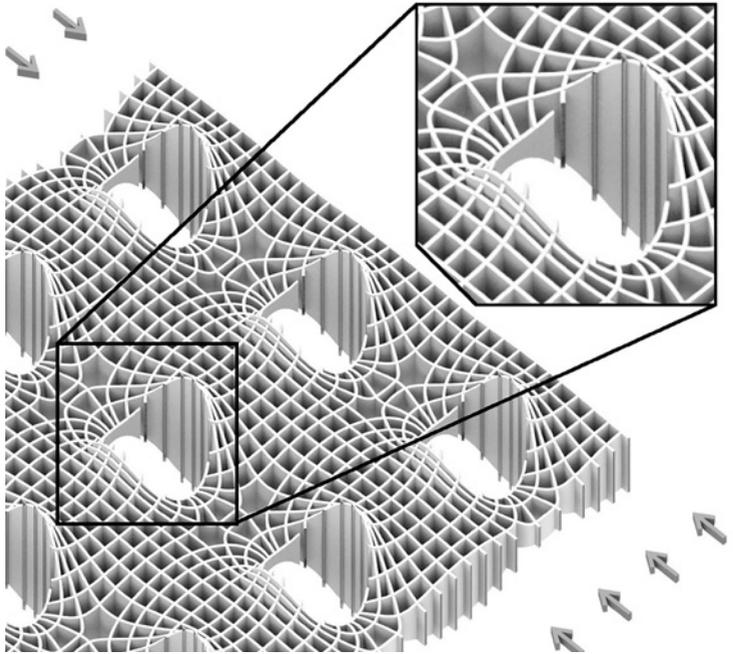


Christoph Huber

# Untersuchungen an Lochfeldern aus Normalbeton

Ein Beitrag zum Gradientenbeton



# **Untersuchungen an Lochfeldern aus Normalbeton**

Ein Beitrag zum Gradientenbeton

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften der  
Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von  
Christoph Huber  
aus Klagenfurt am Wörthersee

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.h.c. Werner Sobek

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Harald Garrecht  
FH-Prof. Dr.-Ing. Gert Eilbracht

Tag der mündlichen Prüfung: 17.08.2022

Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren der  
Universität Stuttgart, 2022



Christoph Huber

# **Untersuchungen an Lochfeldern aus Normalbeton**

Ein Beitrag zum Gradientenbeton

## Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über [www.dnb.de](http://www.dnb.de) abrufbar.

ISBN (Print): 978-3-7388-0777-6

ISBN (E-Book): 978-3-7388-0778-3

D93 – Dissertation der Universität Stuttgart

Druck: BoD – Books on Demand, Norderstedt

Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die über die engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes hinausgeht, ist ohne schriftliche Zustimmung des Fraunhofer IRB Verlags unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen sowie die Speicherung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen und Handelsnamen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass solche Bezeichnungen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und deshalb von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert werden, kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

© Fraunhofer IRB Verlag, 2022  
Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau IRB  
Nobelstraße 12, 70569 Stuttgart  
Telefon +49 711 970-2500  
Telefax +49 711 970-2508  
[irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)  
[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

## Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachgebiet für Baustatik und Tragwerkslehre an der Fachhochschule Kärnten und am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren der Universität Stuttgart.

Meinen besonderen Dank möchte ich Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr.h.c. Werner Sobek aussprechen. Er ermöglichte die Bearbeitung des Themas. Außerdem gab er viele wertvolle fachliche Anregungen während zahlreicher Fachvorträge und in Debatten, um diese Arbeit zu unterstützen. Zusätzlich übernimmt er den Hauptbericht. In gleicher Weise möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.-Ing. Gert Eilbracht bedanken, für seine Geduld und sein großes Interesse an der Thematik. Mit seinen Denkanstößen, kreativen Anregungen und fachlichen Diskussionen hat er wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ferner übernimmt er den Mitbericht. Den Herrn Professor Dr.-Ing. Harald Garrecht danke ich ebenfalls für die Bereitschaft zur Übernahme des Mitberichts.

Allen Angehörigen des Instituts in Stuttgart, vor allem aber Herrn DI Daniel Schmeer, gilt ebenso mein Dank für die umfangreiche Unterstützung.

Im Weiteren möchte ich mich bei den Herren Dr. Heinz Wimmer, DI Robert Eder und DI Martin Steiner für viele kleine fachliche sowie freundschaftliche Unterhaltungen und fruchtbare Diskussionen während des Entstehens der Arbeit bedanken.

Ein ganz herzlicher Dank gebührt meiner Freundin DI Samira Taubmann, die mich über die gesamte Zeit dieser Arbeit beständig ermutigte und unterstützte.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für ihren Rückhalt und die Treue.

Klagenfurt am Wörthersee im Mai 2022 - Christoph Huber



## Kurzfassung

Für den Entwurf und die praxisorientierte Bemessung von Bauteilen aus mesogradierem Beton, bei dem der Innenraum mittels Einbringen von Hohlkörpern aufgelöst wird, und dessen Porengröße typischerweise zwischen 10 und 100 mm liegt, ist die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen Tragverhalten und Festigkeit in Abhängigkeit von der Porenstruktur ausschlaggebend. Durch das Auflösen der Bauteileinnenräume (Topologieänderung) verändern sich Tragverhalten und Materialkennwerte.

Die vorliegende Dissertation geht anhand von Versuchen an Probekörpern und FE-Analysen der Frage nach, wie sich die Probekörperfestigkeit (Druckfestigkeit und E-Modul) einer Scheibe aus Normalbeton infolge von eingebrachten Löchern (Porosität) und den sich dadurch ergebenden Lochfeldern verändert.

Die Ergebnisse aus den Versuchen und der FE-Analyse (nichtlineares Materialgesetz) werden im Rahmen einer Parameterstudie in einem Diagramm dargestellt, das die Druckfestigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher und der Porosität abbildet. In diesem Diagramm bildet die grafische Darstellung der Druckfestigkeitswerte hinsichtlich dieser Abhängigkeiten eine nahezu ebene, im Raum liegende Fläche.

Wesentlich ist hierbei, dass die Anzahl der Löcher für eine gewählte Porosität keinen Einfluss auf die erzielte Druckfestigkeit der hier untersuchten Lochfelder hat. Für den Geltungsbereich der Porosität der Lochfelder von 10, 20, 20 und 40 % besteht ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen der Druckfestigkeit und der Porosität. So ergibt sich zum Beispiel für eine Steigerung der Porosität von 20 auf 30% eine Abnahme der Druckfestigkeit von ca. 20%. Der genannte lineare Zusammenhang lässt sich in einer Geradengleichung abbilden und wird in Form einer modifizierten Druckfestigkeit ( $f_{cm}^*$ ) als Materialparameter für die gradierten (gelochten) Bereiche eines Gradientenbeton-Bauteils vorgestellt.

Die Grundlage für die hier vorgestellte Modifikation des E-Moduls liefern zum einen die erweiterbare Formel von Gibson und Ashby, und zum anderen die Ergebnisse der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen an Lochfeldern.

Durch die beiden entwickelten Modifikationen kann eine aufwendige Herstellung von Lochfeldern mit unterschiedlicher Porosität und Anzahl von Löchern entfallen. In der FE-Analyse erübrigt sich die Modellierung der Löcher. Stattdessen kann eine Scheibe mit modifizierten „Materialparametern“ (Homogenisiertes Modell) verwendet werden.

**Schlagwörter** — Gradientenbeton, Gradiententechnologie, mesogradierem Betonbauteil, Betonleichtbau, Lochfelder aus Beton, Porosität, Druckfestigkeit, E-Modul

## Abstract

The practical design of meso-gradient concrete components, whose internal structure has been dissolved by inserting meso-graded cavities with a pore-size from 10 to 100 mm, is basically determined by the correlation between real structural behavior and compressive strength dependent upon its porosity. During this process of dissolving the inner structure, which modifies the topology, both the structural behavior and the material properties change.

This dissertation thesis pursues in tests as well as FE-analyses of specimen the mechanical resistance (compressive strength, elastic modulus) of concrete plates and shows to what extent they change when circular perforation (two-dimensional porosity) is inserted into the material.

The results of the tests and the FE-analyses (non-linear material law) are graphically presented in a diagram, showing that the compressive strength depends on the porosity and on the number of holes. The values of the compressive strength in relation to porosity and the number of holes generate a diagram with an almost flat surface.

One significant statement of the study is that the number of holes of a certain porosity has no influence on the compressive strength. The scope of porosity from 10 % to 40 % shows an almost linear correlation between compressive strength and porosity. For instance, if porosity increases by 20 % to 30 %, compressive strength ( $f_{cm}^*$ ) drops by 20 %. This linear correlation can be illustrated in a straight-line equation and will be presented in form of a modified parameter of compressive strength for the circular perforated parts of a gradient concrete component. This modified parameter of the elastic modulus (Modulus of elasticity) is based on the extendable equation of Gibson und Ashby, as well as on the results of the field studies during the research process.

The modification factors enable an evaluation of the material properties without having to start complex test series, producing concrete plates with variable porosity. There is further no need for modelling holes in the FE-analyses (non-linear). Instead it will be possible to modify a concrete plate by modification factor in the FE-analysis (homogenized model).

**Keywords** — functionally gradient concrete, gradient technology, meso-gradient concrete component, lightweight concrete construction, concrete plate with circular perforation, porosity, compressive strength, Modulus of elasticity

## Abkürzungsverzeichnis

$\alpha_k$	Spannungskonzentrationsfaktor [–]
$\alpha^*_k$	Spannungskonzentrationsfaktor bezogen auf die Nettofläche [–]
$\alpha_{12}$	Hauptspannungswinkel [–]
$\alpha$	Hauptspannungswinkel [Rad]
$\beta$	Beiwert zur Bestimmung der Knicklänge [–]
$\beta_{Rd}$	Zylinderdruckfestigkeit [MPa]
$\varepsilon_c$	Stauchung [%o, –]
$\lambda$	Schlankheit [–]
$\sigma_0$	Nennspannung (Druckspannung), im $\infty$ [MPa]
$\sigma_{1,2}$	Spannungen in Hauptspannungsrichtung [MPa]
$\sigma_r$	Spannungen in radialer Richtung (Polarkoordinate) [MPa]
$\sigma_t$	Spannungen in tangentialer Richtung (Polarkoordinate) [MPa]
$\tau_{rt}$	Schubspannung (Polarkoordinate) [MPa]
$\tau_{1,2}$	Schubspannung (Hauptspannungssystem $\tau_{1,2} = 0$ ) [MPa]
$\varphi_0$	Polarkoordinate [Rad]
a	Radius des Einheitskreises/Löcher -> ( $d_1=2a$ ) [cm]
c	engste Stelle zwischen den Löchern [cm]
c	Packungsdichte [–]
$c_q$	Packungsdichte von Einheitskreisen am quadratischen Gitter [–]
$c_h$	Packungsdichte von Einheitskreisen am hexagonalen Gitter [–]
d	Dicke der Scheiben und Lochfelder [cm]
$d_1$	Durchmesser der Löcher im Lochfeld [mm]
$d_{gk}$	Größtkorndurchmesser (Gesteinskörnung) [mm]
$f_{cm,zy}$	zentrische Druckfestigkeit am Zylinder [MPa]
$f_{ctm}$	zentrische Zugfestigkeit [MPa]
$f_{ct,bz}$	Zugfestigkeit am Biegezugversuch [MPa]
$f_{ct,sz}$	Zugfestigkeit am Spaltversuch [MPa]
$f_{cm}^*$	Druckfestigkeit Lochfeld [MPa]
$h_{ez}$	Höhe der Einheitszelle [cm]
l	Kantenlänge des Lochfelds [cm]

$l_0$	Knicklänge (Durchmesser der Löcher = 2 a) [ <i>cm</i> ]
$l_k^{EF}$	Knicklänge ermittelt aus 1. Eigenform [ <i>cm</i> ]
def./ Def.	definiert, Definition
n	Anzahl der Löcher [–]
$n_d$	Anzahl unterschiedlicher Lochdurchmesser [–]
$n_l$	Anzahl von Schichten [–]
$n_1$	Strukturparameter [–]
por	Porosität der Lochfelder [%]
r	Polarkoordinate [ <i>cm</i> ]
A	Oberfläche (bspw. am Probekörper) [ <i>mm</i> ]
$C_1$	geometrische Proportionalitätskonstante [–]
$C_2$	Koeffizient Druckfestigkeit ( $C_2=2/3$ ) [–]
$E_{LF}$	E-Modul der Lochfelder [ <i>MPa</i> ]
$E_{Euler}$	E-Modul Euler-Last [ <i>MPa</i> ]
$E_{Sch}$	E-Modul der (ungelochten) Scheibe (Matrixmaterial) [ <i>MPa</i> ]
$E^*$	Modifizierter E-Modul [ <i>MPa</i> ]
$I_{Euler}$	Flächenträgheitsmoment-Euler-Last [ $cm^4$ ]
M	Mittelpunkt der Löcher im Lochfeld [–]
N	Basis zur Auffindung der geraden Lochzahl [–]
$N_{krit}$	Euler-Last, theo. Knicklast [ <i>N</i> ]
V	Gesamtvolumen der ungelochten Scheibe (bspw.eines Probekörpers) [ <i>mm</i> ]
$V_L$	Volumen der Löcher [ <i>cm</i> ]

---

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung . . . . .	1
2	Materialverhalten und Maßstabseffekt von Beton . . . . .	7
2.1	Werkstoff Beton . . . . .	7
2.2	Maßstabseffekt der Ähnlichkeitsmechanik . . . . .	8
2.3	Maßstabseffekt der Bruchmechanik . . . . .	10
3	Layout der Lochfelder . . . . .	15
3.1	Infinite Gitterpackungen . . . . .	15
3.2	Layout . . . . .	16
4	Spannungszustand im Lochfeld . . . . .	23
4.1	Scheibe mit Loch . . . . .	24
4.2	Lochreihe mit zwei Löchern . . . . .	28
4.3	Spannungszustand an Scheibe und Lochfeld . . . . .	33
4.4	Spannungstrajektorien . . . . .	41
4.5	Stabilität . . . . .	53
5	Versuche an Lochfeldern . . . . .	63
5.1	Mechanische Materialkennwerte . . . . .	63
5.2	Versuchsaufbau . . . . .	66
5.3	Herstellung der Probekörper . . . . .	67
5.4	Materialkennwerte . . . . .	69
5.5	Scheibe und Lochfeld . . . . .	70
6	FE-Analyse . . . . .	75

6.1	FE – Scheiben-Modell . . . . .	75
6.2	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	79
7	Parameterstudie zu Druckfestigkeit und E-Modul . . . . .	81
7.1	Druckfestigkeit . . . . .	81
7.2	E-Modul . . . . .	84
7.3	Beispiel zur Modifizierung von Druckfestigkeit und E-Modul . . . . .	85
7.4	Homogenität der Lochfelder . . . . .	89
8	Zusammenfassung und Ausblick . . . . .	93
	Abbildungsverzeichnis . . . . .	99
	Tabellenverzeichnis . . . . .	101
	Literaturverzeichnis . . . . .	103
	Anhang . . . . .	A1

---

# 1 Einleitung

Das Bauwesen ist weltweit für 50 % des Ressourcenverbrauchs und für bis zu 50 % des Energieverbrauchs verantwortlich. Die CO<sub>2</sub>-Emissionen liegen im gleichen Zusammenhang bei bis zu 30 % und das Massenmüllaufkommen bei 50 % [Sobek, 2010] & [Bergmann, 2019]. Mit steigenden Bevölkerungszahlen in den nächsten Jahrzehnten und dem damit fast unvermeidlich verbundenen Anstieg baulicher Aktivitäten werden diese Werte bei Fortsetzung des aktuellen Handelns weiter steigen. Damit einhergehend wird es zu Engpässen bei vielen Ressourcen kommen.

Daher sollte es zeitnah zu Veränderungen in einigen Bereichen des Systems Mensch und Umwelt hin zu mehr Nachhaltigkeit kommen. Für das Bauwesen bietet der Leichtbau diesbezüglich für die Zukunft einen vielversprechende Möglichkeiten. Hierzu will diese Dissertation einen Beitrag leisten. Nachhaltiges Bauen bedeutet hierbei, Tragwerke und das Material, aus dem sie bestehen, in Bezug auf die vorhandenen endlichen Ressourcen zu optimieren, die Umwelt dadurch zu schonen, und somit der Verantwortung hinsichtlich einer fairen Hinterlassenschaft für nachfolgende Generationen nachzukommen.

## **Der Leichtbau und der Bauteilinnenraum**

Die Forderung nach Leichtbau nannte Fritz Leonhardt bereits in [Leonhardt, 1940], Jörg Schlaich in [Schlaich, 2013] formulierte den Gedanken weiter aus ... „Nie war Leichtbau zeitgemäßer und notwendiger als heute, aus ökologischer, sozialer und kultureller Sicht!“

Der Leichtbau teilt sich zunächst in zwei Typen, den Materialleichtbau und den Strukturleichtbau. Für beide Typen liegt die Funktion der Strukturen und seiner Bauteile ausschließlich darin, die äußere Last abzutragen. Verbindet man die einzelnen Unterkategorien (Form-, Topologie-, Bauteil-, Materialentwicklung) miteinander, mündet alles im Systemleichtbau. Die daraus entstehenden systemischen Bauteile sind multifunktional – haben also neben der lastabtragenden

noch weitere Funktionen wie eine raumabschließende, speichernde, dämmende usw.

Der Leichtbau, in dieser Dissertation speziell bezogen auf den Bauteilinnenraum, also das für den Bau verwendete Material, liefert eine Voraussetzung, um die Nutzung begrenzter Ressourcen über den gesamten Lebenszyklus (Planung, Herstellung, Nutzung, End-of-Life) eines Tragwerks respektive Bauwerks zu optimieren.

Dies gelingt hier mit dem bewussten Gestalten des Bauteilinnenraums, dem Homogenisieren der Spannungsverteilung und der dadurch verbundenen Masseneinsparung unter Berücksichtigung der Rezyklierbarkeit aller Bauteile, siehe auch [Sobek, 1995], [Sobek, 2014] & [Schmeer, 2018].

Die vorliegende Dissertation soll das bewusste Gestalten des Bauteilinnenraums – Minimierung der Massen – im Sinne des Strukturleichtbaus gezielt unterstützen. Die hier behandelte **Gradientenbetontechnologie** löst den Innenraum durch das Einbringen von Hohlkörpern nach entsprechenden Anordnungen auf. Es entstehen dadurch innerlich aufgelöste Bauteile mit schaumartigen Tragstrukturen [Sobek, 1995]. Wesentlich sind dabei die Kenntnisse der Spannungsfelder in einem beanspruchten Betonbauteil (in den drei Raumachsen). Dadurch wird eine an die Spannungsfelder angepasste Materialplatzierung möglich. In Bereichen mit geringen Beanspruchungsniveaus werden entsprechende Hohlkörper eingebracht. Es entsteht die sog. **Mesogradierung**<sup>1</sup> (auch Hohlkörperbauweise genannt; Hohlkörpergröße 1 – 25 cm). Diese kann durch eine weitere Optimierung mit der sog. **Mikrogradierung** (Hohlkörper/Poren < 1 cm) kombiniert werden. Dadurch wird gezielt eine Einsparung der Gesamtmasse (bis zu 70 %) erreicht, bei gleichzeitiger Einhaltung der Standsicherheit, der Funktionsfähigkeit und der sortenreinen Rezyklierbarkeit (u. a. in [Blandini, 2020]). Durch die Hohlkörper, hier sind es zylindrische Löcher, wird eine Massenreduktion des Bauteils erreicht. Um homogenisierte Spannungszustände zu erhalten, sind entsprechende Anforderungen hinsichtlich der Art, Anzahl und Anordnung der Hohlkörper zu

---

<sup>1</sup> meso = griechisches Präfix „mitten“

---

entwickeln (im Weiteren als Layout bezeichnet). Bei den hier vorgestellten ge-  
lochten Scheiben (im Weiteren als **Lochfeld** bezeichnet) sind die eingebrachten  
Hohlkörper Teile der Meso-Ebene, also der Ebene zwischen Mikro- (Matrix) und  
Makro- (Bauteil-) Ebene.

## **Problemstellung und Motivation**

Zur praktischen Auslegung von Gradientenbeton-Bauteilen werden Parameter  
wie etwa die Druckfestigkeit und der E-Modul der einzelnen Mesogradierungen  
benötigt. Das führt zu der Frage, in welcher Form die Zylinderdruckfestigkeit des  
Materials (Beton) modifiziert werden kann, um sie anschließend als neuen Para-  
meter – modifizierte Druckfestigkeit bzw. E-Modul – für die gradierten Bereiche  
zu verwenden. Durch die Verwendung solcher modifizierter Parameter soll die  
aufwendige Modellierung der einzelnen Hohlräume in den gradierten Bereichen  
entfallen. Dies bildet die Grundvoraussetzung für eine praxisorientierte Ausle-  
gung von Gradientenbeton-Bauteilen.

## **Ziel**

Ziel der Dissertation ist es, durch die aus Versuchen und FE-Analysen (nichtli-  
neares Material- gesetz) entwickelten empirischen Gleichungen, die benötigten  
Modifizierungsparameter der Druckfestigkeit und des E-Moduls von mesogradier-  
ten Gradientenbeton-Bauteilen, zur Verfügung zu stellen. Die Gleichungen sollen  
dabei auf die ermittelten Parameter der Normprüfung (Normalbeton) zurückgrei-  
fen und keine weiteren Bauteilprüfungen erforderlich machen. Dabei variiert die  
Porosität und die Anzahl der Löcher.

## **Stand der Forschung**

Bei Gradientenbeton-Bauteilen ist der Bauteilinnenraum sowohl auf der Mikro- als  
auch auf der Meso-Ebene aufgelöst. Daraus folgt die sogenannte Mikrogradierung  
(Anpassung der Steifigkeit der Betonmatrix), beschrieben in [Herrmann-1, 2015],  
und die Mesogradierung (Anpassung der Spannungszustände). Die Forschungs-  
arbeiten zu Gradientenbeton am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstru-

ieren der Universität Stuttgart (ILEK) setzen sich unter anderem mit der praktischen Herstellung der Hohlkörper, dem automatisierten Gießen bzw. Sprühen von Betonbauteilen bzw. der Betontechnologie auseinander (zusammengefasst in [Schmeer, 2018]). Das Gradientenlayout einer Mikrogradierung für ein funktional gradiertes Betonbauteil ist u. a. in [Herrmann-2, 2015] erläutert und beschreibt in Grundzügen die Lage der Hohlkörper (Materieverteilung) in einem Gradientenbeton-Bauteil.

Auf den gesamten Bereich der funktionalen Gradienten-Bauteile im Bauwesen wird hier nicht näher eingegangen. Einen umfangreichen Überblick liefert hierzu die Arbeit von [Heinz, 2012]. Als Ergebnis der zuvor genannten Arbeiten ist der sogenannte „Rosenstein-Pavillon“ im Stuttgarter Schloss Rosenstein aus dem Jahr 2017 zu nennen. Er ist das erste funktionale gradierte Schalenträgerwerk, welches gegenüber einer massiven Schale 40 % Massenreduktion bei gleicher Tragfähigkeit aufweist, siehe dazu [Kovaleva, 2018].

Die hier gewählte Vorgehensweise für eine Mesogradierung im Scheiben-Modell ist vergleichbar mit dem von Schmeer und Sobek gewählten Ansatz für Kugeln im dreidimensionalen Raum, siehe dazu [Schmeer, 2020].

Die vorliegende Dissertation ergänzt die Forschungsarbeiten des Instituts für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK) der Universität Stuttgart zur Gestaltung der Innenräume von Betonbauteilen.

### **Methode – Gliederung der Dissertation**

Das Kap. 1 beinhaltet die Einleitung mit allgemeinen Definitionen, die Problemstellung, das Ziel, den Stand der Forschung in der Gradientenbetontechnologie sowie die Gliederung und Positionierung der vorliegenden Arbeit.

Im Kap. 2 ist das Materialmodell des Betons (Normalbeton) mit Randeckeffekten, Maßstabeffekten der Ähnlichkeitsmechanik und Bruchmechanik beschrieben.

Kap. 3 befasst sich mit der Art, Anzahl und Anordnung der Hohlkörper, also des Layouts. Aus den theoretischen Betrachtungen heraus wird ein optimiertes Gradientenlayout für die weiteren Untersuchungen entwickelt.

---

Der theoretische Teil in Kap. 4 betrachtet die Spannungszustände an einem Loch bzw. mehreren Löchern in Scheiben mit unendlicher Ausdehnung. Im Weiteren werden innere zweiachsige Spannungszustände (inkl. Trajektorien) von ungelochten und gelochten Scheiben analysiert. Da es sich im Globalen um druckbeanspruchte Scheiben und im Lokalen um druckbeanspruchte Lochzwischenräume handelt, ist eine kurze Studie des Knickverhaltens am Ende des Kapitels abgeschlossen.

Im Kap. 5 sind die Ergebnisse des Versuchsprogramms dokumentiert. Zu Beginn ist der Versuchsaufbau inkl. potenziellen Versuchseinflüssen (etwa durch die Wahl der Probekörperform, der Prüfmaschine oder der Lasteinleitung) aufgeführt. Für die Ermittlung der Materialkennwerte (Zug-, Druckfestigkeit, E-Modul) wurden zunächst drei Chargen von Normprüfkörpern erstellt und getestet. Die Probekörperfestigkeiten von ungelochten und gelochten Scheiben aus Normalbeton werden anhand von Arbeitslinien ermittelt. Die Druckversuche sind mit einer Vier-Säulen-Universalprüfmaschine erfolgt, die Stauchungsmessungen mittels Laser und die visuelle Darstellung der Rissentwicklung per DIC-System (Digital Image Correlation System).

Um die ermittelten Probekörperfestigkeiten zu validieren, werden im Kap. 6 FE-Analysen (ATENA [Červenka, 2016] nichtlineares Materialgesetz, speziell für Beton) anhand von 2D-Scheiben-Modellen durchgeführt und mit den Versuchsergebnissen verglichen. Die Materialkennwerte der Normprüfkörper liefern dabei die Eingangswerte für die FE-Analyse. Durch ein Kontaktelement (Interface) werden Lasteinleitungseffekte berücksichtigt. Zusätzlich wird die Rissentwicklung in Abhängigkeit vom fortschreitenden Spannungszustand dargestellt und mit den in Kap. 5 ermittelten DIC-Daten verglichen.

Das Kap. 7 beinhaltet abschließend die Parameterstudie, aus der die Formeln für die modifizierte Druckfestigkeit und den E-Modul in Abhängigkeit von der Porosität abgeleitet werden. Für die modifizierte Druckfestigkeit liefert ein 3D-Diagramm die Grundlage, das die validierte Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der variierenden Porosität und der Anzahl der Löcher abbildet. Der modifizierte E-Modul ist über eine empirische Gleichung abgeleitet.

Eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf weitere zu untersuchende Fragestellungen bilden den Abschluss der Dissertation.

Im Anhang befinden sich die detaillierten Materialkennwerte weiterer, in der Arbeit nicht vorgestellter Proben.

---

## 2 Materialverhalten und Maßstabeffekt von Beton

Im Vorfeld der Versuche an Probekörpern (Scheiben und Lochfelder) wird nachfolgend das dafür verwendete Materialmodell des Werkstoffs Beton mit möglichen Maßstabeffekten dargestellt und diskutiert. Dabei soll die Einführung in das Modell und die Effekte, die das Versagen von Probekörpern und Bauteilen beeinflussen, einen Überblick verschaffen für spätere Zusammenhänge. Die inhomogene Struktur des Betons wird im ersten Ansatz als einfaches Zwei-Phasen-Modell angenommen.

Im Einzelnen werden die Maßstabeffekte in Bezug auf die Bauteilgröße, Lochgrößen und das Größtkorn sowie ihre gegenseitige Beeinflussung untersucht. Zunächst wird der Maßstabeffekt zwischen den absoluten Größen der Bauteile und deren Innenraum beschrieben. Das Kapitel schließt mit einer Übersicht zum Maßstabeffekt der Bruchmechanik speziell von Beton. Die angeführten Zusammenhänge bilden die Grundlage für die im Kap. 7 vorgeschlagene Homogenisierung auf Meso-Ebene.

### 2.1 Werkstoff Beton

Der Beton als Zwei-Phasen-Modell (Gesteinskörnung und Zement) bildet bereits während des Erhärtens Risse, vor allem durch Schwindvorgänge. Durch Aufbringen von äußeren Belastungen findet eine weitere Rissentwicklung auf Mikro-, Meso-, Makro-Ebene statt. In Abb. 2.1 sind die Bereiche der unterschiedlichen Riss-Ebenen und die dabei entstehenden Matrixzustände (Gefüge) in einem Spannungs-Stauchungs-Diagramm dargestellt.

Die kleinsten Risse der Mikro-Ebene (Bereich A–B, Abb.2.1) befinden sich im Zementstein. Die Meso-Ebene stellt das Zusammenwirken zwischen Zementstein (inkl. Porengefüge) und Gesteinskörnung (Bereich B–C) dar. Die Makro-Ebene (Bereich C–D) kennzeichnet die Rissbildung am Bauteil (sichtbare Risse). An der

Meso-Rissgrenze löst sich das Gefüge bereits auf. Abb. 2.1 zeigt zusätzliche Bezeichnungen der einzelnen Rissbereiche (dazu siehe u. a. auch in [Kupfer, 1973], [Grübl, 2002] & [Zilch, 2010]).

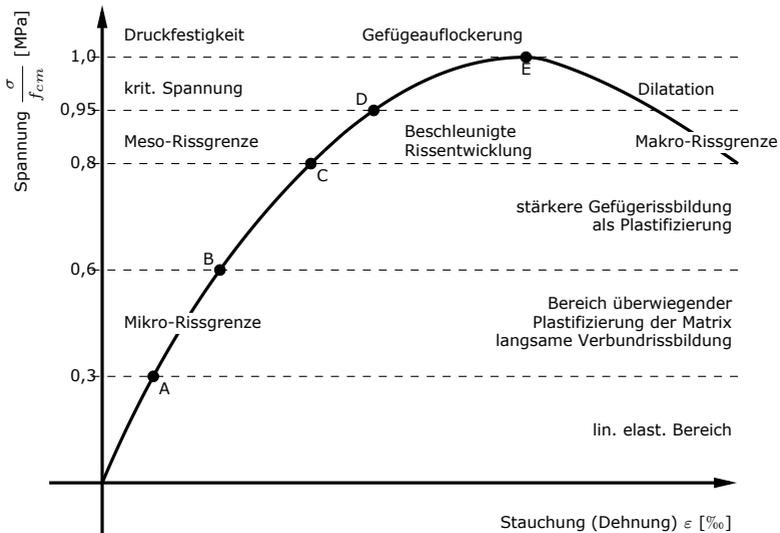


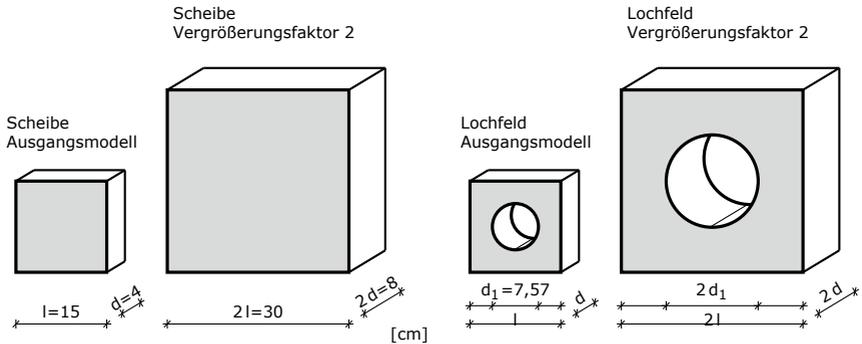
Abb. 2.1: Spannungs-Stauchungs-Diagramm eines Druckversuchs von Norm-Probekörpern aus Normalbeton. Die Arbeitslinie des Versuchs geht vom elastischen Bereich bis hin zum vollständigen Versagen der Probe. Dazwischen sind nach Kupfer [Kupfer, 1973] die Rissbildungsabschnitte und die entsprechenden Grenzen der Mikro-, Meso-, Makro-Ebene dargestellt

Beim Beton füllt die Matrix (Zementleim, -stein) den Zwischenraum in der Gesteinskörnung auf. Bei den später untersuchten Probekörpern, Scheiben und Lochfeldern ist der Beton zwischen den Löchern als Matrix der Meso-Ebene zu sehen.

## 2.2 Maßstabseffekt der Ähnlichkeitsmechanik

Die Ähnlichkeitsmechanik von Körpern baut auf dem Verhältnis des Volumens zur Oberfläche auf. Die hier verwendeten Probekörper sind in der Ansicht quadratisch mit  $15 \times 15$  cm und 4 cm dick. Daher ergibt sich für die ungelochten Scheiben (im Weiteren als Scheibe bezeichnet) eine Oberfläche (A) von  $690 \text{ cm}^2$  und ein Volumen (V) von  $900 \text{ cm}^3$ . Das Verhältnis von  $\frac{V}{A}$  liegt somit bei 1,3. Für eine doppelt

so große Scheibe ergibt sich damit ein Faktor von 2,6. Bei der Vergrößerung um 10 würde dies den Faktor 13,0 ergeben usw. Dies stellt die Abb. 2.2 a), inkl. exemplarischer Berechnung des Verhältnisses von  $\frac{V}{A}$  für das Ausgangsmodell einer Scheibe und das Modell mit dem Vergrößerungsfaktor 2 dar. Abb. 2.2 b) zeigt das Modell eines Lochfelds bei gleichem Vorgehen. Es ergibt sich ein Verhältnis  $\frac{V}{A}$  von 1,04.



$$V = 15 \cdot 15 \cdot 4 = 900 \text{ cm}^3$$

$$A = (15 \cdot 15) \cdot 2 + (15 \cdot 4) \cdot 4 = 690 \text{ cm}^2$$

$$V/A = 1,30$$

a)

$$V = (15 \cdot 15 \cdot 4) - (7,57^2 \cdot \pi/4) \cdot 4 = 720 \text{ cm}^3$$

$$A = (225 - 45) \cdot 2 + (15 \cdot 4) \cdot 4 + 7,57 \cdot \pi \cdot 4 = 695,1 \text{ cm}^2$$

$$V/A = 1,04$$

b)

Abb. 2.2: Modelle zur Ähnlichkeitsmechanik als Scheibe a) und Lochfeld b). Das vergrößerte Modell hat den Vergrößerungsfaktor 2. Das Verhältnis  $\frac{V}{A}$  ist jeweils exemplarisch berechnet.

Die zuvor berechneten Werte der Scheibe und des Lochfelds sind in Abb. 2.3 als Verhältnis von  $\frac{V}{A}$  für weitere Vergrößerungsfaktoren berechnet und aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die jeweiligen Modelle in Bezug auf den Vergrößerungsfaktor einen linearen Zusammenhang aufweisen. Im Weiteren zeigt die Abb. 2.3 neben der Scheibe die Steigungen für Lochfelder mit einer Porosität (por) von 10, 20, 30 und 40 %.<sup>2</sup> Das Verhältnis  $\frac{V}{A}$  in Bezug zur Vergrößerung der Lochfelder ist für die jeweilige Porosität wiederum proportional. Die zusätzlich in Abb.

<sup>2</sup> Anmerkung: Definition und eine genaue Beschreibung zur Porosität siehe Kap. 3 und Kap. 5.

2.3 dargestellte Tabelle beinhaltet die ermittelten Steigungen der jeweiligen Porosität.

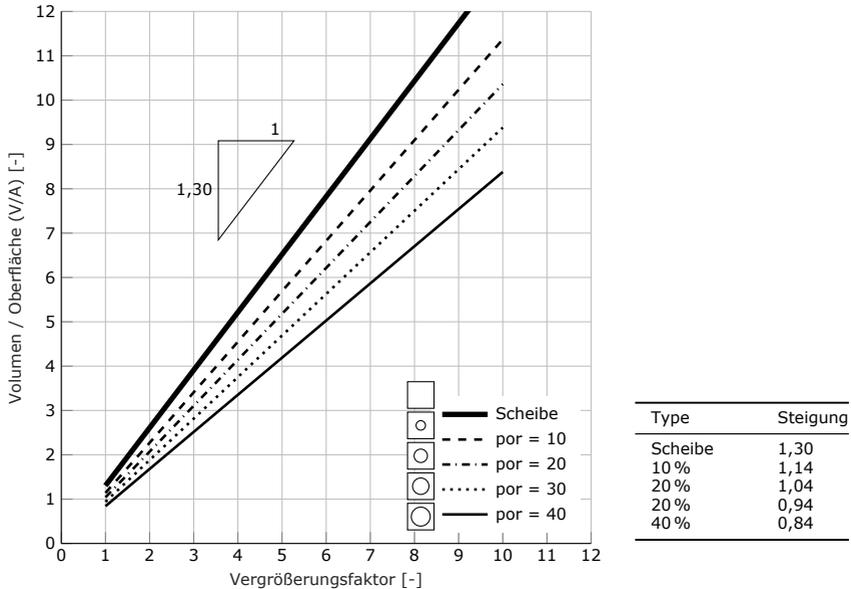


Abb. 2.3: Diagramm zur Darstellung der linearen Zusammenhänge zwischen Vergrößerungsfaktor und Verhältniss  $\frac{V}{A}$  von Scheiben und Lochfeldern. Die Tabelle gibt die Steigung der jeweiligen Typen an.

Da die untersuchten Lochfelder immer die gleiche Größe in Bezug auf Form und Gestalt haben (Definition lt. [Schickert, 1981]), und das Eigengewicht gegenüber der Höchstlast klein ist, werden hier keine Maßstabseffekte im Sinne der Ähnlichkeitsmechanik erwartet und daher nicht weiter berücksichtigt.

### 2.3 Maßstabseffekt der Bruchmechanik

Mit steigender Probekörpergröße sinkt die Probekörperfestigkeit, was dem Maßstabseffekt der Bruchmechanik zuzuschreiben ist. Hier werden grundsätzlich die Maßstabseffekte der Bruchmechanik des Betons (Normalbeton) auf Mikro-, Meso- und Makro-Ebene für Druckversuche vorgestellt. Zusätzlich beinhalten die angeführten Erläuterungen die sogenannten Randeffekte. Dazu schreibt Friedrich in

[Friedrich, 2002], dass die Trennung von Maßstabs- und Randeffect bei Druckversuchen am Beton nicht klar möglich ist<sup>3</sup>.

Im Beton sind Risse der Mikro-, Meso-, Makro-Ebene für das Versagen des Bauteils verantwortlich. Bereits durch die ungleichmäßig verteilte Temperatur während der Hydratation des Zements (Hydratationswärme) im inhomogenen bzw. anisotropen Werkstoff Beton entstehen in der Matrix die ersten Fehlstellen (Risse). Die „wirksamsten“ Fehlstellen zur Rissinitiierung liegen im Bereich der Kontaktfläche zwischen Gesteinskörnung und Matrix. Der Riss bildet sich bei Druckversuchen parallel zur Belastungsrichtung aus, wobei die Risslänge im Bereich des Größtkorn-Durchmessers liegt.

Der Maßstabseffekt der Bruchmechanik bei Druckversuchen<sup>4</sup> hängt im Allgemeinen von zwei wesentlichen Effekten ab. Der erste Effekt berücksichtigt das Verhältnis der Rissfläche zur Probekörperoberfläche (vgl. [Bažant, 1983]), der zweite die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlstellen (Weibull-Verteilung).

Dies bedeutet für den erstgenannten Faktor: je größer die Rissfläche ist (größeres Größtkorn), umso mehr Arbeit ist zu verrichten, und daraus folgt ein größerer mechanischer Widerstand. Gleich große Probekörper haben bei größerem Größtkorn daher mehr Widerstand als Probekörper mit kleinerem Größtkorn (vgl. dazu [Bažant, 1983] & [Carpinteri, 1998]). Dieser Effekt ist in Abb. 2.4 in logarithmischen Skalen der nichtlinearen Bruchmechanik abgebildet. Zusätzlich zeigt die Abbildung die linear-elastische Bruchmechanik (LEBM) als Bezugsgröße, mit einem Steigungsverhältnis von 1:2.

---

<sup>3</sup> Anmerkung: Bei Zugversuchen hingegen sind diese, nach Arbeiten von van Mier [Mier, 1986] & [Mier, 1997] trennbar.

<sup>4</sup> Anmerkung: Bei Zug- und Biegezugversuchen kann es durch das Vorhandensein von nur einem Riss zu weiteren Maßstabseffekten kommen, siehe dazu u. a. in [Özbolt, 1995]

Der in Abb. 2.4 mit „Größenbereich der Probekörper“ gekennzeichnete Bereich zeigt, dass für die hier untersuchten Probekörper kein Maßstabseffekt vorliegt.

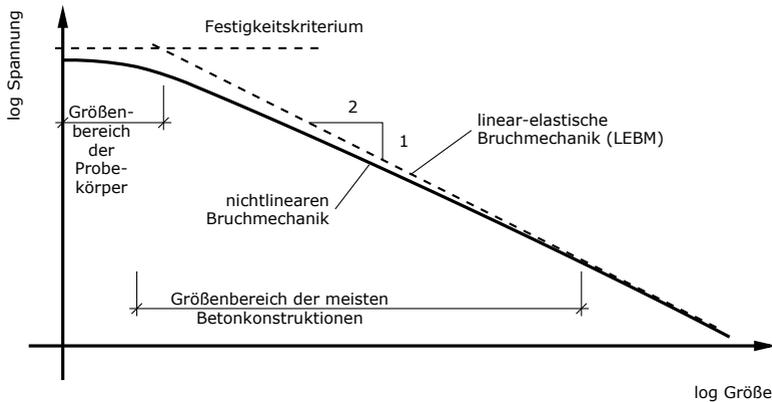


Abb. 2.4: Darstellung der linear-elastischen und nichtlinearen Bruchmechanik. Die logarithmische Darstellung zeigt die Festigkeitsspannung in Bezug auf die Größe des Probekörpers bzw. der Bauteile.

Der zweite Effekt bei Druckversuchen ist die Wahrscheinlichkeit zur Bildung von Rissen. Bei vielen kleinen Größtkörnern ist diese größer, so dass der Probekörper früher versagt. Dies geschieht nach einer sog. Weibull-Verteilung. Je spröder das Material ist, desto größer ist der Einfluss des Effekts.

Die in Abb. 2.5 dargestellten Modelle zweier unendlich ausgedehnter Scheiben mit großem Loch a) und kleinem Loch b) sollen zeigen, dass in der Bruchmechanik, vor allem bei Beton, der Maßstabseffekt zusätzlich auf Mikro-Ebene Einfluss nehmen kann und daher immer einer speziellen Betrachtung bedarf. Die Rissinitiierung erfolgt in den Bereichen der Kontaktflächen von Gesteinskörnern und Matrix, dort treten Spannungsspitzen auf. In zugbeanspruchten Probekörpern führt die anliegende Spannung zum Versagen (Versagenskriterien). Abb. 2.5 zeigt zusätzlich, dass die klassischen Versagenskriterien nicht alle Maßstabseffekte abbilden können.

Durch die immer kleiner werdenden Störungen (z. B. Gesteinskörner, Poren oder Löcher), homogenisiert das Material zu einem ungestörten Gebiet. In diesem Fall

spricht man von sog. "Rauschen", siehe dazu [Gross, 2016]. Die Spannungsgröße, welche zum Versagen führt, entwickelt sich von 0,3 in Bezug zur einwirkenden Nennspannung  $\sigma_0$ , bis hin zur einfachen Nennspannung  $\sigma_0$ . Im druckbeanspruchten Probekörper ist zusätzlich die „Umlagerungsfähigkeit“ des Materialmodells Beton zu berücksichtigen. d. h. kleine Probekörper sind hinsichtlich der Kerbwirkung unempfindlicher.

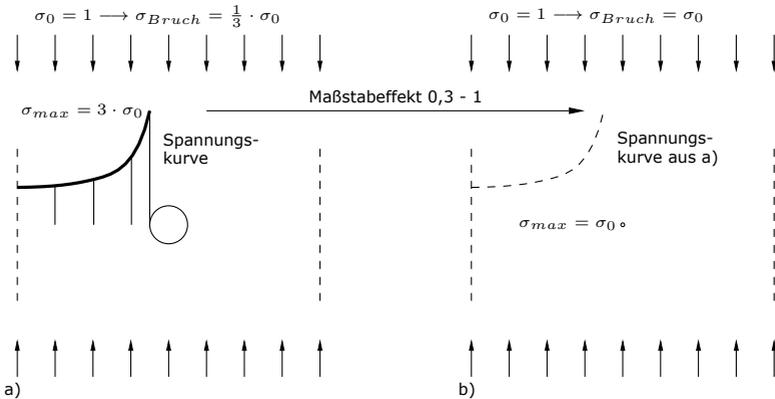


Abb. 2.5: Zwei unendlich ausgedehnte isotrope Scheiben mit Loch und konstantem Lastangriff im unendlichen Entfernung mit linear elastischem Werkstoffgesetz zur Darstellung des Maßstabeffekts der Mikro-Ebene. a) Loch ist verhältnismäßig „groß“. Daraus folgt die gezeigte Spannungskurve mit maximaler Spannung  $\sigma_{max} = 3\sigma_0$  am Lochrand. b) Das Loch ist verhältnismäßig sehr „klein“. Es ergeben sich keine Spannungskonzentrationen mehr  $\sigma_{max} = \sigma_0$ . Man spricht vom sog. „Rauschen“. Zum besseren Verständnis ist der Spannungsverlauf aus a) in b) mit-eingezeichnet.

Um die wesentlichen Effekte weitgehend aus den Betrachtungen dieser Arbeit auszuschließen, sind folgende Festlegungen vorgenommen worden:

- Gleiche Außenabmessungen der Probekörper,
- Begrenzung des Größtkorns auf  $d_{gk} = 4 \text{ mm}$ ,
- Die einzelnen Rissbereiche liegen ausreichend voneinander entfernt, damit von einer wechselwirkungsfreien Rissverteilung ausgegangen werden kann, vgl. [Gross, 2016].



### 3 Layout der Lochfelder

Nachfolgend wird die Topologie (Anordnung) der Löcher im Lochfeld erläutert (Layout). Ausgangspunkt ist die Aufteilung von Kreisen und deren Mittelpunkten am infiniten Gitter. Die Mittelpunkte der Löcher in den Lochfeldern sind demgegenüber abhängig von der dichtesten Anordnung von Kreisen in einer quadratischen Begrenzung.

#### 3.1 Infinite Gitterpackungen

Abb. 3.1 zeigt die quadratische a) und hexagonale b) Anordnung von Einheitskreisen im 2D-Raum als infinites Gitter. Die grau eingefärbten Bereiche (Parallelogramm) beinhalten jeweils eine volle Kreisfläche mit dem Radius  $a = 1$  ( $d_1 = 2a$ ). Das Verhältnis der Kreisfläche zur grau eingefärbten Fläche wird als Packungsdichte  $c$  bezeichnet. Die Packungsdichte bei quadratischer Anordnung beträgt  $c_q = 0,785$ , bei der hexagonalen Anordnung  $c_h = 0,907$ , was der dichtesten Kreisgitterpackung entspricht. Die zwei angeführten Anordnungen mit einem quadratischen und hexagonalen Gitter sind als Referenzwerte für spätere Vergleiche mit den Containerpackungen (Def. siehe 3.2) angeführt.

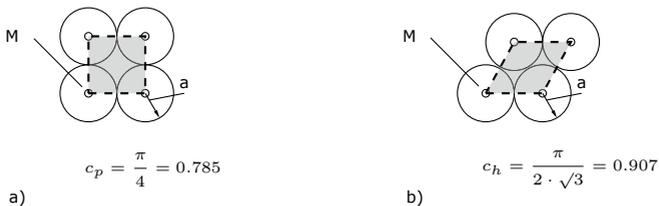


Abb. 3.1: Anordnung von Kreisen am quadratischen a) und hexagonalen b) infiniten Gitter. Ermittlung der Packungsdichte aus dem Quotienten der Parallelogramm- (Grauer Bereich) und Kreisfläche.

Da Bauteile (Probekörper) theoretisch und praktisch nie ohne Ränder (in der Literatur auch „unbeschränktes Gebiet“ genannt) vorkommen, sind die Anordnungen im infiniten Bereich nur theoretischer Natur. Die in dieser Arbeit vorgestellten Lochfelder sind quadratisch (15 x 15 cm). Die Anordnung der Mittelpunkte

M und die Größe der Durchmesser ( $d_1$ ) bilden eine Funktion aus der Anzahl der Löcher ( $n$ ) und der Porosität ( $por$ ). Analog dazu ist die Porosität der Lochfelder definiert als  $por = \frac{V_L}{V}$  ( $V_L$ =Volumen der Löcher,  $V$ =Gesamt-Volumen der ungelocherten Scheibe). Hier kann anstatt  $V$  jeweils  $A$  (Fläche) geschrieben werden, da alle Lochfelder konstant dick sind, also  $por = \frac{A_L}{A}$ . Dieser Zusammenhang wird im nächsten Abschnitt näher erläutert.

## 3.2 Layout

Insgesamt sind in dieser Arbeit drei Chargen von Probekörpern untersucht worden. Diese werden in Kap. 5 näher beschrieben. Für die untersuchten Lochfelder der Charge 1 und 2 ist eine gleichmäßige quadratische Anordnung (auch fluchtende Anordnung genannt) der Löcher gewählt worden, siehe Abb. 3.2 a) und b). Die Lochfelder der Charge 3 weisen gemischte Anordnungen (fluchtende bzw. versetzte Anordnung) auf. Das Auffinden der Mittelpunkte  $M$  für die jeweiligen Durchmesser ist über die dichteste Packung von Einheitskreisen in einem Quadrat erfolgt (Containerpackungen genannt, nach [Leppmeier, 1997]). Abb. 3.2 a) zeigt die quadratische Anordnung von  $n=9$  ( $n$ =Anzahl der Löcher) Löchern innerhalb einer Scheibe bei einer maximalen Packungsdichte von  $c_q=0,785$ . Die graue Fläche mit entsprechender Packungsdichte wird als Einheitszelle (Durchmesser gleich Kantenlänge) bezeichnet.

Die in der Charge 3 untersuchten Lochfelder haben zum Teil versetzte Anordnungen mit unterschiedlicher Porosität. Abb. 3.2 c) zeigt das Auffinden der Mittelpunkte im Quadrat für versetzte Anordnungen mit  $n=8$  Löchern, und d) ein Lochfeld mit  $n=8$  bei einer Porosität von 20%. Ist dies für  $n=9$  Löcher intuitiv lösbar, so ist es für die versetzte Anordnung etwas schwieriger. Die Literatur (u. a. in [Tóth, 1972], [Goldberg, 1970] & [Peikert, 1994]) stellt viele analytische Lösungen (mit mathematischem Beweis oder numerischen Varianten) vor. Beispielsweise lautet der Beweis nach [Schaer, 1965] für  $n=8$  Löcher, dass der Abstand zwischen den Mittelpunkten  $d_M = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$  ist. Abb. 3.2 c) zeigt dieses Ergebnis. Für das weitere Vorgehen werden die aus der Literatur vorgegebenen Lösungen als Grundlage zur Auffindung der Mittelpunkte (Koordinaten)

herangezogen.

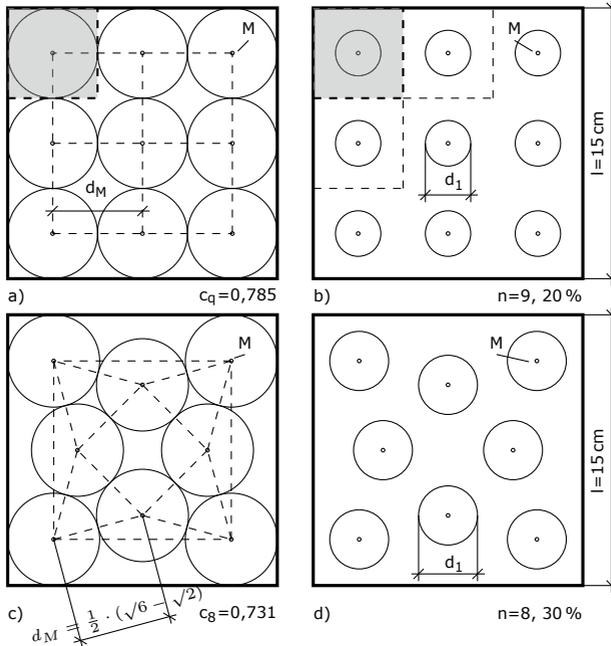


Abb. 3.2: Containerpackung mit je 8 bzw. 9 gleich großen Löchern. a)  $n = 9$  Löcher in fluchtender Anordnung mit einer theoretische Packungsdichte von  $c_q = 0,785$ ; b)  $n = 9$  Löcher und eine Porosität von 20%; c)  $n = 8$  Löcher in optimaler Anordnung mit einer theoretischen Packungsdichte von  $c_8 = 0,731$ ; d)  $n = 8$  Löcher und eine Porosität von 30%

Zur Ermittlung der Durchmesser ist die Anzahl der Löcher ( $n$ ) bzw. die Porosität ( $por$ ) erforderlich. Für die Lochfelder mit fluchtenden Lochreihen ist die Anzahl der Löcher wie folgt festgelegt:  $n = N^2$  ( $N = 1, 2, \dots, \infty$ ) also  $n = 1, 4, 9, 16, 25$  und  $36$ . Die in Abb. 3.2 b) grau schraffierte Fläche zeigt eine sogenannte „Einheitszelle“. Durch die Aneinanderreihung von Einheitszellen ergeben sich die Positionen der Mittelpunkte. In Abhängigkeit von der Porosität (entspricht der Packungsdichte der infiniten Gitter), der Anzahl der Löcher ( $n$ ) und der Seitenlänge des Quadrats, folgt der Durchmesser  $d_1$  des Kreises in Bezug auf die Einheitszelle.

$$d_1 = \sqrt{\frac{l^2 \frac{Por[\%]}{100} \cdot 4}{\pi n}} \quad (3.1)$$

mit:

$l$  = Kantenlänge des Lochfelds [ $mm$ ]

$d_1$  = Durchmesser der Löcher [ $mm$ ]

$Por$  = Porosität der Lochfelder [%]

Abb. 3.2 b) zeigt das Layout des Lochfelds ( $n_9$ ) mit 20 %iger Porosität. Nach Gl. 3.1 folgt daraus ein Durchmesser von  $d_1=0,505$  für die Einheitszelle. Für das Lochfeld mit der Kantenlänge vom 15cm ergibt sich ein Durchmesser von  $d_1 = 2,53$  cm. Das vollständige geometrische Layout eines Lochfelds wird damit durch zwei Größen (Durchmesser und Anzahl der Löcher) bestimmt.

Die Lochfelder haben gleichmäßig verteilte Löcher mit konstanten Durchmessern. Die erhaltenen Mittelpunkte (M) haben den gleichen Abstand zueinander. Die Kennwerte optimaler Packungen werden als Vergleichswerte herangezogen. Die Abb. 3.3 beinhaltet die Packungsdichten der Lochfelder mit konstanten Durchmessern von  $n = 1$  bis  $n = 36$ . Dazu sind die theoretischen Werte der quadratischen und hexagonalen Anordnung (mit ( $\infty$ ) gekennzeichnet) und der Mittelwert dargestellt. Die später untersuchten Probekörper der Charge 1 ( $n = 1, 4, 9, 16, 25$  und 36 Löcher) sind rot markiert.

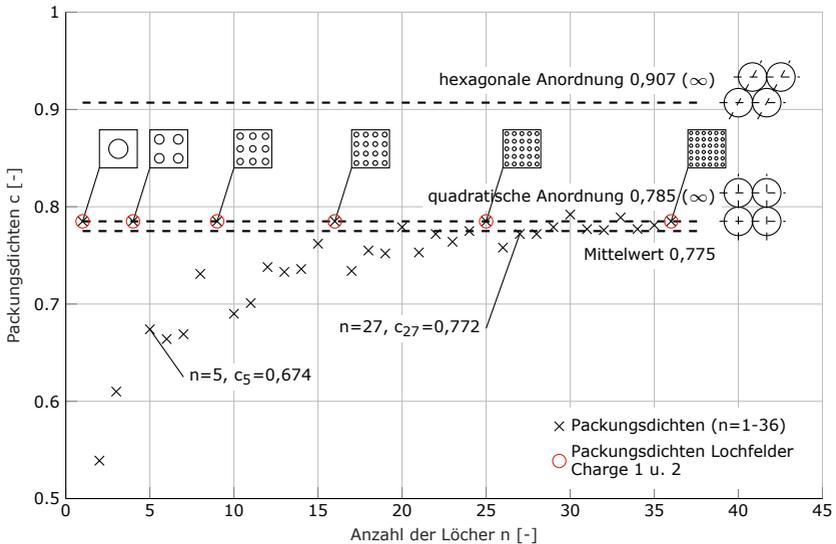


Abb. 3.3: Packungsdichten der Layouts in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher. Rot gekennzeichnete Lochfelder sind die in dieser Arbeit verwendeten Layouts der Probekörper. Die quadratischen und hexagonalen Anordnungen sind als quantitative Kennwerte angeführt.

Die Abb. 3.3 zeigt, dass beispielsweise ein Lochfeld mit 5 Löchern mit dem max. möglichen Durchmesser eine Packungsdichte von 0,674 erreicht. Für ein Lochfeld mit 27 Löchern ergibt sich auf Grund der kleineren Lochdurchmesser eine höhere Packungsdichte von 0.772. Daraus folgt, dass sich die Packungsdichte bei einer Steigerung der Anzahl von Löchern dem theoretischen Wert  $c_n = 0,907$  asymptotisch annähert.

Bei Verwendung verschiedener Lochdurchmesser zum Auffüllen der Zwischenbereiche (Lücken) kann ebenfalls die Packungsdichte gesteigert werden. So ergibt sich für ein Lochfeld mit zwei unterschiedlichen Lochdurchmessern ( $n_d = 2$ ) bei quadratischer Anordnung der Wert von  $c_{q,n_d=2} = 0,920$ . Durch Verwendung eines dritten Durchmessers steigt die Packungsdichte auf  $c_{q,n_d=3} = 0,957$  an. Im Fall der quadratischen Anordnung entstehen dadurch  $n_s > 3$  unterschiedlich große Lücken. Dies hat zur Folge, dass im nächsten Schritt zwei weitere Durchmesser gewählt werden müssten. Die hexagonale Anordnung erreicht im dritten Schritt eine Packungsdichte von  $c_{h,n_d=3} = 0,972$ .

Bei der quadratischen Anordnung steigert sich die Packungsdichte daher von  $c_{q,n_d=1}$  zu  $c_{q,n_d=2}$  um 17%. Im nächsten Schritt ( $c_{q,n_d=3}$ ) ist die Steigerung bei 4%. Bei der hexagonalen Anordnung beträgt die Steigerung der Packungsdichte zwischen  $c_{h,n_d=1}$  und  $c_{h,n_d=2}$  5% und im nächsten Schritt  $c_{h,n_d=3}$  weitere 2%. Ab den  $n_s > 3$  entstehen Lücken, die unterschiedlich große Durchmesser ergeben würden. In Tab. 3.1 sind diese Zusammenhänge dargestellt.

Tab. 3.1: Packungsdichte bei mehr als einem Durchmesser in quadratischer und hexagonaler Grundanordnung am infiniten Gitter, sowie die jeweilige Steigerung pro Schritt.

Anordnung	Anzahl der unterschiedlichen Kreisdurchmesser			
	$n_d = 1$	$n_d = 2$	$n_d = 3$	$n_d > 3$
quadratische	(1) 	(1,1) 	(1,1,4) 	
	0,785	→ 17% → 0,920	→ 4% → 0,957	>0,957
hexagonale	(1) 	(1,2) 	(1,2,6) 	
	0,907	→ 4% → 0,950	→ 2% → 0,972	>0,972

Diese Kombinationen von Anordnungen sind hier der Vollständigkeit angeführt und werden im Weiteren nicht weiter untersucht.

Die in Kap. 5 untersuchten Lochfelder sind in Tab. 3.2 aufgelistet. Es sind zur Ermittlung der Druckfestigkeit und des E-Moduls ausschließlich fluchtende Anordnungen aus 3 Chargen untersucht worden. Um Widersprüche hinsichtlich der unregelmäßigen topologischen Anordnung der Löcher und der damit verbunden ungleichen Packungsdichte zu vermeiden, sind hier die fluchtenden Anordnungen mit einer maximalen Packungsdichte von  $c_q=0,785$  gewählt. Die versetzten Layouts sind in der weiteren Betrachtung nicht berücksichtigt.

Tab. 3.2: Die in den Versuchen verwendeten Layouts der drei Chargen. Grau gekennzeichnete Bereiche der Charge 1 sind Lochfelder mit 20% Porosität, die als repräsentative Versuchskörper für die Ermittlung der Druckfestigkeit ausgewählt wurden. Für den E-Modul sind fluchtende Layouts aller drei Chargen herangezogen worden.

		Anzahl der Löcher			
Charge	n1	n4	n8	n9	
					
1	20% 3x	20% 3x		20% 3x	
2	40% 3x	10,20% je 3x		20% 3x	
3		30% je 3x	20,30,40% je 3x		
Charge	n16	n18	n25	n36	
					
1	20% 3x		20% 3x	20% 3x	
2	40% 3x	10,20% je 3x		20% 3x	
3		30% je 3x	20,30,40% je 3x		

Im Anhang A liegen einzeln Kennwerte (Mittelwerte) für Druckfestigkeit und E-Modul für Probekörper mit versetztem Layout vor.

Zu erwähnen ist, dass die Durchmesser eines Lochfelds der Meso-Ebene im Bereich zwischen 1 und 25 cm liegen (u.a. in [Blandini, 2020] & [Huber-1, 2019]). Die Layouts der in den nächsten Kapiteln durchgeführten Untersuchungen an Lochfeldern sind mit Durchmessern dieser Größe versehen. Die angeführte Herangehensweise ist vergleichbar mit dem von Schmeer und Sobek gewählten Ansatz für Kugeln im dreidimensionalen Raum, siehe dazu [Schmeer, 2018].



---

## 4 Spannungszustand im Lochfeld

Ein auf Druck beanspruchtes Bauteil hat zwei Versagensarten, einerseits das Überschreiten der aufnehmbaren Spannungen (Grenze der Festigkeit) und andererseits das Versagen gegenüber Stabilität.

Dieses Kapitel gibt einleitend einen Überblick zu den Spannungszuständen im Lochfeld.<sup>5</sup>

Der Spannungszustand in Scheiben ohne und mit Loch wird im ersten Teil des Kapitels erläutert. Eine auf Druck beanspruchte Scheibe (Feld) ohne Störung (kein Loch) weist einen einachsigen Spannungszustand auf. Das in die Scheibe eingebrachte Loch stört diesen einachsigen Spannungszustand, und es entstehen verschiedene Konstellationen von zweiachsigen Spannungszuständen (Druck-Druck, Druck-Zug, Zug-Druck und Zug-Zug). Eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit Loch, deren Belastung eine konstante Druckspannung ist, welche im Unendlichen angreift, soll hier als einleitendes Beispiel zur Darstellung der Spannungszustände herangezogen werden.

Über die Anordnung von zwei Löchern und deren Spannungsverteilung folgen die Erläuterungen zu den Spannungsverteilungen am Lochfeld.

Nach einer kurzen Übersicht zu Spannungstrajektorien und deren Eigenschaften werden die Lochfelder mit Spannungstrajektorien mit unterschiedlichen Laststufen in Abbildungen dargestellt. Die Werte der Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  entlang der Trajektorien und in den unterschiedlichen Laststufen werden in 3D-Diagrammen aufgetragen. Zum Abschluss der Spannungsuntersuchungen sind Studien zur Lastabtragung vorgestellt.

Durch das gewählte Scheibenelement liegt kein globales Stabilitätsversagen vor, d.h. kein Knicken aus der Ebene. Die Bereiche zwischen den Löchern sind hinge-

---

<sup>5</sup> Anmerkung: Hier soll weiter nicht vom "Kraftfluss" sondern immer von Spannungszuständen gesprochen werden. Eine Analogie zur Hydromechanik ist, lt. Thum [Thum, 1939], nur ein qualitativer, nicht aber ein quantitativer Vergleich. Durch ein rundes Hindernis (Zylinder) in der Strömung eines Fluides vergrößert sich die Geschwindigkeit um das Doppelte  $v = 2$ . Hingegen erhöht sich die Spannungskonzentration im Umfeld eines Lochs um das Dreifache  $\sigma = 3 \sigma_0$

gen im speziellen Fall knickgefährdet. Der im Zwischenbereich enthaltene Druckstab mit veränderlichem Querschnitt weist Sonderformen der Knickfigur auf. Einige dieser Sonderformen sind im letzten Teil dieses Kapitels beschrieben.

#### 4.1 Scheibe mit Loch

Die Ausgangslage ist in Abb. 4.1 dargestellt, eine unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe (linear-elastisches Materialgesetz) mit kreisförmigem Loch. Die konstante Druckbelastung  $\sigma_0$  greift im Unendlichen an. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt des Lochs. Die Ermittlung der Spannungskomponenten erfolgt in Polarkoordinaten mit  $a$  als Radius des Lochs sowie  $r$  und  $\varphi_0$ , durch welche die Spannungen außerhalb des Lochs ausdrückbar sind.

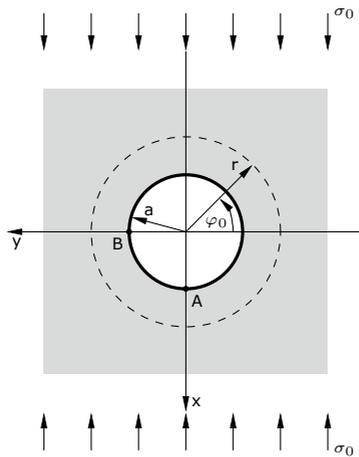


Abb. 4.1: Unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe (linear-elastisches Materialmodell) mit kreisförmigem Loch. Die konstante Druckbelastung  $\sigma_0$  greift im Unendlichen an.

Die von Kirsch 1898 in [Kirsch, 1898] veröffentlichte analytische Lösung zur Spannungsverteilung um das Loch ist aus der nachfolgenden Airy'sche Spannungsfunktion ermittelt.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Anmerkung: Leon stellte in [Leon, 1908] über ein partikulares Integral eine weitere Lösung vor, mit gleichem Ergebnis

$$F(r, \varphi_0) = \frac{\sigma_0}{4} \left[ r^2 - 2a^2 \ln(r) - \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2} \cos(2\varphi_0) \right] \quad (4.1)$$

mit:

$\sigma_0$  = Zug-/Druckspannungen im  $\infty$  [MPa]

$a$  = Radius des Lochs [mm]

$\varphi_0$  = Polarkoordinate [Rad]

$r$  = Polarkoordinate [mm]

Die Spannungsfunktion in Gl. 4.1 ist von den freien Parametern  $r$  und  $\varphi_0$  in Polarkoordinaten abhängig. Um die Spannungen (Spannungskomponenten) an diskreten Punkten zu berechnen, liegen einige Ableitungen vor, u. a. in [Eschenauer, 1993].

Die Gl. 4.2 – 4.4 geben die Spannungen in radialer  $\sigma_r$  und tangentialer  $\sigma_t$ -Richtung und die dort vorhandene Schubspannung  $\tau_{rt}$  an. Die Spannungskonstanten  $\sigma_r, \sigma_t, \tau_{rt}$  sind nachfolgend als Ableitungen von Gl. 4.1 dargestellt:

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2} \right) \cos(2\varphi_0) \right] \quad (4.2)$$

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos(2\varphi_0) \right] \quad (4.3)$$

$$\tau_{rt} = \frac{\sigma_0}{2} \left( -1 - 2\frac{a^2}{r^2} + 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin(2\varphi_0) \quad (4.4)$$

mit:

$\sigma_r$  = Radialspannung [MPa]

$\sigma_t$  = Tangentialspannung [MPa]

$\tau_{r,t}$  = Schubspannung [MPa]

Diese von den Polarkoordinaten  $r$  und  $\varphi_0$  abhängigen Spannungen können in die Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  und deren zugehörige Winkel  $\alpha_1^*$  bzw.  $\alpha_2^*$  transformiert werden. Die dazugehörigen Schubspannungen sind gleich Null. Es

folgt daher:

$$\sigma_1 = \sigma_{max.} = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_{rt}^2} \quad (4.5)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{min.} = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_t}{2}\right)^2 + \tau_{rt}^2} \quad (4.6)$$

$$\alpha_1^* = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{rt}}{\sigma_r - \sigma_t}\right), \quad \alpha_2^* = \alpha_1^* + \frac{\pi}{2} \quad (4.7)$$

$$\tau_{12} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha) + \tau_{rt} \cos(2\alpha) = 0 \quad (4.8)$$

mit:

$\sigma_{1,2}$  = Hauptnormalspannungen (im Weiteren als Hauptspannung bezeichnet)  
[MPa]

$\alpha_{1,2}^*$  = Hauptspannungswinkel [-]

$\tau_{1,2}$  = Schubspannung [MPa]

Die Gl. 4.7 hat den Nachteil, dass der Hauptspannungswinkel nicht eindeutig ermittelbar ist, da die *tan*-Funktion im Intervall  $2\pi$  zwei Lösungen im Abstand von  $\pi$  liefert.

Wendet man hingegen die nachfolgende Gl. 4.9 an (siehe dazu [Mahnken, 2015]), ist der Hauptspannungswinkel eindeutig bestimmbar:

$$\alpha_1^* = \arctan\left(\frac{\tau_{rt}}{\sigma_1 - \sigma_t}\right), \quad \alpha_2^* = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \quad (4.9)$$

Abb. 4.2 zeigt den Hauptspannungsverlauf von  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  entlang der Achsen x bzw. y. Die Werte sind anhand der Gl. 4.2 – 4.4 ermittelt. Die maximale Druckspannung ergibt sich entlang der Achse y am Punkt B, dort ist  $\sigma_t(r, 0) = \sigma_2 = -3 \cdot \sigma_0$ . Die größte Zugspannung liegt im Punkt A vor.

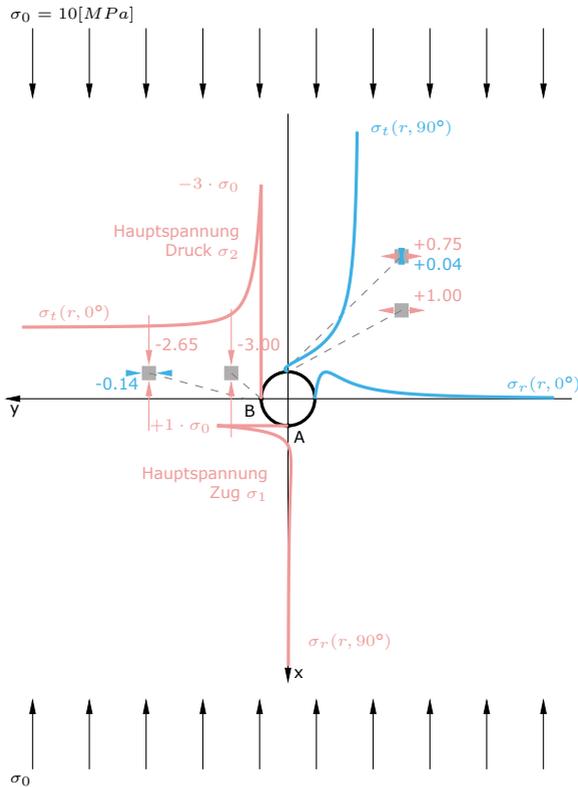


Abb. 4.2: Spannungsverteilung (Hauptspannungen) einer unendlich ausgedehnten isotropen Scheibe mit Loch (linear-elastisches Materialgesetz). Die konstante Druckbelastung ist mit  $\sigma_0 = 10 \text{ MPa}$  angenommen und greift im Unendlichen an. Es ergeben sich dadurch Spannungskonzentrationen im Punkt A von  $+1 \cdot \sigma_0$  (Zug) und im Punkt B von  $-3 \cdot \sigma_0$  (Druck).

Der als Spannungskonzentrationsfaktor (Formziffer) bezeichnete Wert  $\alpha_k$  gibt das Verhältnis zwischen der Nennspannung (Belastung)  $\sigma_0$  und der Spannungskonzentration (Spannungsspitzen)  $\alpha_k = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$  bzw.  $\alpha_k = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$  an. Zu erkennen ist, dass die Spannungskonzentrationen relativ schnell abnehmen, bereits bei  $r > 6a$  ist die Differenz zu  $\sigma_0 \leq 10\%$ .<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Anmerkung: Im Fall eines immer kleiner werden Lochdurchmessers (Mikro-Ebene, Poren) würden im Lochbereich wieder die im Unendlichen angreifenden Druckspannungen (einschsig) vorliegen, siehe dazu u. a. im Kap. 2.2 Maßstabseffekt. Dieser Maßstabseffekt wird u. a. von Gross ([Gross, 2016]) als „Rauschen“ (mathematische Singularitäten auf Mikro-Ebene) bezeichnet. Dies ist bereits im Kap. 2.3 behandelt.

Die im Unendlichen angreifende Druckspannung  $\sigma_0$  kann ggf. durch Superpositionierung mit einer weiteren Belastungsrichtung (zweiachsig) komponiert werden. Bei konstanter zweiachsiger Druckbelastung in x und y Richtung, ergibt sich an den Punkten A und B ein Spannungskonzentrationsfaktor von  $\alpha_k = -2$ . (...der Spannungskonzentrationsfaktor ist in diesem Fall entlang der Umgangslinie konstant  $\alpha_k = -2$ ). Gleiches gilt für Zugspannungen in Querrichtung. Bei gleich großer Druckbelastung mit gleichzeitiger Zugbelastung in Querrichtung ist der Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k = -4$ . Bei ausreichender Entfernung zum Lochrand ist dies der Zustand der maximalen Schubspannung.

## 4.2 Lochreihe mit zwei Löchern

Da die Lochfelder aus mehreren Löchern pro Scheibe bestehen, ist nachfolgend die unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe um ein weiteres Loch in horizontaler Richtung erweitert. Die konstante Druckbelastung wirkt senkrecht auf die Lochreihe. Ganz allgemein beeinflussen sich Löcher mit weitem Achsabstand nur gering. Je enger der Abstand ( $t$ ) gewählt ist, desto größer ist die gegenseitige Beeinflussung. Für diese gewählte Ausgangslage sind von Ling und Haddon in [Ling, 1948] & [Haddon, 1967] entwickelte Formeln bekannt.<sup>8</sup> Für die zwei horizontal angeordneten Löcher sind die nachfolgenden Gl. 4.10 und 4.11 genutzt worden, um die Spannungen am Punkt B zu ermitteln.

$$\alpha_k = \frac{\alpha_k^* \sqrt{\left(1 - \frac{2a}{t}\right)^2}}{\left(1 - \frac{2a}{t}\right)} \quad (4.10)$$

$$\alpha_k^* = 3 - 3.0018 \left(\frac{2a}{t}\right) + 1.00199 \left(\frac{2a}{t}\right)^2 \quad (4.11)$$

mit:

$\alpha_k$  = Spannungskonzentrationsfaktor [-]

$\alpha_k^*$  = Spannungskonzentrationsfaktor bezogen auf die Nettofläche [-]

$a$  = Radius der Löcher [mm]

$t$  = Achsabstand der Löcher [-]

<sup>8</sup> Anmerkung: Eine ausführliche Auswertung solcher Formeln ist in Form von Diagrammen von Pilkey in [Pilkey, 2008] dargestellt.

In Abb. 4.3 sind im Punkt B einerseits entlang der Abszisse die gegenseitigen Beeinflussungen als Wert der Porosität bzw. des Abstands ( $\frac{t}{2a} - 1$ ) aufgetragen, sowie andererseits im Verlauf der Ordinate die Spannung bzw. der Spannungskonzentrationsfaktor. Bezogen sind die Werte bereits auf die später durchgeführten Versuche.

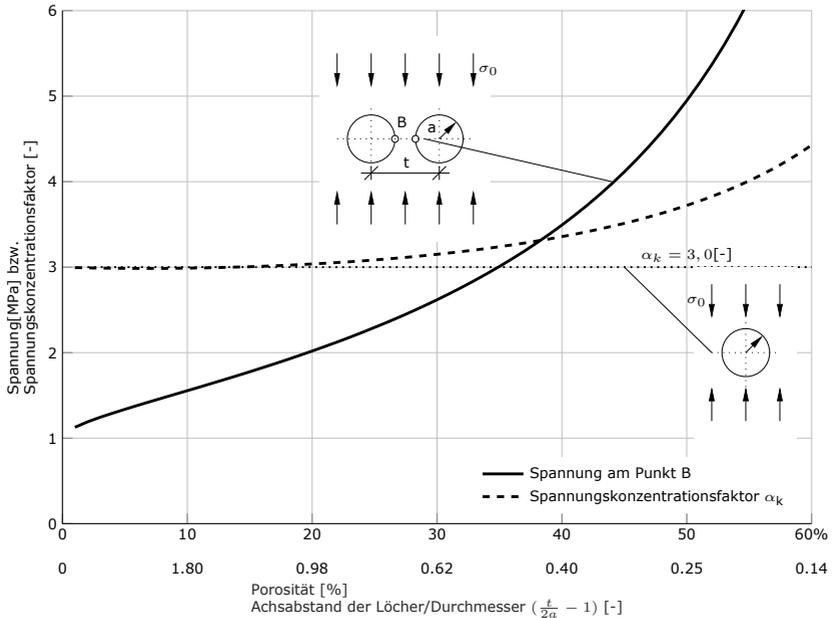


Abb. 4.3: Spannung bzw. Spannungskonzentrationsfaktor am Punkt B einer unendlich ausgedehnten isotropen Scheibe mit zwei Löchern bei unterschiedlicher Porosität bzw. Achsabstand der Löcher (linear-elastisches Materialgesetz). Eine konstante Druckbelastung greift im Unendlichen senkrecht auf die Lochreihe an.

Der Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k = 3$  ist in Abb. 4.3 für die Scheibe mit einem Loch als konstanter Referenzwert aufgetragen. Der Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k$  nimmt in Abhängigkeit von der steigenden Porosität zu. Erst ab einer Porosität vom ca. 30 % steigt der Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k$  wesentlich über  $\alpha_k = 3$ . Dies kann ebenso über das Verhältnis des Achsabstands der Löcher ( $t$ ) zum Radius ( $r$ ) formuliert werden. Nimmt das Verhältnis ab, steigt der Spannungskonzentrationsfaktor an, d. h. durch das Verkleinern der Lochabstände steigt die Spannungskonzentration an. Die Anzahl der Löcher hat je nach Porosität keinen Einfluss auf das Verhältnis  $(\frac{t}{2a} - 1)$ .

Für den Fall, dass die konstante Druckbelastung in Richtung der Lochreihe angreift, ergibt sich für Porositäten  $\leq 40\%$ , wie für die Scheibe mit einem Loch, am Punkt A ein Spannungskonzentrationsfaktor von  $\alpha_k = 1$  (Zugspannung).

Abb. 4.3 bildet den Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k$  als maximalen Wert an einem Punkt ab, in diesen Fall der Punkt B. Eine analytische Herleitung aller Werte um die Löcher, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt, ist aufwendig. In der Literatur sind hierzu Lösungen vorhanden, siehe dazu u. a. [Sawin, 1956], [Muskhelishvili, 1974] & [Neuber, 2001].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis spezifischer Vergleichswerte an diskreten Stellen ausreichend. Die Spannungswerte in Abb. 4.4 sind einer FE-Analyse mit linear-elastisches Materialgesetz entnommen. Die Spannungen sind entlang der angegebenen x und y Achsen aufgetragen. Für die weitere Beachtung genügen die Größen der Spannungen entlang der angegebenden Achsen.

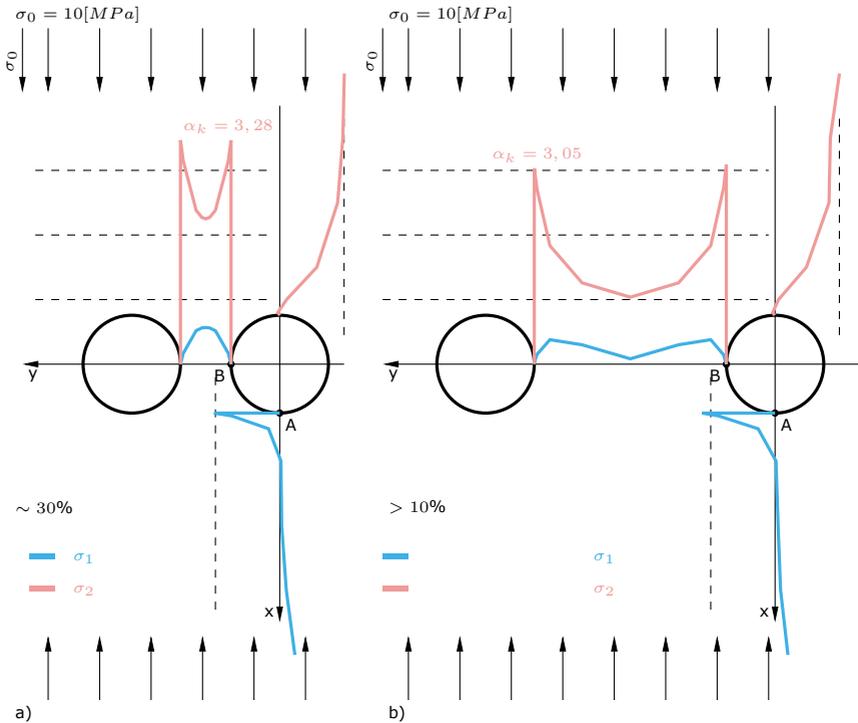


Abb. 4.4: Spannungskonzentrationsfaktor am Punkt B einer unendlich ausgedehnten isotropen Scheibe mit zwei Löchern bei 10 und 30%iger Porosität (FE-Analyse mit linear-elastischem Materialmodell). a) Bei ca. 30% Porosität beeinflussen sich die zwei Löcher bereits gegenseitig, der Spannungskonzentrationsfaktor liegt bei  $\alpha_k = 3,28$ . b) Bei ca. 10% Porosität beeinflussen sich die zwei Löcher gegenseitig nur gering, der Spannungskonzentrationsfaktor liegt bei  $\alpha_k = 3,05$  im Bereich der unendlich ausgedehnten Scheibe mit einem Loch.

Wie Abb. 4.4 a) zeigt, liegt bei ca. 30% Porosität ein Spannungskonzentrationsfaktor von  $\alpha_k = 3,28$  vor, was eine Erhöhung von ca.10 % bedeutet. Bei ca. 10% Porosität ist die Beeinflussung der Löcher gering, der Spannungskonzentrationsfaktor liegt bei ca.  $\alpha_k = 3,00$ , daher im Bereich der unendlich ausgedehnten Scheibe mit einem Loch entspricht, Abb. 4.4 b).

In Abb. 4.5 ist ein Lochfeld mit 20%iger Porosität dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebniskurven einer FE-Analyse mit einem linear-elastischen und einem nichtlinearen Materialgesetz gegenübergestellt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden:

- dass der maximale Spannungskonzentrationsfaktor mit linear elastischem Materialgesetz bei  $\alpha_k = 3,00$  liegt,
- dass bei Verwendung eines nichtlinearen Materialgesetzes dieser Wert in keiner Laststufe überschritten wird.
- Für beide Materialgesetze ist dies ebenso bei der maximaler Zugspannung zu beobachten.

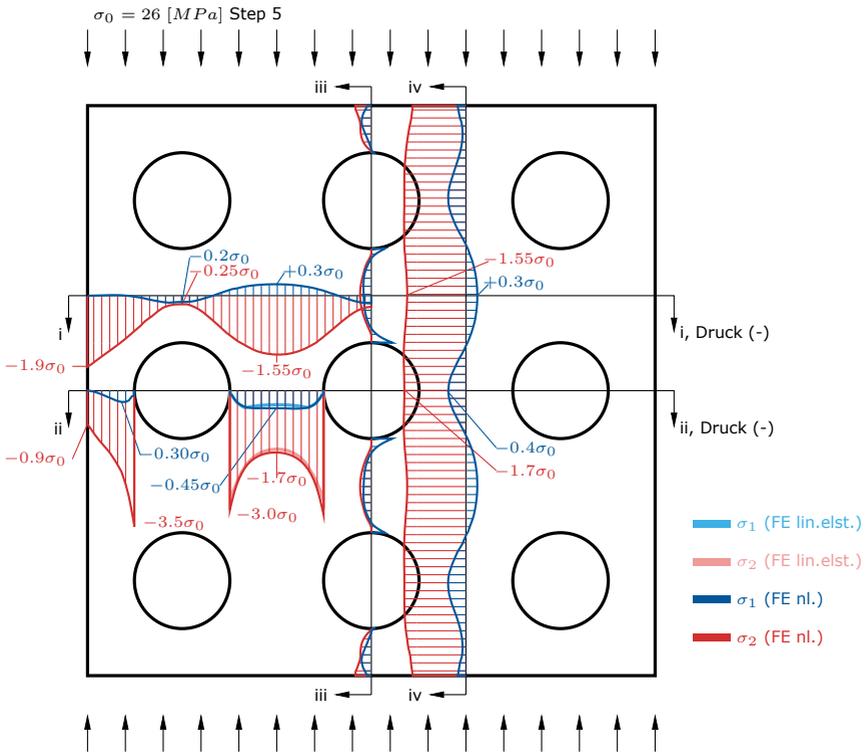


Abb. 4.5: Spannungsverteilung am Lochfeld mit einer Porosität von 20 %. An den Schnitten i – iv sind die Spannungskonzentrationsfaktoren in x und y- Richtung aufgetragen. Im Lochzwischenbereich (Schnitten ii – ii) sind das linear-elastische und das nichtlineare Materialgesetz gegenübergestellt.

In Kap. 5 und 6 sind die angeführten Spannungszustände am Lochrand und in den Lochzwischenbereichen zu Erklärung der Rissentwicklung relevant. Im Kreu-

zungsbereich der Schnitte i und iv (als Bereich „R“ bezeichnet), wird die Erstrissbildung<sup>9</sup> erwartet.

### 4.3 Spannungszustand an Scheibe und Lochfeld

Zur Beurteilung der Ergebnisse zwischen Versuch (Kap. 5) und FE-Analyse (Kap. 6) werden die Spannungszustände der Scheibe und des Lochfelds verwendet. Um die Spannungen einzelner Bereiche in den Lochfeldern vergleichen zu können, sind die Spannungszustände nachfolgend näher erläutert. Die Ermittlung der Hauptspannungen erfolgt anhand der FE-Analyse. Als Eingangswerte dienen die Materialkennwerte der Normprüfkörper (Tab. 5.3).

Sowohl bei den Versuchen als auch bei der FE-Analyse spielen die Lasteinleitung bzw. das Festlegen von Randbedingungen (Randeffekte) eine wesentliche Rolle. Für die Scheibe ohne Querdehnungsbehinderung (d.h. reibungsfreie Lasteinleitung) folgt ein einachsiger Spannungszustand, siehe Abb. 4.6 a). Für die Scheibe mit Querdehnungsbehinderung (Reibung in der Lasteinleitung), siehe Abb. 4.6 b), entsteht ein gemischter Spannungszustand: ein zweiachsiger Spannungszustand im Bereich der Lasteinleitung und ein einachsiger am Rand.

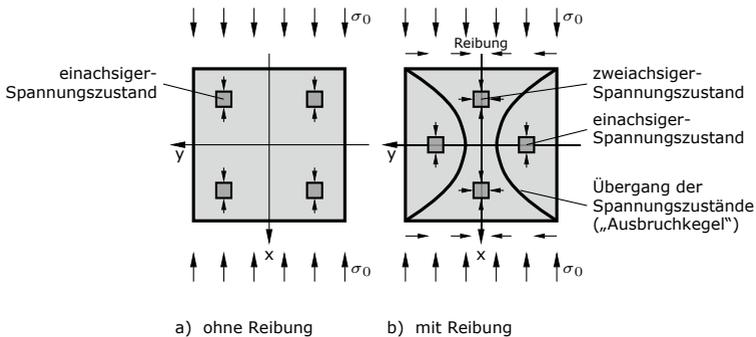


Abb. 4.6: Spannungszustände an der Scheibe. a) Da im Bereich der Lasteinleitung keine Reibung vorliegt, entsteht in der Scheibe ein einheitlicher einachsiger Spannungszustand. b) Durch die Behinderung der Querdehnung, hervorgerufen durch die Art der Lasteinleitung (Reibung) entstehen in der Scheibe gemischte Spannungszustände.

<sup>9</sup> Anmerkung: In der FE-Analyse sind die Randbedingungen (Reibung) im Lasteinzugsbereich mittels Interface berücksichtigt, siehe Kap. 6

Im Lochfeld ist der Spannungszustand durch die Löcher zusätzlich gestört. Die Spannungszustände für Lochfelder sind nachfolgend entwickelt und in Abb. 4.10 dargestellt.

Wie bereits im vorhergegangenen Kapitel erläutert, soll das in Abb. 4.5 Lochfeld n9-20 im Weiteren als repräsentatives Layout dienen. Das für die Spannungsanalyse<sup>10</sup> verwendete FE-Modell konnte aufgrund der vorliegenden doppelten Symmetrie des Probekörpers auf ein Viertel-Modell reduziert werden. Dies zeigt die Abb. 4.7 a). Hinsichtlich der Lasteinleitungseffekte sind die nachfolgenden verwendeten Interface-Werte (Abb. 6.1) in einer Parameterstudie entwickelt worden. Das Viertel-Modell ist zur genaueren Beschreibung der Spannungszustände in die Analysebereiche D (überwiegend Druck), Z (überwiegend Zug) und R (Risszone) unterteilt.

Die FE-Analyse der Scheiben ohne Loch und der Lochfelder aus Beton ist durch ein einachsiges Werkstoffgesetz beschrieben, siehe dazu Abb. 4.7 b). Die FE-Analyse mit nichtlinearem Materialgesetz ist in einzelne Steps unterteilt. Die in Abb. 4.7 c) dargestellte Spannungs-Stauchungs-Kurve zeigt die vier festgelegten Laststufen (Steps) der Untersuchungen am Lochfeld a). Die Steps sind so gewählt, dass Step 5 im ungerissenen Bereich des Werkstoffgesetzes liegt. Die Steps 19, 21 und 26 sollen den Bereich der Mikro- und Meso-Rissbildung abbilden, siehe dazu Kap. 2.1.

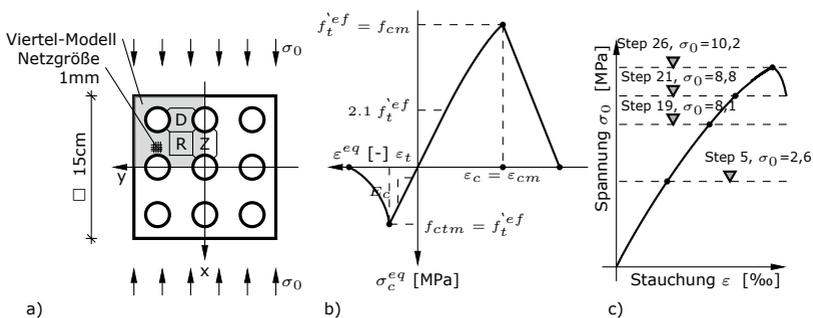


Abb. 4.7: a) Viertel-Modell mit einachsiger Belastung und der Einteilung der Analysebereiche (D, R, Z) der Spannungszustände; b) nichtlineares Werkstoffgesetz der FE-Analyse; c) Spannungs-Stauchungs-Diagramm einer Versuchskurve mit festgelegten Laststufen (Steps) der FE-Analyse

<sup>10</sup> Anmerkung: Verwendete FE-Software: ATENA ([Červenka, 2016]), siehe Kap. 6

Für die zweiachsige Zug-Druck-beanspruchte Betonscheibe (ohne Löcher) sind Festigkeitskurven aus dem Kriterium nach Rankine-Lamé-Navier und Mohr-Coulomb entwickelt worden (vgl. [Kupfer, 1973]). Kupfer hat aus zahlreichen Versuchen (Scheibenabmessung  $20 \times 20 \times 5$  cm und Schlankheit  $\lambda < 4$ ) eine empirische Grenzkurve entwickelt, welche sich auf die Zylinderdruckfestigkeit  $\beta_{Rd}$  als Relativwert bezieht (Abb. 4.8). Daraus ergab sich eine Zugfestigkeit bei 10 % von  $\beta_{Rd}$ . Durch die Verwendung von Bürsten wurden hier die oben beschriebenen Lasteinleitungseffekte (Reibung) vermieden.

Die maximalen Zug- und Druckfestigkeiten im  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm (Abb. 4.7 b)) spiegeln sich in der Abb. 4.8 wider, die Zylinderdruckfestigkeit im Punkt  $\beta_{Rd} = f_{cm,zy}$  und die zentrischen Zugfestigkeit im Punkt  $0.1 \cdot \beta_{Rd} = f_{ctm}$  entlang der Achsen  $(\frac{\sigma_1}{\beta_{Rd}})$  bzw.  $(\frac{\sigma_2}{\beta_{Rd}})$ .

Die gemischten Spannungszustände sind in die Bereiche Druck-Druck, Druck-Zug, Zug-Druck und Zug-Zug unterteilt, im Weiteren als Hauptspannungs-Konstellationen bezeichnet. Die zwei Bruchbilder - Trenn- bzw. Druckbruch - bilden eine zusätzliche Unterteilung der Bereiche.

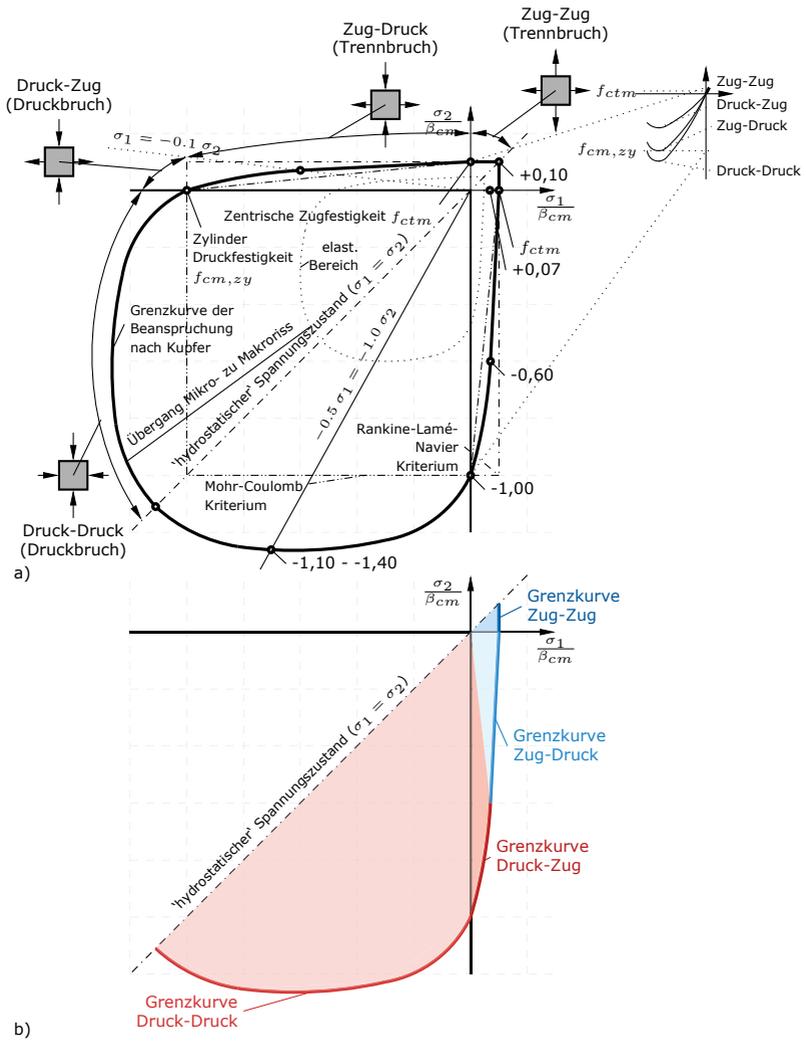


Abb. 4.8: a) Zweiachsiger Grenzkurve der Beanspruchung nach Kupfer mit den Hauptspannungskonstellationen (Zug - Zug, Zug - Druck, Druck - Zug, Druck - Druck) und den zugehörigen Bruchbildern (Trennbruch bzw. Druckbruch). b) Einteilungsflächen der Hauptspannungskonstellationen für die weiteren Spannungsuntersuchungen.

Die Abschnitte der Grenzkurve sind nachfolgend genauer beschrieben, zusätzlich sind die einzelne Abschnitte mit einer Farbabstufung gekennzeichnet, siehe Abb. 4.8 b).

## Hauptspannungs-Konstellationen

### Zug – Zug

Im Zug-Zug-Bereich ist der charakteristische Wert die zentrische Zugfestigkeit ( $f_{ctm}$ ). Er ist unabhängig davon, wie groß die quer gerichtete Zugkomponente ist. Daher wird in diesem Bereich die zentrische Zugfestigkeit als konstanter Grenzwert angesetzt ( $f_{ctm} = 0,1 \cdot \sigma_2$ ). Diese Aussage deckt sich mit der Bruchspannungshypothese nach Mohr-Coulomb (vgl. [Kupfer, 1973], [Grübl, 2002]). Das überwiegende Bruchbild ist der Trennbruch.

### Zug – Druck

Der Grenzwert dieses Bereichs liegt zwischen der zentrischen Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  und dem Punkt, welcher einen Zugfestigkeitswert von  $0,07 \cdot f_{ctm}$  und einen Druckfestigkeitswert von  $0,6 \cdot f_{cm,zy}$  aufweist. Das Spannungsverhältnis ist dort mit  $\sigma_1$  (Zug) und in Querrichtung mit einer Druckspannung von  $0,1 \cdot \sigma_2$  festgelegt.<sup>11</sup> Der Bereich zwischen zentrischem Zug und dem beschriebenen Zug-Druck-Bereich bildet den Übergang zwischen Normalspannungshypothese (Rankine-Lamé-Navier-Kriterium) und dem Mohr-Coulomb-Kriterium. Das überwiegende Bruchbild ist der Trennbruch.

### Druck – Zug

Die Grenzwerte dieses Bereichs liegen zwischen dem zuvor angesprochen Punkt  $0,07 \cdot f_{ctm}$  und  $0,6 \cdot f_{cm,zy}$ , sowie der zentrischen Druckfestigkeit ( $f_{cm,zy}$ ). Ebenso ist die Grenzkurve linear angenommen. Im Unterschied zum Zug-Druck-Bereich ist das Bruchbild in diesem Fall ein Druckbruch.

### Druck – Druck

Die Grenzkurve beginnt am Punkt der zentrischen Druckfestigkeit ( $f_{cm,zy}$ ) bis hin zum hydrostatischen Spannungszustand. Die maximale Druckfestigkeit entlang der Grenzkurve steigt bis zum Wert  $-1,25 \cdot f_{cm,zy}$  an. Das Spannungsverhältnis liegt dort bei  $-0,5 \cdot \sigma_1$  (Druck) und  $-1,0 \cdot \sigma_1$  (Druck). Bis zum hydrostatischen Spannungszustand  $\sigma_1 = \sigma_2$  (Druck-Druck) fällt die Druckfestigkeit auf  $-1,15 \cdot$

<sup>11</sup> Anmerkung: Dieser Bereich ist als sensibel anzusehen, da er einen Übergang zwischen zwei bruchmechanischen Hypothesen darstellt.

$f_{cm,zy}$  ab. Bei Verwendung eines starren Lasteinleitungssystems steigt der Wert bei  $-0,5 \cdot \sigma_1$  (Druck) und  $-1,0 \cdot \sigma_1$  (Druck) auf bis zu  $-1,4$  bis  $-1,5 \cdot f_{cm,zy}$  an. Das Bruchbild zeigt einen ausgeprägten Druckbruch.

Die Kenntnisse der von Kupfer ermittelten, zweiachsigen Festigkeitswerte an Betonscheiben (Makro-Ebene) werden im nächsten Abschnitt auf Hauptspannungen ( $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ ) der Meso-Ebene umgelegt. In den nachfolgenden Diagrammen (Abb. 4.9) sind die Hauptspannungen eines Lochfelds n9-20 dargestellt, die aus einer FE-Analyse ermittelt wurden (ca. 20.000 Elemente, Elementgröße ca. 1 mm). Es handelt sich wiederum um Relativwerte von Hauptspannungen in Bezug auf die Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cm,zy}$ . Diese sind in Abb. 4.9 entlang der Achsen  $\frac{\sigma_1}{f_{cm,zy}}$  bzw.  $\frac{\sigma_2}{f_{cm,zy}}$  aufgetragen.

Die oben beschriebene Grenzkurve mit den unterschiedlichen Verhältnissen der anliegenden Spannungen ist anhand der Farbabstufung (Grenzlinie) dargestellt.

Zu den vier Abschnitten der Grenzkurve (Druck-Druck, Druck-Zug, Zug-Druck und Zug-Zug) sind vier zugehörige innere Bereiche mit einer weiteren Farbabstufung gekoppelt dargestellt, siehe Farbskala in Abb. 4.9, rechts. Die dort liegenden Elemente und deren Spannungsverhältnisse haben die Grenze ihrer Festigkeit nicht erreicht („ungerissene“ Elemente). Sobald ein Element die Grenzkurve erreicht, entsteht ein Riss und es ist keine Kraftübertragung mehr möglich.

Mit dem Fortschritt der Laststufen (Steps 5, 19, 21 und 26) sind immer mehr gerissene Elemente außerhalb der Grenzkurve verteilt. Die vier Diagramme zeigen mit dem Anstieg der Steps ein deutliches Auseinanderdriften der Elemente, weg von den Achsen.

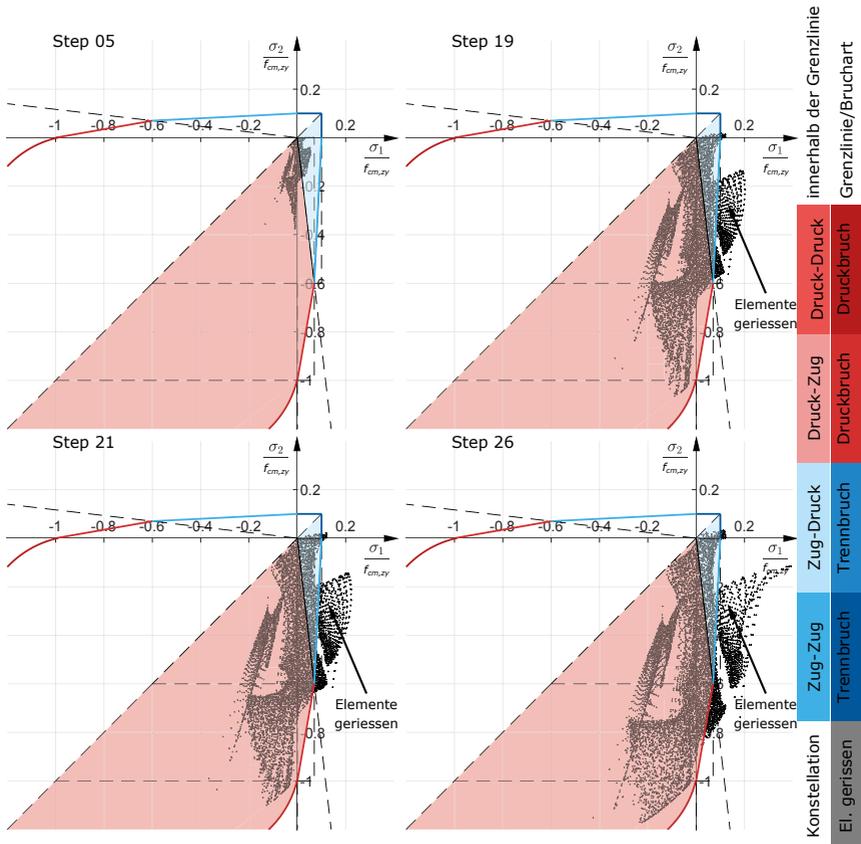


Abb. 4.9: Zweiaxsiges Diagramm der ermittelten Hauptspannungen aus der FE-Analyse (je Elemente ein Punkt) mit überlagerten Einteilungsflächen der Hauptspannungskonstellationen (siehe Legende rechts) zu den festgelegten Laststufen (Steps).

In den Diagrammen wird nicht unterschieden, wo die Elemente im Lochfeld liegen (am Punkt der Lasteinleitung, am Rand oder in der Mitte).

Die unterschiedlichen Konstellationen von Hauptspannungen (Druck-Druck, Druck-Zug, Zug-Druck und Zug-Zug) der einzelnen Elemente sind entsprechend den definierten Farbbereichen zugeteilt in Abb. 4.10 im Viertel-Modell der Lochfelder dargestellt. In den Bereichen D, Z und R sind die Konstellationen von Hauptspannungen symbolisch (Pfeile) eingetragen.<sup>12</sup>

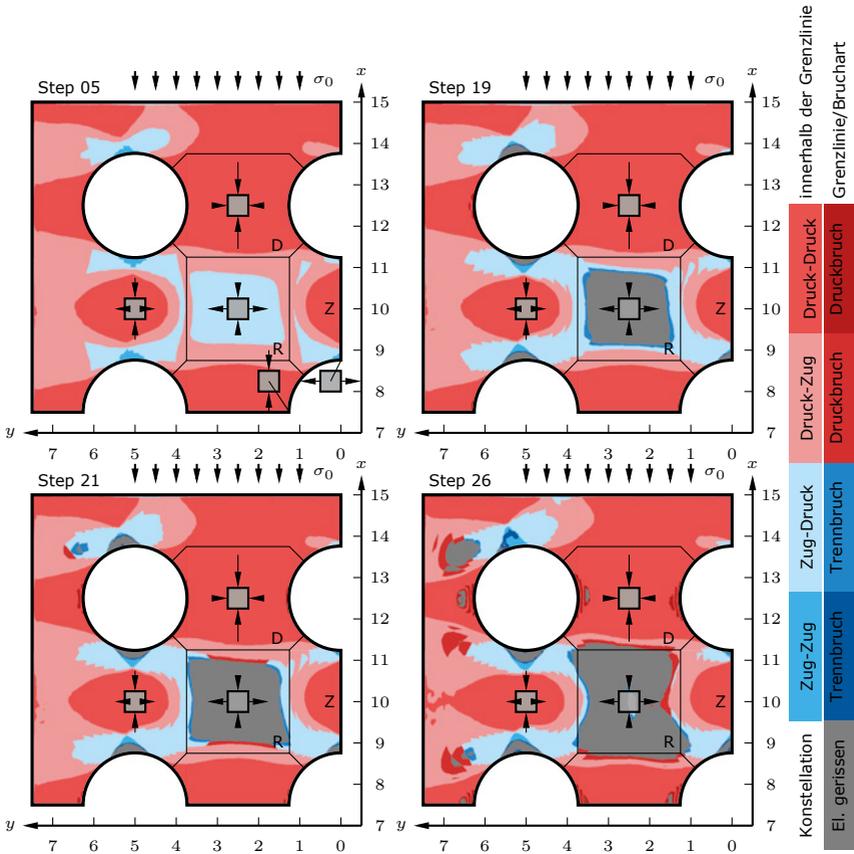


Abb. 4.10: Darstellung der Hauptspannungs-Konstellationen (siehe Legende rechts) zu den festgelegten Laststufen (Steps). Zusätzlich sind die Symbole der Hauptspannungs-Konstellationen in die Bereiche (D, R, Z) eingetragen.

<sup>12</sup> Anmerkung: Die Zugkomponenten der Hauptspannungen sind überhöht dargestellt.

Die in den Lochfeldern rein einachsigen Druckspannungszustände sind in allen Laststufen im Bereich D an den Lochrändern auf Höhe der Lochmittelpunkte zu beobachten. Die in der Mitte liegenden Elemente im Bereich D sind Druck-Druck-Konstellationen, wobei das Verhältnis dort bei  $\sigma_1 = 0,25 \cdot \sigma_2$  liegt. Die einachsigen Zugspannungszustände sind im Bereich Z wiederum an den Lochrändern zu erkennen (entlang der x-Achse). Bei einer Laststeigerung (Steps 19 bis 26) entstehen dort die ersten Risse (Grau in der Farbskala). Durch die Rissbildung verkleinert sich der Mittelbereich zwischen den Löchern. Das Verhältnis der Konstellation der Hauptspannung liegt im Step 5 bei  $\frac{-0,19 \cdot \sigma_1}{-0,30 \cdot \sigma_2}$ , und steigert sich unwesentlich im Step 26 auf  $\frac{-0,20 \cdot \sigma_1}{-0,20 \cdot \sigma_2}$ . Der Bereich R wächst mit zunehmender Laststeigerung in alle Richtungen an (Grau). Im Step 5 ist das Verhältnis der Konstellation der Hauptspannung bei  $\sigma_1 = -0,19 \cdot \sigma_2$ . Dieses steigert sich auf  $\sigma_1 = -0,15 \cdot \sigma_2$ , und es bleibt ein Zug-Druck-beanspruchter Bereich bis zum Versagen.

In den Darstellungen der einzelnen Laststufen ist zu beobachten, dass die angenommenen Hauptspannungs-Konstellationen (Druck-Druck, Druck-Zug, Zug-Druck und Zug-Zug) sich im Laufe der Laststeigerung nicht verändern. Nur in den Übergangsbereichen (Grenzkurve) sind Veränderungen ersichtlich.

Die in diesem Abschnitt ermittelten Spannungszustände werden nachfolgend mit den Spannungstrajektorien kombiniert betrachtet. Die Spannungstrajektorien bilden in der Ebenen (xy-Ebene) die Basis für die im Anschluss gezeigten und erläuterten 3D-Diagramme.

#### 4.4 Spannungstrajektorien

Einleitend werden einige unterschiedliche Formulierungen zu Trajektorien vorgestellt. Ausgangslage ist hier wieder die in Abb. 4.1 dargestellte, unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe (linear-elastisches Materialmodell) mit kreisförmigem Loch. Die konstante Druckbelastung greift im Unendlichen als Druckspannung  $\sigma_0$  an. Die ermittelten Spannungskomponenten liefern durch die Gl. 4.9 die zur Konstruktion der Trajektorien benötigten Hauptspannungswinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Anschließend sind die Trajektorien an den Lochfeldern mit nichtlineare

Materialgesetz untersucht. Entlang der abgeleiteten Hauptspannungstrajektorien (im xy-Achsenystem) sind die Spannungskomponenten  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in positiver und negativer z-Achse aufgetragen. Das daraus entstehende 3D-Diagramm ist in vier Steps dargestellt. Abschließend sind die Trajektorien Grundlage für ein entwickeltes Lastabtragungsmodell.

### Trajektorien

Zunächst einige Formulierungen zu den Trajektorien aus der Literatur:

Nach I. Szabó; *„...diejenigen Linien, die durch ihre Tangentenrichtungen die jeweiligen in den betreffenden Punkten vorhandenen Hauptspannungsrichtungen charakterisieren. Entsprechend den in einem Punkte vorhandenen zwei aufeinander senkrecht stehenden Hauptspannungen handelt es sich hierbei um zwei zueinander orthogonale Kurvenscharen...“* und weiter in [Szabó, 2001] *„...Die Kurven, die von den Hauptspannungen tangiert werden, führen den Namen Hauptspannungslinien oder Spannungstrajektorien...“*

Nach Th. Wyss; *„...Trajektorien, deren Tangenten mit der Richtung der Kraftwirkung der betreffenden Punkte übereinstimmen...“* vgl. [Wyss, 1948]

Nach F. Otto: *„Vor allem beim biege- und druck-beanspruchten Bauteil ist die Vorstellung des Lastabtragungsmodells über die Spannungstrajektorien anschaulich“*, vgl. [Otto, 1995]).

Die vorstehenden Formulierungen sind im Detail unterschiedlich. Im Kontext der nachfolgenden Untersuchungen sollen diese zusammengefasst werden und gelten wie folgt:

Hauptspannungstrajektorien<sup>13</sup> sind Linienzüge der Hauptspannungsrichtungen, die sich in einem (starren) Körper zwischen Kraftangriffspunkten<sup>14</sup> aufspannen. Sie sind daher eine Funktion von Form des Baukörpers und Ort des Kraftangriffspunkt. Zu bemerken ist, dass entlang einer Trajektorie die Hauptspannung ihre Größe und das Vorzeichen ändern kann.

---

<sup>13</sup> Anmerkung: Im Weiteren als Spannungstrajektorien bezeichnet, da ausschließlich die Trajektorien der Hauptspannungen betrachtet werden.

<sup>14</sup> Anmerkung: Der Kraftangriffspunkt beinhaltet das Vorhandensein einer Kraft und deren Größe.

Weitere Eigenschaften der Spannungstrajektorien sind:

- Sie tangieren die Hauptspannungsrichtungen ( $\rightarrow$  bilden Scharen).
- Die Scharen kreuzen sich dabei orthogonal und
- sind entlang der Linienzüge schubfrei.
- $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind gegenüber einem beliebigen gewählten Koordinatensystem um den Winkel  $\alpha$  verschränkt.

Vorausgesetzt, es sind in einem Körper (2D-Scheibe) Spannungen vorhanden und dadurch die Hauptspannungsrichtungen bekannt, so liegen unendlich viele Spannungstrajektorien vor. Bei der Konstruktion der Spannungstrajektorien spielt die Größe bzw. der Betrag der Hauptspannungen keine Rolle, ausschließlich die Hauptspannungsrichtungen sind relevant. Entlang der Spannungstrajektorien können durchgehende Zug- bzw. Drucktrajektorien vorliegen. Ebenso sind gemischte Spannungstrajektorien möglich. Diese bestehen zumindest aus einem Druck- und einem Zugteil, der Wechsel erfolgt an einem sog. Nullpunkt (dieser ist nicht zwingend ein singulärer Punkt<sup>15</sup>).

Die Spannungstrajektorien sind im 3D-Raum Flächen, sie liegen ebenso unendlich-fach vor und schneiden sich an einem Punkt orthogonal.

Die vorgestellten Abbildungen der Spannungstrajektorien einer Scheibe mit Loch und von Lochfeldern wurden mit dem Programm „trajek“ erzeugt<sup>16</sup>.

Die unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe mit kreisförmigem Loch aus Abschnitt 4.1 ist in Abb. 4.11 a) und b) dargestellt. Zu sehen sind die Spannungstrajektorien, die zum Lochrand hin orthogonal anschließen. Am den Kreuzungspunkten treffen die Spannungstrajektorien orthogonal aufeinander. Das Detailbild c) zeigt einen bereits aus der Spannungsoptik bekannten schubfreien Punkt

<sup>15</sup> Anmerkung: Es liegt keine eindeutige Hauptspannungsrichtung vor da  $\sigma_1 = \sigma_2$  - der Mohr'sche Spannungskreis degeneriert in diesem Fall zu einem Punkt.

<sup>16</sup> Anmerkung: Das Programm „trajek“ ist in der Arbeit [Wagner, 2018] entwickelt und dokumentiert, als Grundlage diente dort die Arbeit von Beyer vgl. [Beyer, 2015]

(A). Die Hauptspannungsrichtungen sind in diesem Punkt nicht definiert. Dieser Sonderfall eines Nullpunkts wird lt. Beyer in [Beyer, 2015] als ineinandergreifender Typ bezeichnet. Die im Punkt (A) ineinanderlaufenden Trajektorien grenzen einen Bereich ein, der schubfrei ist - zwei Trajektorien schneiden sich zweimal. Als weiterer Sonderfall liegt ein Nullpunkt im Punkt (B) vor, vom Typ her ein sog. nicht ineinandergreifender. Vergleichbare Abbildungen finden sich in [Frocht-1, 1941], [Frocht-2, 1941], [Beyer, 2015] und [Moldenhauer, 2016]. Nachfolgend werden die Kenntnisse dieser Sonderfälle zur Erläuterung der Rissbildung verwendet. An diesen Stellen (Punkt (A) und (B)) entstehen keine Schubrisse.

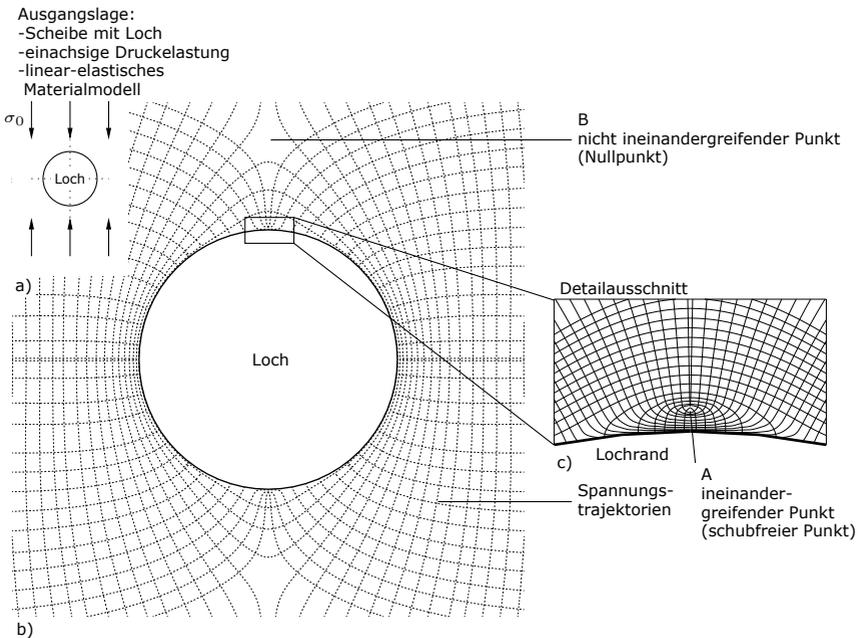


Abb. 4.11: Spannungstrajektorien an einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit Loch. a) Scheibe mit im unendlichen angreifender einachsiger Druckbelastung  $\sigma_0$ . b) Spannungstrajektorien am Loch mit den Sonderfällen eines ineinandergreifenden Punkts A (da in diesem Fall die Trajektorien ineinandergreifen – zwei Trajektorien schneiden sich zweimal) und eines nicht ineinandergreifenden Punkts B. c) Detailausschnitt des ineinandergreifenden Punkts A unmittelbar neben dem Lochrand. Die Punkt (A) und (B) sind schubfrei, daher entstehen hier keine Schubrisse.

Im Weiteren sind die Trajektorien an de Lochfeldern mit nichtlineare Materialge-

setz dargestellt. Die Abb. 4.12 beinhalten, wie bereits aus Abb. 4.10 bekannt, neben den Hauptspannungs-Konstellationen (Zug-Zug, Zug-Druck etc.), die Spannungstrajektorien des Lochfelds n9-20.

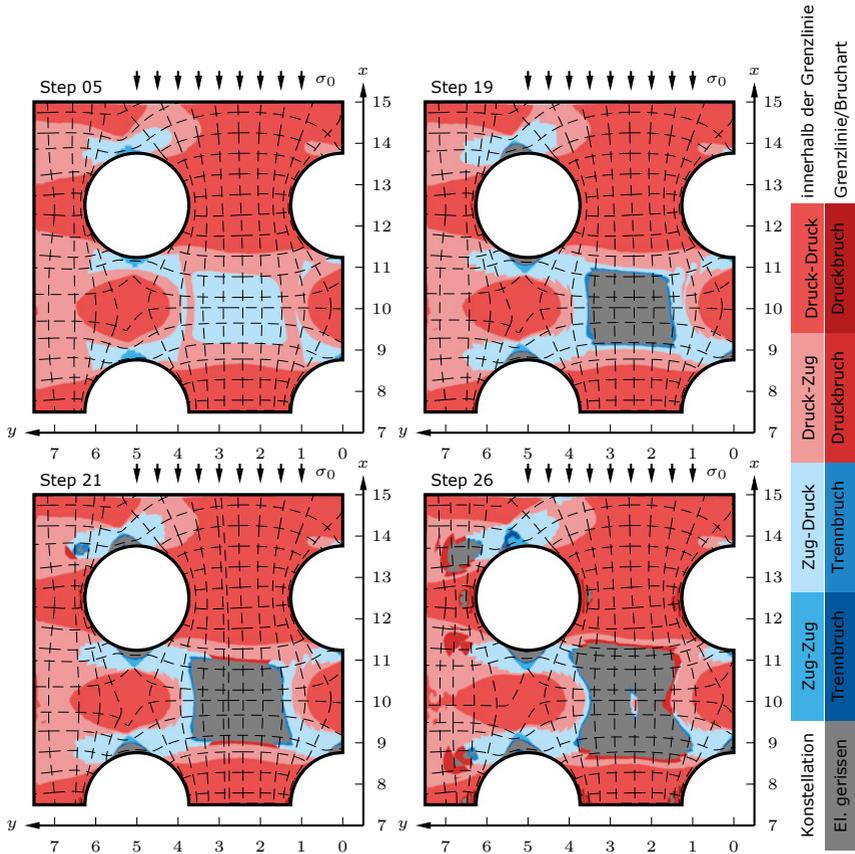


Abb. 4.12: Darstellung der Hauptspannungs-Konstellationen (siehe Legende rechts) mit Trajektorien zu den festgelegten Laststufen (Steps). Aus den darunterliegenden Farben (Konstellationen) können die Zug- und Druck-Trajektorien abgelesen werden. Wie zuvor beschrieben kann sich das Vorzeichen der zugehörigen Hauptspannung entlang der Trajektorien ändern.

Der in Abb. 4.11 vorliegende Nullpunkt (A), unmittelbar am Rand des Lochs (Detail), ist in Abb. 4.13 (n9-20) nicht mehr zu beobachten. Grund ist die gegenseitige Beeinflussung der Löcher im Bereich Z (4.7 a)), vergleichbar mit dem

Annähern der Löcher im Bereich D. Am genannten Punkt (A) sind im Kap. 5 (Bilder DIG-System) die ersten Risse zu erkennen und werden dort weiter beschrieben.

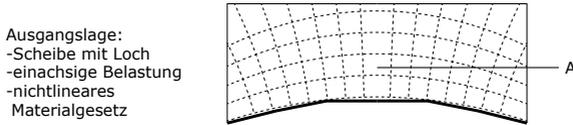


Abb. 4.13: Spannungstrajektorien-Detail eines Lochfelds (n9-20). Durch die gegenseitige Beeinflussung der Löcher verschwindet der zuvor beschriebene ineinandergreifende Punkt (A).

Abb. 4.14 beinhaltet die Spannungszustände als 3D-Diagramm, wobei die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in z-Richtung als relative Werte, bezogen auf die Einwirkung ( $\sigma_{1,2}/\sigma_0$ ), aufgetragen sind. Dies ist, wie in Kap. 4.2 beschrieben, der Spannungskonzentrationsfaktor  $\alpha_k$  (Relativwerte), wobei  $\sigma_1$  der blauen Farbe und  $\sigma_2$  der roten Farbe zugeordnet ist. Der Druckbereich ist in negativer (unten) und der Zugbereich in positiver (oben) z-Richtung aufgetragen. Die vier Teilabbildungen sind den entsprechenden Laststufen (Steps) der FE-Analyse zugeordnet.

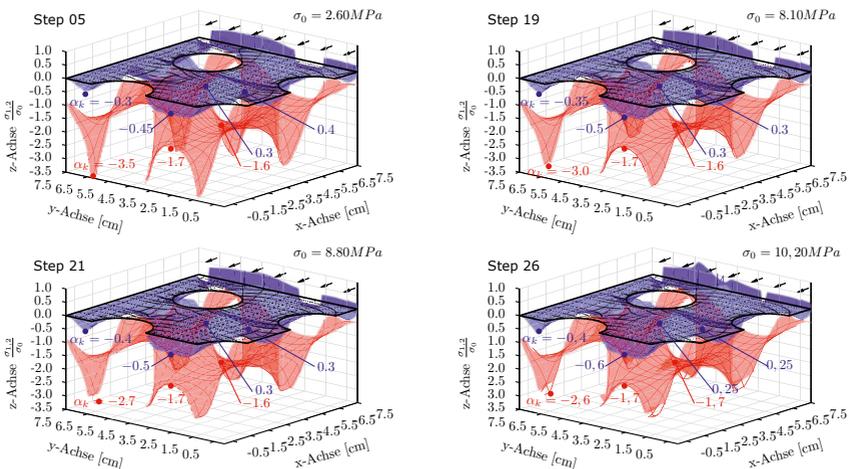


Abb. 4.14: Entlang der Spannungstrajektorien aufgetragene Spannungskomponenten. Die theoretischen Werte des Spannungskonzentrationsfaktors  $\alpha_k$  werden durch das nichtlineare Materialgesetz nicht erreicht. Es ist zu beobachten, dass die Relativwerte sich zur Höchstlast (Step 26) hin immer mehr angleichen.

Die Einwirkung  $\sigma_0$  ist entsprechend für jede Laststufe angegeben. Daher kann diese mit dem Spannungskonzentrationsfaktor multipliziert werden, um den Absolutwert der vorliegenden Spannung zu erhalten.

Nachfolgend sind charakteristische Werte der Spannungsverteilung im Lochfeld mittels des Spannungskonzentrationsfaktors im Detail beschrieben, um abschließend daraus ein Lastabtragungsmodell zu entwickeln. Die jeweiligen Bereiche (Z, R und D) sind wie in Abb. 4.7 definiert angeführt.

### **Bereich Z**

Am Lochrand liegt ein einachsiger Spannungszustand (Zug) vor, die Spannungskonzentration von  $\sigma_1$  ist dort mit  $\alpha_k = 0.4$  bereits höher als die Festigkeitsgrenze des Materials (umgerechnet auf den Absolutwert), daher sind dort erste Risse zu beobachten. Diese sind im Kap. 5 weiter beschrieben. Dies ist in allen Laststufen (Step 5, 19, 21, 26) gleichermaßen zu beobachten. Der Wert der Spannungskonzentration wandert mit steigender Belastung in den Zwischenbereich der Löcher. Der Betrag des Spannungskonzentrationsfaktors nimmt mit steigender Belastung (Step 26)  $\alpha_k = 0.25$  ab.

### **Bereich R**

In Mittelbereich von R, in den Laststufen (Steps) 5 bis 21, liegt für  $\sigma_1$  ein Spannungskonzentrationsfaktor von  $\alpha_k = 0,3$  vor, die Werte decken sich dort annähernd mit den Werten des Bereichs Z. Wie bereits in der Abb. 4.10 (hellblauer Bereich, Zug-Druck) dargestellt, bilden die Zugspannungen ein bogenförmiges Band zwischen Lochrand und dem Mittelbereich R aus. Die dazugehörige Spannung  $\sigma_2$  mit  $\alpha_k = -1,6$  deckt sich annähernd mit dem nachfolgenden Bereich D. Durch Multiplizieren mit  $\sigma_0$  erreicht der Wert der Zugfestigkeit bereits im Step 19 die Festigkeitsgrenze, daraus folgen die ersten Risse. Die Rissentwicklung ist in Abb. 4.10 (grauer Bereich) zu beobachten und wird nochmals im Kap.6 thematisiert.

### **Bereich D**

Im Bereich D liegt in allen vier Laststufen (Steps) ein zweiachsiger Druckspannungszustand vor. Der Spannungskonzentrationsfaktor liegt bei ca.  $\alpha_k = -0,5$  für  $\sigma_1$ . Bei  $\sigma_2$  ist der Spannungskonzentrationsfaktor für die vier Laststufen (Steps) bei ca.  $\alpha_k = -1,7$ . Der Bereich erreicht den Grenzwert der Druckfestigkeit in keiner Lastsituation.

In den Randbereichen des Lochfelds ist zunächst eine Spannungskonzentration von  $\alpha_k = -3,5$  (Druck,  $\sigma_2$ ) zu beobachten, was auf die Randeffekte zurückzuführen ist, siehe dazu u. a. [Neuber, 2001] und [Pilkey, 2008], wobei sich diese Effekte, durch die Umlagerung des nichtlinearen Materialgesetzes (Beton), bis zum Step 26 auf  $\alpha_k = -2,6$  verringern. Die zugehörige Spannungskonzentration  $\sigma_1$  liegt zwischen  $\alpha_k = -0,3$  und  $\alpha_k = -0,4$  (Step 5 bis 26).

Erst die Betrachtung der 3D-Diagramme lässt eine vollständige Bewertung der Spannungszustände in Lochfeldern zu. Die Diagramme sollen im Kap. 6 weiter zur Interpretation der Ergebnisse dienen.

### **Lastabtragungsmodell**

Eine weitere Möglichkeit der Nutzung von Spannungstrajektorien ist in Abb. 4.15 dargestellt. Entlang ermittelter Spannungstrajektorien und dem Grenzwert der Festigkeit  $\sigma_{Rd}$  bzw.  $f_{cm,zy}$ , wird mittels Spannungsdimensionierung eine Struktur entwickelt, die dem Strukturleichtbau entspricht (siehe Einleitung).

Für die Spannungsdimensionierung ist, bei konstant gehaltener Querschnittsbreite, die Höhe optimiert. Es handelt sich hierbei zunächst um ein linear-elastisches Materialgesetz und wiederum um eine einachsige Druckbelastung. Die Abschnitte zwischen den Kreuzungspunkten der Trajektorien wurden jeweils gesondert ermittelt und einzeln dimensioniert. Die Ermittlung der Trajektorien und die Ausgabe der zugehörigen Spannungen erfolgte wieder mit dem Programm „trajek“.

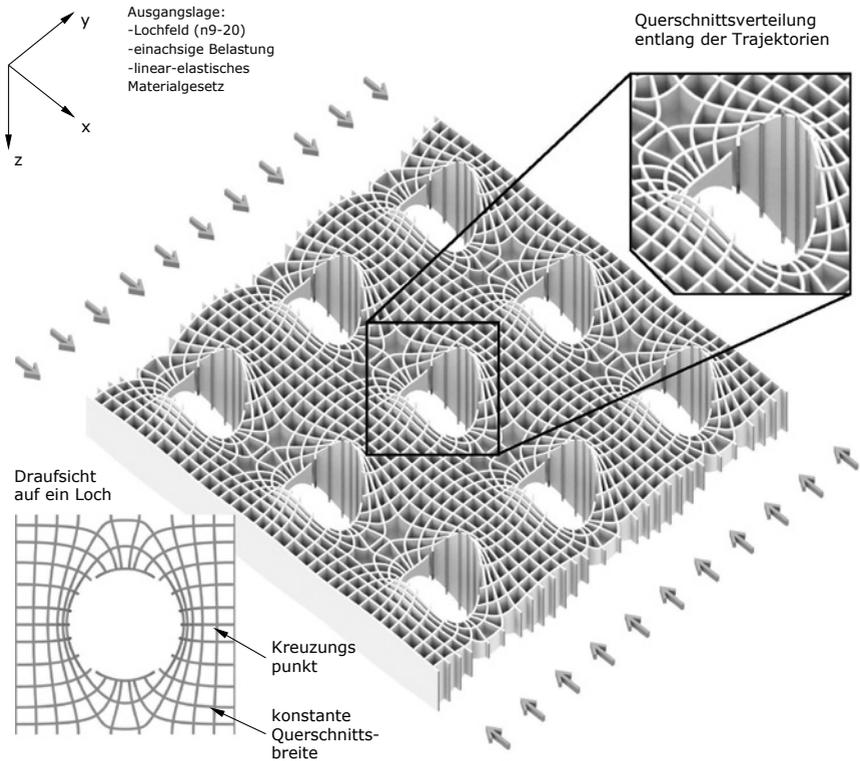


Abb. 4.15: Studie zum Lastabtragungsmodell. Spannungsdimensioniertes Lochfeld (n9-20) entlang der Spannungstrajektorien. Die Abschnitte zwischen den Kreuzungspunkten der Trajektorien sind jeweils gesondert betrachtet und einzeln dimensioniert (linear-elastisches Material).

Da es sich um ein auf Druck beanspruchtes Bauteil handelt, sind die entsprechenden Abschnitte auf ein mögliches Stabilitätsversagen zu prüfen. Durch die Begrenzung der Schlankheit von ca.  $\lambda \leq 10$  ist kein Stabilitätsversagen zu erwarten.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts beschrieben entsteht im Lochfeld, durch die einachsige Druckbelastung und die Löcher, ein gemischter Spannungszustand. Die in der Abb. 4.16 aufgetragenen Zug- und Druck- Kräfte entlang der Trajektorien sind von den jeweilig dominierenden Spannungen aus den Hauptspannungskonstellationen abgeleitet. Ein einzelner Spannungszustand am Element besteht aus zwei Hauptspannungen. Die dominierende der beiden Spannungen bedeutet, dass der größere Querschnitt, in Bezug auf die Dimensionierung, hier die eingezeichnete Zug- bzw. Druckkraft vorgibt. In Lastrichtung stellen sich Druckstreben zwischen den Löchern ein. Die weniger auf Druck belasteten Bereiche unter- und oberhalb der Löcher sind durch „Zugbänder“ gekennzeichnet.

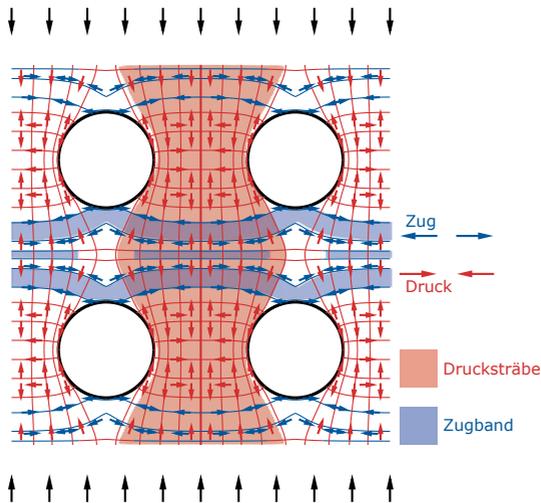


Abb. 4.16: Studie zum Lastabtragungsmodell, mit entlang der Trajektorien aufgetragenen Zug- und Druck-Kräften. Durch die einachsige Druckbelastung und die vorhandenen Löcher liegen gemischte Spannungszustände vor. In Bezug auf die dominierende Hauptspannung sind die Zug- und Druckkräfte abgeleitet und eingezeichnet.

Die nachfolgend dargestellten Lastabtragungsmodelle eines Lochfelds sind ebenso einachsig druckbelastet. Die Spannungszustände wurden anhand des nicht-linearen Materialgesetzes ermittelt. Sie sind wieder nach den oben (Abb. 4.7) vorgestellten Laststufen (Steps) belastet. Die Querschnitte entlang der abgeleiteten Trajektorien sind, wie bereits zuvor beschrieben, nach den dominierenden Spannungen dimensioniert. In Bezug auf die Hauptspannungskonstellationen sind die zweiachsigen Festigkeit berücksichtigt (siehe Abb. 4.8, Grenzkurve der

Beanspruchung nach Kupfer). Der Grenzwert der Festigkeit ist nach den entsprechenden Bereichen gewählt: Druck-Druck  $\sigma_{Rd}^{DD} = 1.20 \cdot f_{cm,zy}$ , Druck-Zug  $\sigma_{Rd}^{DZ} = 1.00 \cdot f_{cm,zy}$ , Zug-Druck  $\sigma_{Rd}^{ZD} = 0.12 \cdot f_{cm,zy}$ , Zug-Zug  $\sigma_{Rd}^{ZZ} = 0.08 \cdot f_{cm,zy}$ . Daraus ergeben sich im Step 05, wie es das Detail zeigt, im Bereich „Z“ durch die dort vorhandene Zugspannungskonzentration Querschnittserhöhungen. Die Zugspannungskonzentration baut sich durch die Rissbildung, hin zum Step 26, weitgehend ab. Die etwas höheren Querschnitte im Bereich „R“, im Gegensatz zu „D“, ergeben sich durch die dort dominierenden Zugspannungen der Zug-Druck-Konstellationen (Step 19 und 21). Im Step 26 sind in der Druckstrebe (zwischen den Löchern in Lastrichtung) die „absackenden“ Querschnitte zu beobachten, hier entstehen die zum endgültigen Versagen führenden Risse (Gefügeauflockerung).

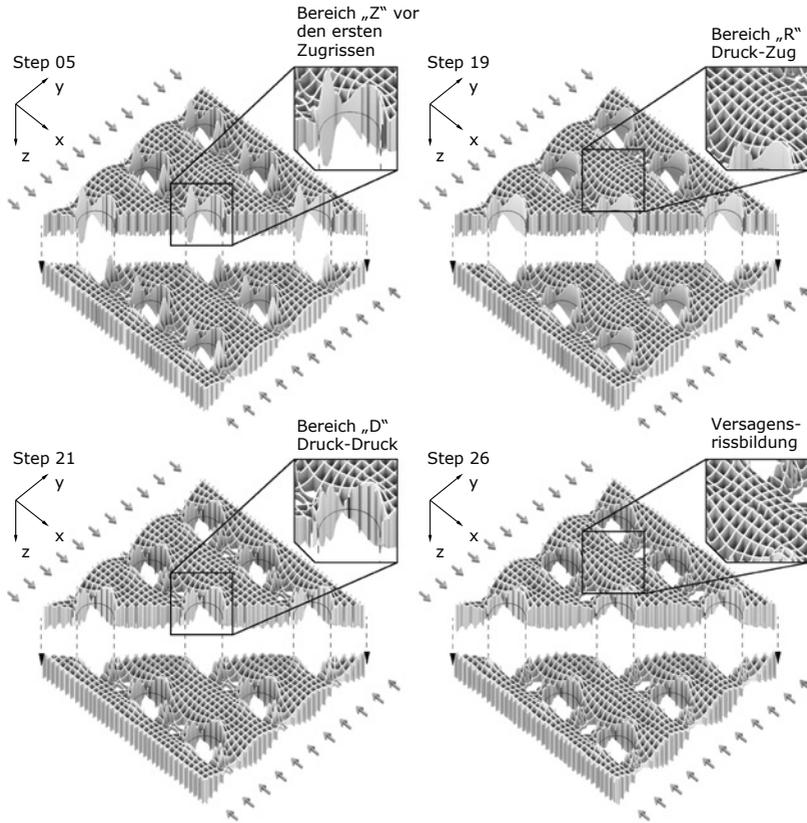


Abb. 4.17: Lastabtragung am einachsrig druckbelasteten Lochfeld mit nichtlinearen Materialgesetz an vier unterschiedlichen Laststufen (Steps). Der Step 05 zeigt im Detail die Zugspannungskonzentration (Bereich „Z“) vor den ersten Rissen. Die Zugspannungskonzentration baut sich durch die Rissbildung, hin zum Step 26, weitgehend ab - es entstehen dort keine weiteren erkennbaren Risse. Die etwas höheren Querschnitte im Bereich „R“, im Gegensatz zu „D“, ergeben sich durch die dort dominierenden Zugspannungen der Zug-Druck- Konstellationen. Im Step 26 sind die „absackenden“ Querschnitte zu sehen, hier entstehen die zum endgültigen Versagen führenden Risse.

## 4.5 Stabilität

Da die Lochfelder druckbeanspruchte, unbewehrte und schlanke Bauteile darstellen, sind sie gegen ein mögliches Stabilitätsversagen zu prüfen. Betrachtet werden nachfolgend ein globales und ein lokales Stabilitätsversagen, wobei das globale Versagen das gesamte Lochfeld (Makro-Ebene) als solches betrifft, das lokale Versagen den Lochzwischenraum (Meso-Ebene).

### **Globale Stabilität**

Die äußeren Abmessungen (Form) der Lochfelder sind mit einer Kantenlänge von 15 x 15 cm und 4 cm Dicke festgelegt. Das globale Versagen aus der Ebene kann bei den Scheiben und Lochfeldern mit einer Schlankheit von  $\lambda = \frac{15}{4} \cdot \sqrt{12}$  grundsätzlich nicht ausgeschlossen werden<sup>17</sup>. Nach [Kupfer, 1973] für Normalbeton und [Linse, 1988] für Leichtbeton liegt für Vergleichsscheiben eine entsprechende Schlankheit von  $\lambda = 4 \cdot \sqrt{12}$  vor. Im Rahmen dieser Arbeit ist weder bei den Versuchen noch bei der FE-Analyse ein globales Stabilitätsversagen festgestellt worden.

---

<sup>17</sup> Anmerkung: Nach Eurocode 2 ist für unbewehrte Betonbauteile (Makro-Ebene) mit einer Schlankheit ab  $\lambda \geq 2.5 \cdot \sqrt{12}$  bis  $\lambda = 25 \cdot \sqrt{12}$  das vereinfachte Bemessungsverfahren zulässig.

### Lokale Stabilität

Abb. 4.18 a) zeigt den Innenbereich des Lochfelds (grauer Bereich) und daraus wiederum einen Ausschnitt b) zwischen zwei Löchern (in Abb. 4.7 als Bereich D bezeichnet), der für ein lokales Stabilitätsversagen gefährdet ist.

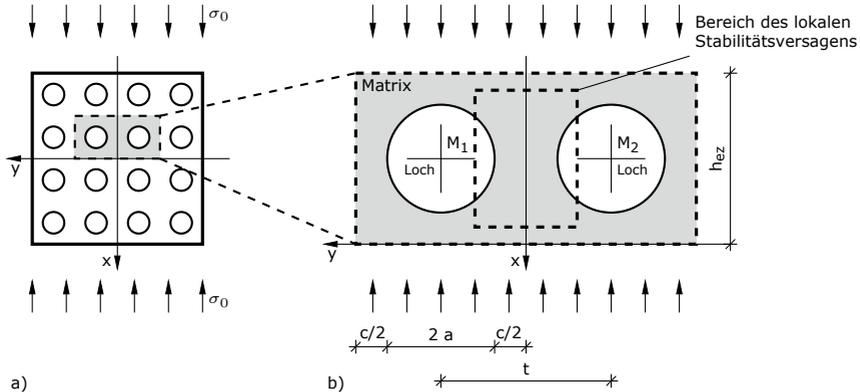


Abb. 4.18: Lochfeld mit Bereich eines möglichen lokalen Stabilitätsversagens a) Lochfeld mit anliegender Belastung in x-Richtung und dem markierten Untersuchungsbereich. b) Lochbereich im Detail mit Bemaßung und gekennzeichnetem Lochzwischenraum (Bereich D), in dem ein lokales Stabilitätsversagen möglich ist.

Die Versagensarten von Stäben oder Scheiben (aus der Ebene) unter zentrischem Druck sind Grundsätzlich als:

- Spannungsproblem (Problem der Elastizitätstheorie II. Ordnung) und
- Stabilitätsproblem (Verzweigungsproblem)

bekannt.

Beim Spannungsproblem geht man von einem verformten Stab aus. Die Schnittgrößen sind am verformten System iterativ bis zur Gleichgewichtslage zu berechnen.

Das Stabilitätsproblem hat die theoretische Grundlage nach Euler und seiner ent-

wickelten Formel:

$$N_{krit} = \frac{\pi^2}{l_0^2} \cdot E_{Euler} \cdot I_{Euler} \quad (4.12)$$

mit:

$N_{krit}$  = Euler-Last, theo. Knicklast [ $N$ ]

$E_{Euler}$  = E-Modul [ $MPa$ ]

$I_{Euler}$  = Flächenträgheitsmoment [ $cm^4$ ]

$l_0$  = Knicklänge [ $cm$ ]

Hier soll eine Abschätzung des Stabilitätsproblems der Lochzwischenräume der Lochfelder entwickelt werden. Dazu dient die Knickgleichung nach Euler als Grundlage. Nachfolgend sind die einzelnen Parameter der Gleichung in Bezug auf den Lochzwischenraum beschrieben. Es wird ein Ersatzstabmodell erarbeitet, das mit gleicher Euler-Last beansprucht werden kann. Das Ersatzstabmodell wird abschließend mit Modellen der Literatur verglichen.

Sowohl das Modell des Lochzwischenraums in Abb. 4.17 a) als auch das Ersatzstabmodell b) sollen die gleiche Systemlänge  $l_0$  haben. Die Randbedingungen der beiden Modelle sind als Euler-Fall 4 gewählt. Für andere Euler Fälle ist der Bezug mittels  $\beta$  (Knicklängenbeiwert) ebenso möglich.

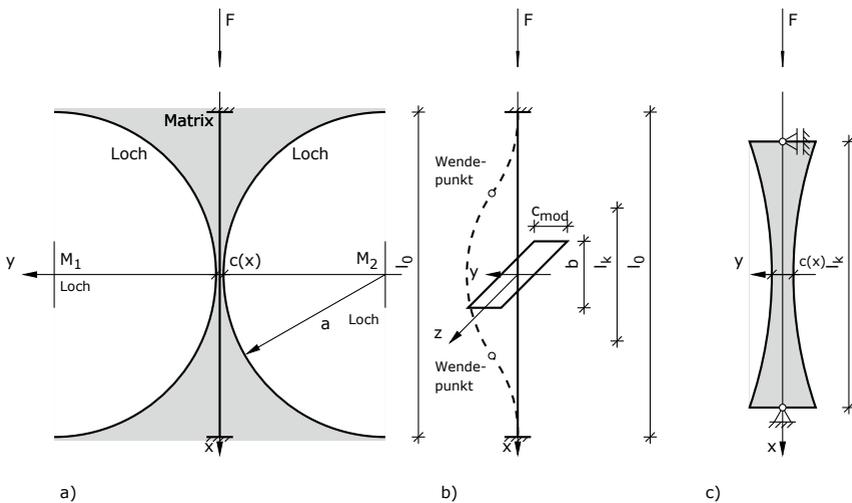


Abb. 4.19: Überführung des Stabilitätsproblems eines Lochzwischenraumes in ein Ersatzstabmodell; a) Lochzwischenraum als Detailausschnitt eines Lochfelds mit einer Porosität von 75% mit den wesentlichen Abmessungen. b) Aus a) herausgelöster Knickstab als Ersatzstab mit über die Stablänge  $l_0$  veränderlichem Rechteckquerschnitt. c) Teilausschnitt des in b) dargestellten Knickstabs (Euler-Fall 2) mit der charakteristischen Knicklänge  $l_k$  des Systems.

Im Falle des nichtlinearen Materialgesetzes (Beton) ist es schwierig, den E-Modul ( $E_{\text{Euler}}$ ) für den Ansatz nach Euler (linear-elastisches Materialgesetz) anzunehmen. Bei den später durchgeführten Versuchen ist durch die Wahl eines Größtkorns  $d_{\text{gk}} = 4 \text{ mm}$ , und einer abgestimmten Sieblinie, eine homogenisierte Matrix entstanden. Der von der Versuchskurve ermittelte Tangenten-E-Modul zumindest bis 30% der Festigkeit, ein annähernd linear-elastisches Materialverhalten. Im weiteren Verlauf der Versuchskurven war ein geringer Stich in Bezug auf den Sekanten-Modul zur Festigkeit zu beobachten, siehe dazu Abb. 4.7. Für die weiteren Betrachtungen wird hier von einem linearen Verlauf und somit von einem konstanten E-Modul ausgegangen. Für das Ersatzstabmodell ist somit die Systemlänge  $l_0$  und der E-Modul im vorliegenden Fall als Konstante anzusehen.

In Abb. 4.19 a) ist ersichtlich, dass zwar die Dicke  $b$  der Lochfelder konstant bleibt, der Abstand  $c(x)$  zwischen den Löchern ändert sich hingegen entlang der Stabachse ( $x$ -Achse) kontinuierlich im Verlauf der Lochränder. Damit einher geht

ein entlang der Stabachse veränderliches Flächenträgheitsmoment  $I(x)$ . Der Teil b) der Abb. 4.19 zeigt am Ersatzmodell den modifizierten Rechteck-Querschnitt mit  $b \cdot c_{mod}$ .

In der Literatur sind einige Ansätze zur Modifizierung des Flächenträgheitsmoments nach vorgegebenen Verläufen, wie Abstufungen, Parabelform usw., zu finden (siehe u. a. [Tölke, 1929], [Dimitrov, 1953] und [Kollbrunner, 1955]). Für die vorliegende Kreisform liegen keine Werte vor. Daher ist die Modifizierung des Flächenträgheitsmoments durch die Umrechnung aus der 1. Eigenform der Knickfigur und der daraus folgenden Knicklänge  $l_k^{EF}$  erfolgt. Eine durchgeführte FE-Analyse (2D-Scheiben-Model) lieferte die Wendepunkte der Knickfigur (1. Eigenform), aus welcher die Knicklänge  $l_k^{EF}$  abgelesen werden kann. Das Lochfeld hat dabei eine Porosität von 75 %, mit linear elastischem Material. Das modifizierte Flächenträgheitsmoment errechnet sich aus  $\frac{1}{12} b c_{mod}^3$ . Bezogen auf die engste Stelle  $c$  des Lochzwischenraums gilt somit:  $c_{mod} = c a_{mod}$

Somit wird zuerst aus der System- und Knicklänge  $a_{mod}$  und anschließend  $c_{mod}$  wie folgt berechnet:

$$a_{mod} = \sqrt[3]{\left(\frac{l_0}{l_k^{EF}}\right)^2} \quad (4.13)$$

$$c_{mod} = c a_{mod} \quad (4.14)$$

mit:

$l_k^{EF}$  = Knicklänge ermittelt aus 1. Eigenform [cm]

$l_0$  = Knicklänge = 2 a [cm]

$c$  = engste Stelle zwischen den Löchern [cm]

$c_{mod}$  = Modifiziertes c [cm]

$a_{mod}$  = Modifizierungsfaktor c [cm]

Abb. 4.19 c) stellt zusätzlich die Problematik der Wahl eines Euler-Falls dar. Im Lochzwischenraum liegt die Schwierigkeit in der Wahl eines Modells mit entsprechenden Randbedingungen. Hier ist der Euler-Fall 2 als Teil des Euler-Falls 4 dargestellt. Im vorliegenden Fall ist die Interpretation einer Teileinspannung durch die Verbreiterung zu den oberen und unteren Enden durchaus zulässig.

Die nachfolgende Abb. 4.20 zeigt die angeführte Problematik mit Zahlenwerten.

Abb. 4.20 stellt die aus der FE-Analyse ermittelten Wendepunkte, sowie die damit zusammenhängenden Knicklängen  $l_k^{EF}$ , vor. Dabei ist das Modell aus b) ein Teil aus a). Beide in Abb. 4.20 a) und b) zu sehenden Modelle sind an den Enden eingespannt. Die Knicklänge  $l_k$  in a) liegt bei  $0.45 l_0$  und in b) bei  $l_k^n = 0.25 l_k$ . Es ergeben sich somit für  $a_{mod}^{a)} = 1.36$  und  $a_{mod}^{b)} = 1.48$  und die entsprechende Schlankheit  $\lambda = 31.0 \sqrt{12}$  bzw.  $\lambda = 9.5 \sqrt{12}$ .

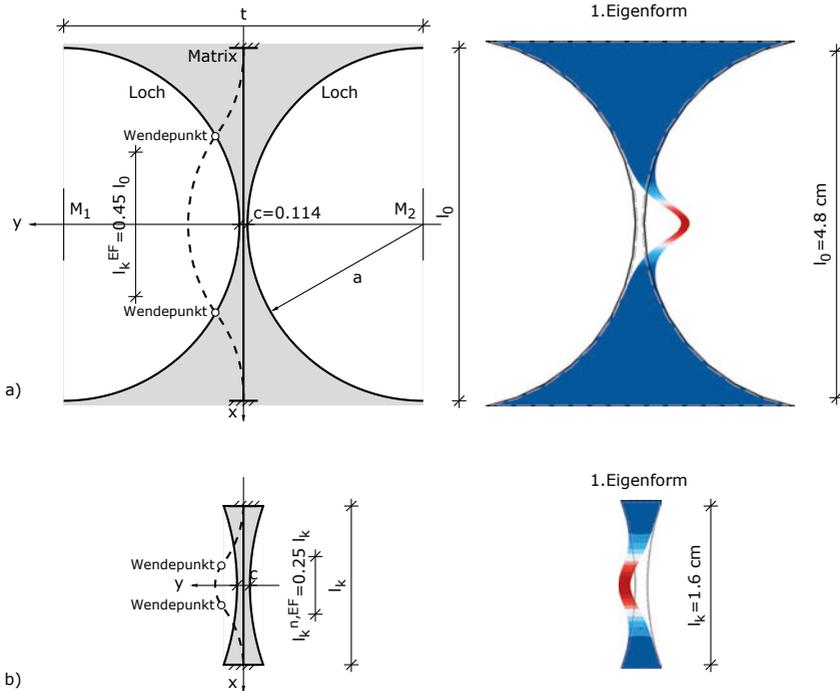


Abb. 4.20: Gegenüberstellung der Knickfigur des Modells des Lochzwischenraums a) und des Abschnittsmodell b) eines Lochfelds mit einer Porosität 75 %. Zur Ermittlung der charakteristischen Knicklänge  $l_k^{EF}$  der Systeme ist die 1. Eigenform jeweils rechts dargestellt.

Die sich ergebende Schlankheit  $\lambda = 31.0 \sqrt{12}$  bzw.  $\lambda = 9.5 \sqrt{12}$  zeigt, dass bei der Kreisform der Lochränder immer kleiner werdende Ausschnitte ebenfalls eine kleinere Schlankheit mit sich bringen.

Ein anschließender Sonderfall, der in Abb. 4.21 dargestellt ist, ist ein Zwischenlochbereich, der am oberen und unteren Enden unterschiedliche Breiten hat. Hier kann die Schlankheit durch die ungleiche Lage der Wendepunkte und somit unterschiedliche Knicklängen sowie die damit einhergehenden modifizierten Flächenträgheitsmomente nicht mehr so einfach abgeschätzt werden. Zusätzlich ist der Bezug auf  $c$  nur für den mittleren Teil möglich, somit ist  $a_{mod}^{a)} = 2.92$  und  $\lambda = 7.8 \sqrt{12}$ .

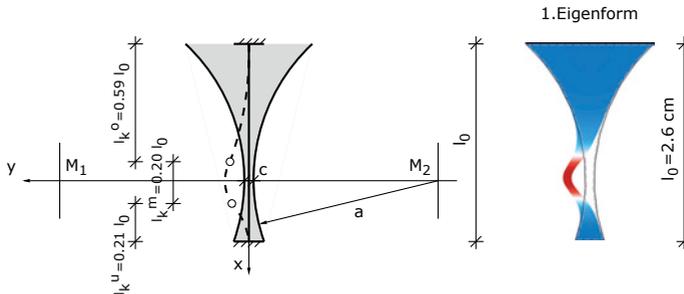
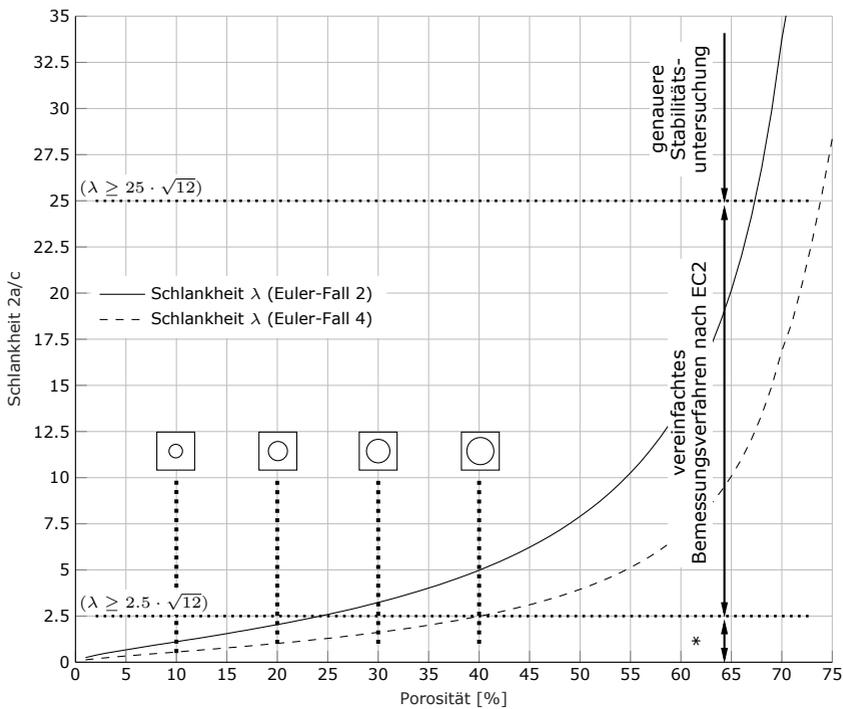


Abb. 4.21: Knickfigur eines Sonderfalls in dem der Zwischenlochbereich am oberen und unteren Enden unterschiedliche Breiten hat. Hier ist zwar die die 1. Eigenform und die damit verbunden charakteristischen Knicklänge  $l_k$  des Systems ermittelbar, ein Bezug zur Schlankheit ist hingegen schwierig.

Mittels des modifizierten  $c_{mod}$  und der Knicklänge  $l_k$  kann die bezogene Schlankheit abgeschätzt werden. Es ist somit eine Einteilung zu den nachfolgenden Nachweisarten möglich.

Die in Abb. 4.22 im Diagramm dargestellten Kurven zeigen das Verhältnis zwischen Schlankheit und Porosität. Sie geben den Bereich der Schlankheit für die in Abb. 4.19 dargestellten Modelle (Euler-Fall 2  $\beta = 1,0$  bzw. Euler-Fall 4  $\beta = 0,5$ ) an. Dies zeigt, dass ab einer Porosität von  $>40\%$  und dem Euler-Fall 4 eine genauere Betrachtung der Stabilität erforderlich ist.

Die Bereiche der späteren Versuchskörper, mit einer Porosität von 10, 20, 30 und 40%, sind mit den zugehörigen Skizzen gekennzeichnet. Angelehnt an den EC2 sind die unterschiedlichen Bereiche der empfohlenen Stabilitätsuntersuchung an unbewehrten Betonbauteilen angegeben (Rechts).



\* Keine Stabilitätsuntersuchung

Abb. 4.22: Diagramm zur Schlankheit von Stäben mit modifiziertem Flächenträgheitsmoment in Abhängigkeit der Porosität für den Euler-Fall 2 und 4. Die in den Kap. 5, 6 und 7 geprüften Lochfelder mit einer Porosität von 10, 20, 30, 40% sind exemplarisch hervorgehoben. Die unterschiedlichen Bereiche der Stabilitätsuntersuchungen sind in Abhängigkeit von der Schlankheit durch Trennlinien abgegrenzt.

Die oben angeführten Beispiele sind mit einer Porosität von 75 % sehr hoch angenommen. Das Diagramm in Abb. 4.22 zeigt, dass erst ab einer Porosität von 40 % detaillierte Stabilitätsuntersuchungen erforderlich sind. Die vorgestellten Beispiele mit einer Porosität von 75 % fallen in einen nicht relevanten Bereich dieser Arbeit und werden daher nicht weiter behandelt. Die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungsergebnisse von Lochfeldern mit fluchtenden Anordnungen, kreisrunden Löchern und einer Porosität von 10, 20, 30 und 40 %, zeigen kein lokales Stabilitätsversagen.



---

## 5 Versuche an Lochfeldern

Das Kapitel beinhaltet die Ergebnisse des Versuchsprogramms der Normprüfkörper für Materialkennwerte, sowie die Druckversuche an den Lochfeldern. Zur Feststellung mechanischer Materialkennwerte wurden im Jahr 2018 Versuche im Baulabor der Fachhochschule Kärnten durchgeführt. Die Versuchsreihen teilen sich in drei Chargen (Charge 1 Mai; Charge 2 Juli; Charge 3 August) Parallel zu den Versuchen im Labor ist die Validierung der Chargen mittels FE-Analyse erfolgt. Im Anschluss an das Versuchsprogramm sind alle Ergebnisse in [Huber-1, 2019] zusammengefasst, dokumentiert und dienen als Grundlage dieser Arbeit.

### 5.1 Mechanische Materialkennwerte

Das Versuchsprogramm beinhaltete die Prüfung von Kleinkörpern (Würfel, Zylinder und Prismen) als Normprüfkörper, sowie (ungelochten) Scheiben und Lochfeldern. Die Prüfung der mechanischen Materialkennwerte wie Druck-/ Zugfestigkeit und E-Modul aller Prüfkörper ist mittels einer einachsigen Vier-Säulen-Universalprüfmaschine erfolgt.

#### **Prüfeinflüsse**

Im Gegensatz zu homogenen Materialien beeinflussen viele Faktoren die Betonprüfung und die sich daraus ergebenden Festigkeitskennwerte. Die Vielfalt der Prüfeinflüsse auf Grund der inhomogenen Struktur von Beton ist sehr hoch. Abb. 5.1 zeigt eine Übersicht dieser Prüfeinflüsse.

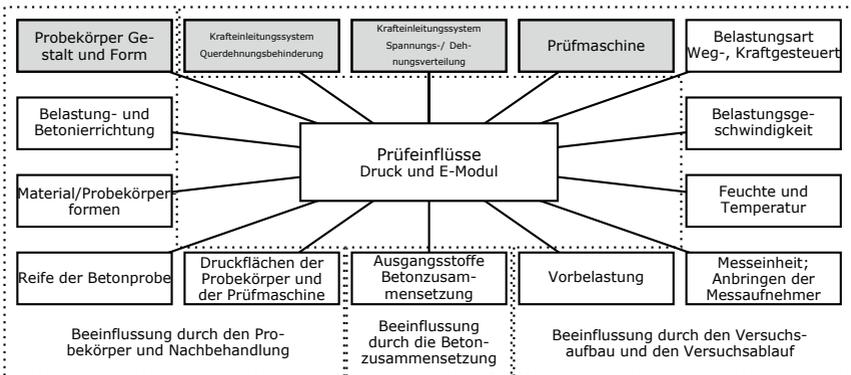


Abb. 5.1: Übersicht der maßgebenden Prüfeinflüsse der Festigkeitsprüfungen (Druck und E-Modul) von Betonprobekörpern

Die größten zu erwartenden Beeinflussungen bei der Materialprüfung sind in den grau hinterlegten Feldern aufgeführt. Da alle Lochfelder die gleiche Form und Gestalt haben und die Prüfungen an einer Prüfmaschine unter Verwendung der gleichen Lasteinleitung durchgeführt werden, können die Haupteinflussfaktoren weitgehend ausgeschlossen werden. Zudem sind alle Probekörper einer Charge gleichwertig nachbehandelt und entweder am 28. oder 29. Tag geprüft worden. Alle Probekörper einer Charge sind auch einer Mischung entnommen. Die Gleichwertigkeit der unten dargestellten Ergebnisse bestätigen die beschriebenen Maßnahmen. Abb. 5.2 zeigt quantitative Größen der Beeinflussung. Die angegebenen Prozentwerte sind als Richtwerte zu sehen und aus den angeführten Literaturen entnommen. Sie werden im Einzelnen nicht weiter betrachtet. Sie dienen einer späteren Beurteilung als Referenzwerte.

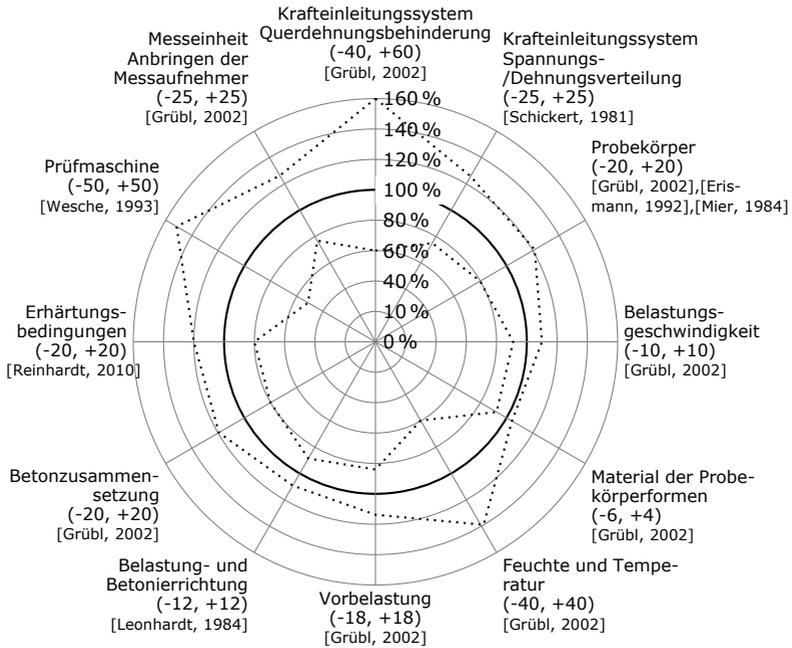


Abb. 5.2: Quantitative Darstellung der maßgebenden Prüfeinflüsse der Festigkeitsprüfungen für Druckfestigkeit und E-Modul von Betonprobekörpern

Da die Stauchung von Probekörpern aus Beton nach van Mier in [Mier, 1986] unabhängig von der Form und Gestalt ist, kann die angeführte Übersicht sowohl für die Druckfestigkeit als auch für den E-Modul verwendet werden. Alle nachfolgenden Versuchswerte liegen in den angegebenen Grenzen.

## 5.2 Versuchsaufbau

Den schematischen Versuchsaufbau zeigt Abb. 5.3. Die Ermittlung der Höchstlast erfolgt anhand der in der Vier-Säulen-Universalprüfmaschine integrierten Kraftmessdose. Die Stauchungsmessungen der Scheibe und der Lochfelder erfolgten mittels Laser-Messung. Alle Messwerte wurden mit zwei parallellaufenden Software-Programmen aufgenommen. Die Messrate lag bei 10 Hz. Die Aufnahmen und die Darstellung der Rissbilder erfolgte mittels DIC-System (Digital Image Correlation).<sup>18</sup>

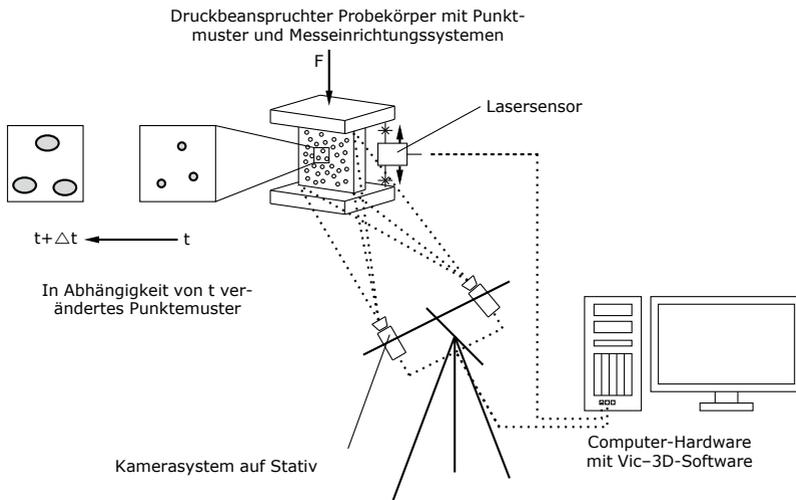


Abb. 5.3: Schematischer Versuchsaufbau der Druckversuche (Lochfeld) mit der verwendeten Messeinrichtung (DIC-System).

Das DIC-System liefert bei hohen Kontrastdifferenzen bessere Ergebnisse. Daher sind die Probekörper, wie in Abb. 5.4 zu sehen, mit einem unregelmäßigen Punktmuster versehen.

<sup>18</sup> Anmerkung: Mittels einer Bildserie bezieht sich das DIC-System, in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ , auf die Graustufe, die Größe und den Abstand der einzelnen Punkte, zueinander und errechnet daraus die Verzerrungen. Aus den Verzerrungen ergeben sich die Rissbilder im Mikro-Bereich.

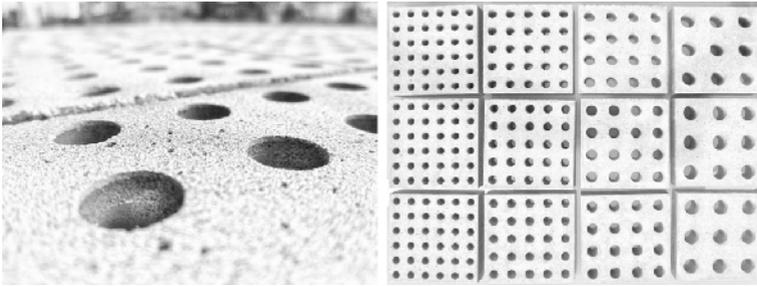


Abb. 5.4: Probekörper (Lochfelder) mit unregelmäßigem Punktmuster im Detail (links), fertig hergestellte Lochfelder vor Versuchsbeginn (rechts).

Die Versuchsdauer bei den Normprüfkörpern (Zug- bzw. Druckversuche) betrug ca. 20 Min. Daraus folgt eine Belastungsgeschwindigkeit von 0,1 MPa/sec (Zug) und 1,0 MPa/sec (Druck). Die Versuche an den Normprüfkörpern wurden kraftgesteuert durchgeführt. Die Versuchsdauer der Scheiben und der Lochfelder lag bei ca. bei 15 Min. Daraus ergibt sich eine Belastungsgeschwindigkeit von 0,002 mm/s, diesmal weggesteuert.<sup>19</sup>

### 5.3 Herstellung der Probekörper

Tab. 5.1 zeigt die Betonzusammensetzung für die geprüften Scheiben und Lochfelder. Dabei wurde das Größtkorn für alle Probekörper mit 4 mm gewählt (um eine allg. Homogenisierung zu erreichen). Bei den Lochfeldern mit 40 % Lochanteil (Porenanteil) ist an dem engsten Zwischenraum zwischen zwei Löchern theoretisch weniger als  $2 \times d_{gk}$  ( $d_{gk}$  = Größtkorndurchmesser) Platz. Bažant schlägt für die Lochzwischenbereiche zumindest  $3 \times d_{gk}$  vor, [Bažant, 1983]. Lochfelder mit 10 – 30 % Porosität (Abstände der Lochzwischenbereiche liegen im Bereich von  $\geq 3 - 4 \times d_{gk}$ ) beeinflussen die Homogenität des Materials nicht.

Alle Probekörper wurden im Zwangsmischer gemischt. Dabei ist die benötigte Frischbetonmenge je Charge jeweils in einer Mischung erfolgt.

<sup>19</sup> Anmerkung: Um das Nachbruchverhalten zu dokumentieren, ist die weggesteuerte Belastungsart gewählt worden.

Tab. 5.1: Zusammensetzung des Betons der zur Herstellung aller Probekörper (Normprüfkörper, Scheiben und Lochfelder) verwendet wurde.

Betonsorte: (C16/20)	Stoffbedarf je 1 m <sup>3</sup>
Zement	CEM II 42,5 N
Gestein	Kies (GK 4mm)
Mischungsverhältnis:	
Zement/Bindemittel	335,0 kg
Gesteinskörnung	1718,9 kg
Wasser	250,0 kg
W/B-Wert	0,75

Zur Herstellung der Scheiben und Lochfelder wurden auf der Basis von Standard-Probewürfelformen aus Stahl (15x15x15cm) Schalungskörper entwickelt. Der Schalungskörper der Scheiben und Lochfelder lag dabei auf einem in die Standard-Probewürfelformen eingestellten Unterbau (Abb. 5.5). Die Höhe des Unterbaus ist so gewählt, dass die Lochfelder eine Dicke von 4 cm haben. Der Schalungskörper setzt sich aus einer Matrice mit Schalungsröhrchen zusammen. Die Matrice gibt das Layout (Lage und Anzahl der Löcher) vor. Die Schalungsröhrchen sind rund und geben mit ihren unterschiedlichen Durchmessern die Porosität an. Unterbau und Schalungskörper sind aus Hartkunststoff bzw. Plexiglas.

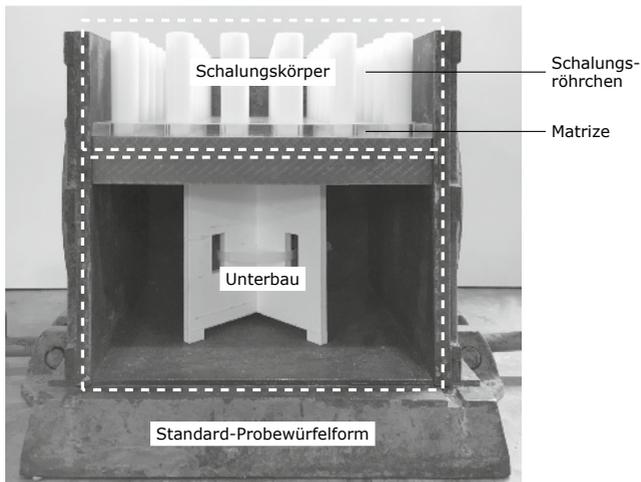


Abb. 5.5: Schalung für das Lochfeld, eingebaut in eine Standard-Probewürfelform. Die Höhe des Unterbaus ist so gewählt, dass sich die geplante Dicke von 4cm der Scheiben und Lochfelder ergibt.

Der Frischbeton wurde mittels Handschaufel in die vorbereiteten Schalungskörper eingebaut. Die Verdichtung erfolgte kurz mittels eines Rütteltischs. Um planparallele Ansichtsflächen und eine Dicke von  $d = 4\text{ cm}$  zu erhalten, wurden die Probekörper mit dem Reibbrett abgezogen (Abb. 5.5). Die Nachbehandlung erfolgte durch Abdecken mit Kunststoffolie.

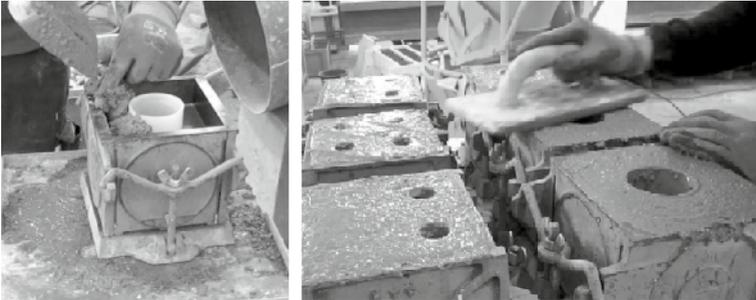


Abb. 5.6: Einbau des Frischbetons direkt am Rütteltisch (links) und Abziehen der Probekörper mittels Reibbrett (rechts)

Die vor dem Betonieren eingeölte Schalungskörper (Schalungsröhrchen) wurden mit einer Drehbewegung nach ca. 6-8 Stunden aus dem bereits „leicht“ angesteiften Frischbeton gezogen. Bis zum Zeitpunkt des Ausschalen (nach ca. 24h) waren die Probekörper unter der Kunststoffolie gelagert. Nach dem Ausschalen erfolgte die Lagerung bis zum 7. Tag in Wasser ( $20^\circ$ ) und bis zum 28. Tag an der Luft ( $20^\circ$ ). Während der Lagerung wurden die Lochfelder vollflächig mit weißer Mineralfarbe beschichtet. Zur Kontrastvergrößerung wurde die weiße Farboberfläche mit einem unregelmäßigen schwarzen Punktmuster versehen. Um die Punkte möglichst „klein“ zu halten, erfolgte das Auftragen mittels Airbrush-Set (Abb. 5.4).

## 5.4 Materialkennwerte

Die Druck- und Zugfestigkeiten der einzelnen Chargen wurden anhand von Normprüfkörpern ermittelt. Die Ergebnisse sind als Mittelwerte (min. drei Probekörper) in Tab. 5.2 zusammengefasst. Die Abmessungen der Würfel (Druck) be-

trugen dabei 15 x 15 x 15 cm. Die Prismengröße für den Biegezugversuch ist mit 4 x 4 x 16 cm festgelegt. Die Zylinder zur Bestimmung der Spaltzugfestigkeit hat die Abmessungen von  $\varnothing 10 \times 20$  cm. Die Prismen zur Bestimmung des E-Moduls sind mit 12 x 12 x 36 cm festgelegt. Die Normprüfkörper wurden wie die Lochfelder in Stahlschalungen betoniert, verdichtet und anschließend unter Normbedingungen gelagert. Die Prüfung der Druckfestigkeit ist nach 28 Tagen erfolgt. Weitere Werte und Angaben zu den durchgeführten Versuchen der drei Chargen sind in [Huber-1, 2019] ausführlich dokumentiert.

Tab. 5.2: Übersicht der Materialkennwerte der Normprüfkörper aller drei geprüften Chargen als Mittelwerte und mit Standardabweichung.

Art	Bezeichnung	Charge 1	Charge 2	Charge 3	Mittelwert	Standard-Abweichung
Druck zentrischer	$f_{cm} [MPa]$	28,19	27,92	28,91	28,34	0,46
Druck	$f_{cm, Zyl} [MPa]$	23,12*	22,90	23,11	23,04	0,46
Biegezug	$f_{ctbz} [MPa]$	8,05	7,54	7,55	7,71	0,26
Spaltzug zentrischer	$f_{ctsz} [MPa]$	3,12	3,56	3,39	3,36	0,22
Zug	$f_{ctm} [MPa]$	2,81*	3,20	3,05	3,02	0,22
E-Modul	$E_{cm} [MPa]$	17726	18939	12171	16279	3507

Anmerkung: \* Eingangswerte FE-Analyse,  $f_{cm, Zyl} = 0,82 \cdot f_{cm}$ ,  $f_{ctm} = 0,90 \cdot f_{ct, spz}$

## 5.5 Scheibe und Lochfeld

Die Charge 1 beinhaltet die Untersuchungen von Lochfeldern mit konstanter Porosität von 20 % und einer unterschiedlichen Anzahl von fluchtenden Löchern ( $n_1 - n_{36}$ ). Alle Lochfelder sind durch die Anzahl der Löcher und die Angabe der Porosität gekennzeichnet, (z. B.  $n_9-20$ ;  $n_9$  = Anzahl der Löcher = 9;  $20$  = 20 % Porosität). Die ermittelten Ergebnisse der durchgeführten Versuche sind in der Tab. 5.3 zusammengefasst. Die gemessene Druckfestigkeit  $f_{cm}$  (gemittelt aus je drei Probekörpern) bezieht sich dabei auf die Bruttofläche der Scheibe (15 x 4 cm). Die Prüfung der Lochfelder erfolgte quer zur Betonierichtung.

Tab. 5.3: Übersicht der Kennwerte (Druckfestigkeit, Stauchung bei 80 % der Druckfestigkeit und E-Modul) der Scheiben und Lochfelder mit einer Porosität von 20 % (Charge 1)

Code	Porosität	Druckfestigkeit (bei $1,0 f_{cm}$ ) $f_{cm}$ [MPa]	Stauchung (bei $0,8 f_{cm}$ ) $\epsilon_{cm,0.8}$ [%]	E-Modul (bei $0,8 f_{cm}$ ) $E_{Sch}/E_{LF}$ [MPa]
Layout	[%]			
n0 	0%	-28,66	-4,00	5729*
n1 	20%	-11,03	-3,10	2868
n4 	20%	-10,17	-2,67	3044
n9 	20%	-10,15	-3,05	2665
n16 	20%	-10,69	-3,30	2650
n25 	20%	-10,69	-2,86	2994
n36 	20%	-10,94	-3,10	2824

Anmerkung: \* Eingangswerte FE-Analyse ( $E_{Sch}=0,8 f_{cm}/\epsilon_{cm,0.8}$ )  
 $E_{Sch}$  := E-Modul der Scheibe;  $E_{LF}$  := E-Modul des Lochfelds  
(Mittelwerte aus n=3 Probekörper)

Ausgehend vom Spannungs-Stauchungs-Diagramm des Druckversuchs der Scheibe ergibt sich der E-Modul als Sekantenmodul aus der Spannung, und der gemessenen Stauchung  $\epsilon_{cm,0.8}$  bei 80 % Druckfestigkeit (Abb. 5.7).

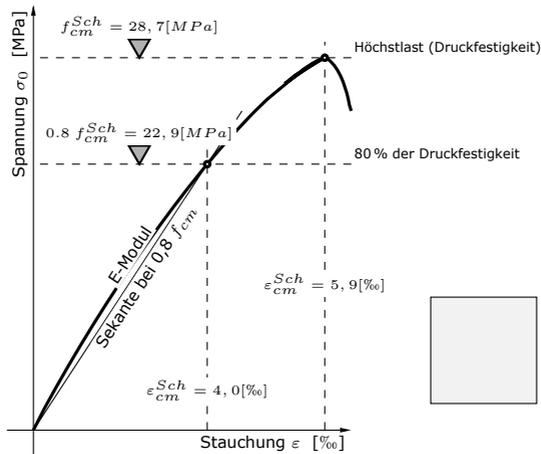


Abb. 5.7: Geglättete Versuchskurve (Druck) einer Scheibe im Spannungs-Stauchungs-Diagramm. Neben dem Punkt der Druckfestigkeit (Höchstlast) ist der festgelegte Punkt bei 80% der Druckfestigkeit zur Berechnung des Sekanten E-Moduls ersichtlich.

Wie aus Tab. 5.3 ersichtlich, liegen die Werte der Druckfestigkeit im Mittel bei ca.  $10,61 \text{ MPa}$ . Diese sind bei gleicher Porosität unabhängig von der Anzahl der Löcher. Gegenüber der ungelochten Scheibe verringert sich die Druckfestigkeit um ca. 60 %. Die Stauchungen zeigen entsprechende Ergebnisse (im Mittel  $3,01 \text{ ‰}$ ), was einer Reduzierung von ca. 25 % entspricht. Der E-Modul verringert sich um ca. 50 % gegenüber einer Scheibe. Da der E-Modul des Lochfelds keinen E-Modul im Sinne eines Materialkennwerts darstellt, wird er im Weiteren als E-Modul des Lochfelds  $E_{LF}$  bezeichnet. Festzuhalten ist noch, dass alle Probekörper ein sprödes Bruchverhalten aufzeigen. Die Lochfelder versagten größtenteils durch einen diagonal verlaufenden Bruch über die Fläche (zusehen nachfolgend in Abb. 6.4).

Die Charge 2 beinhaltet Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität von 10 – 50 %, wieder mit Löchern in fluchtender Anordnung. Neben dem Layout von fluchtenden Löchern wurden in der Charge 3 versetzte Lochanordnungen geprüft. Allgemein lässt sich festhalten, dass die versetzten Anordnungen wesentlich weniger Höchstlast erreichen als fluchtende Anordnungen. Dies ist vermutlich auf eine zusätzliche Momentenbeanspruchung der Druckstrebe, hervorgerufen durch den Versatz der Löcher, zurückzuführen.

Die Ergebnisse der Charge 2 und 3 sind im Anhang A dokumentiert.



## 6 FE-Analyse

Um weiterführende Aussagen über die Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Porosität und der Anzahl der Löcher zu erhalten, wurden FE-Analysen mittels der Software ATENA ([Červenka, 2016]) durchgeführt. Dieses Programm arbeitet mit einem nichtlinearen Materialgesetz, speziell für Beton. Des Weiteren kann die Rissentwicklung in Abhängigkeit vom fortschreitenden Spannungszustand, dargestellt werden.

### 6.1 FE – Scheiben-Modell

Unter Berücksichtigung der Symmetriebedingungen sind die einzelnen Scheiben und Lochfelder als Halb-Modelle modelliert. Die FE-Vernetzung erfolgt unter Verwendung eines 2D-Scheibenelements (Viereck) mit mindestens vier Elementen zwischen den Löchern (Abb. 6.1).

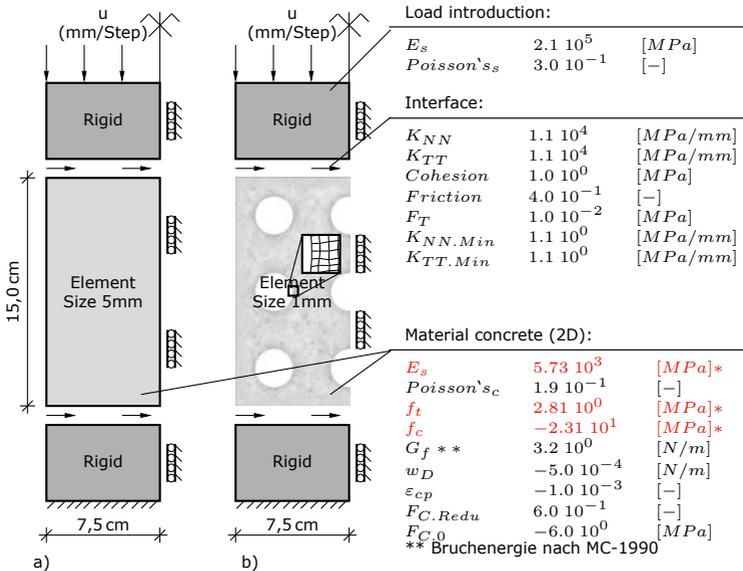


Abb. 6.1: FE-Halb-Modelle und Eingangswerte der FE-Analyse einer Scheibe a) und eines Lochfelds (n9-20) b). In der Tabelle sind die Eingangsparameter für die Lasteinleitung (mit Reibung, Interface) und das später verwendete Material angegeben. Die mit (Rot) gekennzeichneten Werte stammen aus den Versuchen (Kap. 5)

Die oben angeführten Material- und Versuchskennwerte, in Tab. 5.2 und Tab. 5.3 mit \* gekennzeichnet, dienen als Eingangswerte (Rot) für die FE-Analyse. Über ein Kontaktelement (Interface) ist der Lasteinleitungseffekt – Reibung zwischen Beton und Stahlplatte – berücksichtigt.

Für die Darstellung der Risse wurde das Modell der fixierten Rissrichtung gewählt. Abb. 6.1 zeigt das FE-Modell der Scheibe a), sowie das Modell des Lochfelds n9-20 b).

In Abb. 6.2 ist das Spannungs-Stauchungs-Diagramm der Scheibe aus FE-Analyse und Versuch dargestellt. Die FE-Analyse basiert auf den in Abb. 6.1 festgelegten Material- und Interfaceparametern. Die Versuchskurve ist mit einem Polynomansatz geglättet. Beide Kurven zeigen im Bereich des Anstiegs gute Übereinstimmungen und damit vergleichbare E-Moduln ( $E_{cm}^{Sch} = 5730 \text{ MPa}$ ).

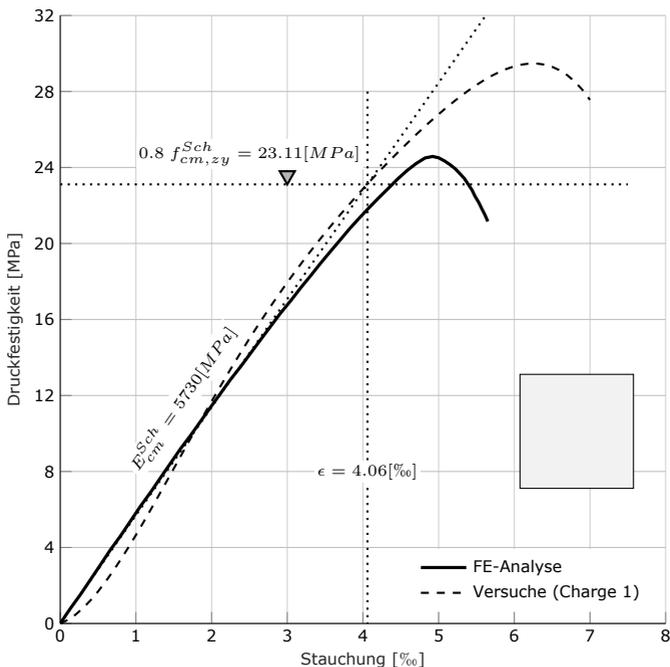


Abb. 6.2: Geglättete Kurven einer Scheibe im Spannungs-Stauchungs-Diagramm. Die Kurven vergleichen die FE-Analyse und den Versuch der Scheibe. Es ist eine gute Übereinstimmung der E-Moduln zu erkennen.

Die geringere Druckfestigkeit in der FE-Analyse folgt aus dem gewählten Eingabewert  $0,8 f_{cm}$ , für die maximale Druckfestigkeit in ATENA.

Abb. 6.3 zeigt das Spannungs-Stauchungs-Diagramm des Lochfelds n9-20. Die Versuchskurve ist geglättet dargestellt. Die Druckfestigkeiten zeigen gute Übereinstimmung und liegen ca. bei 10,2 MPa. Der mit (\*) gekennzeichnete Bereich zeigt eine Gegenkrümmung/einen Versatz der Versuchskurve gegenüber der FE-Analyse. Begründet ist diese durch den Anlauf der Prüfmaschine (weggesteuert). Infolge dieser Kurve ergibt sich der E-Modul als Sekante 2665 MPa, vgl. Tab. 5.3. Vernachlässigt man den Anlauf und verschiebt die Versuchskurve in den Ursprung, so folgt ein nahezu deckungsgleicher Verlauf der beiden Kurven. Der reduzierte E-Modul ist auf den Anlauf zurückzuführen, siehe u. a. [Kupfer, 1973]. Es folgt eine Abnahme des E-Moduls um ca. 40 % gegenüber der Scheibe, der Wert liegt bei  $E_{LF}=3340$  MPa.

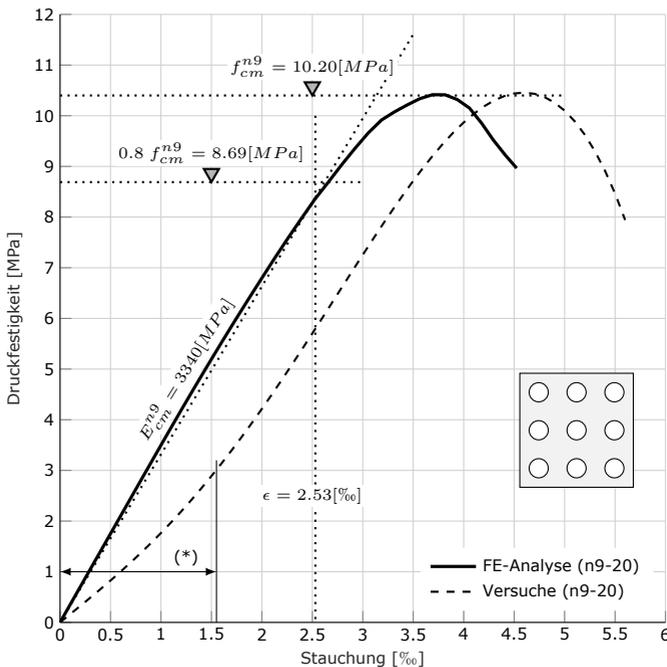


Abb. 6.3: Geglättete Kurven eines Lochfelds (n9-20) im Spannungs-Stauchungs-Diagramm. Die Kurven vergleichen die FE-Analyse und den Versuch des Lochfelds. Es ist eine gute Übereinstimmung der E-Moduln zu erkennen.

Wie bereits in Abschnitt 4.4 beschrieben bilden sich erste Risse im Bereich Z, nahe dem Lochrand. Es ist sowohl in den Versuchen als auch in der FE-Analyse zu beobachten, dass diese Risse nicht für das globale Versagen verantwortlich sind. Bei weiterer Laststeigerung bilden sich Risse der Mikro-Ebene parallel zur Belastungsrichtung, welche sich durch die Beeinflussung durch die Randbedingungen, die Gesteinskörnung und die Löcher zu diagonalen Rissen der Meso-Ebene vereinigen (Bereich R). Die in Abb. 6.4 dargestellte Lastsituation  $\sigma_0 = 10,00 \text{ MPa}$  zeigt den Zustand des Lochfelds (n9-20) kurz vor dessen Versagen. Alle drei Abbildungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung des Rissbildes, was für die Qualität des FE-Modells und die Richtigkeit der Eingangswerte spricht.

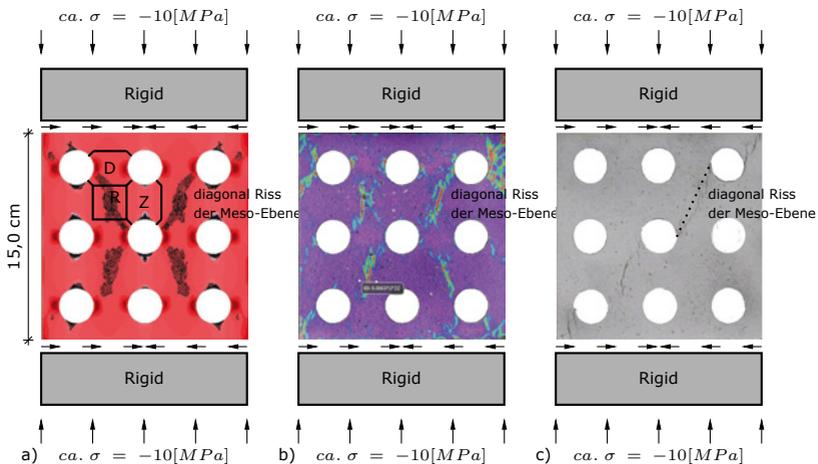


Abb. 6.4: Rissbilder eines einachsig belasteten Lochfelds aus FE-Analyse a), Versuch (DIC-System) b) und dem Versuch c). Alle drei Abbildungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung des Rissbildes.

## 6.2 Vergleich der Ergebnisse

Die ermittelten Druckfestigkeitswerte (Mittelwerte) aus Versuch und FE-Analyse, sind in Abb. 6.5 dargestellt. Die Werte sind in Abhängigkeit von der Druckfestigkeit und der Anzahl der Löcher aufgetragen. Festzuhalten ist, dass die Druckfestigkeiten  $f_{cm}^{n=1...36}$  der Charge 1 (Porosität von 20 %), unabhängig von der Anzahl der Löcher, gleichbleibend ist. Die Versuchsergebnisse zeigten eine deutliche Übereinstimmung mit der FE-Analyse. Die mittlere Druckfestigkeit aller Lochfelder liegt bei ca. 10,2 MPa. Zum Vergleich ist die Druckfestigkeit der ungelochten Scheibe mit 23,11 MPa eingezeichnet.

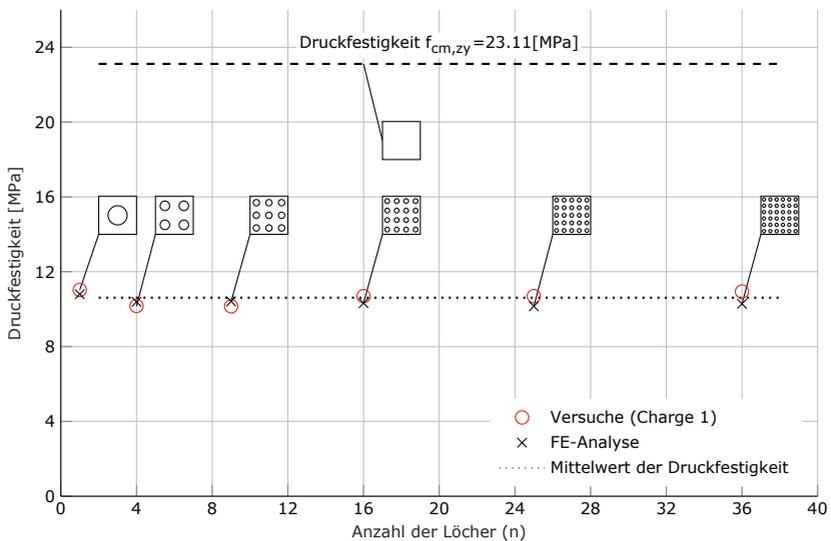


Abb. 6.5: Mittelwert der Druckfestigkeit von Lochfeldern mit einer Porosität von 20 % aus Versuch und FE-Analyse. Die Druckfestigkeiten sind in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher aufgetragen. Zum Vergleich ist zusätzlich die Festigkeit der Scheibe eingezeichnet.

Für die Charge 2 und 3 sind im Anhang A (Abb. A.1 und A.2) die entsprechenden Diagramme abgebildet.



## 7 Parameterstudie zu Druckfestigkeit und E-Modul

Unter Verwendung des verifizierten FE-Modells werden nachfolgend die Druckfestigkeiten und der E-Modul in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher und der Porosität weiterführend untersucht. Es wird ein Konzept zur Modifizierung der Druckfestigkeit und des E-Moduls der Lochfelder entwickelt. Im Weiteren werden anhand des vorgestellten Konzepts einfache Beispiele berechnet. Abschließend werden die modifizierten Druckfestigkeiten und der E-Modul mit bekannten Modellen verglichen. Teile des vorhergehenden und dieses Kapitels wurden bereits in [Huber-2, 2019] vorgestellt.

### 7.1 Druckfestigkeit

Abb. 7.1 zeigt die Ergebnisse der FE-Analyse hinsichtlich der Druckfestigkeiten. Die untersuchten Lochfelder variieren dabei sowohl in der Porosität (10, 20, 30 und 40 %), als auch in der Anzahl der Löcher (n1, n4, n9, n16, n25 und n36).

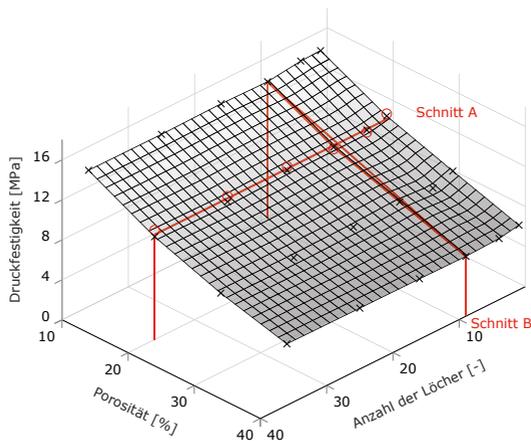


Abb. 7.1: Durch die FE-Analyse ermittelte Druckfestigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher und der Porosität, als nahezu ebene, im Raum liegende Fläche. Es handelt sich um eine linear interpolierte Fläche.

Die Abhängigkeit der Druckfestigkeit von der Porosität und der Anzahl der Löcher stellt sich als eine nahezu ebene, im Raum liegende Fläche (linear interpoliert) dar. Zur weiteren Beurteilung werden die Werte in zusätzlichen Schnitten (A u. B) in den Abb. 7.2 und 7.3 dargestellt.

Abb. 7.2 zeigt die Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher und der Porosität 10, 20, 30 und 40 % der Lochfelder (parallel zum Schnitt A).

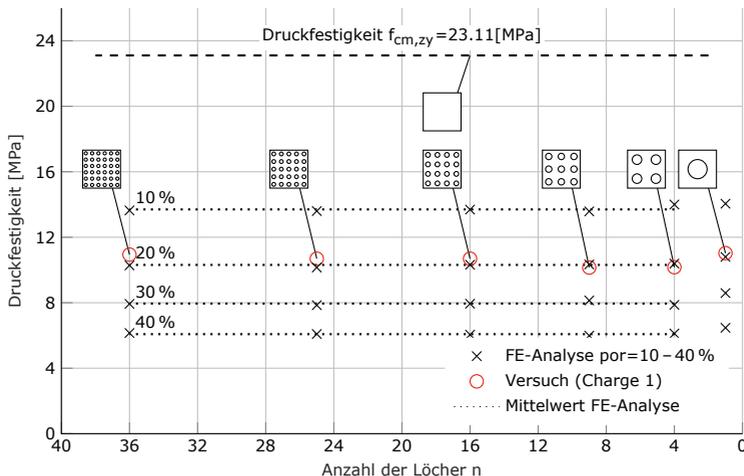


Abb. 7.2: Druckfestigkeit der Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher (Schnitt A). Die aus der FE-Analyse stammenden Werte sind mit x gekennzeichnet, die zur Validierung durchgeführten Versuchswerte sind mit (o) hervorgehoben. Als Referenzwert dient die Druckfestigkeit ( $f_{cm,zy}$ ) der Versuche.

Wie in Abb. 7.2<sup>20</sup> erkennbar ist die Druckfestigkeit für eine gewählte Porosität konstant und somit unabhängig von der Anzahl der Löcher. Diese Aussage gilt für alle gewählten Porositäten im Bereich 10 bis 40 %. Allein das Lochfeld n1 liegt in Versuch und FE-Analyse etwas außerhalb des Mittelwertes. Dies ist auf einen weniger durch die Randbedingungen beeinflussten Bereich D zurückzuführen. Da es sich um die Einheitszelle handelt, ist keine gegenseitige Beeinflussung der Löcher vorhanden.

<sup>20</sup> Anmerkung: Dieses Ergebnis ist bereits in Abb. 6.5 dargestellt. Um den Zusammenhang zur Abb. 7.1 besser herzustellen, ist die Richtung der Abszisse geändert.

Abb. 7.3 zeigt den Schnitt B, die Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der Porosität 10, 20, 30 und 40 %.

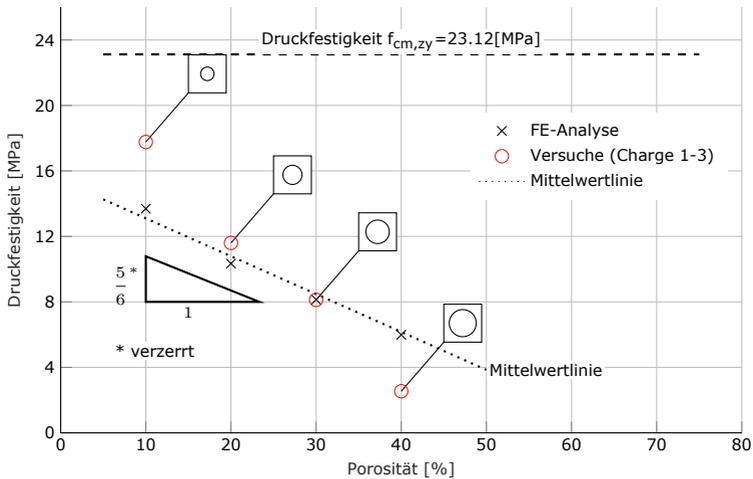


Abb. 7.3: Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Porosität. Die aus der FE-Analyse stammenden Werte sind mit x gekennzeichnet, die zur Validierung durchgeführten Versuchswerte sind mit (o) hervorgehoben. Die Mittelwertlinie ist mit einer Steigung von 5/6 angetragen.

Die FE-Analyse weist für den Geltungsbereich der Porosität von 10 bis 40 % einen nahezu linearen Zusammenhang auf. Die aus der Abb. 7.3 abgeleitete Mittelwertlinie zeigt im Bereich der Porosität 10–40 % eine Steigung von ca. 5/6. Daraus ergibt sich eine modifizierte Druckfestigkeit  $f_{cm}^*$  des Lochfelds wie folgt:

$$f_{cm}^* = C_2 \cdot f_{cm,zy} - por \cdot f_{cm,zy} \quad (7.1)$$

mit:

$f_{cm}^*$  = mod. Druckfestigkeit Lochfeld [MPa]

$f_{cm,zy}$  = Zylinderdruckfestigkeit [MPa]

$C_2$  = Koeffizient Druckfestigkeit ( $C_2=2/3$ ) [-]<sup>21</sup>

por = Porosität [-]

Eine Steigerung der Porosität von 20 auf 30 % hat eine Abnahme der Druckfes-

<sup>21</sup> Anmerkung:  $C_2$  folgt aus dem theoretischen Wert (Schnittpunkt: Mittelwertlinie und der Ordinate) geteilt durch  $f_{cm,zy}$

tigkeit von ca. 20 % zur Folge. Die Versuchsergebnisse zeigen für diesen Bereich vergleichbare Ergebnisse. Die Abweichung bei 10 %iger und 40 %iger Porosität folgt aus den unterschiedlichen Zylinderdruckfestigkeiten der einzelnen Chargen (Versuch), welche einen direkten Einfluss auf die Steigung der Geradengleichung haben. Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass bei der Porosität von 40 %, die angesprochene Homogenität des Materials in den Lochzwischenbereichen (Abschnitt 5.3), durch den Größtkorndurchmesser  $d_{gk}$  nicht gegeben ist. Die Gleichung 7.1 liefert eine Möglichkeit zur Modifizierung der Druckfestigkeit von Lochfeldern unterschiedlichster Variationen, ohne aufwendig durchzuführende Versuche.

## 7.2 E-Modul

Optional zur modifizierten Druckfestigkeit wird nachfolgend eine weitere Möglichkeit zur Modifikation des E-Moduls vorgestellt. Das von Gibson und Ashby in [Gibson, 1999] & [Gibson, 2010] bekannte Modell zur Beschreibung von mechanischen Materialkennwerten von Metallschäumen dient hier als Grundidee. Dabei lässt das Modell die Faktoren  $C_1$  und  $n_1$  soweit offen, dass diese durch Versuche angepasst werden können. Um den modifizierten E-Modul nach Gibson und Ashby quantitativ und qualitativ einordnen zu können, wird dieser mit einem aus der Bruchmechanik bekannten Modell des E-Moduls nach Mori-Tanaka-Modell [Mori, 1973] verglichen. Der Ansatz gibt vor, dass bei Achsparallelität  $C_1=1$  zu wählen ist, was für eine fluchtende Anordnung getan wird. Entsprechend nach Gibson und Ashby folgt:

$$E^* = E_{LF} \cdot C_1 \cdot (1 - por)^{n_1} \quad (7.2)$$

mit:

$E^*$  = Modifizierter E-Modul [MPa]

$E_{LF}$  = E-Modul des Matrixmaterials (Scheibe) [MPa]

$C_1$  = geometrische Proportionalitätskonstante ( $C_1=1.0$  bei fluchtender Anordnung) [-] (bei versetzter Anordnung  $C_1=0,6$ ).

$n_1$  = Strukturparameter [-]

$por$  = Porosität [-]

Zu berücksichtigen ist, dass beide vorgeschlagenen Modifikationen im Bezug der Betrachtungsebenen von Betonbauteilen (hier die betrachte Größe der Versuchskörper), auf der Makro-Ebene liegen.

### 7.3 Beispiel zur Modifizierung von Druckfestigkeit und E-Modul

Durch die zur Verfügung stehenden Versuchsergebnisse und die zuvor entwickelte Gl. 7.1 wird nachfolgend die modifizierte Druckfestigkeit eines Lochfelds am Beispiel n9-20 berechnet. Eingesetzt lautet die Gl. wie folgt:

$$f_{cm,20\%}^* = 2/3 \cdot 23,12 - 0,2 \cdot 23,12 = 10,78 [MPa] \quad (7.3)$$

mit:

$f_{cm}^*$  = mod. Druckfestigkeit Lochfeld n9-20 [MPa]

$f_{cm,zy}$  = Tab. 5.2 - Zylinderdruckfestigkeit [MPa]

$C_2$  = 2/3 [-]

$por$  = 0,2 (20 %) [-]

Ein entsprechendes Vorgehen gilt für die Porosität 10, 20, 30 und 40 %. Abb. 7.4 zeigt nochmal die erzielte Druckfestigkeit aus Versuchen und FE-Analyse an Lochfeldern, erweitert um die modifizierten Druckfestigkeiten nach Gl. 7.1.

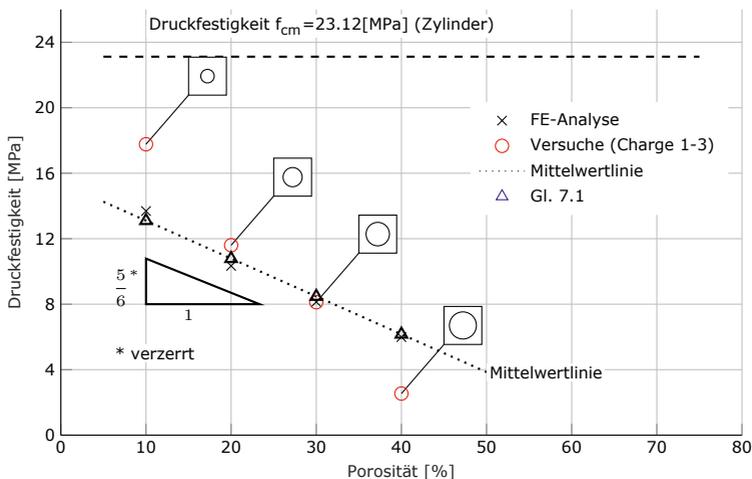


Abb. 7.4: Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher mit den zusätzlich eingetragenen Werten der Gl. 7.1

Die berechneten Werte aus Gl. 7.1 liegen wie hergeleitet auf der Linie der Mittelwerte (FE-Analyse), da diese mit der Geradengleichung deckungsgleich ist. Der Vergleich mit der Druckfestigkeit aus dem Versuch zeigt eine sehr gute Übereinstimmung bei einer Porosität zwischen 10 und 30 %. Berücksichtigt man die besprochen Prüfeinflüsse (Kap. 5) und die zu geringe Anzahl von Größtkörnern bei einer Porosität von 40 %, so sind die Größenabweichungen der Versuchsergebnisse zu erklären.

Die Modifizierung des E-Moduls erfolgt durch die Gl. 7.2. Mit  $C_1=1$  (fluchtende Löcher) folgt:

$$\frac{E^*}{E_{Sch}} = (1 - por)^{n_1} \quad (7.4)$$

Der Strukturparameter ergibt sich wie folgt:

$$n_1 = \frac{\log \cdot \left( \frac{E^*}{E_{Sch}} \right)}{\log \cdot (1 - por)} \quad (7.5)$$

Durch Einsetzen des E-Moduls der Scheibe  $E_{Sch}$  und des modifizierten E-Moduls  $E^*$  errechnet sich der Strukturparameter  $n_1$  für eine Porosität von 20 %, wie folgt:

$$n_1^{20\%} = \frac{\log \cdot \left( \frac{3440}{5729} \right)}{\log \cdot (0.8)} = \frac{\log \cdot (0.602)}{\log \cdot (0.8)} = 2.29 \quad (7.6)$$

Durch Einsetzen des errechneten Strukturparameters  $n_1$  für eine Porosität von 20 % ergibt sich ein modifizierter E-Modul  $E^*$  nach Gl. 7.2 wie folgt:

$$E_{20\%}^* = 5729 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1 - 20\%}{1} \right)^{2.29} = 3440 [MPa] \quad (7.7)$$

mit:

$E_{Sch} = \text{Tab. 5.3 - Scheibe } [MPa]$

$n_1^{20\%} = \text{Gl. 7.6 Strukturparameter für por}=20\% [-]$

Abb. 7.5 zeigt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse zwischen der Modifikation und der FE-Analyse, sowie der Vergleichsmodelle nach [Gibson, 1999] und [Mori, 1973]. Um die unterschiedlichen Modelle besser vergleichen zu können, sind die E-Moduln als Relativwerte zum E-Modul der Scheibe  $E_{Sch}$  dargestellt. Entlang der Abszisse ist die Porosität aufgetragen.

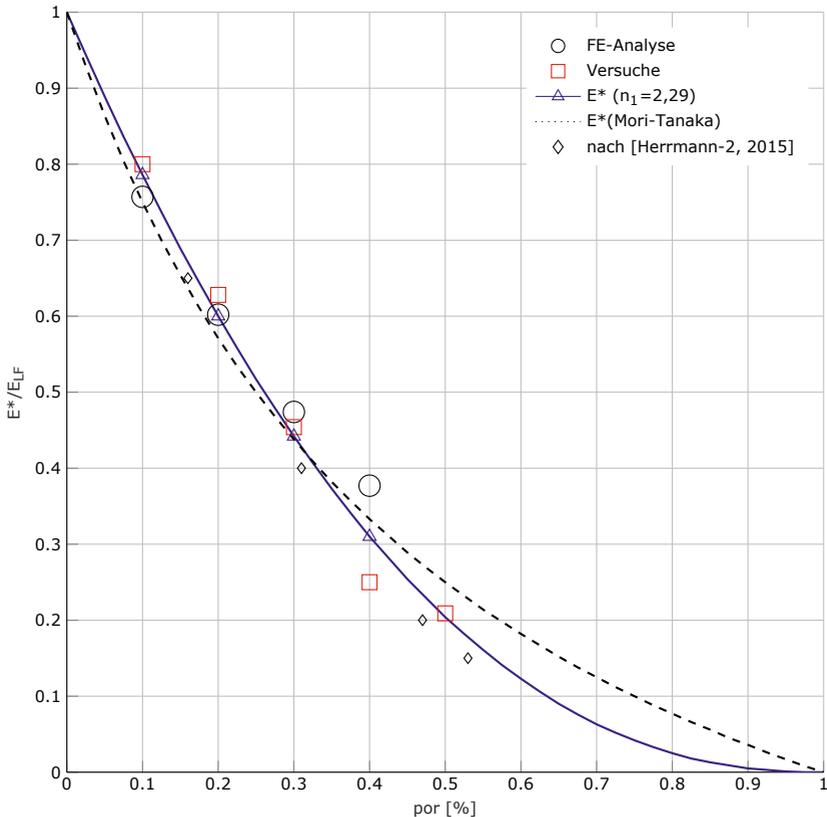


Abb. 7.5: Diagramm mit relativem E-Modul  $E^*/E_{1F}$  in Abhängigkeit von der Porosität. Die Modelle nach Gibson und Ashby sowie Mori-Tanaka sind als Funktionen eingezeichnet. Neben den hier vorgestellten Versuchswerten sind noch die Werte aus [Herrmann-2, 2015] eingetragen.

Die Versuche, die FE-Analyse und Gl. 7.2 mit  $n=2,29$  zeigen für eine Porosität von 10–40 % sehr gute Übereinstimmungen. Abschließend sind in Abb. 7.5 vergleichsweise die Ergebnisse mit Leichtbeton (Blähglasgranulat) und Betonschäumen (Mikrohohlkugeln), siehe [Herrmann-2, 2015], dargestellt. Diese Versuche von Herrmann sind in Bezug auf die Betrachtungsebenen von Betonbauteilen im Bereich der Mikro-Ebene zu sehen. Die relativen Werte zeigen zusätzlich eine gute Übereinstimmung mit der hier entwickelten Gleichung für den modifizierten E-Modul und den Ansatz von Mori-Tanaka.

## 7.4 Homogenität der Lochfelder

Mit den zuvor entwickelten, validierten und modifizierten Werten ist es möglich ein FE-Modell zu erstellen, bei dem nur die zwei Eingangswerte, E-Modul und Druckfestigkeit, nötig sind. Abb. 7.6 zeigt das FE-Modell eines Lochfelds als homogenisierte Scheibe, sowie die modifizierten Eingangswerte (Rot). Mit dem entwickelten Ansatz kann die Modellierung der Löcher entfallen. Es ist zu erwarten, dass das zuvor berechnete Lochfeld n9-20 und die homogenisierte Scheibe gleiche Ergebnisse liefern.

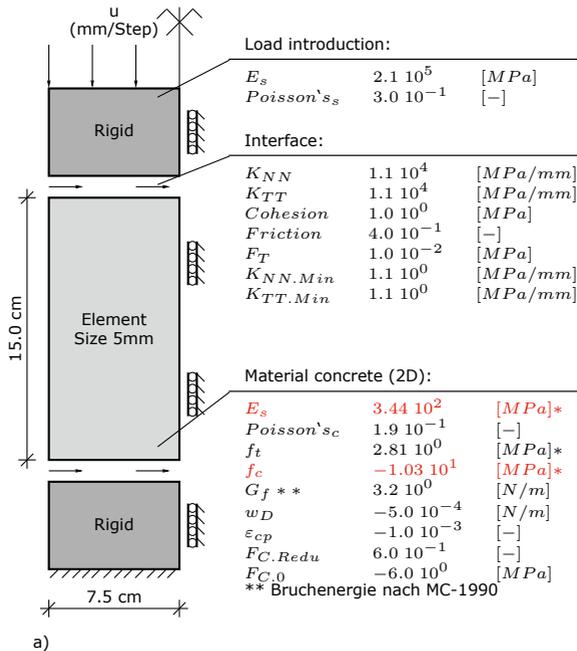


Abb. 7.6: Lochfeld (n9-20) als homogenisierte Scheibe mit erforderlichen Eingangswerten (Rot) für die FE-Analyse. Es ist weder die Modellierung der Löcher im FE-Modell noch die Herstellung der Lochfelder für Versuche erforderlich, um die Druckfestigkeit und den E-Modul zu bestimmen.

Die Kurven in Abb. 7.7 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der FE-Analyse des Lochfelds (n9-20) und der homogenisierten Scheibe mit modifizierten Eingangswerten.

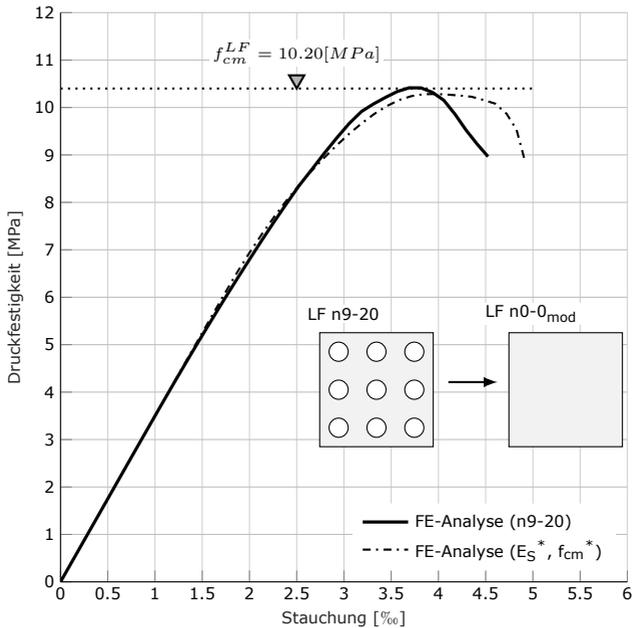


Abb. 7.7: Geglättete Kurven eines Lochfelds (n9-20) und der homogenisierte Scheibe im Spannungs-Stauchungs-Diagramm. Sehr gute Übereinstimmung der FE-Analyse und der homogenisierten Scheibe mit modifizierten Eingangswerten.

Da die Anzahl der Löcher bei gleichbleibender Porosität vernachlässigt werden kann, gelten die folgenden Aussagen für alle untersuchten Lochfelder und deren Porosität.

Die abschließend vorgestellte Betrachtung der Modifikation von Druckfestigkeit und E-Modul zeigt, dass die in dieser Arbeit dokumentierte Herangehensweise zur Modifizierung von Materialkennwerten (Druckfestigkeit  $f_{cm}^*$  und E-Modul  $E^*$ ) für den genannten Geltungsbereich (10–40 %) auf der Meso-Ebene zulässig ist. Eine aufwendige Herstellung von Lochfeldern mit unterschiedlicher Anzahl von Löchern und Porosität kann dadurch entfallen. In der FE-Analyse erübrigt sich die Modellierung der Löcher.

Durch die Ermittlung von Materialkennwerten (Druckfestigkeit und E-Modul) anhand von Normprüfkörpern und die in dieser Arbeit entwickelten Gleichungen 7.1 und 7.2 stehen einachsige Festigkeitswerte von Betonbauteilen der Makro-Ebene mit Meso-Gradierung (Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität) zur Verfügung.



---

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

### **Zusammenfassung**

Einleitend befasst sich die vorliegende Dissertation mit Literatur zum Gradientenbeton, die zum größten Teil am Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren (ILEK) der Universität Stuttgart publiziert ist. Des Weiteren werden einzelne Definitionen des Leichtbaus präsentiert und die Gradientenbetontechnologie vorgestellt, sowie eine Übersicht über die Arbeit gegeben.

Es folgt die Einarbeitung in das Materialmodell (Kap. 2). Festzuhalten ist, dass im Bereich einer mesogradierten Betonscheibe (Lochfeld) kein relevanter Maßstabeffekt zu erwarten ist. Die Abmessung der hier untersuchten Lochfelder aus Normalbeton wurden mit  $15 \times 15 \times 4$  cm festgelegt.

Der Hauptteil der Dissertation beginnt mit der Definition des Layouts eines Lochfelds. Die Anordnung der Mittelpunkte  $M$  (Topologie) und die Größe der Durchmesser ( $d_1$ ), bilden eine Funktion aus der Anzahl der Löcher ( $n$ ) und der Porosität ( $por$ ), wobei die maximale Packungsdichte für fluchtende Löcher von  $c_q = 0,785$  als ein theoretisches Optimum anzusehen ist (Kap. 3).

Betrachtungsgegenstand im Kap. 4 (Spannungszustand im Lochfeld) ist eine unendlich ausgedehnte Scheibe mit linear-elastischem Materialgesetz. Sie ist mit einem bzw. zwei Löchern versehen und wird zum Vergleich als Referenzmodell der Spannungszustände verwendet. Mittels relativer Spannungswerte bietet der Spannungskonzentrationsfaktor eine Möglichkeit zum Vergleich einzelner Lastzustände an ausgewählten Punkten. Die Erkenntnisse der Spannungsuntersuchung am Lochfeld sind in unterschiedlichen Darstellungen, wie zum Beispiel zu diskreten Spannungen sowie differenzierten Spannungszuständen mit Spannungstrajektorien, dokumentiert.

Da es sich bei den Lochfeldern um druckbeanspruchte Bauteile handelt, wurden zusätzlich globale bzw. lokale Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt. Ein globales oder lokales Stabilitätsversagen konnte bei den Untersuchungen im Geltungsbereich (Porosität 10 bis 40 %) nicht beobachtet werden.

Das Kap. 5 dokumentiert die Ergebnisse der durchgeführten Versuche zum Tragverhalten und zu den Materialkennwerten (Druckfestigkeit und E-Modul) meso-gradierter Betonscheiben. Für die vorgelegten Ergebnisse der Materialkennwerte wurde stets die gleiche Topologie (Anordnung der Löcher im Lochfeld) zugrunde gelegt (Charge 1, 20 %). Lediglich die Anzahl der Löcher wurde variiert, mit zugehöriger Anpassung der Durchmesser. Die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen, dass die Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher einen linearen Zusammenhang darstellt.

Weiterführende Aussagen über die Druckfestigkeit, in Abhängigkeit von der Porosität und Topologie der Löcher, liefert Kap. 6 über eine FE-Analyse (2D-Scheibenelement, ATENA) unter Verwendung der aus den Versuchen (Normprüfkörper) gewonnenen Materialparameter. Die untersuchten Lochfelder variieren dabei sowohl in der Porosität (10, 20, 30 und 40 %), als auch in der damit verbundenen Anzahl der Löcher ( $n_1$ ,  $n_4$ ,  $n_9$ ,  $n_{16}$ ,  $n_{25}$  und  $n_{36}$ ). Die in der FE-Analyse zum Versagen führenden diagonalen Risse entstehen im sogenannten Bereich R im Lochzwischenbereich. Die im Kap. 4 vorgestellten Spannungszustände bestätigten die Rissentwicklungen. Die Ergebnisse der FE-Analyse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchen hinsichtlich der Druckfestigkeit und der Rissentwicklung bis zum Versagen.

Anhand der validierten FE-Modelle wird im Kap. 7 eine Parameterstudie durchgeführt. Die berechnete Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der Porosität und der Anzahl der Löcher zeigt in der Darstellung deutlich einen linearen Zusammenhang. Es ist zudem festzustellen, dass die Anzahl der Löcher für eine gewählte Porosität keinen Einfluss auf die erzielte Druckfestigkeit der untersuchten Lochfelder hat. Die Druckfestigkeit zeigt einen nahezu linearen Zusammenhang über den Geltungsbereich der Porosität von 10 bis 40 %. So ergibt sich zum Beispiel für eine Steigerung der Porosität von 20 auf 30 % eine Abnahme der Druckfestigkeit von ca. 20 %.

Nach der Betrachtung der Druckfestigkeit wird des Weiteren der E-Modul entlang einer exponentiellen Kurve in Abhängigkeit von der Porosität dargestellt. Es kann für beide Materialkennwerte (Druckfestigkeit und E-Modul) aus dem

---

3D-Diagramm (Validierte Werte) eine Modifikation (Gleichung) ermittelt werden.

Die modifizierte Druckfestigkeit ( $f_{cm}^*$ ), der „Materialparameter“ eines Lochfelds, ist aus dem linearen Zusammenhang (Geradengleichung) formuliert.

Die Gleichungen von Gibson und Ashby [Gibson, 1999] bieten die Grundlage zur Modifikation des E-Moduls. Mit der Anwendung der modifizierten „Materialparameter“ an einer Scheibe schließt der Hauptteil der Arbeit ab. Durch die beiden entwickelten Modifikationen kann eine aufwendige Herstellung von Lochfeldern mit unterschiedlicher Porosität und Anzahl von Löchern entfallen. In der FE-Analyse erübrigt sich die Modellierung der Löcher. Stattdessen wird eine Scheibe mit den modifizierten ‚Materialparametern‘ (Homogenisiertes Modell) verwendet.

Die in dieser Arbeit vorgelegte Untersuchung zeigt auf, dass der Zusammenhang zwischen Material- und Gewichtseinsparung und dem Absinken der Festigkeit in statisch nicht hoch ausgenutzten Bereichen zu keinem kritischen Verhalten führt. Sie stützt somit die bisher zur Theorie des Gradientenbetons durchgeführten Untersuchungen und Erwartungen. Der Gradientenbeton, in seiner derzeitigen Form, ist Teil des Strukturleichtbaus und bietet in diesem Zusammenhang die Möglichkeit einer Massenreduktion und einer damit einhergehenden Reduktion von CO<sub>2</sub>-Emissionen.

Somit will diese Arbeit einen weiteren Baustein liefern, um der eingangs erwähnten Verantwortung nachzukommen, durch ressourcenschonendes Bauen nachfolgenden Generationen eine mindestens gleichwertig natürliche Umwelt zu hinterlassen!

## **Ausblick**

Da es aus verschiedenen Gründen nicht immer möglich ist, die Topologie eines Betonbauteils so zu gestalten, dass nur eine einachsige Beanspruchung vorliegt, sind Untersuchungen zu zweiachsigen Beanspruchungen notwendig. Die für Scheiben vorliegenden Diagramme nach Kupfer [Kupfer, 1973] können als Grundlage dienen.

Ein hohes Potenzial liegt in der Optimierung hinsichtlich versetzter Lochanordnungen. Die theoretische Packungsdichte liegt dabei bei  $c_n=0,907$ . Äquivalent zum Ansatz dieser Arbeit kann die Modifizierung der Druckfestigkeit angepasst werden. Der hier vorgestellte Ansatz von Ashby [Gibson, 2010] kann mit der geometrischen Proportionalitätskonstante  $C_1=0,6$  zur Berechnung des modifizierten E-Moduls für versetzte Lochanordnungen verwendet werden.

Darüber hinaus sind weitere Untersuchungen hinsichtlich unterschiedlicher Betonklassen mit variierendem Größtkorn erstrebenswert. Dabei ist auf einen möglichen Maßstabseffekt (Bruchmechanik) zu achten.

Einen vielversprechenden Ansatz zu Massenoptimierung bietet in Zukunft auch die Verwendung einer zweiten bzw. dritten Sorte von Lochdurchmessern, um eine höhere Porosität zu erhalten.





# Abbildungsverzeichnis

2.1	Spannungs-Stauchungs-Diagramm eines Druckversuchs von Norm-Probekörpern . . . . .	8
2.2	Modelle zur Ähnlichkeitsmechanik . . . . .	9
2.3	Darstellung der Zusammenhänge zwischen Vergrößerungsfaktor und dem Verhältnis $\frac{V}{A}$ von Scheiben und Lochfeldern. . . . .	10
2.4	Darstellung der linear-elastischen und nichtlinearen Bruchmechanik. . . . .	12
2.5	Maßstabeffekts der Mikro-Ebene . . . . .	13
3.1	Anordnung von Kreisen am quadratischen und hexagonalen infiniten Gitter . . . . .	15
3.2	Containerpackung mit je 8 bzw. 9 gleich großen Löchern. . . . .	17
3.3	Packungsdichten der Layouts in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher. . . . .	19
4.1	Unendlich ausgedehnte isotrope Scheibe (linear-elastisches Materialmodell) mit kreisförmigem Loch. . . . .	24
4.2	Spannungsverteilung unendlich ausgedehnten isotropen Scheibe mit Loch . . . . .	27
4.3	Spannung bzw. Spannungskonzentrationsfaktor am Punkt B . . . . .	29
4.4	Spannungskonzentrationsfaktor unendlich ausgedehnten isotropen Scheibe mit zwei Löchern . . . . .	31
4.5	Spannungsverteilung am Lochfeld mit einer Porosität von 20 %. . . . .	32
4.6	Spannungszustände an der Scheibe ohne und mit Reibung . . . . .	33
4.7	Viertel-Modell, nichtlineares Werkstoffgesetz und festgelegten Laststufen (Steps) . . . . .	34
4.8	Zweiachsiger Grenzkurve der Beanspruchung nach Kupfer . . . . .	36
4.9	Zweiachsiges Diagramm der ermittelten Hauptspannungen aus der FE-Analyse . . . . .	39
4.10	Darstellung der Hauptspannungs-Konstellationen (4 Laststufen) . . . . .	40
4.11	Spannungstrajektorien an einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit Loch . . . . .	44
4.12	Darstellung der Hauptspannungs-Konstellationen mit Trajektorien (4 Laststufen) . . . . .	45

---

4.13	Spannungstrajektorien-Detail eines Lochfelds (n9-20) . . . . .	46
4.14	Entlang der Spannungstrajektorien aufgetragene Spannungskomponenten - 3D . . . . .	46
4.15	Lastabtragung am Lochfeld (n9-20) mit linear-elastisches Materialgesetzes . . . . .	49
4.16	Entlang der Trajektorien aufgetragene Zug- und Druck-Kräften . . .	50
4.17	Lastabtragung am Lochfeld mit nichtlinearem Materialgesetzes . . .	52
4.18	Lochfeld mit Bereich eines möglichen lokalen Stabilitätsversagens .	54
4.19	Überführung des Stabilitätsproblems eines Lochzwischenraumes in ein Ersatzstabmodell . . . . .	56
4.20	Gegenüberstellung der Knickfigur des Modells Lochfeld und eines Teilmodells . . . . .	58
4.21	Knickfigur eines Sonderfalls im Zwischenlochbereich . . . . .	59
4.22	Diagramm zur Schlankheit von Stäben mit modifiziertem Flächenträgheitsmoment in Abhängigkeit der Porosität . . . . .	60
5.1	Übersicht der maßgebenden Prüfeinflüsse . . . . .	64
5.2	Quantitative Darstellung der maßgebenden Prüfeinflüsse . . . . .	65
5.3	Schematischer Versuchsaufbau der Druckversuche . . . . .	66
5.4	Probekörper (Lochfelder) mit unregelmäßigem Punktmuster. . . . .	67
5.5	Schalung für das Lochfeld . . . . .	68
5.6	Einbau des Frischbetons . . . . .	69
5.7	Geglättete Versuchskurve (Druck) einer Scheibe im Spannungs-Stauchungs-Diagramm . . . . .	72
6.1	FE-Halb-Modelle und Eingangswerte der FE-Analyse einer Scheibe .	75
6.2	Versuchskurve im Vergleich zur FE-Analyse einer vollen Scheibe . .	76
6.3	Versuchskurve im Vergleich zur FE-Analyse eines Lochfelds (n9-20)	77
6.4	Rissbilder eines einachsig belasteten Lochfelds aus FE-Analyse. . .	78
6.5	Mittelwert der Druckfestigkeit von Lochfeldern mit einer Porosität von 20 % aus Versuch und FE-Analyse. . . . .	79
7.1	Druckfestigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher und der Porosität . . . . .	81
7.2	Mittelwert der Druckfestigkeit von Lochfeldern mit einer Porosität von 10, 20, 30 und 40 % aus Versuch und FE-Analyse. . . . .	82

7.3	Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Porosität . . .	83
7.4	Druckfestigkeit der Lochfelder in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher . . . . .	86
7.5	Diagramm mit relativem E-Modul $E^*/E_{LF}$ in Abhängigkeit von der Po- rosität. . . . .	88
7.6	Lochfeld (n9-20) als homogenisierte Scheibe. . . . .	89
7.7	Vergleich einer homogenisierten Scheibe und der FE-Analyse eines Lochfelds (n9-20) . . . . .	90

## Tabellenverzeichnis

3.1	Packungsdichte bei mehr als einem Durchmesser . . . . .	20
3.2	Die in den Versuchen verwendeten Layouts der drei Chargen. . . .	21
5.1	Betonzusammensetzung des Betons . . . . .	68
5.2	Übersicht der Materialkennwerte der Normprüfkörper (Charge 1,2 und 3) . . . . .	70
5.3	Übersicht der Kennwerte der Scheiben und Lochfelder (Charge 1) .	71



## Literaturverzeichnis

- [Bažant, 1983] Bažant, Z. P. und Oh, B. H. „Crack band theory for fracture of concrete“. In: *Matériaux et Constructions* 16.3 (Mai 1983), S. 155–177. DOI: 10.1007/bf02486267.
- [Bergmann, 2019] Bergmann, C. *Prozesse entwerfen*. Birkhäuser Verlag GmbH, 19. Feb. 2019. 216 S. ISBN: 3035615829.
- [Beyer, 2015] Beyer, F. R. „Hauptspannungstrajektorien in der numerischen Festkörpermechanik. Ein Algorithmus zur Visualisierung der Bauteilbeanspruchung in zwei und drei Dimensionen“. Dissertation. Fakultät Bauingenieurwesen, Technischen Universität Dresden, 2015.
- [Blandini, 2020] Blandini, L. und Sobek, W. „Das Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren ILEK Über 100 Jahre Forschung im Stahlbetonbau“. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 115.8 (Juli 2020), S. 626–631. DOI: 10.1002/best.202000035.
- [Carpinteri, 1998] Carpinteri, A., Chiaia, B. und Ferro, G. „Scale dependence of tensile strength of concrete specimens: a multifractal approach“. In: *Magazine of Concrete Research* 50.3 (1998), S. 237–246. DOI: 10.1680/macr.1998.50.3.237.
- [Červenka, 2016] Červenka, V., Jendele, L. und Červenka, J. *ATENA Program Documentation, Part1, Theory*. 2016.
- [Dimitrov, 1953] Dimitrov, N. S. „Ermittlung konstanter Ersatz- Trägheitsmomente für Druckstäbe mit veränderlichem Querschnitt“. In: *Der Bauingenieur* (1953).
- [Erismann, 1992] Erismann, T. H. *Prüfmaschinen und Prüfanlagen*. Springer Berlin Heidelberg, 1992. DOI: 10.1007/978-3-642-50223-1.
- [Eschenauer, 1993] Eschenauer, H. und Schnell, W. *Elastizitätstheorie. Grundlagen, Flächentragwerke, Strukturoptimierung*. BI Wissenschaftsverlag, 1993. ISBN: 34111 62635.
- [Friedrich, 2002] Friedrich, P. *Numerische Untersuchungen zur Erzeugung duktiler hochfester Betone (German Edition)*. Books On Demand, 2002. ISBN: 3831142912.

- [Frocht-1, 1941] Frocht, M. M. *Photoelasticity, Volume I*. John Wiley & Sons, 1941.
- [Frocht-2, 1941] Frocht, M. M. *Photoelasticity, Volume II*. John Wiley & Sons, 1941.
- [Gibson, 1999] Gibson, L. J. und Ashby, M. *Cellular Solids*. Cambridge University Press, 1. Sep. 1999. 532 S. ISBN: 0521499119.
- [Gibson, 2010] Gibson, L. J. *Cellular Materials in Nature and Medicine*. Cambridge University Press, 9. Sep. 2010. 320 S.
- [Goldberg, 1970] Goldberg, M. „The packing of equal circles in a square“. In: *Mathematics Magazine* 43.1 (Jan. 1970), S. 24. DOI: 10.2307/2688107.
- [Gross, 2016] Gross, D. und Seelig, T. *Bruchmechanik*. Springer Berlin Heidelberg, 2016. DOI: 10.1007/978-3-662-46737-4.
- [Grübl, 2002] Grübl, P., Weigler, H. und Karl, S. *Beton: Arten, Herstellung und Eigenschaften*. Ernst & Sohn, 2002. ISBN: 3433013403.
- [Haddon, 1967] Haddon, R. A. W. „Stresses in an infinite plate with two unequal circular holes“. In: *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 20.3 (1967), S. 277–291. DOI: 10.1093/qjmath/20.3.277.
- [Heinz, 2012] Heinz, P., Herrmann, M. und Sobek, W. *Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen Forschungsinitiative Zukunft Bau, Band F 2811, Abschlussbericht*. Techn. Ber. Univ. Stuttgart, Institut für Leichtbau, Entwerfen und Konstruieren (ILEK), Fraunhofer IRB Verlag, 2012.
- [Herrmann-1, 2015] Herrmann, M. „Untersuchungen zur Gewichtsoptimierung einachsiger biege- und querkraftbeanspruchter Bauteile - Gradientenbeton“. Diss. Universität Stuttgart, 2015.
- [Herrmann-2, 2015] Herrmann, M. und Sobek, W. *Entwicklung gewichtsoptimierter funktional gradierter Elementdecken. Abschlussbericht*. Fraunhofer IRB-Verlag, 2015. ISBN: 9783816795131.
- [Huber-1, 2019] Huber, C. und Eilbracht, G. *Versuchsbericht zu Kurzzeitfestigkeit von einachsig belasteten Lochfeldern (unveröffentlicht)*. Techn. Ber. Fachhochschule Kärnten, Fachgebiet Statik und Tragwerkslehre, 2019.

- [Huber-2, 2019] Huber, C., Eilbracht, G. und Sobek, W. „Druckfestigkeit von Lochfeldern aus Normalbeton unter einachsiger Kurzzeitbeanspruchung“. In: *Beton- und Stahlbetonbau* (2019). DOI: 10.1002/best.201900070.
- [Kirsch, 1898] Kirsch, G. „Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre“. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* (1898).
- [Kollbrunner, 1955] Kollbrunner, C. F. und Meister, M. *Knicken*. Springer Berlin Heidelberg, 1955. DOI: 10.1007/978-3-642-52945-0.
- [Kovaleva, 2018] Kovaleva, D. u. a. „Rosenstein-Pavillon“. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 113.6 (Mai 2018), S. 433–442. DOI: 10.1002/best.201800012.
- [Kupfer, 1973] Kupfer, H. *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Hrsg. von Stahlbeton; 229, D. A. für. Beuth, 1973.
- [Leon, 1908] Leon, A. „Über die Spannungsstörungen durch Kerben und Tellen und über die Spannungsverteilung in Verbundkörpern“. In: *Wochenschr. f. d. öff. Baudienst* 14 (1908), S. 770.
- [Leonhardt, 1940] Leonhardt, F. „Leichtbau - eine Forderung unserer Zeit: Anregungen für den Hoch- und Brückenbau“. In: *Bautechnik* 18 (1940), S. 413–423.
- [Leonhardt, 1984] Leonhardt, F. und Mönning, E. *Vorlesungen über Massivbau*. Springer Berlin Heidelberg, 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-61739-3.
- [Leppmeier, 1997] Leppmeier, M. *Kugelpackungen von Kepler bis heute*. Vieweg+Teubner Verlag, 13. Juni 1997. 216 S. ISBN: 3528067926.
- [Ling, 1948] Ling, C.-B. „On the stresses in a plate containing two circular holes“. In: *Journal of Applied Physics* 19.1 (1948), S. 77–82. DOI: 10.1063/1.1697875.

- [Linse, 1988] Linse, D. und Stegbauer, A. *Festigkeit und Verformungsverhalten von Beton unter hohen zweiachsigen konstanten Dauerbelastungen und Dauerschwellbelastungen - Festigkeit und Verformungsverhalten von Leichtbeton, Gasbeton, Zementstein und Gips unter zweiachsigen Kurzzeitbeanspruchungen*. 254. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton; 254, 1988. ISBN: 978-3410654544.
- [Mahnken, 2015] Mahnken, R. *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Elastostatik: Mit einer Einführung in Hybridstrukturen (German Edition)*. Springer Vieweg, 2015. ISBN: 978-3-662-44797-0.
- [Mier, 1984] Mier, J. G. M. van. „Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions“. en. Diss. Mai 1984. DOI: 10.6100/ir145193.
- [Mier, 1986] Mier, J. G. M. van. „Multiaxial strain-softening of concrete“. In: *Materials and Structures* 19.3 (Mai 1986), S. 190–200. DOI: 10.1007/bf02472035.
- [Mier, 1997] Mier, J. G. M. van und Vervuurt, A. „Numerical analysis of interface fracture in concrete using a lattice-type fracture model“. In: *International Journal of Damage Mechanics* 6.4 (Okt. 1997), S. 408–432. DOI: 10.1177/105678959700600403.
- [Moldenhauer, 2016] Moldenhauer, H. „Die orthotrope Wärmeleitung als numerischer Integrator allgemeiner Richtungsfelder mit Anwendung zur optimalen Faserplatzierung und Kraftflussvisualisierung“. Dissertation. Fakultät für Maschinenbau, Karlsruher Institut für Technologie, 2016. DOI: 10.5445/IR/1000060087.
- [Mori, 1973] Mori, T. und Tanaka, K. „Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions“. In: *Acta Metallurgica* 21.5 (Mai 1973), S. 571–574. DOI: 10.1016/0001-6160(73)90064-3.
- [Muskhelishvili, 1974] Muskhelishvili, N. I. *Einige Grundaufgaben zu mathematischen Elastizitätstheorie. Übersetzung aus dem Russischen*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1974.
- [Neuber, 2001] Neuber, H. *Kerbspannungslehre*. Springer Berlin Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-642-56793-3.

- [Otto, 1995] Otto, F. *IL 35, Pneu und Knochen; IL 35, Pneu and Bone*. Krämer, Stuttgart, 1995. ISBN: 3-7828-2035-5.
- [Ožbolt, 1995] Ožbolt, J. „Maßstabseffekt und Duktilität von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen. (Habilitationsschrift)“. Diss. Univ. Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen -IWB- (Herausgeber), 1995.
- [Peikert, 1994] Peikert, R. „Dichteste Packungen von gleichen Kreisen in einem Quadrat“. In: *El. Math* 49 (1994). DOI: 10.5169/sea1s-45416.
- [Pilkey, 2008] Pilkey, W. D. und Pilkey, D. F. *Peterson's Stress Concentration Factors*. John Wiley & Sons, 1. Feb. 2008. 560 S. ISBN: 0470048247.
- [Reinhardt, 2010] Reinhardt, H.-W. *Ingenieurbaustoffe (German Edition)*. Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, 2010. ISBN: 9783433029206.
- [Sawin, 1956] Sawin, G. N. *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*. Bd. 38. 9-10. Verlag Technik, 1956, S. 410–410. DOI: 10.1002/zamm.19580380920.
- [Schaer, 1965] Schaer, J. und Meir, A. „On a geometric extremum problem“. In: *Canadian Mathematical Bulletin* 8.1 (Feb. 1965), S. 21–27. DOI: 10.4153/cmb-1965-004-x.
- [Schickert, 1981] Schickert, G. „Formfaktoren der Betondruckfestigkeit“. In: *Bautechnik* 2/1981 (1981), S. 52–57.
- [Schlaich, 2013] Schlaich, J. „Leichtbau - eine Forderung unserer Zeit“. In: *Bautechnik* 90.12 (2013), S. 825–838. DOI: 10.1002/bate.201310001.
- [Schmeer, 2018] Schmeer, D. und Sobek, W. *Beton-Kalender 2019 Teil1, Kapitel IV*. Ernst W. + Sohn Verlag, (Herg. Fingerloos, Frank und Wörner, Johann-Dietrich), 21. Nov. 2018. ISBN: 3433032424.
- [Schmeer, 2020] Schmeer, D. „Mesogradierung von Betonbauteilen - Herstellung und Tragverhalten von Betonbauteilen mit integrierten mineralischen Hohlkugeln (unveröffentlicht)“. Diss. Universität Stuttgart, 2020.
- [Sobek, 1995] Sobek, W. „Zum Entwerfen im Leichtbau“. In: *Bauingenieur* 70 (1995), S. 323–329.

- [Sobek, 2010] Sobek, W., Trumpf, H. und Heinlein, F. „Recyclinggerechtes Konstruieren im Stahlbau“. In: *Stahlbau* 79.6 (2010), S. 424–433. DOI: 10.1002/stab.201001337.
- [Sobek, 2014] Sobek, W. „Ultraleichtbau“. In: *Stahlbau* 83.11 (2014), S. 784–789. DOI: 10.1002/stab.201410211.
- [Szabó, 2001] Szabó, I. *Höhere Technische Mechanik*. Springer Berlin Heidelberg, 2001. DOI: 10.1007/978-3-642-56795-7.
- [Thum, 1939] Thum, A. und Federn, K. *Spannungszustand und Bruchausbildung*. Springer Berlin Heidelberg, 1939. DOI: 10.1007/978-3-662-36315-7.
- [Tölke, 1929] Tölke, F. „Bedenkliche Trugschlüsse in der Bemessung gespreizter Druckstäbe“. In: *Bauingenieur* (1929).
- [Tóth, 1972] Tóth, L. F. *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*. Springer Berlin Heidelberg, 1972. DOI: 10.1007/978-3-642-65234-9.
- [Wagner, 2018] Wagner, M. „Berechnung und Darstellung von Hauptspannungstrajektorien und deren Spannungsgrößen mittels Matlab“. Magisterarb. Fachgebiet: Baustatik und Tragwerkslehre, Fachhochschule Kärnten, 2018.
- [Wesche, 1993] Wesche, K. *Baustoffe für tragende Bauteile*. Vieweg+Teubner Verlag, 1993. DOI: 10.1007/978-3-322-80187-6.
- [Wyss, 1948] Wyss, T. „Die Kraftfelder in festen Körpern: Zum Gedenken an G. H. Meyer und K. Culmann ; [Vortr. geh. am 5. Jan. 1948 in d. N. G. Z.]“ In: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich* 93.3 (Sep. 1948).
- [Zilch, 2010] Zilch, K. und Zehetmaier, G. *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Springer Berlin Heidelberg, 2010. DOI: 10.1007/978-3-540-70638-0.

**A N H A N G**

## Anhangsverzeichnis

A	Anhang . . . . .	A3
A.1	Druckfestigkeit und E-Modul – Charge 2 . . . . .	A3
A.2	Druckfestigkeit und E-Modul – Charge 3 . . . . .	A5



# A Anhang

## A.1 Druckfestigkeit und E-Modul – Charge 2

Die Tab. A.1 zeigt Druckfestigkeiten sowie die gemessenen Stauchungen bei  $0,8 \epsilon_{cm}$  bei 80 % der Höchstlast von Lochfeldern der Charge 2.

Tab. A.1: Übersicht der Kennwerte (Druckfestigkeit, Stauchung bei 80 % der Druckfestigkeit und dem E-Modul) der Scheiben und Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität (Charge 2)

Code	Porosität	Druckfestigkeit (bei $1,0 f_{cm}$ ) $f_{cm}$ [MPa]	Stauchung (bei $0,8 f_{cm}$ ) $\epsilon_{c,0,8}$ [‰]	E-Modul (bei $0,8 f_{cm}$ ) $E_{Sch}/E_{LF}$ [MPa]
Layout	[%]			
n0 	0 %	-21,61	-3,85	4727*
n1 	40 %	-2,47	-2,84	708
n4 	10 %	-17,77	-3,16	4510
n4 	20 %	-12,38	-2,33	4273
n9 	20 %	-10,21	-2,39	4299
n16 	30 %	-8,81	-2,57	2802
n25 	30 %	-7,87	-2,56	2504
n36 	40 %	-2,61	-1,62	1412

Anmerkung: \* Eingangswerte FE-Analyse ( $E_{Sch}=0,8 f_{cm}/\epsilon_{cm,0,8}$ )

$E_{Sch}$  := E-Modul der Scheibe;  $E_{LF}$  := E-Modul des Lochfeldes  
(Mittelwerte aus  $n=3$  Probekörper)

Ausgehend vom Spannungs-Stauchungs-Diagramm ergibt sich der E-Modul als Sekantenmodul aus der Spannung und gemessenen Stauchung. Die Lochfelder haben dabei eine unterschiedliche Porosität von 10–50 %. Die Löcher sind wieder fluchtend angeordnet.

Die Abb. A.1 zeigt die Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher für die unterschiedliche Porosität der Lochfelder (Charge 2, fluchtende Anordnung). Die Druckfestigkeit ist unabhängig von der Anzahl der Löcher. Die Qualität des FE-Modells zeigt sich hier wieder.

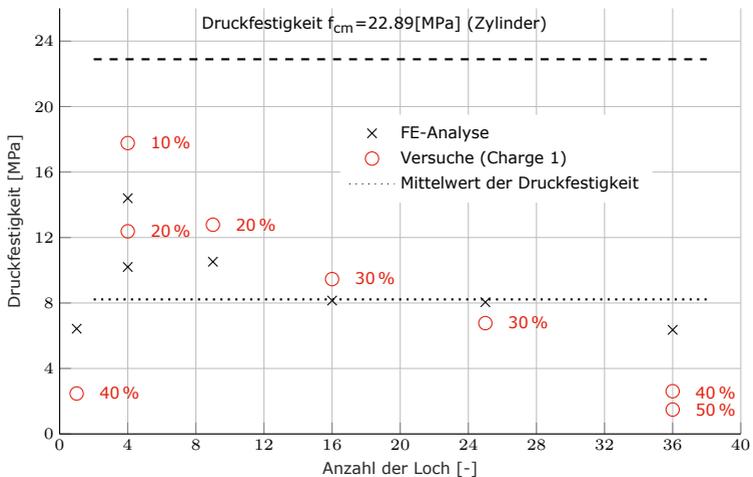


Abb. A.1: Mittelwert der Druckfestigkeit von Lochfeldern mit unterschiedlicher Porosität aus Versuch und FE-Analyse (Charge 2). Die Druckfestigkeiten sind in von Abhängigkeit der Anzahl der Löcher aufgetragen. Zum Vergleich ist zusätzlich die Festigkeit der Scheibe eingezeichnet.

## A.2 Druckfestigkeit und E-Modul – Charge 3

Die Tab. A.2 bzw. Tab. A.3 zeigt Druckfestigkeiten sowie die gemessenen Stauchungen bei  $0,8 \epsilon_{cm}$  bei 80 % der Höchstlast von Lochfelder der Charge 3.

Tab. A.2: Teil 1 - Übersicht der Kennwerte (Druckfestigkeit, Stauchung bei 80 % der Druckfestigkeit und dem E-Modul) der Scheiben und Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität (Charge 3)

Code	Porosität	Druckfestigkeit (bei $1,0 f_{cm}$ ) $f_{cm}$ [MPa]	Stauchung (bei $0,8 f_{cm}$ ) $\epsilon_{c,0.8}$ [%]	E-Modul (bei $0,8 f_{cm}$ ) $E_{Sch}/E_{LF}$ [MPa]
<b>Layout</b>	[%]			
n0 	0 %	-24,53	-2,43	8078*
n8 	20 %	-2,94	-1,64	1798
n8 	30 %	-1,51	-1,45	1048
n8 	40 %	-1,19	-1,62	765
n16 	30 %	-2,14	-1,48	1445
n18 	10 %	-4,94	-1,72	2899
n18 	40 %	-0,98	-3,81	391
n25 	20 %	-4,94	-2,04	2490

Tab. A.3: Teil 2 - Übersicht der Kennwerte (Druckfestigkeit, Stauchung bei 80 % der Druckfestigkeit und dem E-Modul) der Scheiben und Lochfelder mit unterschiedlicher Porosität (Charge 3)

Code	Porosität	Druckfestigkeit (bei 1,0 $f_{cm}$ ) $f_{cm}$ [MPa]	Stauchung (bei 0,8 $f_{cm}$ ) $\epsilon_{c,0,8}$ [%]	E-Modul (bei 0,8 $f_{cm}$ ) $E_{Sch}/E_{LF}$ [MPa]
Layout	[%]			
n25				
	20 %	-4,94	-2,04	2490
n25				
	30 %	-2,70	-1,57	1872

Anmerkung: \* Eingangswerte FE-Analyse ( $E_{Sch}=0,8 \cdot f_{cm} / \epsilon_{c,0,8}$ )  
 $E_{Sch}$  := E-Modul der Scheibe;  $E_{LF}$  := E-Modul des Lochfelds  
(Mittelwerte aus n=3 Probekörper)

Ausgehend vom Spannungs-Stauchungs-Diagramm ergibt sich der E-Modul als Sekantenmodul aus der Spannung und gemessenen Stauchung. Die Lochfelder haben dabei unterschiedliche Porosität von 10–40 %. Die Löcher sind versetzt bzw. fluchtend angeordnet.

Die Abb. A.2 zeigt die Druckfestigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher für die unterschiedliche Porosität der Lochfelder (Charge 3, fluchtende und versetzte Anordnung). Die Druckfestigkeit ist unabhängig von der Anzahl der Löcher. Die Qualität des FE-Modells zeigt sich hier wieder.

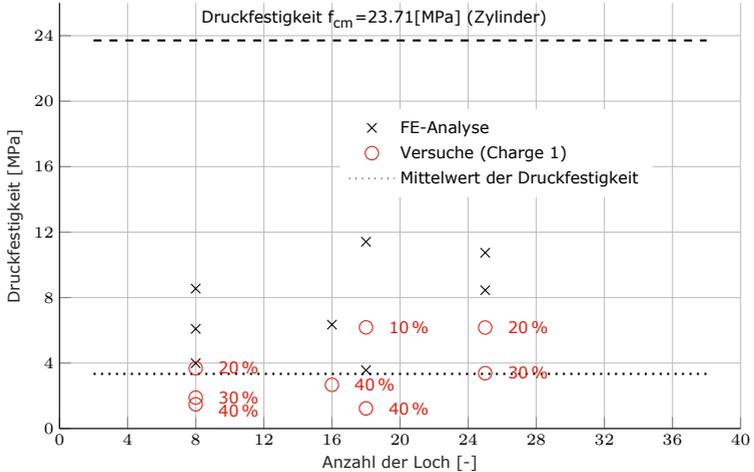


Abb. A.2: Mittelwert der Druckfestigkeit von Lochfeldern mit unterschiedlicher Porosität aus Versuch und FE-Analyse (Charge 3). Die Druckfestigkeiten sind in Abhängigkeit von der Anzahl der Löcher aufgetragen. Zum Vergleich ist zusätzlich die Festigkeit der Scheibe eingezeichnet.

Christoph Huber

# Untersuchungen an Lochfeldern aus Normalbeton

Ein Beitrag zum Gradientenbeton

Für den Entwurf und die praxisorientierte Bemessung von Bauteilen aus mesogradierem Beton ist die Kenntnis der Zusammenhänge zwischen Tragverhalten und Festigkeit in Abhängigkeit von der Porenstruktur (Porosität) ausschlaggebend. Für die vorliegende Dissertation wurde anhand von Versuchen an Probekörpern und FE-Analysen der Frage nachgegangen, wie sich die Probekörperfestigkeit eines Lochfeldes aus Normalbeton verändert.

Mit den zwei hier entwickelten modifizierten »Materialparametern« kann eine aufwendige Herstellung von Lochfeldern entfallen und dadurch ein homogenisiertes Modell für die Bemessung verwendet werden.

ISBN 978-3-7388-0777-6



9 783738 807776

Fraunhofer IRB | Verlag