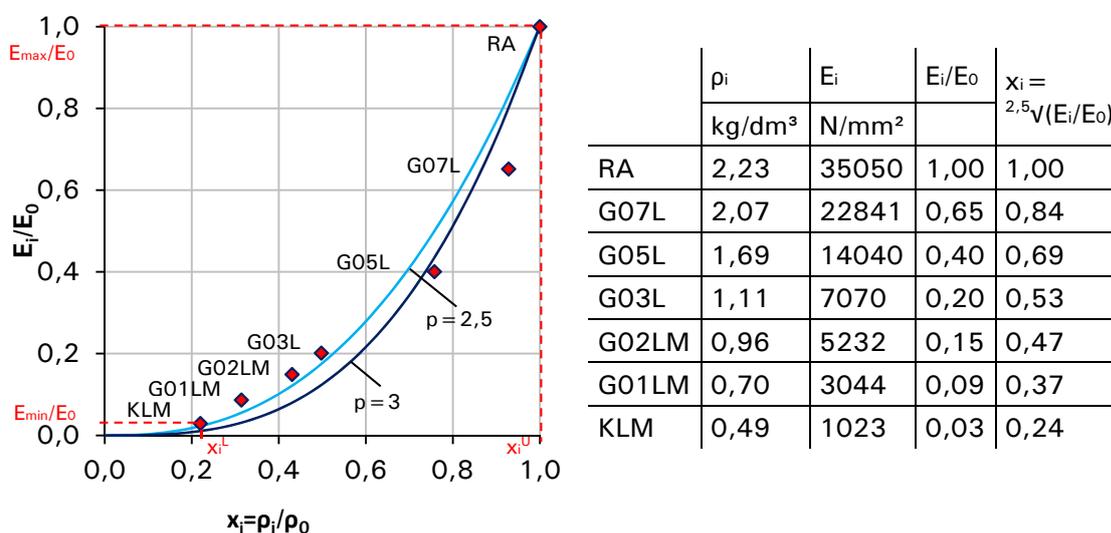


Abb. 7-8: Anpassung des SIMP-Ansatzes an die Prüfergebnisse der Gradientenbetonmischungen

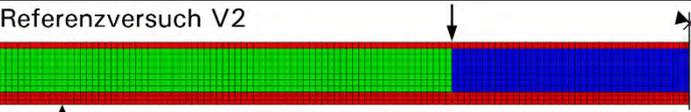
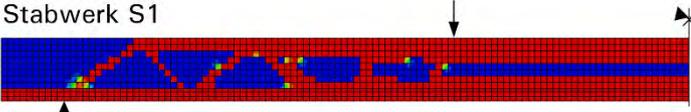
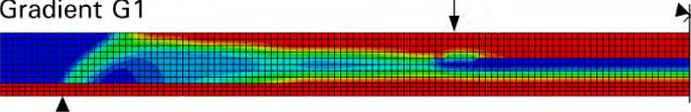
Der Exponent  $p = 2,5$  stellt einen guten Zusammenhang zwischen den einzelnen Mischungen her. Für einen Exponenten  $p = 3$  würde die Kurve die Betonmischungen mit den höheren Festigkeiten besser treffen, die Steifigkeit der leichteren Mischungen jedoch stark unterschätzen. Um eine möglichst breit gestaffelte Verteilung der Materialeigenschaften im Bauteil zu erzielen, wird der Exponent zu  $p = 2,5$  gewählt.

Die obere Entwurfsgrenze stellt die Mischung RA mit einem E-Modul  $E_{\max} = E_0 = 35050$  N/mm<sup>2</sup> dar. Die Entwurfsvariable  $x_i$  stößt somit an den oberen Grenzwert  $x_i^U = 1$ . Die Mischung KLM definiert die untere Entwurfsgrenze mit einem minimalen E-Modul von  $E_{\min} = 1023$  N/mm<sup>2</sup> und einer Rohdichte  $\rho_{\min} = 0,49$ . Abb. 7-8 zeigt, dass die SIMP-Kurven nur eine Annäherung an die E-Modul-Dichte-Verhältnisse der Gradientenbetonmischungen ermöglichen. Daher kann der untere Grenzwert der Entwurfsvariablen  $x_i^L$  nicht das korrekte Verhältnis zwischen normiertem

E-Modul und normierter Dichte abbilden. Um die Elementsteifigkeiten in jedem Optimierungsschritt richtig zu erfassen, wird aus der unteren Steifigkeitsgrenze  $E_{i,KLM} = 1023 \text{ N/mm}^2$  die untere Entwurfsvariable zu  $x_i^L = (1023/35050)^{1/2,5} = 0,24$  berechnet.

In Tabelle 7-2 ist das Entwurfsergebnis der Materialverteilungsstrategie im Vergleich zum Referenzversuch V2 und dem Stabwerksentwurf S1 dargestellt. Als Optimierungsalgorithmus wurde das in Abschnitt 7.3.3 beschriebene Approximationsverfahren verwendet. Als Startentwurf wird ein Bauteil mit einer homogen verteilten relativen Dichte von 0,5 gewählt. Als Abbruchkriterium wird die gleichzeitige Einhaltung einer maximalen Veränderung der Zielfunktion um den Faktor 0,001 und eine maximale Veränderung der Entwurfsvariablen um den Faktor 0,005 definiert.

Tabelle 7-2: Optimierungsergebnis der Materialverteilungsstrategie

Materialverteilung relative Dichte $x_i$	1,00 0,94 0,87 0,81 0,75 0,68 0,62 0,56 0,50 0,43 0,37 0,30 0,24	Ziel- funktion	C [Nm]	m [kg]	$\Delta C$ [%]
Referenzversuch V2		-	238	551	-
Stabwerk S1		min C	161	554	-32
Gradient G1		min C	164	551	-31

C Gesamtverzerrungsenergie

m Gesamtmasse der Bauteile

$\Delta C$  Veränderung der Gesamtverzerrungsenergie (Steifigkeitsgewinn)

Beim Gradientenentwurf G1 stimmen Zielfunktion und Entwurfsvariable mit dem Stabwerksansatz überein. Auch die Nebenbedingung der Volumenrestriktion wird zu  $\zeta = m_{V2}/m_{hom} = 551 \text{ kg}/785 \text{ kg} = 0,702$  gewählt. Das Entwurfsergebnis zeigt im Bereich des konstanten Moments zwischen den beiden Lasteinleitungen analog zum Stabwerk S1 eine obere Druck- und eine untere Zugstrebe konstanter Dicke. Im Gegensatz zum Stabwerk ergibt sich jedoch ein fließender Materialübergang im Bereich der Zugstrebe von außen nach innen. Zwischen der Lasteinleitung und dem Auflager, im Bereich konstanter Querkraftbeanspruchung, kommen in der Kernschicht alle zur Verfügung stehenden Materialien zum Einsatz. Die Materialübergänge verlaufen fließend. Ähnlich zum Stabwerkentwurf S1 bildet sich bei G1 eine diagonale Druckstrebe zwischen Auflager und oberer Druckschicht aus. Diese fällt im Vergleich zu S1 deutlich breiter aus und besteht aus Materialien mit einer relativen Dichte zwischen 0,43 und 0,75. Dem Entwurfsbereich links vom Auflager wird die

leichteste Mischung KLM zugeordnet, da hier keine oder nur sehr geringe Beanspruchungen vorhanden sind. Gegenüber dem Referenzversuch V2 lassen sich mit dem Gradientenentwurf G1 Steifigkeitsgewinne von 31% realisieren. Dies ist nur 1% weniger als mit dem Stabwerkansatz S1. Der große Vorteil des Materialverteilungsansatzes besteht im direkten Erzielen einer gradierten Struktur als Optimierungsergebnis.

Im nachfolgenden Vergleich zwischen dem Referenzversuch V1, dem Stabwerk S1 und dem Gradientenentwurf G1 mithilfe einer materiell nichtlinearen Simulation soll die Leistungsfähigkeit der Optimierungsansätze belegen.

## 7.7 Materiell nichtlineare Simulation der Optimierungsergebnisse

Die Topologieoptimierungen im vorhergehenden Abschnitt wurden im linear elastischen Bereich des Materialverhaltens durchgeführt. Eine Topologieoptimierung im materiell nichtlinearen Bereich würde zu deutlich höheren Rechenzeiten führen, da nach jedem Optimierungsschritt eine Strukturanalyse durchgeführt werden muss. Die Optimierung im linear elastischen Bereich führt zu einer Steigerung der Steifigkeit im Zustand I und zu einer Erhöhung des Rissmoments. Dies ist als sinnvoll anzusehen, da für Bauteile aus gradiertem Beton die Anforderungen an den Grenzzustand der Tragfähigkeit leichter zu erfüllen sind als die Anforderungen an den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. Es liegt somit ein überwiegendes Verformungsproblem vor, welches mithilfe einer Steifigkeitsoptimierung im Zustand I verbessert werden kann.

In diesem Abschnitt werden die hinsichtlich ihrer Steifigkeit linear elastisch optimierten Entwürfe mithilfe einer materiell nichtlinearen Simulation unter Berücksichtigung der vorhandenen Bewehrung ausgewertet. Dies ermöglicht eine Beurteilung des nichtlinearen Tragverhaltens in allen Traglastbereichen bis zum Versagen der Betonbauteile. Mithilfe eines Skriptes wird das Input-File des Optimierungsergebnisses für die materiell nichtlineare Simulation aufbereitet. In einem Optimierungsmodell mit beispielsweise 2.420 Elementen liegen 1.760 verschiedene Materialgesetze vor (vgl. Abb. 7-9).

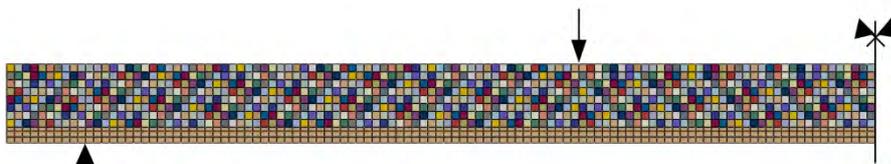


Abb. 7-9: Verteilung der Materialgesetze nach der Optimierung

Jedem finiten Element ist ein eigenes linear elastisches Materialgesetz zugeordnet. Die Ausnahme bildet die untere Deckschicht, welche die Bewehrung beinhaltet und von der Optimierung ausgenommen ist. Durch eine Eingruppierung der E-Moduln nach Tabelle 7-3 erweitert das Skript jedes Materialgesetz um das zugehörige materiell nichtlineare Materialverhalten aus Tabelle 6-1. Der E-Modul und die Dichte bleiben aus dem Optimierungsmodell erhalten.

Tabelle 7-3: Materialzuordnung

Materialmodell	KLM	G01LM	G02LM	G03L	G05L	G07L	RA
E-Modul	1023-	2034-	4138-	6151-	10555-	18441-	28949-
Grenzen	2034	4138	6151	10555	18441	28946	35050

Nach der Materialzuordnung erfolgt das Einlesen der überarbeiteten Input-Datei in Abaqus. Die Elementtiefe wird wieder auf die Bauteilbreite  $t=400$  mm erhöht, um einen direkten Vergleich zu bisherigen Simulationsergebnissen ziehen zu können. Abb. 7-10 zeigt den Vergleich des Referenzbauteils V2 im Versuch (V2.1 und V2.2) und der nichtlinearen Simulation der Ausgangskonfiguration (V2 Gf) aus Abschnitt 6.2.4 mit den optimierten Bauteilen mithilfe des Stabwerksansatzes Opt S1 und mithilfe der Materialverteilungsstrategie Opt G1.

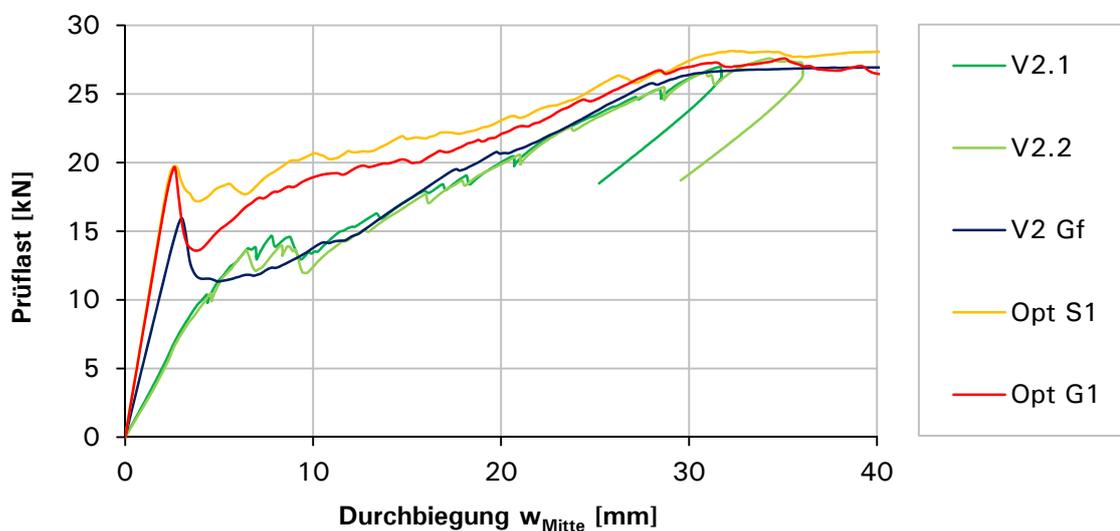


Abb. 7-10: Kraft-Durchbiegungs-Diagramm der Optimierungsergebnisse

Alle dargestellten Bauteile weisen die gleiche Bauteilmasse auf. Beide Optimierungen führen zu einer deutlichen Steifigkeitszunahme im Zustand I und zu einer Erhöhung der Erstrisslast. Beides fällt bei der Optimierung mit dem Stabwerksansatz geringfügig größer aus, was mit der geringfügig kleineren Gesamtverzerrungsenergie des Entwurfs S1 korrespondiert. Nach Erreichen der Erstrisslast fällt die Prüflast des Gradientenentwurfs G1 analog zur Simulation des Referenzversuchs V2 Gf steil ab.

Der Stabwerksentwurf S1 führt zu einem deutlich geringeren Prüflastabfall. Im weiteren Verlauf steigt bei beiden Entwürfen die Prüflast bis zu einer Feldmittendurchbiegung von ca. 10 mm wieder auf Erstrisniveau an. Anschließend fällt die Steifigkeit wieder ab, bis die Kurven nach abgeschlossener Rissbildung auf die Kurven der Bauteilversuche treffen. Die Optimierung hat auf die Traglast so gut wie keinen Einfluss, da diese allein von der vorhandenen Bewehrungsmenge abhängt, solange die Querkrafttragfähigkeit gewährleistet werden kann.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich die Steifigkeit im elastischen Bereich mithilfe der linear elastischen Optimierung um 32 % bei S1 und 31 % bei G1 gegenüber der Referenzsimulation steigern lässt. Dies entspricht dem Unterschied der Verzerrungsenergie aus Tabelle 7-2. Die Steigerung der Erstrisslast fällt mit 24 % bei S1 und 20 % bei G1 etwas geringer aus. Der Stabwerksentwurf S1 liegt in allen Bereichen des Last-Verformungs-Diagramms leicht über dem Gradientenentwurf G1. Die Steifigkeitsgewinne der optimierten Bauteile gegenüber dem Referenzversuch lassen sich durch zwei wesentliche Effekte erklären. Einerseits wird mehr steifes Material in der Zug- und in der Druckzone zwischen den Lasteinleitungen angeordnet, andererseits bildet sich ein Druckbogen bzw. ein Stabwerk zwischen Auflager und Lasteinleitung aus.

## 7.8 Weiterführende Entwürfe gradierter Bauteile

Ausgehend von diesen Erkenntnissen werden weitere Optimierungen mit dem Ziel einer minimalen Bauteilmasse für den Referenzversuch V2 durchgeführt (vgl. Tabelle 7-4).

Tabelle 7-4: Optimierungsergebnisse weiterführende Gradientenentwürfe

Materialverteilung relative Dichte $x_i$	Ziel- funktion	C [Nm]	m [kg]	$\Delta C$ [%]
 Gradient G1	min C	164	551	-31
Gradient G2	min $\zeta$	238	277	-
Gradient G3	min C	171	510	-28

$\zeta$  Massenverhältnis optimierter Entwurf / homogenes Bauteil aus RA

C Gesamtverzerrungsenergie

m Gesamtmasse der Bauteile

$\Delta C$  Veränderung der Gesamtverzerrungsenergie (Steifigkeitsgewinn)

Das Entwurfsziel des Gradientenentwurfs G2 ist die Minimierung der Bauteilmasse bei gleicher Verzerrungsenergie wie V2. Das Bauteilvolumen wird zur Zielfunktion und die Einhaltung der maximalen Verzerrungsenergie von 238 Nm zur Nebenbedingung gewählt. Das Entwurfsergebnis ist ein Bauteil mit einer Masse von 277 kg, also einer Massensparnis von 65 %. Der gesamte Kernbereich wird mit der leichtesten verfügbaren Mischung KLM belegt. Auch die Dicke der Deckschichten in Feldmitte reduziert sich im Vergleich zu G1. Das Ergebnis der nachfolgenden nichtlinearen Simulation ist in Abb. 7-11 dargestellt. Das Tragverhalten des Volumenentwurfs Opt G2 entspricht bis zur Risslast dem Referenzversuch V2 Gf. Die Prüflast fällt jedoch nach Erreichen der Erstrisslast kontinuierlich ab. Im querkraftbeanspruchten Kernbereich kommt es zu hohen plastischen Dehnungen zwischen Kern und unterer Deckschicht. Die Lage der auftretenden plastischen Dehnungen entspricht einem Querkraftversagen durch Versagen der Längsfuge. Dies kann auf das Gradientenlayout von G2 zurückgeführt werden. Die Verwendung der Mischung KLM im querkraftbeanspruchten Kernbereich führt auch analytisch zu einem Querkraftversagen. Somit führt die Minimierung des Volumens zu einem Gradientenlayout, welches die Anforderungen an die Tragfähigkeit im Zustand II nicht erfüllen kann.

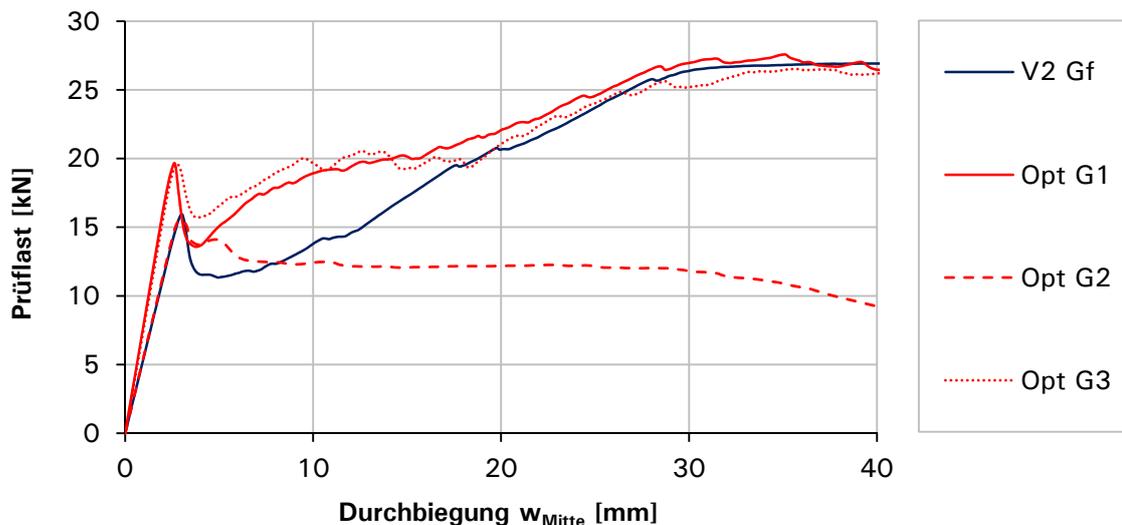


Abb. 7-11: Kraft-Durchbiegungs-Diagramm der Gradientenentwürfe

Um die Frage nach dem minimalen Volumen bei gleichzeitiger Erfüllung aller Anforderungen an die Tragfähigkeit beantworten zu können, wird beim Gradientenentwurf G3 iterativ vorgegangen. Das Entwurfsziel ist wieder die Minimierung der Verzerrungsenergie bei Einhaltung einer Volumenrestriktion. Die Volumenrestriktion wird ausgehend von  $\zeta = 0,702$  solange reduziert, bis die anschließende materiell nichtlineare Simulation zu einem vorzeitigen Versagen führt. Der Entwurf mit einer Volumenrestriktion von  $\zeta = 0,65$  erreicht als letzter die Traglast und ist somit der minimale Volumenentwurf mit einer Massensparnis von 35 %.

## 7.9 Zusammenfassung der Optimierungsergebnisse

In Kapitel 7 wurden die verwendeten numerischen Optimierungsverfahren beschrieben, die es ermöglichen, ein Dichtelayout für gradierte Bauteile zu entwerfen. Es werden zwei Algorithmen des kommerziell verfügbaren Optimierungsaufsatzes ATOM für Abaqus vorgestellt, die in dieser Arbeit Anwendung finden.

Mithilfe eines Optimalitätskriterienverfahrens zur Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit wird die *Stabwerkstrategie* entwickelt. Hiermit kann ein fein verästeltes Stabwerk, ähnlich einer Michell-Struktur, entworfen werden, welches in einem zweiten Schritt zu einer kontinuierlichen Materialverteilung homogenisiert wird. Dieser Ansatz führt zu hohen Steifigkeitsgewinnen, es muss jedoch noch ein weiterer Zwischenschritt unternommen werden.

Die *Materialverteilungsstrategie* verwendet den SIMP-Ansatz und ein Approximationsverfahren. Der SIMP-Ansatz ermöglicht es, mittlere Dichten im Entwurfsraum einzuführen. Die Exponentialfunktion des Ansatzes wird an den exponentiellen Zusammenhang zwischen Steifigkeit und Dichte der entwickelten Gradientenbetonmischungen angepasst. Somit stehen während des gesamten Optimierungsvorgangs nur physikalisch realisierbare Materialien zur Verfügung. Das Optimierungsergebnis ist eine mit den Gradientenbetonmischungen herstellbare Dichteverteilung und wird als Gradientenentwurf bezeichnet.

Alle durchgeführten Optimierungen finden im linear elastischen Bereich des Materialverhaltens statt. Im Anschluss an eine Optimierung wird eine materiell nichtlineare Simulation durchgeführt, um das Optimierungsergebnis in allen Traglastbereichen bewerten zu können. Bei gleicher Bauteilmasse wie im Versuch V2 ließen sich mit beiden Optimierungsstrategien Steifigkeitsgewinne im Bereich von 30 % erzielen sowie die Erstrisslast um 24 % steigern. Der Stabwerkentwurf liegt dabei immer leicht über dem Gradientenentwurf.

Eine weitere Optimierung mit dem Ziel der Minimierung der Bauteilmasse unter der Vorgabe der gleichen Verzerrungsenergie wie der Referenzversuch V2 zeigt die Grenzen des gewählten linearen Optimierungsansatzes auf. Die Steifigkeiten im Zustand I sowie die Risslast entsprechen dem Referenzversuch. Nach Erreichen der Erstrisslast kann die Traglast jedoch nicht weiter gesteigert werden und es kommt zu einem Querkraftversagen. Bei einer anschließenden iterativen Reduktion der Volumenrestriktion kann die maximale Massensparnis eines stahlbewehrten gradierten Bauteils gegenüber einem Bauteil aus Normalbeton zu 35% bestimmt werden.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Das Forschungsvorhaben *Funktional gradierte Elementdecken* hatte zum Ziel, die Technologie der Gradientenbetone für den Einsatz in gewichtsoptimierten, tragenden Bauteilen zu erforschen. Hierfür wurden nachfolgende Teilziele erarbeitet.

#### *Kapitel 3*

Die im Grundlagenforschungsvorhaben [2] entwickelten Gradientenbetonmischungen, insbesondere die leichten Kernmischungen, wurden für die Realisierung großer Betonvolumen im Fertigteilwerk sowie für die Belastung durch das Eigengewicht der Deckschichten angepasst. Bei der ersten Prüfserie der Hauptausführung führten die langsame Verarbeitung sowie zu lange Mischzeiten im Fertigteilwerk zu deutlich reduzierten Festigkeiten der Kernmischungen. Bei der zweiten Prüfserie der Hauptausführung, welche selbsttätig an der MPA Stuttgart gefertigt wurde, konnte die erforderliche Grünstandfestigkeit erzielt werden. Das Festigkeitsniveau lag annähernd auf Höhe der im Labor erzielten Festigkeiten an Mörtelprismen. Hierdurch wurde es möglich, Bauteile im Maßstab 1:1 in einem Schichtenverfahren herzustellen.

#### *Kapitel 4*

Die Bemessung gradierter Betonbauteile erfolgt mit angepassten Normansätzen. Zur Ermittlung der Biegetragfähigkeit wurde ein angepasster Ansatz für Plattenbalken gewählt. Mithilfe eines Reduktionsansatzes wird der Bemessungsquerschnitt auf die gefügedichte Deckschichtmischung umgerechnet. Die Querkraftbemessung spielt für gradierte Bauteile eine wichtige Rolle, da durch Einsatz leichter Betone die Querkrafttragfähigkeit im Vergleich zu Normalbeton reduziert wird. Sie erfolgte nach EC 2 unter Berücksichtigung der Korrekturfaktoren für Leichtbeton. Die Festigkeiten der leichten Kernmischung wurden für die gesamte Querschnittshöhe angesetzt, die höherfesten Deckschichten blieben unberücksichtigt. Für den Nachweis der Verbundfugen infolge der äußeren Einwirkungen und aus Schwinddifferenzen wurde ein analytischer Ansatz verwendet. Mit diesen Bemessungsannahmen erfolgt die Auslegung der Prüfserien.

#### *Kapitel 5*

Die Bauteilversuche lassen sich in die skalierten Versuche und die Versuche der Hauptausführung untergliedern. Es wurden jeweils Versuche zur Biege- und Querkrafttragfähigkeit bei Variation der Gradierung, der Bewehrungsmaterialien und der Herstellungsverfahren durchgeführt. Die skalierten Versuche bestätigen die Bemessungsannahmen und es lassen sich Massenreduktionen von 59 % bei Erreichen der

rechnerischen Tragfähigkeiten realisieren. Bei den Versuchen V3 der Hauptausführung kam es bei Verwendung der leichten Kernmischung G02LM im querkraftbeanspruchten Kernbereich zu einem vorzeitigen Querkraftversagen. Mit der Gradientenmischung G05L in diesem Bereich ließ sich die rechnerische Biege- und Querkrafttragfähigkeit bei einer Massenersparnis von bis zu 43 % erreichen. Der Einsatz textiler Bewehrungsmaterialien führte aufgrund der geringen erforderlichen Deckschichtstärken zu größeren Masseneinsparungen, wegen der geringen Dehnsteifigkeit der Bewehrung aber auch zu deutlich größeren Bauteilverformungen. Die Gradierung von Betonbauteilen hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Steifigkeit im Zustand I und auf die Erstrisslast. Die Steifigkeit im Zustand II hängt überwiegend von der eingesetzten Bewehrung ab.

### *Kapitel 6*

Die materiell nichtlinearen Simulationen wurden mit dem Programmpaket Abaqus unter Verwendung des Concrete Damaged Plasticity Materialmodells für Beton durchgeführt. Die Materialmodelle der Betone und Bewehrungen wurden anhand der vorliegenden Prüfergebnisse kalibriert. Die Beschreibung des Betonverhaltens unter Zug hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Risslast am Ende des Zustands I. Daher wurden die zwei möglichen Definitionen über die Spannungs-Dehnungs-Beziehung und über die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung verglichen. Das Tragverhalten der gradierten Bauteile konnte mithilfe der materiell nichtlinearen Simulation gut abgebildet werden und es kam zu einer guten Übereinstimmung der Last-Durchbiegungskurven. Bei den durchgeführten Simulationen handelt es sich um Bauteile mit Biegezugversagen. Ein Querkraftversagen konnte in der Simulation nicht nachvollzogen werden, da der abfallende Ast des Betonverhaltens nicht experimentell ermittelt wurde.

### *Kapitel 7*

Es wurden zwei Topologieoptimierungsverfahren zum Entwurf dichtegradierter Strukturen untersucht. Der Stabwerkansatz führte im Bauteilinneren zu einer fein verästelten Fachwerkstruktur, welche in einem zweiten Schritt homogenisiert werden musste, um eine gradierte Struktur zu erhalten. Beim Materialverteilungsansatz wurde der SIMP-Ansatz so kalibriert, dass während des gesamten Entwurfsprozesses die Materialeigenschaften der Gradientenbetonmischungen verwendet werden. Hieraus resultiert ein optimierter Entwurf mit kontinuierlich gradierten Materialeigenschaften. Die Optimierungen wurden im linear elastischen Bereich des Betonmaterialverhaltens durchgeführt. Mit einer anschließenden materiell nichtlinearen Simulation wurde es möglich, das gesamte Tragverhalten zu untersuchen. Die optimierten Entwürfe beider Ansätze hatten dieselbe Bauteilmasse wie das Referenzbauteil V2 und führten zu Steifigkeitsgewinnen von 30 % im Zustand I und einer Steigerung der Erstrisslast um 24 % im Vergleich zu V2.

## 8.2 Ausblick

Funktional gradierte Wandbauteile, welche gleichzeitig alle Anforderungen an Tragwerk und Gebäudehülle erfüllen, stellen eine weitere vielversprechende Anwendung des Gradientenbetons dar. Die hierbei zum Einsatz kommenden sehr leichten und wärmedämmenden Kernmischungen aus Aerogelbeton erfordern eine besonders sorgfältige Untersuchung der Querkrafttragfähigkeit sowie der Kraftübertragung in den Fugen. Die bisher durchgeführten Analysen zu den Schwinddifferenzen sollten mithilfe von Messwerten verifiziert werden. Die Untersuchung textiler Schubgitter als Querkraftbewehrung könnte eine ideale Ergänzung des Wandsystems darstellen.

Auch für die in dieser Arbeit untersuchten Balken mit sehr leichten Mischungen im Kernbereich KM1 wäre der Einsatz von Querkraftbewehrung denkbar. Dies könnte sich bei dem im Versuch V3 aufgetretenen Querkraftversagen durch ein Stabilitätsversagen der oberen Deckschicht als besonders effektiv erweisen, da nur geringe Rückhaltekräfte notwendig wären. Die Querkrafttragfähigkeit von Gradientenbetonbauteilen mit und ohne Querkraftbewehrung sollte mit zusätzlichen Großversuchen sowie numerischen Simulationen weiter untersucht werden. Ebenso sinnvoll wären die Weiterentwicklung und die weitere Ausdifferenzierung der im Querkraftbereich eingesetzten Kernmischungen, da die Mischung G03L gegenüber der Mischung G02LM in der Festigkeit abfällt.

Durch die Aufnahme weiterer Kriterien wie der Wärmeleitfähigkeit könnten mit einer Mehrkriterienoptimierung auch funktional gradierte Wandbauteile entworfen werden. Eine Weiterentwicklung der Optimierungsstrategien wäre auch hinsichtlich einer Beeinflussung des nichtlinearen Tragverhaltens im Zustand II denkbar, z.B. durch die Optimierung eines linearen Ersatzproblems. Hierbei sollte neben der Biegetragfähigkeit auch die Querkrafttragfähigkeit in die Optimierung einfließen. Weiterhin könnte die Optimierung, welche sich bisher auf die Dichteverteilung beschränkt, auf die Bewehrung ausgeweitet werden.

Für die Marktfähigkeit von Bauteilen aus gradiertem Beton spielt neben den Entwurfs- und Berechnungsverfahren die wirtschaftliche Herstellung eine maßgebende Rolle. Daher wird derzeit intensiv an der Entwicklung eines Mehrachsmanipulators gearbeitet, welcher es ermöglichen wird, vollautomatisiert Bauteile mit dreidimensionalen Eigenschaftsverläufen zu realisieren. Das Forschungsprojekt wird in einer interdisziplinären Kooperation der Institute für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK), für Systemdynamik (ISYS) und für Werkstoffe im Bauwesen (IWB) der Universität Stuttgart bearbeitet und ist Teil des Schwerpunktprogramms 1542 „Leicht Bauen mit Beton“.

## Literaturverzeichnis

- [1] Sobek, W.; Trumpf, H.; Heinlein, F.: Recyclinggerechtes Konstruieren im Stahlbau, *Stahlbau*, 79 (2010), 6, 424–433.
- [2] Heinz, P.; Herrmann, M.; Sobek, W.: *Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen*, Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau, Stuttgart: ILEK, Februar 2011.
- [3] Rödel, J.: *Verfahren zur Herstellung von Gradientenwerkstoffen*, Patent DE 44 35 146 A 1, 1996.
- [4] Neubrand, A.; Rödel, J.: Gradient Materials: An Overview of a Novel Concept, *Zeitschrift für Metallkunde*, 88 (1997), 358 f.
- [5] Elsner, P.: Gradierte Werkstoffeigenschaften - eine Herausforderung für die Fertigungstechnik, *Futur*, (2005), 17 ff.
- [6] Thompson, D.W.: *On growth and form*, reprint, Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [7] Nachtigall, W.: *Bau-Bionik: Natur, Analogien, Technik*, Berlin: Springer, 2003.
- [8] Yamanouchi, M. et al.: *Proceedings of the 1st International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Tokyo: FGM'90, 1990.
- [9] Kieback, B.; Neubrand, A.; Riedel, H.: Processing techniques for functionally graded materials, *Materials Science & Engineering A*, 362 (2003), 81–105.
- [10] Reinhardt, H.W.; Kümmel, J.: *Rezyklieren von Leichtbeton*, Berlin: Beuth, DAfStb Heft 529 Teil 2, 2002.
- [11] Schlaich, M.; Hillemeier, B.; Schubert, K.: Infraleichtbeton - Potenzial für den Sichtbetonbau?, *Betonwerk + Fertigteil-Technik*, 73 (2007), 2, 118–119.
- [12] Thienel, K.-C.; Dostmann, M.; Peck, M.: *Anspruchsvolle Konstruktionen in Sichtleichtbeton, Sichtbeton Handbuch*, Tagungsbeitrag, 4. Int. Sichtbeton-Forum, Berlin, 2008, 23–27.
- [13] Jesse, F.; Curbach, M.: Verstärken mit Textilbeton, *Beton-Kalender*, Berlin: Ernst, 2010, 458–565.
- [14] HeidelbergCement AG: *Betontechnologische Daten*, Leimen, 2009.
- [15] Faust, T.: *Leichtbeton im konstruktiven Ingenieurbau*, Berlin: Ernst, 2003.
- [16] DIN EN 196-1:2005-05: *Prüfverfahren für Zement, Teil 1: Bestimmung der Festigkeit*.
- [17] DIN 1048-5:1991-06: *Prüfverfahren für Beton. Festbeton, gesondert hergestellte Probekörper*.
- [18] DIN V 20000-404:2006-01: *Anwendung von Bauprodukten in Bauwerken - Teil 404: Regeln für die Verwendung von Porenbetonsteinen nach DIN EN 771-4:2005-05*.
- [19] Reinhardt, H.-W.: *Ingenieurbaustoffe*, Berlin: Ernst, 2. Auflage, April 2010.

- [20] DIN EN 1992-1-1:2011-01: *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010.*
- [21] DIN EN 1520:2011-06: *Vorgefertigte Bauteile aus haufwerksporigem Leichtbeton und mit statisch anrechenbarer oder nicht anrechenbarer Bewehrung.*
- [22] Wiedemann, J.: *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*, Berlin: Springer, 2007.
- [23] Klein, B.: *Leichtbau-Konstruktion, Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*, Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2012.
- [24] DIN NABau: *Stand der Auslegungen zur DIN 1045-1 Ausgabe 2008-08*, Juni 2012.
- [25] Voss, S.: *Ingenieurmodelle zum Tragverhalten von textildbewehrtem Beton*, Dissertation, RWTH Aachen, 2008.
- [26] Zilch, K.; Zehetmaier, G.: *Bemessung im konstruktiven Betonbau: Nach DIN 1045-1 und DIN EN 1992-1-1*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
- [27] Silfwerbrand, J.: Stresses and strains in composite concrete beams subjected to differential shrinkage, *ACI Structural Journal*, 94 (1997), 4, 347–352.
- [28] Müller, R.K.: *Handbuch der Modellstatik*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1971.
- [29] SGL Group: *Produktdatenblatt: Verstärkungsmaterialien aus Carbonfasern für die Bauindustrie* unter <<http://www.sglgroup.com>>, Stand 2010.
- [30] Plastoform GmbH: *Produktdatenblatt Glasseiden-Armierungsgewebe Panzer* unter <<http://www.plastoform.de>>, Stand 2011.
- [31] Kani, G.N.J.: Basic facts concerning shear failure, *ACI-Journal*, 63 (1966), 675–692.
- [32] Reineck, K.-H.: *Ein mechanisches Modell für den Querkraftbereich von Stahlbetonbauteilen*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1990.
- [33] Reineck, K.-H.; Kuchma, D.A.; Fitik, B.: *Erweiterte Datenbanken zur Überprüfung der Querkraftbemessung von Konstruktionsbetonbauteilen ohne und mit Bügel*, Berlin: Beuth, DAfStb Heft 597, 2012.
- [34] Deutscher Beton- und Bautechnik Verein e.V.: *Beispiele zur Bemessung nach DIN 1045-1: Hochbau*, Berlin: Ernst, 2009.
- [35] DIN EN 1356:1997-02: *Bestimmung des Tragverhaltens von vorgefertigten bewehrten Bauteilen aus dampfgehärtetem Porenbeton oder aus haufwerksporigem Leichtbeton unter quer zur Bauteilebene wirkender Belastung.*
- [36] Sneed, L.H.; Ramirez, J.A.: *Effect of Depth on the Shear Strength of Concrete Beams without Shear Reinforcement - Experimental Study*, Forschungsbericht PCA R&D SN2921, Skokie, Illinois, 2008.
- [37] DS Simulia: *Abaqus Analyses User's Manual*, Providence, Stand 2009.
- [38] DS Simulia: *Analyses of Concrete Structures with Abaqus*, Providence, 2009.

- [39] Bidier, S.: *Numerische Bestimmung funktional gradierter Dichteverteilungen durch Strukturoptimierung*, Diplomarbeit, ILEK, Universität Stuttgart, 2011.
- [40] Schmidt-Hurtienne, B.: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluß des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*, Dissertation, TH Karlsruhe, 2001.
- [41] Lubliner, J. et al.: A plastic-damage model for concrete, *International Journal of Solids and Structures*, 25 (1989), 3, 299–326.
- [42] Lee, J.; Fenves, G.L.: Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures, *Journal of Engineering Mechanics*, 124 (1998), 8, 892–900.
- [43] DS Simulia: *Abaqus Theory Manual*, Providence, Stand 2009.
- [44] Mark, P.: *Zweiachsig durch Biegung und Querkräfte beanspruchte Stahlbetonträger*, Habilitation, Universität Bochum, 2006.
- [45] Fédération internationale du béton: *fib model code for concrete structures 2010*, Berlin: Ernst, 2013.
- [46] Reinhardt, H.W.; Cornelissen, H.A.W.: Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading, *Cement and Concrete Research*, 14 (1984), 2, 263–270.
- [47] Hillerborg, A.: *Analysis of one single crack*, Amsterdam: Elsevier, 1983, 223–249.
- [48] Pölling, R.: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2001.
- [49] DS Simulia: *ABAQUS Analysis User's Manual, Volume III: Materials*, Providence, Stand 2014.
- [50] Kupfer, H.B.: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*, Berlin: Ernst, DAfStb Heft 229, 1973.
- [51] Bischoff, M.; Ramm, E.: *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*, Vorlesungsskript, IBB, Universität Stuttgart, Wintersemester 2009.
- [52] Noack, C.: *Untersuchungen zu Betonsandwichdecken mit funktional gradiertem Leichtbetonkern hinsichtlich des Tragverhaltens und des Masseneinsparpotentials*, Diplomarbeit, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart, 2010.
- [53] Hegger, J. et al.: Textilbewehrter Beton: Tragverhalten, Bemessung und Anwendung, *Beton- und Stahlbetonbau*, 102 (2007), 6, 362–370.
- [54] Latte, S.: *Zur Tragfähigkeit von Stahlbeton Fahrbahnplatten ohne Querkraftbewehrung*, Dissertation, TU Hamburg-Harburg, 2010.
- [55] Nghiep, V.H.: *Shear design of straight and haunched concrete beams without stirrups*, Dissertation, TUHH Institut für Massivbau, 2012.
- [56] Michell, A.G.M.: The limits of economy of material in frame-structures, *Philosophical Magazine Series 6*, 8 (1904), 47, 589–597.
- [57] Bletzinger, K.-U.; Kimmich, S.: *Strukturoptimierung : im Teilprojekt D3 Optimierung natürlicher Bauformen*, Stuttgart: Universität, Konzepte SFB 230 , 7, 1985.

- [58] Harzheim, L.: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*, Frankfurt a. M.: Deutsch, 2008.
- [59] Bendsøe, M.; Sigmund, O.: *Topology optimization: theory, methods and applications*, Berlin: Springer, 2004.
- [60] Eschenauer, H.; Schnell, W.: *Elastizitätstheorie. Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*, Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag, 1993.
- [61] Lipka, A.: *Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung*, Dissertation, IBB, Universität Stuttgart, 2007.
- [62] Bletzinger, K.-U.: *Mehrkriterien-Optimierung*, Vortrag, Optimierungstag SPP 1542, Bochum, 2013.
- [63] Pareto, V.: *Manual of Political Economy*, London-Basingstoke: McMillan, 1972.
- [64] Kuhn, H.W.; Tucker, A.W.: *Nonlinear Programming, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Programming*, Tagungsbeitrag, University of California, Berkeley, 1951, 481–492.
- [65] Haug, E.J.; Arora, J.S.: *Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems*, New York: Wiley, 1979.
- [66] Fleury, C.; Braibant, V.: Structural optimization: A new dual method using mixed variables, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23 (1986), 3, 409–428.
- [67] Svanberg, K.: The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (1987), 2, 359–373.
- [68] Fleury, C.: First and Second Order Convex Approximation Strategies in Structural Optimization, *Structural Optimization*, (1989), 1, 3–10.
- [69] Kato, J.: *Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation*, Dissertation, IBB, Universität Stuttgart, 2010.
- [70] Mattheck, C.: *Trees: the mechanical design*, Berlin: Springer, 1991.
- [71] Mattheck, C.: *Warum alles kaputt geht: Form und Versagen in Natur und Technik*, Karlsruhe: Forschungszentrum Karlsruhe, 2003.
- [72] Mattheck, C.: *Denkwerkzeuge nach der Natur*, Karlsruhe: Forschungszentrum Karlsruhe, 2010.
- [73] Berke, L.; Khot, N.S.: Structural Optimization Using Optimality Criteria, *Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems*, Berlin, Heidelberg: Springer, 27, 1987, 271–311.
- [74] Baier, H.; Seesselberg, C.; Specht, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*, Wiesbaden: Vieweg, 1994.
- [75] Haftka, R.T.: *Elements of structural optimization*, Dordrecht, Boston: Kluwer, 1992.
- [76] DS Simulia: *Abaqus Topology and Shape Optimization Module*, Providence, Stand 2013.
- [77] Fe-Design GmbH: *Tosca Structure 7.0 General Documentation*, Karlsruhe, 2009.

- [78] Schwarz, S.: *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*, Dissertation, IBB, Universität Stuttgart, 2001.
- [79] Meiss, K.U.: *Anwendung von Strukturoptimierungsmethoden auf den Entwurf mehrfeldriger Schrägseilbrücken und Extradosed Bridges*, Dissertation, ILEK, Universität Stuttgart, 2007.
- [80] Bendsøe, M.P.: Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, 1 (1989), 193–202.
- [81] Gibson, L.J.; Ashby, M.F.: *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2 edition, 1999.
- [82] Ashby, M.F.: *Metal Foams: A Design Guide*, Amsterdam: Elsevier, 2000.
- [83] DIN EN 1015-3:2007-05: *Prüfverfahren für Mörtel für Mauerwerk - Teil 3: Bestimmung der Konsistenz von Frischmörtel (mit Ausbreittisch)*.
- [84] DIN EN 12350-6:2009-08: *Prüfung von Frischbeton - Teil 6: Frischbetonrohddichte*.
- [85] DIN EN 1015:1998-10: *Prüfverfahren für Mörtel für Mauerwerk, Teil 7: Bestimmung des Luftgehaltes von Frischmörtel*.
- [86] DIN EN 196-1:2005-05: *Prüfverfahren für Zement, Teil 1: Bestimmung der Festigkeit*.
- [87] DIN EN 12664:2001-05: *Wärmetechnisches Verhalten von Baustoffen und Bauprodukten. Bestimmung des Wärmedurchlasswiderstandes nach dem Verfahren mit dem Plattengerät und dem Wärmestrommessplatten-Gerät*.
- [88] DIN 52612-2:1984-06: *Wärmeschutztechnische Prüfung; Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit mit dem Plattengerät; Weiterbehandlung der Meßwerte für die Anwendung im Bauwesen*.
- [89] DIN 1045-1:2008-08: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton – Teil 1: Bemessung und Konstruktion*.
- [90] Siebert, B.: *Bestimmung von Korrelationen zwischen Würfel- und Prismendruckfestigkeit von Vergussmörteln für die Einordnung in Druckfestigkeitsklassen nach DIN EN 206-1/DIN 1045-2*, Forschungsbericht, Lehrstuhl für Baustofftechnik, Bochum, Mai 2006.
- [91] *Überprüfung und Vereinheitlichung der Bemessungsansätze für querkraftbeanspruchte Stahlbeton- und Spannbetonbauteile aus normalfesten und hochfesten Beton nach DIN 1045-1*, Abschlußbericht DIBt-Forschungsvorhabens IV 1-5-876 / 98, RWTH Aachen, Universität Leipzig, TU München, Universität Stuttgart, 1999.
- [92] *CEB-FIP-Model-Code 1990, Design of concrete structures*, 1993.
- [93] DIN 1048-5:1991-06: *Prüfverfahren für Beton. Festbeton, gesondert hergestellte Probekörper*.
- [94] *Produktdatenblatt Sika(R) Basismischung CR*, Stand 2012.
- [95] *Produktdatenblatt Sika(R) Matrix 2*, Stand 2012.
- [96] Sippel, T.S.: *Bestimmung der Eigenschaftsverläufe von Betonmischungen variierender Rohddichte für den Einsatz in funktional gradierten Bauteilen*, Diplomarbeit, ILEK, Universität Stuttgart, September 2009.

- [97] Curbach, M. et al.: *Verstärkung von Stahlbetonplatten mit textildbewehrtem Beton. Prüfbericht zum Antrag auf Zustimmung im Einzelfall*, TU Dresden, 2010.
- [98] TU Dresden: *Sonderforschungsbereich 528 – Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung*, Forschungsbericht, TU Dresden, 2012.
- [99] Hegger, J. et al.: Textilbewehrter Beton: Tragverhalten, Bemessung und Anwendung, *Beton- und Stahlbetonbau*, 102 (2007), 6, 362–370.
- [100] Molter, M.: *Zum Tragverhalten von textildbewehrtem Beton*, Dissertation, RWTH Aachen, 2005.
- [101] Curbach, M.; Jesse, F.: Eigenschaften und Anwendungen von Textilbeton, *Beton- und Stahlbetonbau*, 104 (2009), 1, 9–16.
- [102] Seidel, A. et al.: *On the mechanical behavior of carbon and glass fiber filament yarns under long-term load*, *Proceedings ACI 2010 Spring Convention*, Tagungsbeitrag, Chicago (Illinois), USA, 2010.
- [103] Krüger, M. et al.: Textilbewehrter Beton unter Brandbeanspruchung, *Betonwerk und Fertigteil-Technik*, 71 (2005), 10, 38–48.
- [104] Kulas, C. et al.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Hochtemperaturverhalten von Feinbeton und Textilgarnen, *Beton- und Stahlbetonbau*, 106 (2011), 10, 707–715.
- [105] Shayed, M.A. et al.: Carbon and Glass Fibers Modified by Polysilazane Based Thermal Resistant Coating, *Textile Research Journal*, 80 (2010), 11, 1118–1128.
- [106] Jesse, F.: *Tragverhalten von Filamentgarnen in zementgebundener Matrix*, Dissertation, TU Dresden, 2004.
- [107] Falk, R.: *Untersuchungen zu textiler Kohlefaserbewehrung für den Einsatz in funktional gradierten Betonbauteilen*, Bachelorarbeit, ILEK, Universität Stuttgart, 2012.

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 2-1:	Schnitt durch den Oberschenkelhalsknochen (a), Psilotumstengel (b)	13
Abb. 2-2:	Porositätsverteilung eines Plattenstreifens unter Gleichlast	15
Abb. 2-3:	Gradientenwand mit Blähglasbetonkern (a), Gradientenwand mit Aerogelbetonkern (b)	16
Abb. 2-4:	Geschichteter Porositätsgradient, Zuschlag (Blähglas), 4 x 4 x 16 cm	17
Abb. 2-5:	Fertigung eines Gradientenbetonträgers im Schichtenverfahren	18
Abb. 2-6:	Schema des Gradientensprühens (a) und Sprühprobe (b)	19
Abb. 2-7:	Automatisierte Herstellung gradierter Betonbauteile: Visualisierung (a) und umgesetzter Manipulator (b)	20
Abb. 3-1:	Verlauf der Festbetoneigenschaften bei einer schrittweisen Erhöhung der Porosität	21
Abb. 3-2:	Vergleich der Eigenschaften zweier Kernmischungen mit Porenbeton	23
Abb. 3-3:	Mangelnde Grünstandfestigkeit der Mischung KLM	24
Abb. 3-4:	Frischbetonwürfel KLM mit ausreichender Grünstandfestigkeit (Kantenlänge 150 mm)	25
Abb. 4-1:	Herleitung des Gradientenlayouts für einen Einfeldträger mit Gleichstreckenbelastung (a) und mit zwei Einzellasten (b)	29
Abb. 4-2:	Biege- und Schubverformungen eines Sandwichbalkens nach [22]	29
Abb. 4-3:	Idealisierung des Querschnitts (a) und Aufteilung der Druckzone von Gradientenbalken (b)	31
Abb. 4-4:	Aus zwei Abschnitten zusammengesetzter Betonbalken [27]	34
Abb. 5-1:	Aufbau skalierter Prüfkörper (Abmessungen in mm)	39
Abb. 5-2:	Verwendete textile Bewehrung: SIGRATEX® Grid 600 (a) und Plastoform Panzer (b)	40
Abb. 5-3:	Kraft-Durchbiegungs-Linien der Serien SV3, SV4 und SV10	41
Abb. 5-4:	Interaktion von Querkraft- und Biegetragfähigkeit - Schubtal von Kani [31]	43
Abb. 5-5:	Dimensionsfreie Querkrafttragfähigkeiten - Schubschlankheit für die geprüften Bewehrungsgrade	45
Abb. 5-6:	Kani-Diagramm der eigenen Versuche	45
Abb. 5-7:	Verhältnis Versuchsergebnis - Bemessungsergebnis für EC 2 und DIN EN 1520	46
Abb. 5-8:	Versagen der Längsfuge (a) und (b), Biegeschubversagen (c) und (d)	47
Abb. 5-9:	Last-Verformungs-Diagramm für einen Vierpunkt-Biegeversuch [26]	51
Abb. 5-10:	Prüfaufbau der Hauptausführung (Abmessungen in mm)	52
Abb. 5-11:	Prüfaufbau der Hauptausführung auf dem Nutentisch der MPA Stuttgart	54
Abb. 5-12:	Prüflast zur Feldmittendurchbiegung der textil bewehrten Versuche ohne Berücksichtigung des Eigengewichts der Lasteinleitungsstruktur (a) Ergänzung der Rohmessdaten um Eigengewicht und Lasteinleitungsstruktur (b)	55
Abb. 5-13:	Kraft-Durchbiegungs-Linien der Versuche der Hauptausführung	57
Abb. 5-14:	Kraft-Durchbiegungs-Linien der stahlbewehrten Prüfkörper	58

Abb. 5-15: Dehnungsverlauf über die Bauteilhöhe des Prüfkörpers V2.1 in Feldmitte an den Messstellen B1,B2,B3 und S1/2 (a) und an den Messstellen B1,B2 und S1/2 (b).....	59
Abb. 5-16: Kraft-Durchbiegungs-Linien der textilbewehrten Prüfkörper .....	60
Abb. 5-17: Stahllängsdehnungen entlang der Bauteillängsachse im Versuch V2.2 .....	61
Abb. 5-18: Versagen des Bauteils 0.1 in der unteren Längsfuge .....	62
Abb. 6-1: Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Beton und Druckbeanspruchung nach EC 2 [20] (a) und Abaqus CDP [38] (b) .....	66
Abb. 6-2: Beton unter Zugbeanspruchung nach [48]: $\sigma$ - $\Delta l$ -Beziehung (a) und $\sigma$ - $w_{cr}$ -Beziehung (b) .....	68
Abb. 6-3: Steifigkeitsschädigung unter einaxialem Zug [37] (a) und Berücksichtigung des Tension-Stiffening-Effekts (b).....	70
Abb. 6-4: Mehraxiale Spannungszustände von Beton: Festigkeit bei ebenem Spannungszustand nach [50] (a) Bruchspannungsfläche für Beton im Hauptspannungsraum nach [26] (b).....	71
Abb. 6-5: Elastisch-plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung: Textilien (a) und Betonstahl (b).....	72
Abb. 6-6: Modellbildung und 20-mm-Vernetzung der Prüfkörper der Hauptausführung .....	73
Abb. 6-7: Spannungs-Dehnungs-Antwort eines finiten Elements unter zentrischer Druckbeanspruchung.....	76
Abb. 6-8: Dehnungsanteile der Mischung RA unter einaxialem Druck .....	76
Abb. 6-9: Spannung-Dehnungs-Beziehungen der Bewehrungsmaterialien .....	77
Abb. 6-10: Vergleich zur Elementgrößenabhängigkeit der Betonzugfestigkeit ....	78
Abb. 6-11: Finite-Elemente-Diskretisierung des Prüfkörpers SV 3 mit 20 mm und 5 mm Kantenlänge.....	79
Abb. 6-12: Ergebnisse der unbewehrten Simulation der Bauteile SV 3 (a) und SV 10 (b) .....	79
Abb. 6-13: Versuchs- und Simulationsergebnisse des Referenzbauteils SV 3.....	80
Abb. 6-14: Normalspannungen des Bauteils SV 3 in Feldmitte über die Bauteilhöhe zu definierten Belastungszeitpunkten unbewehrt (a) und bewehrt (b) .....	81
Abb. 6-15: Simulationsergebnisse der Bauteile V2.....	83
Abb. 6-16: Simulationsergebnisse der Bauteile V1 .....	84
Abb. 6-17: Stahllängsdehnungen entlang der Bauteillängsachse im Versuch V2.2 und der Simulation .....	85
Abb. 6-18: Plastische Betondehnungen der Ausgangssimulation im Traglastzustand des Versuchs V2 .....	85
Abb. 7-1: Veranschaulichung der Optimierungsverfahren nach [58] .....	89
Abb. 7-2: Begrifflichkeiten der Strukturoptimierung nach [60] .....	90
Abb. 7-3: Veranschaulichung der Kuhn-Tucker-Bedingungen .....	92
Abb. 7-4: Konservative Approximation (a), Approximation der Funktion $g(x)$ an der Stelle $x^{(k)}$ nach [69] (b) .....	94
Abb. 7-5: Modell der Strukturoptimierung.....	97
Abb. 7-6: Der SIMP-Ansatz für verschiedene Exponenten $p$ nach [58].....	98
Abb. 7-7: Entwurfsmodell der Topologieoptimierung (4400 x 200 x 20 mm)...	99

Abb. 7-8:	Anpassung des SIMP-Ansatzes an die Prüfergebnisse der Gradientenbetonmischungen .....	102
Abb. 7-9:	Verteilung der Materialgesetze nach der Optimierung.....	104
Abb. 7-10:	Kraft-Durchbiegungs-Diagramm der Optimierungsergebnisse.....	105
Abb. 7-11:	Kraft-Durchbiegungs-Diagramm der Gradientenentwürfe .....	107
Abb. A-1:	Systemaufbau des Zweiplattengeräts [87] .....	125
Abb. D-1:	Schematische Darstellung unterschiedlicher Bewehrungssysteme für Beton [100] .....	131
Abb. D-2:	Unterteilung einer typischen Spannungs-Dehnungslinie von Textilbeton in lineare Abschnitte [25] .....	133
Abb. D-3:	Prüfkörper mit Glasfaserbewehrung .....	136
Abb. D-4:	Prüfkörper mit Kohlefaserbewehrung (alle Abmessungen in mm) ...	136
Abb. D-5:	Versuchsaufbau, Messinstrumentierung und Versagensbild Dehnkörperversuch .....	137
Abb. D-6:	Spannungs-Dehnungslinien der Serien 1,5 und 6 (Grid 600, wärmebehandelt), bezogen auf die Textilquerschnittsfläche.....	138
Abb. D-7:	Spannungs-Dehnungslinien der Serien 3,4,7 und 8 (Grid 300, wärmebehandelt), bezogen auf die Textilquerschnittsfläche.....	139
Abb. D-8:	Spannungs-Dehnungslinien der Serie 5 der normgelagerten Proben	140
Abb. E-1:	Querschnitte Gradientenplattenstreifen und deren Idealisierung in Feldmitte (oben) und am Auflager (unten) .....	142
Abb. E-2:	Vergleich der Schnittkraftverläufe bei Gleichstreckenbelastung und Vierpunkt-Biegeversuch [26] .....	143
Abb. E-3:	Vereinfachter Querschnitt für die Berechnung der Schubspannungen aus Schwinddifferenzen .....	145
Abb. E-4:	Verlauf der Schubspannung in der Längsfuge .....	146
Abb. F-1:	Herstellung der Bauteilserie 0 beim Kooperationspartner Wochner.	148
Abb. F-2:	Vorschädigung in der Verbundfuge unten und vertikal zwischen den Kernschichten .....	149
Abb. F-3:	Versagen des Prüfkörpers 0.1 in der Längsfuge .....	149
Abb. G-1:	Iterationsschema Optimalitätskriterium .....	163

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 2-1: Entwicklungsphasen der Gradientenbetontechnologie .....	20
Tabelle 3-1: Übersicht der geprüften Festbetoneigenschaften nach 28 Tagen .....	22
Tabelle 3-2: Mischungszusammensetzung und Mischvorgang KLM/m <sup>3</sup> .....	25
Tabelle 3-3: Festbetoneigenschaften der Begleitprüfungen .....	26
Tabelle 3-4: Umrechnung der Prüfergebnisse auf die einaxiale Druckfestigkeit ....	27
Tabelle 3-5: Umrechnung der Prüfergebnisse auf die einaxiale Zugfestigkeit .....	27
Tabelle 5-1: Ergebnisse der skalierten Versuche mit Biegezugversagen .....	41
Tabelle 5-2: Übersicht über die skalierten Querkraftversuche an Rechteckbalken.	44
Tabelle 5-3: Erstprüfprogramm für haufwerksporige Leichtbetonbauteile [21] .....	49
Tabelle 5-4: Übersicht über die Prüfergebnisse der Hauptausführung im Vergleich zur Bauteilauslegung .....	53
Tabelle 5-5: Eingangsparameter in die Berechnung der Schubspannung aus Schwinddifferenz .....	62
Tabelle 6-1: Eingabeparameter zur Beschreibung des Betonmaterialverhaltens ....	74
Tabelle 6-2: Eingabeparameter zur Beschreibung der Bewehrung .....	75
Tabelle 7-1: Optimierungsergebnisse der Stabwerkstrategie .....	100
Tabelle 7-2: Optimierungsergebnis der Materialverteilungsstrategie .....	103
Tabelle 7-3: Materialzuordnung .....	105
Tabelle 7-4: Optimierungsergebnisse weiterführende Gradientenentwürfe .....	106
Tabelle B-1: Übersicht über die Umrechnung der Druckfestigkeit [33] .....	126
Tabelle C-1: Festigkeitseigenschaften der verwendeten Feinbetone nach Herstellerangaben, nach DIN 1048 [93] .....	129
Tabelle C-2: Konsistenzklassen der Gradientenbetonmischungen nach DIN EN 1015-3 [96] .....	129
Tabelle C-3: Mischungszusammensetzungen der RA-Betone für 1 m <sup>3</sup> Frischbeton .....	130
Tabelle C-4: Technische Daten der verwendeten Gelege [29,30] .....	130
Tabelle C-5: Mechanische Eigenschaften der Rovings [97] .....	130
Tabelle D-1: Eigenschaften verschiedener Fasermaterialien im Vergleich zu Baustahl [101] .....	132
Tabelle D-2: Untersuchte Kombinationen Textilbewehrung – Feinkornbeton .....	135
Tabelle D-3: Übersicht der Dehnkörperversuche .....	137
Tabelle E-1: Biegebemessung des gewählten Querschnitts in Feldmitte .....	142
Tabelle E-2: Querkraftbemessung nach EC 2 und DIN EN 1520 Variante 1 und 2 144	
Tabelle E-3: Eingangsparameter in die Berechnung der Schubspannung aus Schwinddifferenz nach [27] .....	146
Tabelle E-4: Einwirkende Schubspannung und Widerstand der Verbundfuge .....	147
Tabelle F-1: Eigenschaften und Vorschädigung der Prüfserie 0 .....	148
Tabelle F-2: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 1.1 .....	150
Tabelle F-3: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 2.1 .....	152
Tabelle F-4: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 2.2 .....	154
Tabelle F-5: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 3.1 .....	156

Tabelle F-6: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 3.2 .....	157
Tabelle F-7: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 4.1 .....	158

## A Prüfverfahren

Im Rahmen der Mischungsentwicklung gradierteter Betone wurden Frisch- und Festbetonprüfungen durchgeführt. Aufgrund des maximalen Größtkorns von 4 mm basieren die verwendeten Prüfverfahren teilweise auf Prüfnormen für Mörtel, teilweise auf Prüfnormen für Beton. Diese Prüfungen wurden bei den Bauteilversuchen als Begleitprüfungen zur Konformitätskontrolle wiederholt.

### A.1 Frischbetonprüfungen

Mithilfe des Ausbreitversuchs kann die Konsistenz frisch angemischten Mörtels bestimmt werden. Der Versuch ist in DIN EN 1015 Teil 3 [83] geregelt.

Die Frischbetonrohddichte wird nach DIN EN 12350-6 [84] geprüft. Alternativ kann die Frischbetonrohddichte aus dem Volumen und dem Gewicht der frisch ausgeschalteten Probekörper ermittelt werden.

Der Luftgehalt wird nach DIN EN 1015-7 [85] im Luftporentopf geprüft.

### A.2 Festbetonprüfungen

Die Prüfung der Festbetoneigenschaften erfolgt nach 28 Tagen. Bis zur Prüfung werden die Probekörper im Wasserbad oder in einer Feuchtekammer mit 100 % Luftfeuchtigkeit gelagert. Es werden jeweils drei Prüfwerte je geprüfter Eigenschaft ermittelt, soweit in der zugehörigen Prüfnorm keine anderen Vorgaben getroffen wurden.

Die Biegezugfestigkeit wird an Prismen mit den Abmessungen 40 x 40 x 160 mm nach DIN EN 196-1 [86] geprüft. Der Versuchsaufbau entspricht einem Drei-Punkt-Biegeversuch. Die Lastaufbringung erfolgt kraftgesteuert mit  $50 \pm 10$  N/s bis zum Bruch. Die resultierenden Bruchstücke werden zur Prüfung der Druckfestigkeit verwendet.

Die Prüfung der Druckfestigkeit erfolgt nach DIN EN 196-1 [86] an den sechs Hälften der Mörtelprismen aus der Biegezugfestigkeitsprüfung. Diese werden mit den geschalteten Seitenflächen nach oben und unten, mittig in eine Druckprüfmaschine eingelegt. Die Belastung erfolgt mit Druckplatten mit den Abmessungen 40 x 40 mm. Ermittelt wird eine Würfeldruckfestigkeit  $f_{c,cu,40}$  an einem Würfel der Seitenlänge 40 mm. Der Versuch erfolgt kraftgesteuert mit  $2400 \pm 200$  N/s bis zum Bruch.

Die Prüfung der statischen Elastizitätsmoduls nach DIN EN 196-1 [86] erfolgt an Zylindern mit den Abmessungen  $d=100$  mm und  $h=200$  mm. Zuerst wird der plangeschliffene Probekörper mit einer unteren Prüfspannung von  $\sigma_u=0,5$  N/mm<sup>2</sup> belastet. Von hier aus erfolgt der Versuch kraftgesteuert mit einer Steigerung der

Normalspannung von 0,5 N/mm<sup>2</sup> bis zu einer oberen Prüfspannung von  $\sigma_o = 2/3 f_c$  und zurück zur Unterspannung. Die zugehörigen Dehnungen  $\varepsilon_o$  und  $\varepsilon_u$  werden mit drei induktiven Wegaufnehmern gemessen, welche im gleichen Abstand zueinander auf der Mantelfläche angeordnet sind. Dieser Zyklus wird dreimal abgefahren und der E-Modul als Sekantenmodul des 3. Zyklus berechnet. Anschließend erfolgt eine Belastung bis zum Bruch. Die gemessene Druckfestigkeit sollte nicht mehr als 20% von der vorausgesetzten Druckfestigkeit abweichen.

Die Prüfung der Wärmeleitfähigkeit erfolgt mithilfe eines Plattengeräts nach DIN EN 12664 und DIN 52612-2 [87,88]. Hierfür werden planparallel geschliffene Platten mit den Abmessungen 200 x 200 x 25 mm hergestellt. Diese werden bis zur Massenkonstanz im Ofen bei 105 °C getrocknet. Abb. A-1

Über die mittlere Leistungszufuhr ( $\Phi$ ) zum Messausschnitt der Heizplatte lassen sich dann Wärmestromdurchlasswiderstand (R) oder Wärmeleitfähigkeit ( $\lambda$ ) errechnen [87].

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} \quad (\text{A-1})$$

$$\lambda = \frac{\Phi \cdot d}{A \cdot (T_1 - T_2)} \quad (\text{A-2})$$

mit:  $T_1$ : mittlere Temperatur der heißen Seite der Probekörper [K]

$T_2$ : mittlere Temperatur der kalten Seite der Probekörper [K]

$A$ : Messfläche der Heizplatte [m<sup>2</sup>]

$d$ : mittlere Dicke der Probekörper [m]

$\Phi$ : mittlere Leistungszufuhr zur Heizplatte [W]

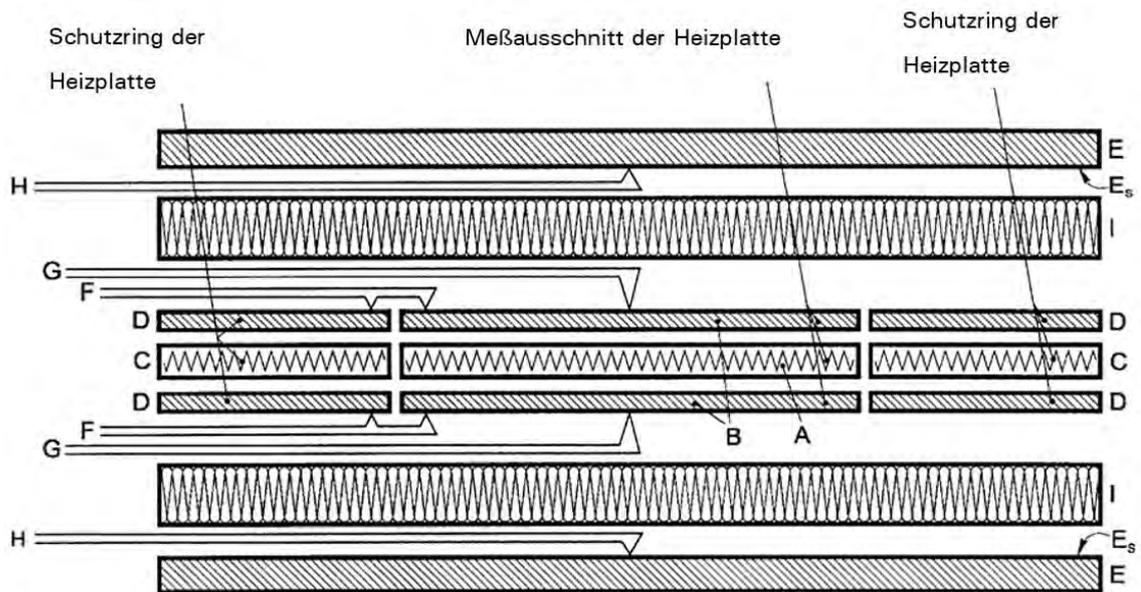


Abb. A-1: Systemaufbau des Zweiplattengeräts [87]

- mit:
- A Heizeinrichtung des Messausschnittes
  - B Deckplatten des Messausschnittes
  - C Heizeinrichtung des Schutzringausschnittes
  - D Deckplatten des Schutzringausschnittes
  - E Kühlplatte
  - Es Deckplatte der Kühlplatte
  - F Differenzthermoelemente
  - G Thermoelemente der Heizplattenoberfläche
  - H Thermoelemente der Kühlplattenoberfläche
  - I Probekörper
  - L Schutzplatte
  - M Schutzplattendämmung
  - N Differenzthermoelemente der Schutzplatte

## B Umrechnung von Betonkennwerten

### B.1 Umrechnung auf die einaxiale Druckfestigkeit

Die geprüften Eigenschaften werden auf die Bezugsbasis aller Bemessungen von Konstruktionsbeton, die einaxiale Druckfestigkeit des Betons  $f_{1c}$ , zurückgeführt [33]. Die einaxiale Druckfestigkeit entspricht der Druckfestigkeit eines schlanken Prismas. In der DIN 1045-1 [89] entspricht dieser Wert dem aus dem charakteristischen Wert der Zylinderdruckfestigkeit errechneten Bemessungswert:

$$f_{1cd} = \alpha \cdot f_{ck}/\gamma_c = 0,85 \cdot f_{ck}/\gamma_c \quad (\text{B-1})$$

Dabei enthält der Beiwert  $\alpha = 0,85$  einen Reduktionsfaktor von 0,9 zur Abminderung auf Dauerlastniveau und einen Umrechnungsfaktor 0,95 zur Umrechnung der Zylinderdruckfestigkeit  $f_{c,cyl}$  auf die einaxiale Druckfestigkeit. In [33] sind die zur Umrechnung der an verschiedenen Prüfkörpern ermittelten Festigkeitswerte auf die einaxiale Druckfestigkeit  $f_{1c}$  folgendermaßen definiert:

Tabelle B-1: Übersicht über die Umrechnung der Druckfestigkeit [33]

Festigkeit	Prüfkörperabmessung [mm]	Umrechnung der Prüfkörper	Einaxiale Druckfestigkeit $f_{1c}$
$f_{c,pr}$	pr (a/a/h = 100/100/500)		$f_{1c,pr} = f_{c,pr}$
$f_{c,cyl}$	cyl ( $\emptyset$ /h = 150/300)		$f_{1c,cyl} = 0,95 \cdot f_{c,cyl}$
$f_{c,cyl,100/300}$	cyl ( $\emptyset$ /h = 100/300)	$f_{c,cyl} = 1,05 \cdot f_{c,cyl,100/300}$	$f_{1c,cyl} = 0,9975 \cdot f_{c,cyl,100/300}$
$f_{c,cyl,170/150}$	cyl ( $\emptyset$ /h = 70/150)	$f_{c,cyl} = (1,00/1,06) \cdot f_{c,cyl,170/150}$	$f_{1c,cyl} = 0,8962 \cdot f_{c,cyl,170/150}$
$f_{c,cyl,120/360}$	cyl ( $\emptyset$ /h = 120/360)	$f_{c,cyl} = (1,00/0,95) \cdot f_{c,cyl,120/360}$	$f_{1c,cyl} = 1,0 \cdot f_{c,cyl,120/360}$
$f_{c,cyl,100/200}$	cyl ( $\emptyset$ /h = 100/200)	$f_{c,cyl} = (0,92/0,95) \cdot f_{c,cyl,100/200}$	$f_{1c,cyl} = 0,92 \cdot f_{c,cyl,100/200}$
$f_{c,cu}$	cu (a = 150)		$f_{1c,cu} = 0,75 \cdot f_{c,cu}$
$f_{c,cu,200}$	cu (a = 200)	$f_{c,cu} = 1,05 \cdot f_{c,cu,200}$	$f_{1c,cu} = 0,7875 \cdot f_{c,cu,200}$
$f_{c,cu,100}$	cu (a = 100)	$f_{c,cu} = 0,90 \cdot f_{c,cu,100}$	$f_{1c,cu} = 0,675 \cdot f_{c,cu,100}$

Tabelle B-1 gilt nur für Normalbeton. Für Leichtbeton und haufwerksporigen Leichtbeton liegen keine Umrechnungsfaktoren vor. Für hochfesten Beton ab  $f_{c,cyl} = 54$  MPa verändern sich die Umrechnungsfaktoren nochmals leicht. Die Deckschichtmischungen liegen mit einem  $f_{c,cyl} = 60,5$  MPa über dieser Grenze, es werden jedoch aufgrund geringer Abweichungen die Umrechnungsfaktoren für Normalbeton verwendet. Die Umrechnung der Druckfestigkeit von Mörtelprismen  $f_{c,cu,40}$  ist an [90] angelehnt. Hierin wird der Zusammenhang zwischen der Druckfestigkeit von Normprismen [86] und Würfeln mit der Kantenlänge 150 mm mit dem Umrechnungsfaktor

0,87 angegeben. Hieraus ergibt sich für die Errechnung der einaxialen Druckfestigkeit folgender Zusammenhang:

$$f_{1c,cu} = 0,75 \cdot f_{c,cu} = 0,75 \cdot 0,87 \cdot f_{c,cu,40} = 0,65 \cdot f_{c,cu,40} \quad (\text{B-2})$$

Die Tabelle soll gewährleisten, dass nur ein einziger Wert der Druckfestigkeit zur Bemessung der Prüfkörper verwendet wird. Der für die Bemessung nach jeweiliger Norm benötigte Wert wird dann aus der einaxialen Druckfestigkeit ermittelt. Liegen Ergebnisse für mehrere Prüfkörpergeometrien vor, gilt analog zu [33]: Prisma vor Zylinder vor Würfel.

## B.2 Umrechnung der Betonzugfestigkeit

Entsprechend der einaxialen Druckfestigkeit wird in [33] eine mittlere einaxiale Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  definiert, welche über Umrechnungsfaktoren aus den Prüfergebnissen der Spaltzugfestigkeit und der Biegezugfestigkeit nach Model Code 2010 [45] wie folgt ermittelt werden kann:

$$f_{ctm} = 1,0 \cdot f_{ctm,sp} [N/mm^2] \quad (\text{B-3})$$

$f_{ctm,sp}$  Spaltzugfestigkeit an Zylindern ( $\varnothing/h = 150/300$ ) oder Prismen

$$f_{ctm} = f_{ct,fl} \frac{0,06 \cdot h_b^{0,7}}{1 + 0,06 \cdot h_b^{0,7}} [N/mm^2] \quad (\text{B-4})$$

mit:  $h_b$  Prüfkörperhöhe

z.B.:  $h_b = 75 \text{ mm}$        $f_{ctm} = 0,55 f_{ct,fl}$

$h_b = 40 \text{ mm}$        $f_{ctm} = 0,44 f_{ct,fl}$

Nach Model Code 2010 [45] darf in Ermangelung von Messwerten die mittlere zentrische Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  auch aus der Zylinderdruckfestigkeit  $f_{ck}$  folgendermaßen errechnet werden:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} [N/mm^2] \quad (\text{B-5})$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot (f_{ck} + 8)) [N/mm^2] \quad (\text{B-6})$$

Formel (B-5) gilt für  $f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$  und Formel (B-6) für  $f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$ . Für Leichtbeton gilt:

$$f_{lctm} = \eta_1 \cdot f_{ctm} [N/mm^2] \quad (\text{B-7})$$

$\eta_1 = 0,4 + 0,6 \cdot \rho/2200$       Korrekturwert der Zugfestigkeit für Leichtbeton

### B.3 Rechenwerte der Betondruck- und Betonzugfestigkeit

Zur Verwendung der Festbetoneigenschaften in normativen Bemessungsformeln müssen die in den Versuchen ermittelten Mittelwerte auf die in den Normen verwendeten charakteristischen Werte umgerechnet werden.

Für die unter Laborbedingungen ermittelten Werte von Normalbeton gilt nach [45] folgende Beziehung:

$$f_{\text{cm,cyl}} = f_{\text{ck,cyl}} + 8 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-8})$$

und somit

$$f_{1,\text{ck}} = 0,95 \cdot f_{\text{ck,cyl}} = 0,95 \cdot (f_{\text{cm,cyl}} - 8) = f_{\text{cm,cyl}} - 7,6 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-9})$$

Für den Bewehrungsstahl gilt nach [91]:

$$f_{\text{syk}} = f_{\text{sy}}/1,1 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-10})$$

Für die Betonzugfestigkeit gibt es keine entsprechende Beziehung, so dass der charakteristische Wert nur bei den in Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit angegebenen Rechenwerten ermittelt werden kann [33]. In [92] werden die oberen und unteren Fraktilwerte folgendermaßen angegeben:

$$5\% \text{ – Fraktile: } f_{\text{ct,k}5\%} = 0,70 \cdot f_{\text{ctm}} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-11})$$

$$95\% \text{ – Fraktile: } f_{\text{ct,k}95\%} = 1,30 \cdot f_{\text{ctm}} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-12})$$

und somit gilt für den unteren Fraktilwert des Rechenwerts  $f_{1\text{ct,cal}}$  für Normalbeton:

$$f_{\text{ct,5}\%} = 0,70 \cdot f_{\text{ctm}} = 0,218 \cdot f_{1\text{c}}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-13})$$

mit

$$f_{1\text{ct,m}} = 0,312 \cdot f_{1\text{c}}^{2/3} \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad (\text{B-14})$$

## C Materialkennwerte

Nachfolgend sind die Kennwerte der eingesetzten Materialien aufgeführt. Diese wurden zum Teil experimentell ermittelt, zum Teil handelt es sich um Herstellerangaben.

### C.1 Premix Betonmischungen

Tabelle C-1: Festigkeitseigenschaften der verwendeten Feinbetone nach Herstellerangaben, nach DIN 1048 [93]

	SIKA® Basismischung CR [94]	SIKA® Matrix 2 [95]
Druckfestigkeit	85 N/mm <sup>2</sup>	45 N/mm <sup>2</sup>
Biegezugfestigkeit	8 N/mm <sup>2</sup>	9 N/mm <sup>2</sup>
E-Modul (geprüft)	35.049 N/mm <sup>2</sup>	29.711 N/mm <sup>2</sup>

### C.2 Konsistenz der Mischungen

Tabelle C-2: Konsistenzklassen der Gradientenbetonmischungen nach DIN EN 1015-3 [96]

	Konsistenzklasse	F1 - F2	F3 - F5	F6
	Konsistenzbereich	steif - plastisch	weich-fließfähig	sehr fließfähig
	Verdichtungsart	Stampfen	Vibrationsverfahren	selbstverdichtend
Mischungsbezeichnung	KLM		X	
	G0,1LM	X		
	G0,2LM	X		
	KLS		X	
	G0,1LS		X	
	G0,2LS		X	
	KLSAP		X	
	G0,1LSAP		X	
	G0,2LSAP		X	
	KAM	X		
	G0,1AM	X		
	G0,2AM	X		
	G0,3L		X	
	G0,5L		X	
	G0,7L		X	
	G0,3A	X		
	G0,5A		X	
	G0,7A		X	
	RA			X

### C.3 Mischtablette Premix

Tabelle C-3: Mischungszusammensetzungen der RA-Betone für 1 m<sup>3</sup> Frischbeton

Mischung	SIKA® Basismischung CR			SIKA® Matrix 2		
	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]	m [kg]	V [l]	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]	m [kg]	V [l]
Premix	2800	1976	706	2631	1785	678
- davon Zement	3100	731	236	3100	-	-
- davon andere Stoffe	2650	1245	470	2650	-	-
Wasser M	1000	294	294	1000	322	322
Summe		2270	1000		2107	1000

### C.4 Bewehrungsmaterialien

Bei den Kohlefasern kommen Heavy-Tow-Carbonfasern SIGRAFIL® C30 T050 EPY der Firma SGL Technologies GmbH zum Einsatz. Die Rovings haben eine Feinheit von 3300 tex (3300 g/km, 50.000 Faserfilamente). Mit der Dichte von 1,8 g/cm<sup>3</sup> lässt sich der Querschnitt des Rovings zu 1,83 mm<sup>2</sup> berechnen.

Tabelle C-4: Technische Daten der verwendeten Gelege [29,30]

Produkt	Beschichtungssystem	Gewicht (g/m <sup>2</sup> )	Rovingabstand (mm)		Fasertyp [g/km]		A <sub>t</sub> (mm <sup>2</sup> /m)	
			längs	quer	längs	quer	längs	quer
Plastoform Glasfasergelege Panzer	alkalibeständig beschichtet	540	9	6	2400 tex	-	160*	-
SIGRATEX® Grid 600	Epoxidharz getränkt	560	10,8	18,0	3300 tex	3300 tex	169*	101*
SIGRATEX® Grid 300	Epoxidharz getränkt	234	32,4	32,4	3300 tex	3300 tex	56*	56*

\* Aus den Angaben errechneter Wert

Tabelle C-5: Mechanische Eigenschaften der Rovings [97]

Produkt	Dichte [g/cm <sup>3</sup> ]	Filament E-Modul (Mittelwert) [N/mm <sup>2</sup> ]	Filament Zugfestigkeit (Mittelwert) [N/mm <sup>2</sup> ]	Filament Bruchdehnung [%]
SIGRAFIL® C30 T050 EPY	1,8	240.000	4.000	16
E-Glas	2,6	74.000 – 80.000*	1.715	35 - 40

\* Keine Herstellerangabe verfügbar

## D Textile Bewehrung zum Einsatz in gradierten Betonbauteilen

### D.1 Grundlagen

Der Werkstoff Textilbeton wurde in den letzten Jahren in den SFBs 528 „Textile Bewehrungen zur bautechnischen Verstärkung und Instandsetzung“ [98] und 532 „Textilbewehrter Beton - Grundlagen für die Entwicklung einer neuartigen Technologie“ von Curbach und Hegger intensiv erforscht [13,99]. Es handelt sich um eine Weiterentwicklung des Stahlbetons, bei der nichtmetallische, alkalibeständige und hochzugfeste Materialien als Bewehrung zum Einsatz kommen. Die multiaxial gerichteten Gelege aus Glas- oder Kohlefasern haben im Fall der eigenen Untersuchungen eine Maschenweite von ca. 10 - 30 mm. Als Beton kommt ein Feinkornbeton mit einem Größtkorn von maximal 2 mm, welcher auf die geringen Rovingabstände abgestimmt ist, zum Einsatz. Das Tragverhalten des Textilbetons wird von Jesse und Curbach [13] als dem Stahlbeton ähnlich, jedoch in allen Dimensionen um eine Größenordnung kleiner und somit als miniaturisierter Stahlbeton beschrieben.

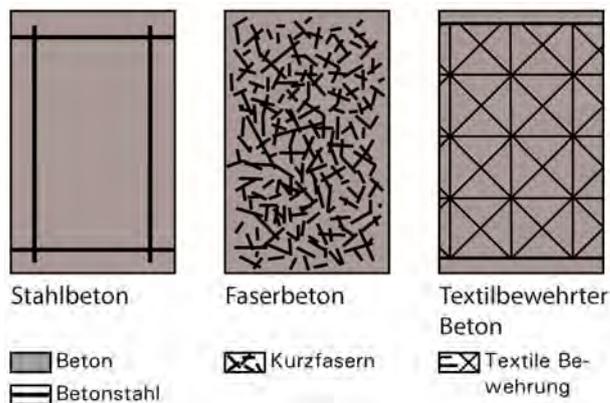


Abb. D-1: Schematische Darstellung unterschiedlicher Bewehrungssysteme für Beton [100]

Als Vorteile des Textilbetons sind im Vergleich zum Stahlbeton folgende Punkte zu nennen:

- Aufgrund der dünnen Bewehrungslagen und deren Korrosionsbeständigkeit lassen sich Bauteildicken ab 15 mm realisieren. Die Mindestbetondeckungen von 20-50 mm für Stahlbeton entfallen.
- Im Fall von Carbon als Bewehrungsmaterial ergibt sich aufgrund der hohen Filamentzugfestigkeit eine hohe Zugtragfähigkeit.
- Aufgrund des geringen Bewehrungsrasters und des Feinkornbetons ergibt sich Sichtbetonqualität für die Oberflächen.

Als Nachteile des Textilbetons sind im Vergleich zum Stahlbeton folgende Punkte zu nennen:

- Die Glasfaserbewehrung besitzt eine verminderte Dauerfestigkeit.
- Die Ausnutzbarkeit der Bewehrungsmaterialien ist aufgrund deren Unvermögen plastische Umlagerungen vorzunehmen gering.
- Bei Temperaturen über 500 °C kommt es zu starken Festigkeitsverlusten.

Textile Bewehrungsmaterialien wie Glas- oder Kohlefasergelege können nur dann für tragende Bauteile eingesetzt werden, wenn deren Eigenschaften zuvor experimentell bestimmt werden. Da es sich um nicht genormte Baumaterialien handelt, liegen keine allgemein gültigen Materialkennwerte vor. Daher wird die Zugtragfähigkeit am Verbundwerkstoff Textilbeton für den Einsatz in gradierten Betonbauteilen mithilfe uniaxialer Zugversuche ermittelt. Es werden Versuche zu Glas- und zu Kohlefaserbewehrung durchgeführt, deren Eigenschaften im Vergleich zum Betonstahl in Tabelle D-1 zusammenfassend dargestellt sind.

Tabelle D-1: Eigenschaften verschiedener Fasermaterialien im Vergleich zu Bau Stahl [101]

Eigenschaft	Einheit	BSt 500	AR-Glas	Carbon
Festigkeit	MPa	500/550	2.500	4.200
Elastizitätsmodul	GPa	200	74...80	240
Bruchdehnung	%	50	35	18
Dichte (bei 20 °C)	g/cm <sup>3</sup>	7,85	2,74...2,80	1,78
Filamentdurchmesser	µm	-	12...25	7
Filamente je Garn	Stück	-	800...2.000	12.000...50.000
Feinheit	tex	-	640...2.400	800...3.500
Bewehrungsdurchmesser	mm	6...28	~ 1...2	~ 1...2,5
Querschnittsfläche je Stab	mm <sup>2</sup>	28...615	0,23...0,88	0,44...1,9
Wirtschaftlichkeit	kN/€m	42...64	36...46	37...56

Es lässt sich erkennen, dass die Kohlefasern hinsichtlich ihrer mechanischen Eigenschaften das größte Potential aufweisen. Die Dauerhaftigkeit von Kohlefasern, welche inert gegenüber alkalischen Angriffen sind, ist der von Glasfasern, welche alkaliresistent beschichtet werden müssen, überlegen. Die Dauerfestigkeit von Glasfasern wird aufgrund des unterkritischen Risswachstums in der Bemessung um 50 % gegenüber der Kurzzeitfestigkeit abgemindert [13]. Kohlefasern hingegen weisen kein zeitabhängiges Materialverhalten auf [102]. Auch steigt die Verfügbarkeit von Kohlefaseralbzeugen am Markt und der Marktpreis sinkt. Daher stellt die Kohlefaser die beste Alternative zur Bewehrung mit Betonstahl dar. Hohe Temperaturbeanspruchungen über 500 °C infolge von Gebäudebrand, kombiniert mit geringen Betondeckungen, führen aufgrund von Oxidation jedoch auch bei den Kohlefasern zu einem starken Festigkeitsabfall [103–105]. Dem wird mit entsprechenden Beschichtungssystemen entgegenzuwirken versucht.

Der Einsatz von textiler Bewehrung in Gradientenbetonbauteilen ermöglicht die Ausführung dünner bewehrter Deckschichten. Die Betondeckung aus gefügedichtem Normalbeton kann entfallen.

## D.2 Zugtragverhalten von Textilbeton

Das Zugtragverhalten von textilbewehrtem Beton lässt sich anhand der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in drei Bereiche aufgliedern (vgl. Abb. D-2). Nachfolgend wird das Ingenieurmodell nach Voss [25], welches auf den Modellen von Jesse [106] und Molter [100] aufbaut, vorgestellt.

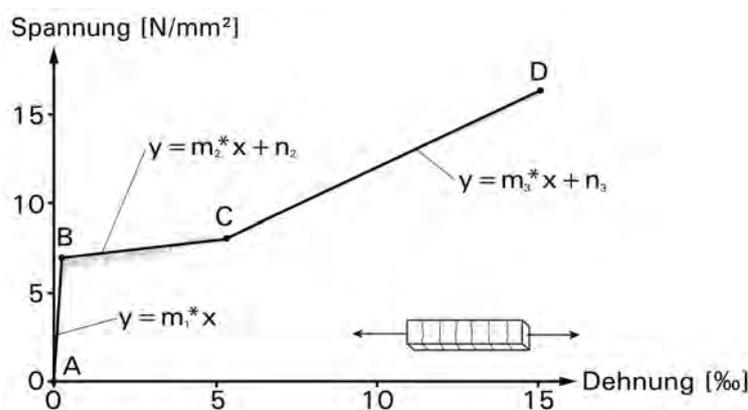


Abb. D-2: Unterteilung einer typischen Spannungs-Dehnungs-Linie von Textilbeton in lineare Abschnitte [25]

### Zustand I (Bereich A-B)

In diesem Bereich liegt bis zum Erstriss ein linear-elastisches Materialverhalten vor. Die Steifigkeit entspricht dem E-Modul des Feinkornbetons  $E_c$ . Die textile Bewehrung hat eine rissunterdrückende Wirkung, so dass der Erstriss nach Erreichen der Betonzugfestigkeit auftritt und aus Dehnkörperversuchen ermittelt werden muss. Es gilt für die Textilzugspannung im Punkt B:

$$\sigma_{tex,B} = \frac{F_{ct}}{A_t} \quad (D-1)$$

mit:  $F_{ct}$  Erstrisslast [N]

$A_t$  Querschnittsfläche der Bewehrung [mm<sup>2</sup>]

**Zustand II a (Bereich B-C)**

Dieser Bereich spiegelt die Phase bis zur vollständigen Rissbildung wider. Er endet, sobald die Verbundkräfte zwischen Bewehrung und Matrix die Risslast des Betons nicht mehr erreichen, da die Abstände zu kurz sind. Der Spannungsanstieg in diesem Bereich beruht auf der Streuung der Betonzugfestigkeit und wird über den Beiwert  $k_R$  abgebildet.

$$\sigma_{tex,C} = k_R \cdot \sigma_{tex,B} \quad (D-2)$$

mit:  $k_R$  Verhältnis zwischen Textilspannung am Ende und am Anfang von Zustand II a

**Zustand II b (Bereich C-D)**

In diesem Bereich beteiligt sich nur noch die textile Bewehrung am Lastabtrag. Die Filamentzugfestigkeit wird jedoch nicht erreicht. Dies liegt vor allem am ungleichmäßigen Spannungszustand über dem Roving, welcher wesentlich von den Verbundeigenschaften der Filamente abhängt. Der Zusammenhang zwischen mittlerer Textilbruchspannung im Versuch und der Filamentzugfestigkeit wird mit dem Effektivitätsfaktor  $k_1$  beschrieben.

$$\sigma_{tex,D} = k_1 \cdot f_{fil} \cdot A_t \quad (D-3)$$

mit:  $k_1$  Effektivitätsbeiwert

$f_{fil}$  Filamentzugfestigkeit

$$k_1 = \frac{\sigma_{tex,max}}{f_{fil}}$$

$\sigma_{tex,max}$  mittlere Textilbruchspannung im Versuch

Dieser Beiwert liegt für ungetränkte Textilien im Bereich von 0,2 bis 0,3 und kann bei getränkten Textilien derzeit Werte bis 0,65 annehmen [25].

Die Zugtragfähigkeit des Verbundquerschnitts berechnet sich dann zu:

$$F_t = A_t \cdot f_{fil} \cdot k_1 \cdot k_{0,\alpha} \cdot k_2 \quad (D-4)$$

mit:  $A_t$  Querschnittsfläche der Bewehrung [mm<sup>2</sup>]

$k_{0,\alpha}$  Beiwert für schiefwinklige Beanspruchung

$k_2$  Beiwert für zweiachsigel Beanspruchung

$$k_{0,\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{90}$$

$\alpha$  Kraft-Faser-Winkel

### D.3 Untersuchte Materialien

Im Rahmen der Zugtragversuche werden zwei verschiedene Kohlefasergelege und ein Glasfasergelege in Kombination mit zwei Feinkornbetonmischungen untersucht (vgl. Tabelle D-2).

Tabelle D-2: Untersuchte Kombinationen Textilbewehrung – Feinkornbeton

	Plastoform Glasfasergelege Panzer	SIGRATEX® Grid 600	SIGRATEX® Grid 300
Sika Basismischung (BM)	X	X	X
Sika Matrix 2 (M2)		X	X

### D.4 Versuche

#### Versuchsserien

Es wurde eine Versuchsserie mit fünf Probekörpern in der Kombination Glasfaserbewehrung und Sika Basismischung untersucht. Bei den vielversprechenderen Kohlefasergelegen, die auf lange Sicht zum Einsatz kommen sollen, ergaben sich acht Versuchsserien mit jeweils fünf Probekörpern, von denen jeweils drei wärmebehandelt und zwei in der Klimakammer gelagert wurden. Bei den Versuchsserien mit Kohlefaserbewehrung wurde sowohl der Feinkornbeton als auch der Bewehrungsgrad und die Maschenweite des Textils verändert. In Tabelle D-3 sind die untersuchten Kombinationen aufgeführt.

#### Probekörpergeometrie und Versuchsaufbau

Die Probekörpergeometrien sind für die Untersuchungen zum Glasfasergewebe in Abb. D-3, für die Untersuchungen zur Kohlefaserbewehrung in Abb. D-4 dargestellt. Der Unterschied in den Aufbauten ergibt sich aus der deutlich unterschiedlichen maximalen Prüflast. Kann die Prüflast im Glasfaserversuch noch über Bolzen und eine Verankerungslänge von 125 mm eingeleitet werden, benötigen die Kohlefasern eine Verankerungslänge von 250 mm. Der Messbereich beträgt 250 bzw. 200 mm.

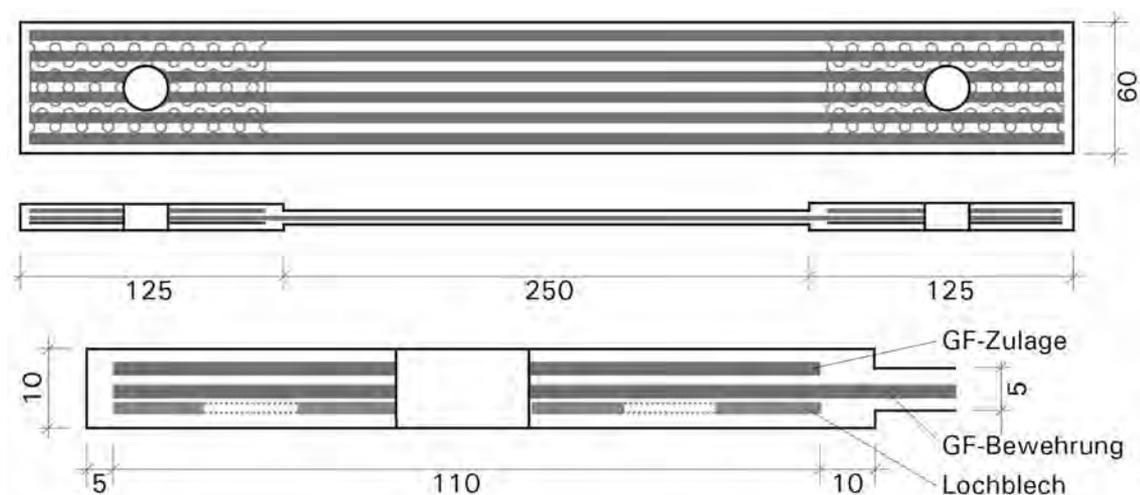


Abb. D-3: Prüfkörper mit Glasfaserbewehrung

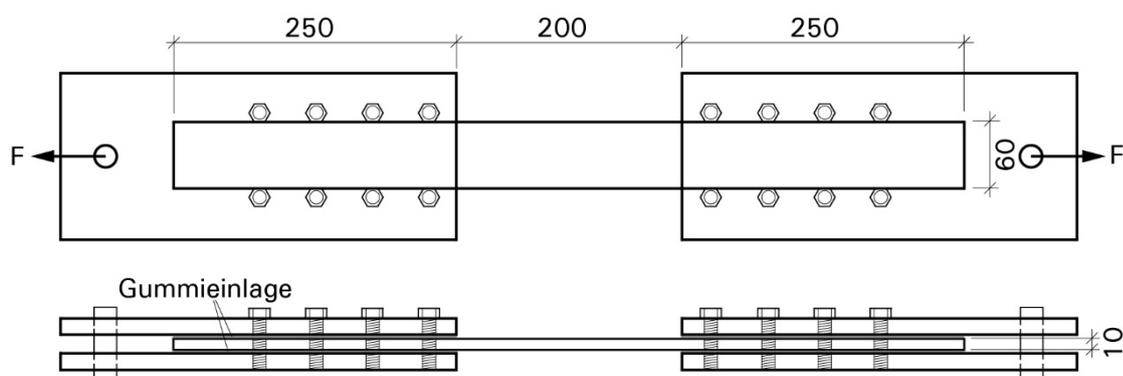


Abb. D-4: Prüfkörper mit Kohlefaserbewehrung (alle Abmessungen in mm)

Die Prüfkörper wurden alle liegend hergestellt, so dass sich zwei verschiedene Oberflächenqualitäten einstellen und eine leichte Krümmung aufgrund von Schwindverformungen auftrat. Drei Probekörper pro Serie wurden 24 Stunden im Wasserbad bei 90°C wärmebehandelt, um anschließend sofort geprüft zu werden. Die anderen beiden Proben wurden nach DIN EN 12390-2 28 Tage in einer Klimakammer (20 °C, 100 % rel. Luftfeuchte) nachbehandelt. Für alle Serien wurden Kontrollprismen des Feinkornbetons hergestellt und geprüft.

### Durchführung der Dehnkörperversuche

Die Versuche wurden weggesteuert mit einer Verformungsgeschwindigkeit von 1 mm/min durchgeführt. Die Dehnungszunahme im Messbereich wurde durch beidseitig angebrachte induktive Wegaufnehmer erfasst. Die Prüfkörper waren auf beiden Seiten über Bolzen momentenfrei gelagert. Durch das Vorspannen der Schrauben und das Anpressen der Stahlplatten kam es aufgrund der Vorkrümmung der Bauteile zu Vorschädigungen der Prüfkörper.

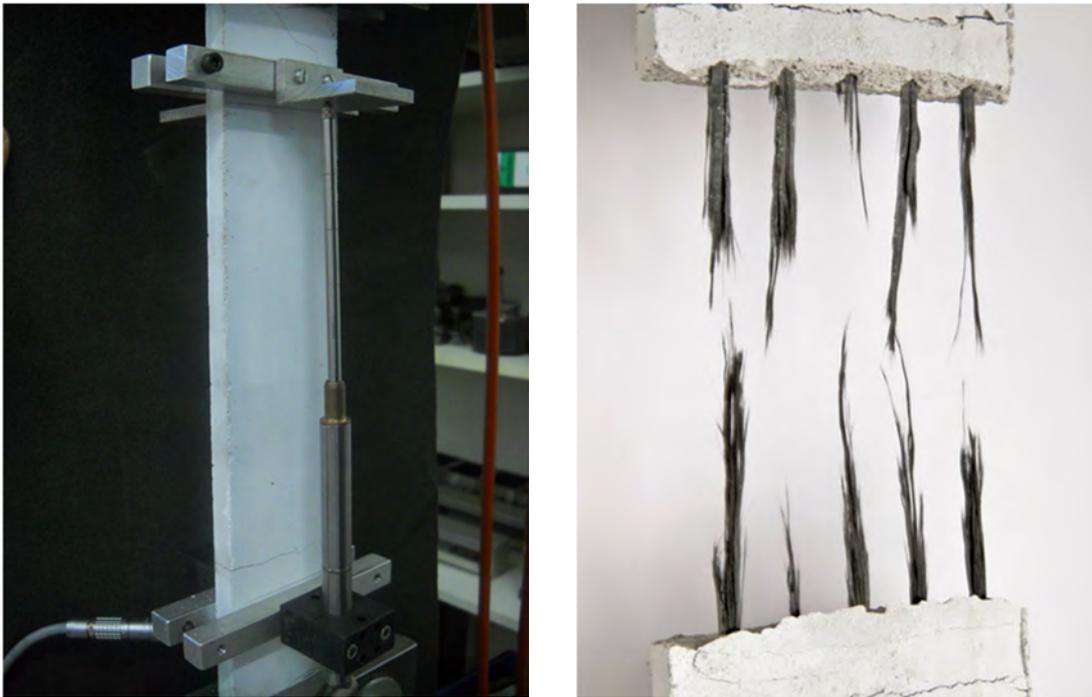


Abb. D-5: Versuchsaufbau, Messinstrumentierung und Versagensbild Dehnkörperversuch

### Ergebnisse der Versuche

In der nachfolgenden Tabelle D-3 sind die Versuchsergebnisse der Glasfaserbewehrung und die Versuchsergebnisse der kohlefaserbewehrten Proben aus dem 90°-Wasserbad dargestellt.

Tabelle D-3: Übersicht der Dehnkörperversuche

Serie.	Bez.	Feinbeton	Bewehrung	Lagen	$A_{\text{tex}}$	$F_{\text{exp}}$	$\sigma_{\text{tex}}$	$k_{\text{Hersteller}}$	$k_1$
				[-]	[mm <sup>2</sup> ]	[kN]	[N/mm <sup>2</sup> ]	[-]	[-]
0	ø Serie 0	BM	Glas Panzer	1	5,76	2,6	451	-	0,27
1	1_1	BM	Grid 600	1	9,1	16,9	1843	1,10	0,46
	1_2	BM	Grid 600	1	9,1	15,2	1658	0,99	0,41
	1_3	BM	Grid 600	1	9,1	16,2	1770	1,06	0,44
2	2_1	BM	Grid 600	2	18,2	29,1	1590	0,95	0,40
	2_2	BM	Grid 600	2	18,2	27,1	1481	0,89	0,37
	2_3	BM	Grid 600	2	18,2	18,0	981	0,59	0,25
3	3_1	BM	Grid 300	1	3,7	5,0	1363	0,82	0,34
	3_2	BM	Grid 300	1	3,7	5,3	1451	0,87	0,36
	3_3	BM	Grid 300	1	3,7	4,7	1293	0,77	0,32
4	4_1	BM	Grid 300	2	7,3	10,4	1419	0,85	0,35
	4_2	BM	Grid 300	2	7,3	10,1	1376	0,82	0,34
	4_3	BM	Grid 300	2	7,3	7,6	1032	0,62	0,26
5	5_1	M2	Grid 600	1	9,1	14,4	1578	0,94	0,39
	5_2	M2	Grid 600	1	9,1	13,4	1462	0,87	0,37
	5_3	M2	Grid 600	1	9,1	14,3	1558	0,93	0,39
6	6_1	M2	Grid 600	2	18,2	26,3	1435	0,86	0,36

	6_2	M2	Grid 600	2	18,2	24,7	1350	0,81	0,34
	6_3	M2	Grid 600	2	18,2	24,2	1322	0,79	0,33
7	7_1	M2	Grid 300	1	3,7	3,9	1071	0,64	0,27
	7_2	M2	Grid 300	1	3,7	5,3	1449	0,87	0,36
	7_3	M2	Grid 300	1	3,7	4,7	1287	0,77	0,32
8	8_1	M2	Grid 300	2	7,3	9,9	1351	0,81	0,34
	8_2	M2	Grid 300	2	7,3	8,1	1110	0,66	0,28
	8_3	M2	Grid 300	2	7,3	8,7	1185	0,71	0,30

Das Verhältnis der im Versuch erreichten Textilzugspannungen im Vergleich zu den vom Hersteller angegebenen Rovingzugspannungen von  $1671 \text{ N/mm}^2$  (Kohlefaser) wird im Faktor  $k_{\text{Hersteller}}$  ausgedrückt. Das Grid 600 erreicht im eingebauten Zustand eine durchschnittliche Effektivität  $k_1$  von 0,39, das Grid 300 von 0,32, was im Rahmen der Angaben in der Literatur liegt. In Abb. D-6 und Abb. D-7 sind die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bezogen auf die Textilspannung der Kohlefaserbewehrung dargestellt.

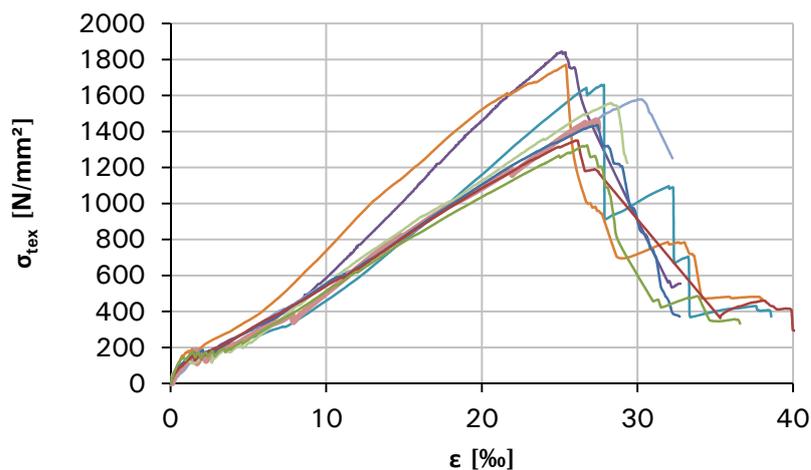


Abb. D-6: Spannungs-Dehnungslinien der Serien 1,5 und 6 (Grid 600, wärmebehandelt), bezogen auf die Textilquerschnittsfläche

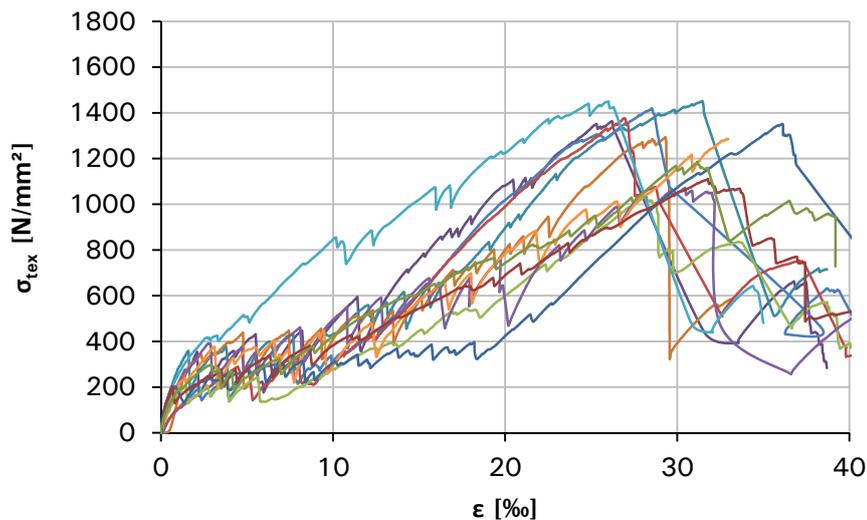


Abb. D-7: Spannungs-Dehnungslinien der Serien 3,4,7 und 8 (Grid 300, wärmebehandelt), bezogen auf die Textilquerschnittsfläche

Hierbei fällt auf, dass die Bruchspannungen und -dehnungen des schwereren 600er Geleges weniger streuen als die des leichteren 300er Geleges. Dies liegt an der hohen herstellungsbedingten Garnwelligkeit des 300er Geleges, welche zu unpräzisen Prüfkörpern führt. Hierdurch ergeben sich Betonabplatzungen, die sich festigkeitsmindernd auswirken. Weiterhin wurde beim 300er Gelege ein sukzessives Reißen der Rovings mit zwischenzeitlicher Wiederaufnahme der Last im Gegensatz zum kompletten Durchreißen der 600er Prüfkörper beobachtet. Dies kann auf eine ungleichmäßigere Lastverteilung auf die zwei im Prüfkörper vorliegenden Filamente zurückgeführt werden. Hierdurch ergibt sich eine geringere Gesamtbeanspruchbarkeit des Querschnitts. Weiterhin fällt bei beiden Bewehrungen die große Bruchdehnung im Bereich von 25 ‰ bis 30 ‰ im Vergleich zur Filamentbruchdehnung von 16 ‰ auf. Dies lässt sich auf die Dehnungsmessung zurückführen, die in den Serien der wärmebehandelten Prüfkörper auf der Lasteinleitungsstruktur befestigt war. Hiermit wurden auch die Dehnungen der Bewehrung im Verankerungsbereich mit Verankerungslängen von je 250 mm mit gemessen und dem Messbereich zugeschrieben. Die Dehnungsmessung wurde nach Abb. D-5 in den später geprüften Serien der normgelagerten Prüfkörper korrigiert. Abb. D-8 zeigt eine normgelagerte Probe der Serie 5.

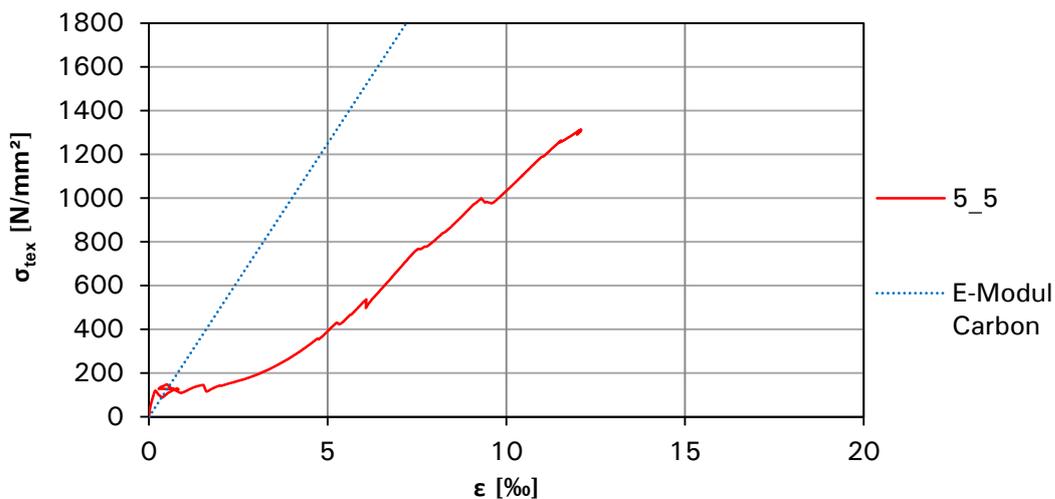


Abb. D-8: Spannungs-Dehnungslinien der Serie 5 der normgelagerten Proben

Es ist zu erkennen, dass die Steifigkeit im Zustand II b annähernd der Filamentsteifigkeit der Kohlefaser entspricht. Die gemessene mittlere Bruchdehnung fällt mit 14,2 ‰ in einer erwarteten Größenordnung aus.

Der verwendete Feinkornbeton hat keinen Einfluss auf die Tragfähigkeit im Zustand II. Bei einem zweilagigen Aufbau der Bewehrung reduziert sich deren Effektivität um durchschnittlich 3 %. Die Verankerungslänge der Kohlefaserbewehrung ist im Versuch < 250 mm, darunter kommt es zum Auszugsversagen.

Die vollständige Beschreibung aller Versuchsserien kann der Bachelorarbeit von Falk [107] entnommen werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit der Kohlefaserbewehrung in der Anordnung Grid 600 bei den wärmebehandelten Proben die höchsten Textilbruchspannungen (im Mittel 1550 N/mm<sup>2</sup>, einlagig im Mittel 1645 N/mm<sup>2</sup>) im Versuch erzielt werden konnten. Bei den normgelagerten Probekörpern ergab sich eine mittlere Textilbruchspannung von 1305 N/mm<sup>2</sup>. Es konnte nicht festgestellt werden, ob dieser Festigkeitsunterschied auf die Lagerungsart oder auf ein verändertes Gelege bei der zweiten Lieferung der Fa. SGL zurückzuführen ist. Die Balken der Versuche der Hauptausführung wurden mit der zweiten Charge des Grid 600 bewehrt.

Daher wird diese Bewehrung als textile Alternative zum Betonstahl in den Biegeversuchen verwendet.

## E Auslegung der Versuche in der Hauptausführung

Der gradierte Aufbau wird in einem ersten Schritt für eine linienförmige Belastung und eine Spannweite von 5 m ausgelegt. Er besteht aus zwei gefügedichten Deckschichten aus Feinkornbeton, die die Momentenbeanspruchung durch ein Kräftepaar abtragen. Die Bewehrung wird in der unteren gradierten Feinkornbetonschicht eingelegt. Der Kern aus haufwerksporigem Leichtbeton mit porosierter Matrix wird an die Querkraftbeanspruchung gradiert angepasst. Der Kern besteht aus der leichtest möglichen Mischung in Feldmitte. Richtung Auflager wird die Querkrafttragfähigkeit schrittweise durch eine Anpassung der Mischung erhöht. Als Mischungen für Kern- und Deckschichten kann aus den Mischungsentwürfen aus Tabelle 3-1 gewählt werden. Bei der Auslegung handelt es sich um einen iterativen Vorgang, da sich durch eine Veränderung der Wahl der Kernmischung auch das Eigengewicht verändert. Nachfolgend ist das Endergebnis der Iterationen dargestellt. Zur Vereinfachung der Berechnungen wird auf der sicheren Seite liegend ein durchschnittliches Eigengewicht über die Bauteillänge ermittelt. Hierbei werden die Kernmischungen je nach Anteil gewichtet, dann aber ein Mittelwert des Eigengewichts gebildet und in eine Flächenlast umgerechnet. Nachfolgend ist als Beispiel die Auslegung der Prüfkörper der Serie 2 (2.1 u. 2.2) aus Kapitel 5.2.4 dargestellt.

Abmessungen des Referenzbauteils:  $l = 5 \text{ m}$        $h = 0,2 \text{ m}$        $b = 0,4 \text{ m}$   
 Aufbau über die Querschnittshöhe:  $h_{Du} = 40 \text{ mm}$   $h_{Ke} = 140 \text{ mm}$   $h_{Do} = 20 \text{ mm}$

Referenzbelastung:

$$g_1 = (0,06 \text{ m} \times 5,0 \text{ m} \times 21 \text{ kN/m}^3 + 0,14 \text{ m} \times 2,5 \text{ m} \times 3,3 \text{ kN/m}^3 + 0,14 \text{ m} \times 2,5 \text{ m} \times 13,5 \text{ kN/m}^3) / 5 \text{ m} = 2,44 \text{ kN/m}^2 \text{ (Eigengewicht)}$$

$$g_2 = 1,25 \text{ kN/m}^2 \quad \text{Ausbaulast (3 cm Estrich + 2 cm Bodenbelag)}$$

$$p = 5,0 \text{ kN/m}^2 \quad \text{Verkehrslast (Büroflächen B2)}$$

Hieraus ergibt sich eine Gleichstreckenlast auf einem Streifen der Breite 0,4 m und äußere Schnittkräfte wie folgt:

$$q_{Ed} = (1,35 \times (2,44 \text{ kN/m}^2 + 1,25 \text{ kN/m}^2) + 1,5 \times 5,0 \text{ kN/m}^2) \times 0,4 \text{ m} = 5 \text{ kN/m}$$

$$M_{Ed} = 5 \text{ kN/m} \times (5,0 \text{ m})^2 / 8 = 15,6 \text{ kNm}$$

$$Q_{Ed} = 5 \text{ kN/m} \times 5 \text{ m} / 2 = 12,5 \text{ kN}$$

Die Idealisierung als Doppel-T-Querschnitt ergibt folgende Reduktionszahlen:

$$n_{KM1} = \frac{E_{RA}}{E_{G05L}} = \frac{35049,7}{14040} = 2,5; \quad n_{KM2} = \frac{E_{RA}}{E_{G02LM}} = \frac{35049,7}{1023} = 34,3 \quad (\text{E-1})$$

Hierdurch ergeben sich die in Abb. E-1 dargestellten Bemessungsquerschnitte.

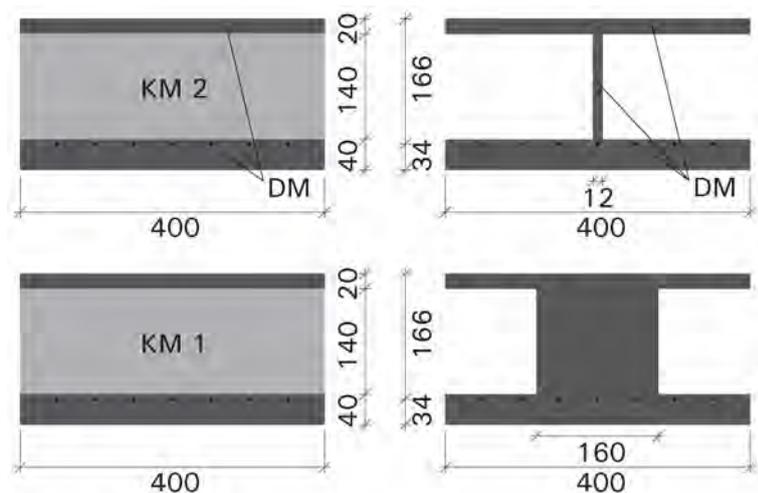


Abb. E-1: Querschnitte Gradientenplattenstreifen und deren Idealisierung in Feldmitte (oben) und am Auflager (unten)

Eine Bemessung des Querschnitts auf das maximal einwirkende Moment von 15,6 kNm liefert die in Tabelle E-1 aufgegliederten Ergebnisse.

Tabelle E-1: Biegebemessung des gewählten Querschnitts in Feldmitte

$h_{Do}$	20,00	mm	
$f_{cd}$	60,5	N/mm <sup>2</sup>	hier charakteristisch RA $f_{c,cyl}$
$f_{yd}$	525,00	N/mm <sup>2</sup>	hier charakteristischer Wert der Zugfestigkeit $f_{tk,cal}$ bei 25‰
$b$	400,00	mm	
$d$	166,00	mm	
$n$	34,28		Reduktionszahl ideeller Querschnitt
$b_w$	11,67	mm	
$\epsilon_{c2}$	-1,26	‰	Dehnung der Randfaser
$\epsilon_{c3}$	1,90	‰ (gerissen)	Dehnung der oberen Randfaser Kern; im gerissenen Fall Bemessung als Rechteckquerschnitt, sonst als Plattenbalken
$\epsilon_{s1}$	25,00	‰	Stahldehnung
$x$	7,96	mm	Druckzonenhöhe
$\alpha_r^1$	0,50	für $0 \text{ ‰} > \epsilon_{c2} \geq -2 \text{ ‰}$	Völligkeitsbeiwert der oberen Deckschicht
$k_a^1$	0,36	für $0 \text{ ‰} > \epsilon_{c2} \geq -2 \text{ ‰}$	Höhenbeiwert der oberen Deckschicht
$\alpha_r^2$	0,00	für $\epsilon_{c3} \geq 0 \text{ ‰}$	Völligkeitsbeiwert der Kernschicht (0 da Kern gerissen)
$k_a^2$	0,00	für $\epsilon_{c3} \geq 0 \text{ ‰}$	Höhenbeiwert der Kernschicht (0 da Kern gerissen)
$F_{cd1}$	95,93	kN	Betondruckkraft Rechteckquerschnitt
$F_{cd2}$	0,00	kN	Betondruckkraft nach Subtraktionsverfahren für Plattenbalken
$M_{rd}$	15,65	kNm	
$F_{s1d}$	95,93	kN	
erf. $A_s$	182,73	mm <sup>2</sup>	

Die Bemessung für den Versuch erfolgt auf charakteristischem Niveau. Die Bemessungsfließspannung wird bei 25 ‰ zu 525 N/mm<sup>2</sup> angenommen. Als Bewehrung werden 4 Ø 8 (201 mm<sup>2</sup>) Stäbe BST 500 gewählt.

Im Vierpunkt-Biegeversuch ergeben sich ein linearer Momentenverlauf zwischen Auflager und Lasteinleitung und ein konstanter Bereich des maximalen Moments zwischen den beiden Lasteinleitungen. Die Querkraft ist konstant zwischen Auflager und Lasteinleitung und Null zwischen den beiden Lasteinleitungen. Der Abstand  $a$  der Lasteinleitung zum Auflager wird so gewählt, dass das gleiche maximale Moment und die gleiche Querkraftbeanspruchung im Vierpunkt-Biegeversuch wie unter Gleichstreckenbelastung auftritt (vgl. Abb. E-2).

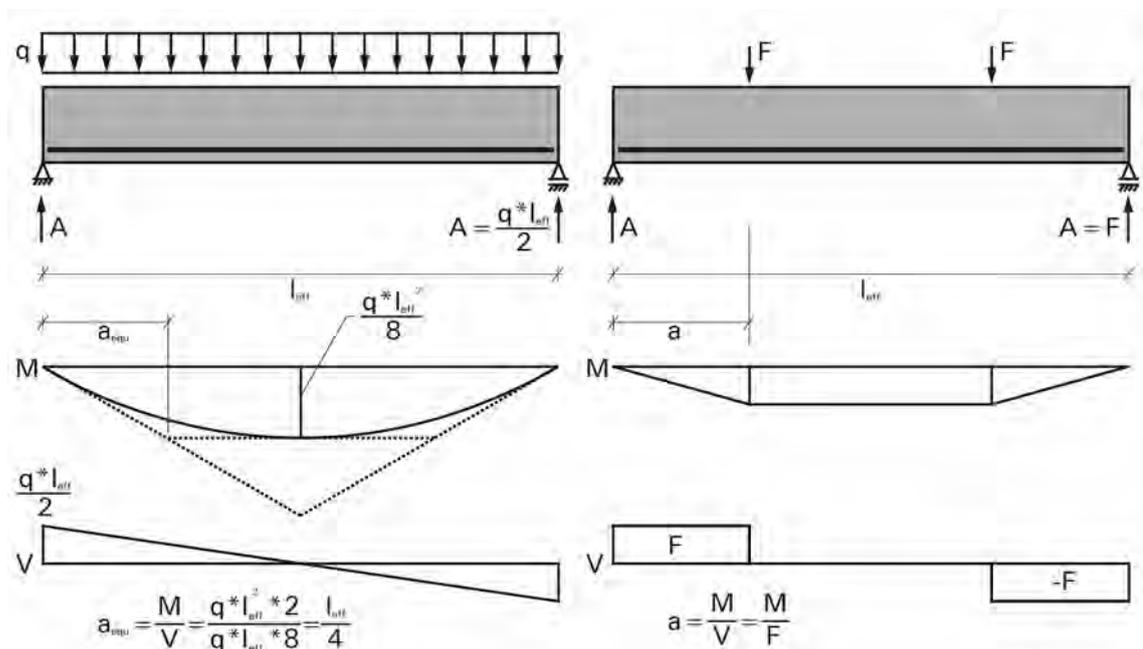


Abb. E-2: Vergleich der Schnittkraftverläufe bei Gleichstreckenbelastung und Vierpunkt-Biegeversuch [26]

In einem ersten Schritt erfolgt die Anpassung auf den Vierpunkt-Biegeversuch. Dadurch ergibt sich der folgende Versuchsaufbau:

$$M_{Rd(201mm^2)} = 17,26 \text{ kNm} = M_{Ed} \quad (\text{E-2})$$

$$\frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} = \frac{l_{eff}}{4} \rightarrow V_{Ed} = \frac{F}{2} = \frac{4 \cdot 17,26 \text{ kNm}}{5 \text{ m}} = 13,81 \text{ kN} \quad (\text{E-3})$$

$$M_{Ed} = 17,26 \text{ kNm}; V_{Ed} = 13,81 \text{ kN}; F = 27,62 \text{ kN} \quad (\text{E-4})$$

In einem zweiten Schritt erfolgt die Anpassung auf die maximale Spannweite von 4 m des Nutentischs der MPA Stuttgart, Abteilung Bauteilveruche:

$$M_{Ed} = V_{Ed} \cdot a \rightarrow a = \frac{17,26 \text{ kNm}}{13,81 \text{ kN}} = 1,25 \text{ m} \quad (\text{E-5})$$

Hieraus ergibt sich der in Abb. 5-10 dargestellte Aufbau der Prüfkörper der Hauptausführung im Vierpunkt-Biegeversuch. Nachfolgend muss noch der Kern für die Querkraftbeanspruchung ausgelegt werden. Dabei wird die leichte Kernmischung KLM im querkraftfreien Kernbereich KM2 angeordnet, die Mischung im Kernbereich KM1 ist nach der konstanten Querkraftbeanspruchung auszulegen. Die Querkrafttragfähigkeit wird nach EC 2 und DIN EN 1520 für die gewählte Mischung G05L und die einwirkende Querkraft von 13,81 kN überprüft (vgl. Tabelle E-2).

Tabelle E-2: Querkraftbemessung nach EC 2 und DIN EN 1520 Variante 1 und 2

EC 2	$V_{Ird,c1}$	28,86	kN	
	$V_{Ird,c1 \text{ min}}$	19,02	kN	
	$C_{Rd,c}$	0,15		
	$\gamma_c$	1,00		charakteristisch
	$\eta_1$	0,77		nach EC 2 und EN 1520 V1
	$\rho_{Tr}$	1350	kg/m <sup>3</sup>	
	k	2,00		
	$\rho_l$	0,003		
	$A_s$	201,00	mm <sup>2</sup>	
	$f_{ck}$	22,17	N/mm <sup>2</sup>	$f_{c,cyl}$
	$b_w$	400,00	mm	
	d	166,00	mm	
	$v_{l,min}$	0,37		
	$V_{Ird,c2}$	335,39	kN	
	$v_l$	0,46		
EN 1520 V 1	$V_{rd,1}$	27,90	kN	Unterschied durch $C_{Rd}$ und evtl. $\eta_1$
	$V_{rd,2}$	305,32	kN	Unterschied da EC keine Abminderung der Zugfestigkeit über $\eta_1$
	$C_{Rd}$	0,145		
	$\gamma_c$	1,00		charakteristisch
	k	identisch, s.o.		
	$\rho_1$	identisch, s.o.		
	$v_{mind}$	0,40		
	v	0,60		
EN 1520 V 2	$V_{rd,1}$	40,04	kN	
	$\tau_{rd}$	0,32	N/mm <sup>2</sup>	
	$\tau_{rk}$	0,32	N/mm <sup>2</sup>	
	$f_{t,flk}$	2,55	N/mm <sup>2</sup>	
	$\eta_1$	0,78		
	k	1,43		

Aus den Bemessungsergebnissen geht hervor, dass in Lastposition 1 ein Biegezugversagen maßgebend wird. Daher wird in dieser Lastposition bei einer gemessenen Stahldehnung von 2,5 ‰ (Fließbeginn) der Versuch angehalten und entlastet. In einem zweiten Schritt wird das Bauteil im Abstand  $a$  von 510 mm (entspricht im Mittel 3d) vom Auflager bis zum Querkraftversagen belastet.

Zum Abschluss der Auslegung wird die Schubkrafttragfähigkeit der unteren Längsfuge überprüft. Die einwirkende Schubspannung besteht aus zwei Anteilen, aus der einwirkenden äußeren Belastung und aus Schwindifferenzen.

Die berechnete Querkrafttragfähigkeit nach EC 2 beträgt 28,86 kN (vgl. Tabelle E-2) und wird als einwirkende Querkraft zur Berechnung der Schubspannung verwendet. Hieraus ergibt sich nach Einsetzen in Formel (4-10) eine einwirkende Schubspannung  $v_{Ed,F}$  in der unteren Längsfuge zu:

$$v_{Ed,F} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{(z \cdot b_i)} = 1,0 \cdot \frac{28860 \text{ N}}{(166 \text{ mm} - 8 \text{ mm}) \cdot 400 \text{ mm}} = 0,46 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{E-6})$$

Für die Berechnungen der einwirkenden Schubspannungen aus Schwindifferenzen wird nur die untere Verbundfuge, die bei der Prüfserie 1 der Hauptausführung vorzeitig versagte, untersucht. Hierzu wird der Querschnitt wie in Abb. E-3 dargestellt vereinfacht.

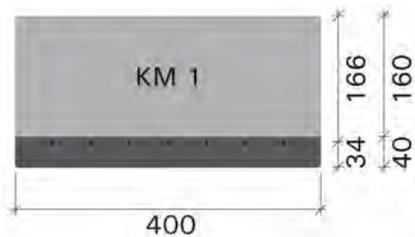


Abb. E-3: Vereinfachter Querschnitt für die Berechnung der Schubspannungen aus Schwindifferenzen

Die Eingangsparameter in die Berechnung der Schubspannung in der Verbundfuge aus Schwindifferenzen  $\tau_{sh}$  nach Absatz 4.4.2 sind in Tabelle E-3 aufgeführt. Die eingehenden Betonkennwerte sind Tabelle 3-1 entnommen.

Tabelle E-3: Eingangsparameter in die Berechnung der Schubspannung aus Schwinddifferenz nach [27]

$m = E_2/E_1$	2,5	RA/G05L
$\alpha = h_1/g_{ges}$	0,80	
$\epsilon_{cs}(28,1)_{RA}$	-4,34 e-4	Gesamtschwinddehnung RA nach EC 2
$\epsilon_{cs}(28,1)_{G05L}$	-2,74 e-4	Gesamtschwinddehnung G05L nach EC 2
$\Delta\epsilon_{sh}^{**}$	-1,60 e-4	Schwinddifferenz
$\lambda L$	$22 \pm 25\%$	aus [27]
$z^*$	- 60 mm	
$L$	4400 mm	

$$** \Delta\epsilon_{sh} = \epsilon_{cs}(28,1)_{RA} - \epsilon_{cs}(28,1)_{G05L}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4-13) ergibt sich ein maximaler Wert von  $\tau_{sh}$  von 0,25 N/mm<sup>2</sup> am Balkenende. Der Verlauf der Schubspannung aus Schwinddifferenzen nach [27] entlang der unteren Längsfuge im Bauteil ist in Abb. E-4 dargestellt.

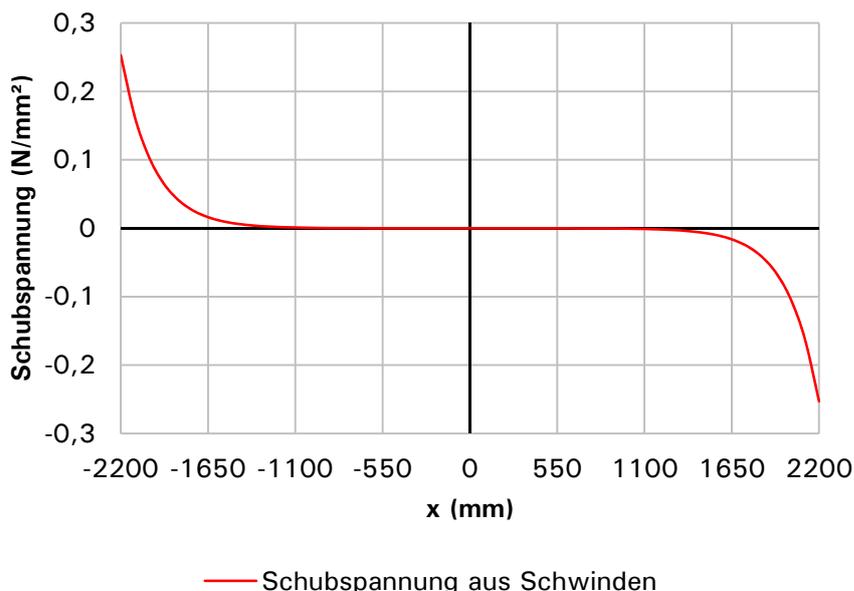


Abb. E-4: Verlauf der Schubspannung in der Längsfuge

Unter Berücksichtigung, dass der Wert  $\lambda L$  um  $\pm 25\%$  streut, ergibt sich ein Wertebereich der maximalen Schubspannung aus Schwinddifferenzen von  $\tau_{sh}$  von 0,19 - 0,31 N/mm<sup>2</sup>. Bei der Berechnung von  $\tau_{sh}$  wurde von einem Prüfzeitpunkt von 28 Tagen sowie einer Lagerung bei 50 % rel. Luftfeuchte ausgegangen. Die Berechnung der Schwinddehnungen beruht teilweise auf genormten Tabellenwerten aus dem EC 2. Zu einer genauen Beurteilung der Schwinddifferenzen wäre es erforderlich, Messungen des Schwindverhaltens der einzelnen Mischungen durchzuführen. Die oben errechneten Werte sind als Anhaltswerte zu sehen.

Der Bemessungswert der Schubtragfähigkeit der Fuge ergibt sich aus Gleichung (4-11):

$$v_{Rd} = 0,4 \cdot 3,17 \frac{N}{mm^2} + 0,7 \cdot 0 = 1,23 \frac{N}{mm^2} \leq 0,5 \cdot 0,54 \cdot 24,78 N/mm^2 \quad (E-7)$$

Hierbei wird die Annahme einer rauen Oberfläche der Fuge ( $c=0,4$  und  $\mu=0,7$ ) getroffen. Die Annahme einer glatten Fuge würde die Schubtragfähigkeit halbieren. Ebenso wird die geprüfte Zugfestigkeit verwendet. Die aus der Betondruckfestigkeit errechnete liegt deutlich darunter.

In Tabelle E-4 werden die einwirkenden Schubspannungen der Schubtragfähigkeit gegenübergestellt.

Tabelle E-4: Einwirkende Schubspannung und Widerstand der Verbundfuge

G05L	$v_{Ed,F}$	0,46	N/mm <sup>2</sup>
	$v_{Ed,sh} = \tau_{sh}$	0,19 - 0,31	N/mm <sup>2</sup>
	$v_{Ed,tot,max}$	0,77	N/mm <sup>2</sup>
	$v_{Rd,rau}$	1,23	N/mm <sup>2</sup>

Für das gewählte Gradientenlayout sind somit alle Nachweise erfüllt.

## F Dokumentation der Versuche der Hauptausführung

### F.1 Herstellung

Nachfolgend dargestellt sind Bilder von der Fertigung der Bauteilserie 0 der Hauptausführung bei der Fa. Wochner. Die Instrumentierung der Serien 0 und 2 erfolgte mit DMS (FLA-6-11-3L) an 2 Stäben und 4 Stellen pro Bauteil.



Abb. F-1: Herstellung der Bauteilserie 0 beim Kooperationspartner Wochner

### F.2 Serie 0

Tabelle F-1: Eigenschaften und Vorschädigung der Prüfserie 0

Vorschädigung unter Eigengewicht	horizontale Schwindrisse zwischen den Schichten
Prüfalter	27 Tage
Bruchstelle und Bruchform	Delamination zwischen KM1 und DM auf beiden Seiten unten
Druckfestigkeit $f_{c,cyl}$	KM2 = 1,5 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 2,3 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 55,5 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohndichte wassergesättigt	KM2 = 345 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 650 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2200 kg/m <sup>3</sup>

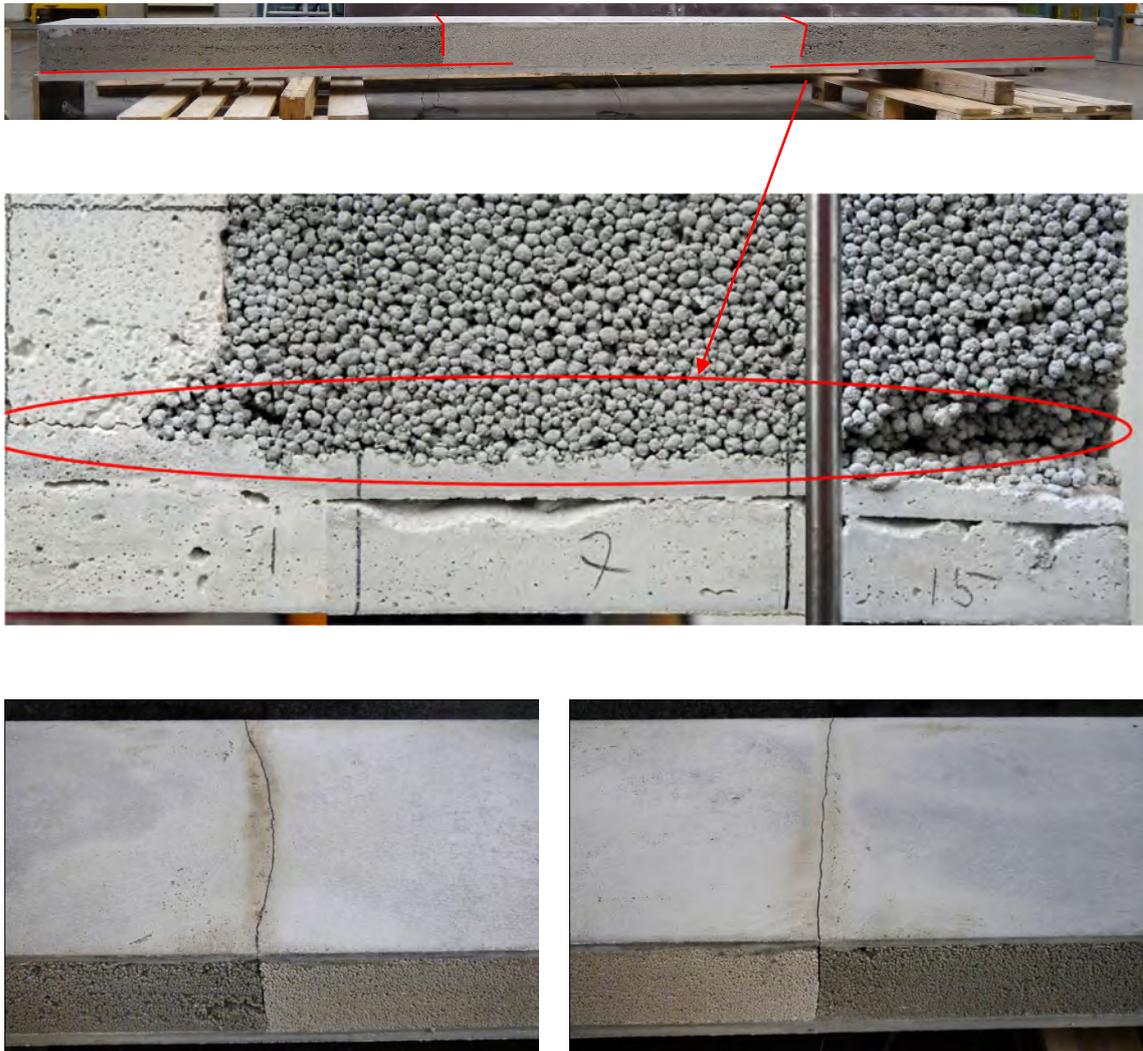


Abb. F-2: Vorschädigung in der Verbundfuge unten und vertikal zwischen den Kernschichten



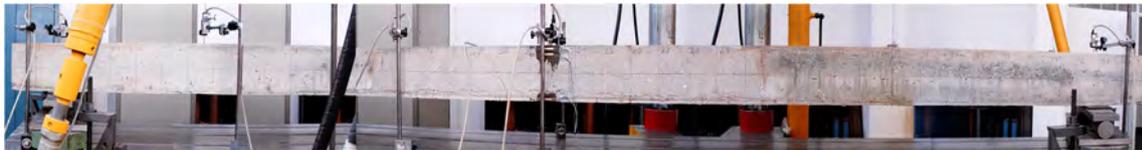
Abb. F-3: Versagen des Prüfkörpers V0.1 in der Längsfuge auf dem Prüftisch der MPA Stuttgart

### F.3 Serie 1

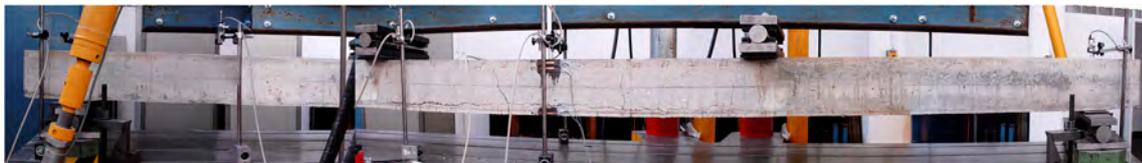
Tabelle F-2: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 1.1

Vorschädigung unter Eigengewicht	Untere Längsfuge Feld 15-30 Biegerisse Kernbereich KM2 Feld 20/21,25 Biegerisse Deckschicht unten Feld 17,18,21,24,26,28 minimaler Rissabstand ca. 10 cm
Prüfalter	81 Tage
Bruchstelle und Bruchform	Feld 30 Biegezugversagen, Bruch Textilbewehrung
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	KM2 = 1,1 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 14,4 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 62,1 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohddichte wassergesättigt	KM2 = 710 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 1450 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2260 kg/m <sup>3</sup>

#### V 1.1: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



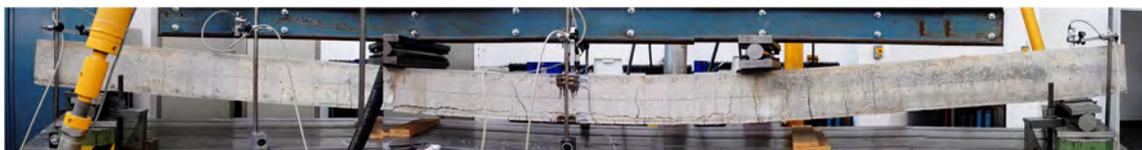
0 kN



2,2 kN



6 kN  $w_k = 1,4$  mm (Feld 15-30)

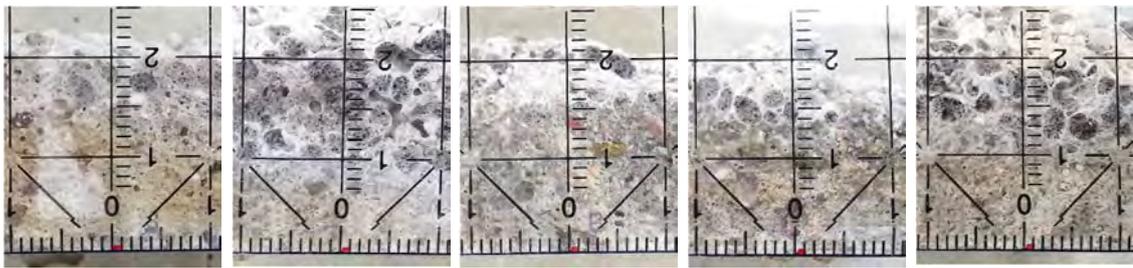


12 kN  $w_k = 3$  mm (Feld 32)



14,5 kN Bruch (Feld 30)

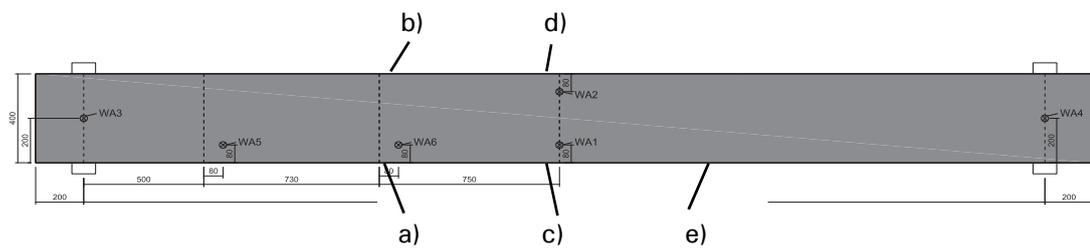
V 1.1: Schichtdickenverlauf der unteren Deckschicht



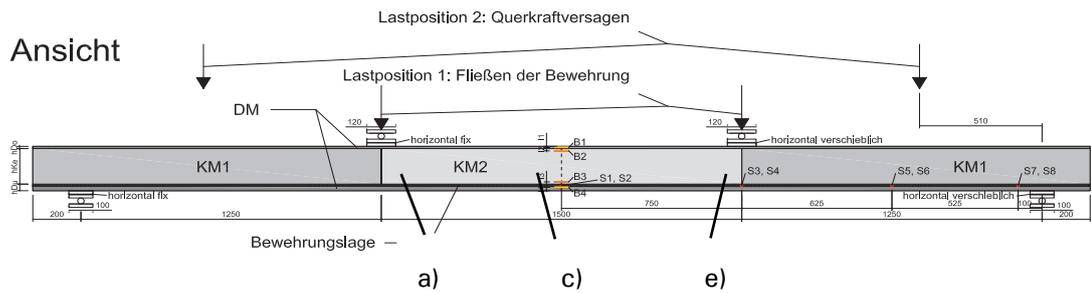
a) 14 mm      b) 10 mm      c) 13 mm      d) 12 mm      e) 12 mm

Zugehörige Messstellen

Aufsicht



Ansicht



## F.4 Serie 2

Tabelle F-3: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 2.1

Vorschädigung unter Eigengewicht	Untere Längsfuge Feld 17-28 Biegerisse Deckschicht unten Feld 15,22,29
Prüfalter	77 Tage
Bruchstelle und Bruchform 2.1a	Abbruch bei Fließen S1 u. S2 ( $\epsilon_s > 2,5 \text{ ‰}$ )
Bruchstelle und Bruchform 2.1b	Fließen S3 u. S4 in Feld 30 ( $\epsilon_s > 2,5 \text{ ‰}$ )
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	KM2 = 1,1 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 21,7 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 62,1 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohddichte wassergesättigt	KM2 = 710 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 1920 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2260 kg/m <sup>3</sup>

V2.1 a: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



0 kN



4.9 kN



8.4 kN



15 kN  $w_k = 0,6 \text{ mm}$



20 kN  $w_k = 0,8 \text{ mm}$



21,5 kN  $w_k = 1,2$  mm

Rissbilder V 2.1b: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



10 kN



20 kN



30 kN



61,5 kN

Tabelle F-4: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 2.2

Vorschädigung unter Eigengewicht	Untere Längsfuge Feld 16-28 Biegerisse Deckschicht unten Feld 22
Prüfalter	75 Tage
Bruchstelle und Bruchform 2.1a	Abbruch bei Fließen S1 u. S2 ( $\epsilon_s > 2,5 \text{ ‰}$ )
Bruchstelle und Bruchform 2.1b	Fließen S1 u. S2 in Feld 24 ( $\epsilon_s > 2,5 \text{ ‰}$ )
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	KM2 = 0,8 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 20,1 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 62,2 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohddichte wassergesättigt	KM2 = 640 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 1680 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2370 kg/m <sup>3</sup>

## V2.2a: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



0 kN

4,9 kN  $w_k = 1,2 \text{ mm}$ 8,4 kN  $w_k = 1,4 \text{ mm}$ 15 kN  $w_k = 1,0 \text{ mm}$ 20 kN  $w_k = 0,8 \text{ mm}$



22,2 kN  $w_k = 1,6$  mm (Feld 22)

V2.2b: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



15 kN



30 kN



45 kN



60,7 kN Biegezugversagen Feld 24

## F.5 Serie 3

Tabelle F-5: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 3.1

Vorschädigung unter Eigengewicht	Biegerisse Deckschicht unten Feld 17,22,29
Prüfalter	77 Tage
Bruchstelle und Bruchform	Querkraftversagen Feld 9-11
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	KM2 = 0,8 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 7,0 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 58,4 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohddichte wassergesättigt	KM2 = 650 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 1000 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2300 kg/m <sup>3</sup>

### V 3.1: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



0 kN



2,2 kN  $w_k = 0,8$  mm



6,4 kN

Tabelle F-6: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 3.2

Vorschädigung unter Eigengewicht	horizontaler Trennriss Feld 30-39 Biegerisse Deckschicht unten Feld 22,29
Prüfalter	78 Tage
Bruchstelle und Bruchform	Querkraftversagen Feld 12-13
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	KM2 = 0,8 N/mm <sup>2</sup> ; KM1 = 7,0 N/mm <sup>2</sup> ; DM = 59,5 N/mm <sup>2</sup>
Festbetonrohddichte wassergesättigt	KM2 = 620 kg/m <sup>3</sup> ; KM1 = 1000 kg/m <sup>3</sup> ; DM = 2310 kg/m <sup>3</sup>

## V3.2: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



0 kN

2,2 kN  $w_k = 0,6$  mm5 kN  $w_k = 1,2$  mm

8,9 kN

## F.6 Serie 4

Tabelle F-7: Vorschädigung und Eigenschaften des Prüfkörpers 4.1

Vorschädigung unter Eigengewicht	Biegerisse Feld 16,30
Prüfalter	150 Tage
Bruchstelle und Bruchform	Feld 11 Biegezugversagen, Bruch Textilbewehrung
Druckfestigkeiten $f_{c,cyl}$	Nicht geprüft, Bauteil gespritzt
Festbetonrohndichte wassergesättigt	-

V 4.1: Rissbilder und Lastschritte ohne Eigengewicht und Lasteinleitung



0 kN



2,2 kN  $w_k = 0,2$  mm



6 kN  $w_k = 0,6$  mm



12 kN  $w_k = 1,2$  mm



20 kN



23,2 kN

## G Optimalitätskriterienverfahren unter Verwendung des SIMP-Ansatzes

Das nachfolgende Beispiel ist [58] entnommen und veranschaulicht die Verwendung eines Optimalitätskriterienverfahrens für ein Topologieoptimierungsproblem unter Verwendung des SIMP-Ansatzes und der Kuhn-Tucker-Bedingungen zur Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit. Entwurfsvariable für jedes Element  $i$  ist die relative Dichte  $x_i$ :

$$x_i = \frac{\rho_i}{\rho_i^0} \quad 0 \leq x_i \leq 1 \quad (\text{G-1})$$

Zwischen E-Modul und Entwurfsvariable besteht der folgende exponentielle Zusammenhang:

$$x_i^p = \frac{E_i}{E_i^0} \quad p \geq 1 \quad (\text{G-2})$$

Optimalitätskriterium: als Entwurfsziel aus der physikalischen Anschauung wird die Minimierung der mittleren Nachgiebigkeit  $C$  (*Compliance*) und damit die Maximierung der Steifigkeit gewählt. Der skalare Wert der mittleren Nachgiebigkeit lässt sich aus der Summe aller auf die Struktur einwirkenden konstanten äußeren Kräfte  $f_i$  und den daraus resultierenden Verschiebungen  $u_i$  berechnen.

$$C = \sum_i \mathbf{f}_i^T \cdot \mathbf{u}_i \quad p \geq 1 \quad (\text{G-3})$$

Die mittlere Nachgiebigkeit entspricht vom Betrag der doppelten äußeren geleisteten Arbeit und ist damit gleich der doppelten Dehnungsenergie  $U$ .

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}) \quad (\text{G-4})$$

Dies kann aus der FEM-Bestimmungsgleichung der linearen Statik hergeleitet werden.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad | \cdot \mathbf{u}^T \quad (\text{G-5})$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{f} = C = 2U \quad (\text{G-6})$$

Damit kann alternativ zur mittleren Nachgiebigkeit die Dehnungsenergie minimiert werden. Das aktuelle Volumen  $v_i$  jedes Elements  $i$  kann aus dem geometrischen Volumen  $v_i^0$  folgendermaßen berechnet werden:

$$v_i = x_i v_i^0 \quad (\text{G-7})$$

Das aktuelle Volumen des Gesamtmodells berechnet sich zu

$$V_i = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n x_i v_i^o \quad (\text{G-8})$$

Die Trivallösung, dass die Steifigkeit bei vollem Volumen maximal wird, wird über eine Volumenrestriktion ausgeschlossen.

$$V \leq \zeta \cdot V^0 \quad 0 < \zeta < 1 \quad (\text{G-9})$$

Die Optimierungsaufgabe wird formuliert zu

$$\min U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (\text{G-10})$$

mit den Restriktionen

$$V - \zeta V^0 \leq 0$$

$$x_i^L - x_i \leq 0 \quad i = 1, n$$

$$x_i - x_i^U \leq 0 \quad i = 1, n$$

Mithilfe der Lagrange-Funktion wird das beschränkte Problem in ein unbeschränktes überführt

$$L(\mathbf{x}, \Lambda, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}) + \Lambda (V - \zeta V^0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i^L - x_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x_i - x_i^U) \quad (\text{G-11})$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren

$$\Lambda \geq 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \gamma \geq 0$$

Nach den Kuhn-Tucker-Bedingungen ist die Lagrange-Funktion im Optimum bezüglich  $\mathbf{x}$  stationär und es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) + \Lambda v_i^o - \lambda_i + \gamma_i = 0 \quad (\text{G-12})$$

Da der Term  $d\mathbf{u}/dx$  schwer zu berechnen ist, wird dieser nachfolgend mithilfe Gleichung (G-5) eliminiert:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad | \partial x_i \quad (\text{G-13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \quad | \cdot \mathbf{u}^T$$

$$\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \quad (\text{G-14})$$

mit

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (\text{G-15})$$

(G-15) in (G-14)

$$\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \quad | - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \quad (\text{G-16})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) = - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \quad (\text{G-17})$$

(G-17) in (G-12)

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} + \Lambda v_i^o - \lambda_i + \gamma_i = 0 \quad (\text{G-18})$$

Der Term  $\text{df}/\text{dx}_i$  wird im statischen Fall zu 0, da sich die äußere Last nicht ändert. Es ergibt sich folgendes Optimalitätskriterium:

$$0 = -G_i + 1 - \frac{\lambda_i}{\Lambda v_i^o} + \frac{\gamma_i}{\Lambda v_i^o} \quad i = 1, n \quad (\text{G-19})$$

$$G_i = \frac{\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}}{2 \Lambda v_i^o} \quad (\text{G-20})$$

Zur Bestimmung von  $G_i$  muss der Term  $\text{dK}/\text{dx}_i$  bestimmt werden, wobei nur die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_i$  jedes einzelnen Elements von der Dichte  $x_i$  abhängt (vgl. Gleichung (G-2)). Der Zusammenhang zwischen E-Modul und Elementsteifigkeitsmatrix ist linear und es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} \quad (\text{G-21})$$

$$\mathbf{k}_i = x_i^p \mathbf{k}_i^o \quad | \quad dx_i \quad (\text{G-22})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} = p \cdot x_i^{p-1} \mathbf{k}_i^o \quad | \quad dx_i \quad (\text{G-23})$$

Somit reduziert sich die zur Berechnung des Optimalitätskriteriums benötigte Ableitung auf den Ausdruck in Gleichung (G-23) und kann einfach aus der Designvariablen und der Elementsteifigkeitsmatrix im Ausgangszustand berechnet werden.

Aus Gleichung (G-19) wird ersichtlich, dass für  $G_i$  folgende Wertebereiche vorliegen können:

$$G_i = 1 \quad \text{wenn keine Restriktionen von } x_i \text{ aktiv sind} \quad (\text{G-24})$$

$$G_i \leq 1 \quad \text{wenn } x_i = x^L \quad (\text{G-25})$$

$$G_i \geq 1 \quad \text{wenn } x_i = x^U \quad (\text{G-26})$$

Für  $G_i = 1$  liegt das Optimum für ein Element ohne aktive Restriktionen der Entwurfsvariablen vor, da dann die Lagrange-Multiplikatoren der Restriktionen zu null werden. Wenn  $G_i \neq 1$  wird die Entwurfsvariable  $x_i$  so verändert werden, dass  $G_i$  entweder zu 1 wird oder  $x_i$  an eine Restriktionsgrenze stößt. Daher muss von der Tendenz her bekannt sein, wie sich Gleichung (G-20) bei Veränderung von  $x_i$  verhält.

Bei Erhöhung der relativen Dichte  $x_i$  erhöht sich nach dem SIMP-Ansatz der E-Modul exponentiell. Damit verringert sich bei konstanter Kraft  $f_i$  die Verschiebung  $u_i$  und damit nach Gleichung (G-6) und (G-22) die Ausdrücke für jedes Element  $i$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} = x^p \mathbf{u}^T \mathbf{k}^0 \mathbf{u} \quad (\text{G-27})$$

Und deren Ableitung

$$\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial x} \mathbf{u} = p x^{p-1} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^0 \mathbf{u} \quad (\text{G-28})$$

Aus den Gleichungen (G-28) und (G-20) folgt, dass bei einer Erhöhung von  $x_i$  der Term  $G_i$  kleiner wird und umgekehrt. Die nachfolgende Iterationsvorschrift ermöglicht die Erhöhung von  $x_i$ , falls  $G_i > 1$  ist und umgekehrt und führt auf den Zielwert 1 oder zur Aktivierung einer der Restriktionen (vgl. Abb. G-1).

$$x_i^{(k+1)} = G_i^{(k)} x_i^{(k)} \quad (\text{G-29})$$

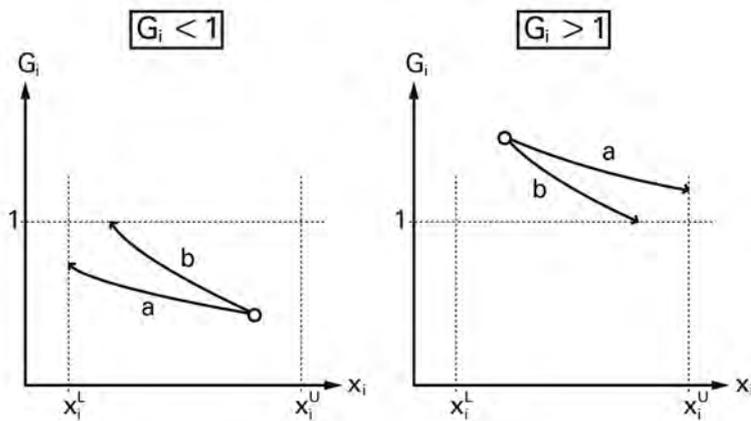


Abb. G-1: Iterationsschema Optimalitätskriterium

Falls  $G_i < 1$  ist, wird die Entwurfsvariable  $x_i$  so lange verringert, bis  $G_i = 1$  oder  $x_i$  an die untere Restriktionsgrenze  $x_i^L$  stößt. In diesem Fall wird  $\gamma_i = 0$ , da die obere Restriktionsgrenze nicht aktiv ist, und es lässt sich immer ein  $\lambda_i \geq 0$  finden, damit Gleichung (G-19) erfüllt wird und umgekehrt.

Typischerweise wird der Algorithmus mit einem Dämpfungsfaktor  $\xi$  versehen und die Änderung von  $x_i$  mit „Move Limits“  $m \in (0, 1]$  versehen, um allzu große Änderungen in einem Schritt zu verhindern. Damit ergibt sich folgendes Iterationsschema:

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} [G_i^{(k)}]^\xi x_i^{(k)} & \text{wenn } \max[(1-m)x_i^{(k)}, x_i^L] \leq [G_i^{(k)}]^\xi x_i^{(k)} \leq \min[(1+m)x_i^{(k)}, x_i^U] \\ \max[(1-m)x_i^{(k)}, x_i^L] & \text{wenn } \max[(1-m)x_i^{(k)}, x_i^L] \geq [G_i^{(k)}]^\xi x_i^{(k)} \leq \min[(1+m)x_i^{(k)}, x_i^U] \\ \min[(1+m)x_i^{(k)}, x_i^U] & \text{wenn } \max[(1-m)x_i^{(k)}, x_i^L] \leq [G_i^{(k)}]^\xi x_i^{(k)} \geq \min[(1+m)x_i^{(k)}, x_i^U] \end{cases}$$

Die Volumenrestriktion fließt über die Berechnung des Lagrange-Multiplikators  $\Lambda$  in den Wert  $G_i$  ein. Diese Restriktion sollte bei jeder sinnvollen Lösung aktiv sein. Ausgehend von einem Startwert von  $\Lambda$  wird dieser iterativ so angepasst, dass der gewünschte Volumenwert  $\zeta V^0$  im Laufe der Iterationen erreicht wird. Dies erfolgt beispielsweise über die Bestimmung der Nullstellen der Funktion:

$$g(\Lambda) = V(\Lambda) - \zeta V^0 \quad (\text{G-30})$$