

# Bemessungsfibel für tragende Kunststoffteile

**F 1752**

F 1752

Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um die Kopie des Abschlußberichtes einer vom Bundesministerium für Verkehr, Bau- und Wohnungswesen -BMVBW- geförderten Forschungsarbeit. Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

# INSTITUT FÜR KUNSTSTOFFVERARBEITUNG

in Industrie und Handwerk an der Rhein.-Westf. Technischen Hochschule Aachen  
LEHRSTUHL FÜR KUNSTSTOFFVERARBEITUNG  
PROF. DR.-ING. G. MENGES



## Schlußbericht

zum

Forschungsauftrag BI5-800178-22

Thema: Querschnittsbericht zur Bemessung von Bauteilen  
aus GFK; Aufstellen von Bemessungstabellen

Kurzthema: Bemessungsfibel für tragende Kunststoffteile

Auftraggeber: Der Bundesminister für Raumordnung, Bauwesen  
und Städtebau

Auftragnehmer: Institut für Kunststoffverarbeitung an der  
RWTH Aachen

Leiter: Prof. Dr.-Ing. G. Menges

Bearbeiter: Dr.-Ing. U. Thebing  
Dipl.-Ing. W. Enderle

Prof. Dr.-Ing. G. Menges

Der Bericht umfaßt:

197 Seiten  
103 Abbildungen  
3 Tabellen

Informationsverbundzentrum RAUM und BAU  
der Fraunhofer-Gesellschaft

Inventar-Nr. F 1752 lfd. Nr. 8111 3325



## Inhaltsverzeichnis

### Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen

1. Einleitung
2. Definitionen einiger wesentlicher Begriffe
3. Baustoffkomponenten für Verbundwerkstoffe
  - 3.1. Matrixwerkstoffe (nach DIN 16945 und 16946)
  - 3.2. Verstärkungswerkstoffe
  - 3.3. Herstellungsverfahren von GFK
4. Eigenschaften von Verstärkungs-, Matrix- und Verbundwerkstoffen
  - 4.1. Eigenschaften der Verstärkungswerkstoffe
    - 4.1.1. Reaktionen des Verstärkungsmaterials auf äußeren Lastangriff
    - 4.1.2. Reaktionen des Verstärkungswerkstoffes auf Temperaturänderungen
    - 4.1.3. Reaktionen des Verstärkungswerkstoffes auf unterschiedliche Medien
  - 4.2. Eigenschaften der Kunststoffmatrixwerkstoffe
    - 4.2.1. Reaktionen von Kunststoffen auf äußere Kräfte
    - 4.2.2. Reaktionen von Kunststoffen auf Temperaturänderungen
    - 4.2.3. Reaktionen von Kunststoffen auf unterschiedliche Medien
    - 4.2.4. Kunststoffe unter statischer Last
    - 4.2.5. Kunststoffe unter Lastwechseln
  - 4.3. Eigenschaften von Verbundwerkstoffen
    - 4.3.1. Ursachen der Verstärkungs- bzw. Versteifungswirkung bei Verbundwerkstoffen
    - 4.3.2. Mischungsregel, Parallel- bzw. Reihenschaltung von Matrix und Verstärkungstoff
    - 4.3.3. Verstärkung durch Füllstoffe und Fasern

5. Bemessen von Bauteilen aus glasfaserverstärktem Kunststoff
  - 5.1. Bemessen einer quasiisotropen Schicht
    - 5.1.1. Ermittlung des E-Moduls einer quasiisotropen Schicht (Wirrlaminat) ohne Berücksichtigung des Temperatur- und Zeiteinflusses
    - 5.1.2. Ermittlung des E-Moduls einer quasiisotropen Schicht unter Berücksichtigung der Temperatur- und Zeitabhängigkeit der Harzkenngrößen
    - 5.1.3. Zwei Vorgehensweisen zum Bemessen einer quasiisotropen Schicht im ebenen Spannungszustand
  - 5.2. Bemessung orthotrop faserverstärkter Verbundwerkstoffe mit Hilfe der Kontinuumstheorie
  - 5.3. Bemessen mit Hilfe der Netztheorie
    - 5.3.1. Vereinbarungen
    - 5.3.2. Ermittlung der Kräfte in den Faserschichten
      - 5.3.2.1. Definition, Gleichgewichtsbedingung
      - 5.3.2.2. Kräfte in den Faserschichten bei Laminaten mit drei Faserrichtungen
      - 5.3.2.3. Kräfte in den Faserschichten bei Laminaten mit zwei Faserrichtungen
    - 5.3.3. Optimierungsregeln zum Bemessen eines GFK-Verbundes nach der Netztheorie
      - 5.3.3.1. im einachsigen Spannungszustand
      - 5.3.3.2. im zweiachsigen Spannungszustand
      - 5.3.3.3. für Hauptnormalkräfte mit gleichem Vorzeichen
      - 5.3.3.4. für Hauptnormalkräfte mit ungleichem Vorzeichen
    - 5.3.4. Darstellung der Vorgehensweise im Flußdiagramm
  - 5.4. Nomogramme zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln und Schubmoduln einiger charakteristischer GFK-Verbunde
  - 5.5. Nomogramme zur Abschätzung der Bruchfestigkeiten einiger charakteristischer GFK-Verbunde
  - 5.6. Versagensmechanismen und Versagenshypothesen
    - 5.6.1. Versagensmechanismen
    - 5.6.2. Versagenshypothesen
  - 5.7. Dimensionierung gegen Rißbildung bei Kontinuumstheorie

- 5.8. Thermisches Ausdehnungsverhalten und thermische Spannungen bei GFK
- 5.9. Die Wärmeleitfähigkeit von GFK
- 5.10. Stabilitätsrechnung für großflächige und schlanke Bauteile
  
- 6. Literaturverzeichnis

## Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

$c_{ij}$	Steifigkeit einer Einzelschicht
$\hat{c}_{ij}$	Gesamtsteifigkeit eines Mehrschichtverbundes
$d$	mechanischer Verlustfaktor
$f$	Frequenz
$f_{\varphi}$	Einflußfaktor für die Verstärkung
$f_{\vartheta}$	Einflußfaktor für die Temperatur
$f_t$	Einflußfaktor für die Zeit
$k$	Verhältnis von Belastungs- zur Zykluszeit
$k_{\varphi}$	Tragfaktor
$l$	Länge
$l_{\text{krit}}$	kritische Länge von Verstärkungsfasern
$p_x$ } $p_y$ }	äußere Normalkräfte je Einheit der Laminatbreite
$p_{xy}$	äußere Schubkraft je Einheit der Laminatbreite
$r$	Radius
$s = \frac{V}{l \cdot U}$	Geometriefaktor der Wärmerechnung
$\hat{s}_{ij}$	Nachgiebigkeit eines Verbundes
$t$	Zeit
$t$	Schichtdicke
$x$ } $y$ } $z$ }	Koordinaten

A	Querschnittsfläche
C	Schwingformfaktor
E	Elastizitätsmodul
F	Kraft
G	Schubmodul
S	Sicherheitsbeiwert
$T_o$	Zykluszeit
$T_B$	Belastungszeit
U	Umfang
V	Volumen
$\alpha$	Winkel
$\alpha$	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient
$\beta$	Winkel
$\gamma$	Schiebung
$\delta$	Phasenwinkel
$\epsilon$	Dehnung
$\epsilon_a$	Ausschlagsdehnung
$\epsilon_m$	Mitteldehnung
$\epsilon_u$	untere Einhüllende der Dehnungsausschläge
$\epsilon_o$	obere Einhüllende der Dehnungsausschläge
$\epsilon_{max}$	Wert der Dehnung unter der Last $\sigma_{max}$
$\Delta\epsilon_o$	Differenz zwischen $\epsilon_{max}$ und $\epsilon_o$
$\vartheta$	Temperatur

$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\nu$	Querkontraktion
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Spannung
$\sigma_a$	Ausschlagspannung
$\sigma_{a\ddot{a}}$	auf die Schwingform bezogene äquivalente Ausschlagspannung
$\bar{\sigma}_a$	auf die Lastform bezogene äquivalente Ausschlagspannung
$\hat{\sigma}$	Laminatmittelspannung
$\sigma_m$	Mittelspannung
$\sigma_o$	Oberspannung
$\sigma_u$	Unterspannung
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Glasvolumenanteil
$\psi$	Glasgewichtsanteil
$\omega$	Winkel
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Delta$	kennzeichnet eine Differenz
$\alpha^*$	Wärmeübergangskoeffizient

## Indices

d	Index für Druck
gl	Index für Gleichgewicht
i	Laufindex
j	Laufindex
k	Laufindex zur Numerierung der Schichten
m	Index für Matten
max	Index für Maximalwert
min	Index für Minimalwert
o	oberer Wert
u	Index für Umgebung
z	Index für Zug
B	Index für Bruch
F	Index für Füllstoff, Faser
G	Index für Glas
H	Index für Harz (Matrix)
M	Index für Matrix
V	Index für Verbundwerkstoff
1,2	Indices zur Kennzeichnung der Symmetrieachsen eines Verbundes
//	Index für parallel zur Verstärkungsrichtung bei UD-Schichten
⊥	Index für senkrecht zur Verstärkungsrichtung bei UD-Schichten

#

Index für parallel und senkrecht zur  
Verstärkungsrichtung bei UD-Schichten

III, III

bei Querkontraktionszahlen gibt der erste  
Index die Richtung der Kontraktion, der  
zweite die Richtung der Last an, die die  
Kontraktion hervorruft

## 1. Einleitung

In jüngster Zeit sind gerade auf dem Gebiet der verstärkten Kunststoffe viele neue Erkenntnisse gewonnen und veröffentlicht worden. Diese stellen größtenteils auf wissenschaftlicher Basis die erzielten Ergebnisse dem Leser dar. Diese Darstellungen sind jedoch oft so kompliziert und für den Nichtfachmann verwirrend, daß auf diese Art diejenigen, die mit den Erkenntnissen arbeiten sollen, davon abgeschreckt werden. So geschieht es nicht selten, daß allein aufgrund ihrer Darstellung wichtige Erkenntnisse nicht zur Anwendung gelangen und noch nach veralteten, manchmal sogar als falsch erkannten Methoden weiter gearbeitet wird.

Sowohl aus volks- wie betriebswirtschaftlicher Sicht - nicht zuletzt auch im Zeichen einer weltweiten Rohstoffverknappung - ist es jedoch äußerst wichtig, daß alle Erkenntnisse, die z. B. zu wirtschaftlichem Dimensionieren führen oder die z. B. Schadensfälle verhindern können, jedem Konstrukteur bzw. anders Verantwortlichen eindeutig anwendbar zur Verfügung stehen.

Auch im Hinblick auf eine anstehende Normung von Kunststoffen, insbesondere der für das Bauwesen so wichtigen glasfaserverstärkten UP- und EP-Harze, erscheint eine entsprechende Vorarbeit zur Datensammlung als äußerst wichtig.

Ziel der hier vorgelegten Untersuchungen sollte es daher sein, wissenschaftlich komplizierte Zusammenhänge in einfacher und übersichtlicher Form zusammenzutragen und mit einfach handhabbaren Diagrammen und Nomogrammen darzustellen, um so dem Ausführenden (Konstrukteur) eine Entscheidungshilfe in die Hand zu geben, die eine werkstoffgerechte Konstruktion gewährleistet.

## 2. Definitionen einiger wesentlicher Begriffe

Ein Glasfaserverstärkter Kunststoff - GFK als Abkürzung - ist ein Verbundwerkstoff, der seine hohe mechanische Festigkeit der Ordnung eines Glasfasergerüsts verdankt, das in eine Kunststoffmatrix eingebettet ist. Diese Ordnung ist entweder vorgegeben, z. B. bei Geweben, oder sie wird während der Verarbeitung erzeugt, z. B. beim Wickelverfahren.

Das Fasergerüst wird durch die Tränkung mit einem Reaktionsharz fixiert. Das Harz selber kann je nach Typ drucklos oder unter Druck, bei Raumtemperatur oder bei erhöhter Temperatur aushärten.

Unter einem Verbundwerkstoff versteht man die Kombination zweier oder mehrerer Materialien auf makroskopischer Ebene zu einem Werkstoff, der die Nachteile der einen Komponente durch die Vorteile der anderen auszugleichen sucht. Verbundwerkstoffe weisen in der Regel anisotrope Eigenschaften auf.

Ein Laminat ist ein Schichtwerkstoff, der aus mehreren, meistens dünnen GFK-Schichten mit richtungsabhängigen (anisotropen) und/oder richtungsunabhängigen (isotropen) Eigenschaften aufgebaut ist.

Eine unidirektionale Schicht (abgekürzt: UD-Schicht) ist eine Schicht in einem Laminat, in der alle Faserverstärkungen eine Vorzugsrichtung aufweisen.

Wirrfaserlamine (abgekürzt: GF-UP-M nach Normentwurf bei Verwendung von UP-Harz als Matrixmaterial) sind alle Lamine, bei denen die Textilglasverstärkung, Matten oder geschnittene Rovings, in der Ebene keine bevorzugte Ausrichtung hat.

Mischfaserlamine (abgekürzt: GF-UP-MW) sind alle Lamine, in denen Wirrfaserschichten mit solchen Schichten abwechseln, in denen gerichtete Textilglasverstärkungen (Gewebe, Gelege) verwendet werden oder Lamine, in denen geschnittene Rovings gerichtet angeordnet sind (Schleuderverfahren).

Wickellamine (abgekürzt: GF-UP-F) sind Lamine, in denen zwischen den gewickelten Schichten aus Textilglas-Rovingsträngen Lagen aus Wirrfasern, Geweben oder Gelegen vorhanden sind.

Verbundwerkstoffe haben einige Eigenschaften, die sich von den mehr herkömmlichen Werkstoffen unterscheiden. Einige Eigenschaften sind bloß Modifikationen des herkömmlichen Verhaltens; andere jedoch sind völlig neu und verlangen dementsprechend neue analytische und experimentelle Vorgehensweisen.

Die meisten technisch gebräuchlichen Werkstoffe sind homogen und isotrop.

Ein homogener Körper hat makroskopisch an allen Stellen die gleichen Eigenschaften.

Ein isotroper Körper hat in allen Richtungen in bezug auf seine physikalischen Eigenschaften einander gleichwertige Eigenschaften.

Im Gegensatz dazu sind Verbundwerkstoffe häufig inhomogen und nicht-isotrop bzw. anisotrop.

Ein inhomogener Körper hat an verschiedenen Stellen verschiedene Eigenschaften.

Ein orthotroper Körper hat verschiedene Eigenschaften in drei zueinander senkrechten Richtungen an einer Stelle und außerdem drei zueinander senkrechte Symmetrieebenen bzgl. der Werkstoffeigenschaften. Damit werden die Eigenschaften eine Funktion der Orientierung an einer bestimmten Stelle im Körper.

Ein anisotroper Körper hat an bestimmten Stellen unterschiedliche richtungsabhängige Materialeigenschaften. Es existieren ferner keine Symmetrieebenen bzgl. der Werkstoffeigenschaften.

Das Verhalten von isotropen, orthotropen und anisotropen Materialien unter Normal- bzw. Schubspannungen ist in Bild 1 gezeigt und soll im folgenden näher erläutert werden.

Bei isotropen Materialien bewirkt eine Normalspannung eine Ausdehnung in der Richtung der angreifenden Kraft (Spannungen) und ein Zusammenziehen in der dazu senkrechten Richtung. Auf gleiche Art bewirken Schubspannungen nur Schubverformungen.

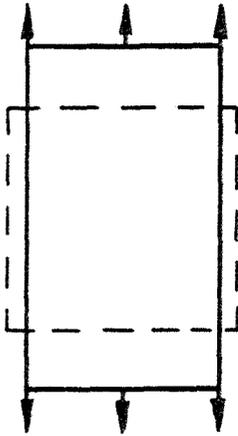
Bei orthotropen Materialien bewirken, ähnlich wie bei isotropen Materialien, Normalspannungen dann eine Ausdehnung in Richtung der angreifenden Kraft bzw. eine Kontraktion senkrecht dazu, wenn die angreifende Kraft in einer der drei orthogonalen Symmetrieebenen wirkt. Wegen der unterschiedlichen Eigenschaften in den beiden anderen Richtungen kann jedoch die Kontraktion größer oder kleiner sein als die eines ähnlich beanspruchten isotropen Materials mit dem gleichen E-Modul in allen Richtungen.

Schubspannungen bewirken ebenfalls Schubverformungen, aber die Verformungsgröße hängt nicht von den unterschiedlichen (richtungsabhängigen) Moduln und Querkontraktionszahlen ab, d.h. der Schubmodul eines orthotropen Materials ist unabhängig von anderen Materialeigenschaften.

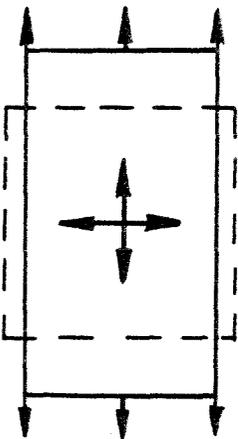
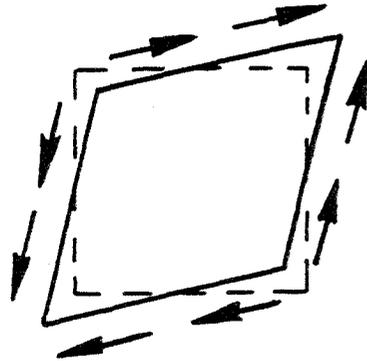
Bei anisotropen Materialien führt der Angriff von Normalspannungen nicht nur zu einer Ausdehnung in Richtung der angreifenden Kraft und einer entsprechenden Querkontraktion, sondern auch zu Schubverformungen. Schubspannungen bewirken neben Schubverformungen zusätzlich Dehnungen und Kontraktionen. Die Verknüpfung zwischen beiden Lastarten (Normal- und Schubspannung) und bei den Verformungsarten ist ebenfalls für ein orthotropes Material charakteristisch, wenn es nicht in einer Hauptrichtung (Symmetrieebene) beansprucht wird.

Normal-  
spannung

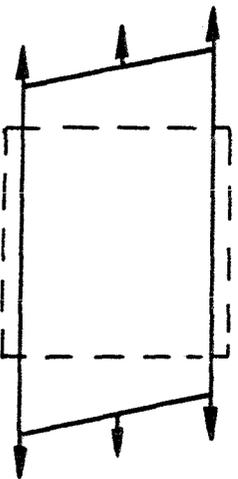
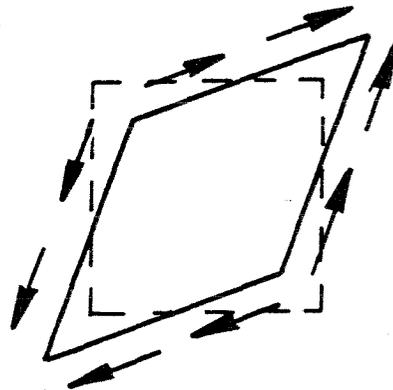
Schub-  
spannung



*Isotrop*



*Orthotrop*



*Anisotrop*

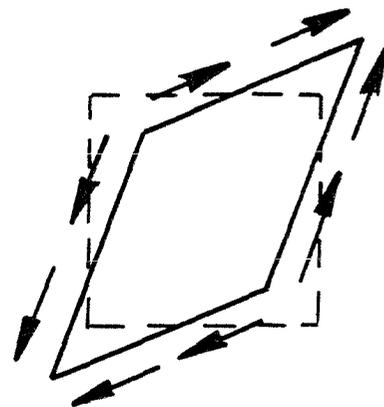


Bild 1: Verformungsverhalten in Abhängigkeit vom Material-  
aufbau

### 3. Baustoffkomponenten für Verbundwerkstoffe

#### 3.1. Matrixwerkstoffe (nach DIN 16945 und 16946)

Reaktionsharze sind flüssige oder verflüssigbare Harze, die für sich oder mit Reaktionsmitteln (Härter, Beschleuniger u. a.) ohne Abspaltung flüchtiger Komponenten durch Polyaddition bzw. Polymerisation härten.

Ungesättigte Polyesterharze (UP-Harze) sind Polyesterharze, bei denen mindestens eine der Komponenten, Polyalkohol oder Polycarbonsäure, ungesättigt ist und die mit monomeren polymerisierbaren Verbindungen copolymerisierbar sind.

Epoxidharze (EP-Harze) sind Reaktionsharze mit einer zur Härtung ausreichenden Anzahl an Epoxy-Gruppen.

Daneben existieren noch Methacrylatharze sowie Isocyanatharze u. a. m. die jedoch im Rahmen dieser Arbeit keine Anwendung finden.

Als Reaktionsmittel werden im wesentlichen Härter und Beschleuniger benötigt.

Härter sind Stoffe oder Stoffgemische, die die Polymerisation oder Polyaddition und damit das Härten bewirken.

Beschleuniger sind Substanzen, die, in kleinen Mengen zugesetzt, Reaktionen, z. B. die Vernetzungsreaktion, beschleunigen.

### 3.2. Verstärkungswerkstoffe

Verstärkungswerkstoffe stellen im Rahmen dieser Arbeit Textilglasfaser-Erzeugnisse nach DIN 61853, DIN 61854 und DIN 61855 dar. Die im folgenden erläuterten wichtigsten Begriffe sind DIN 61850 entnommen.

#### Glasfilament

Textilglasfaser praktisch unbegrenzter Länge und bestimmten Faserdurchmessers, die aus geschmolzenem Glas gezogen ist.

#### Glasstapelfaser

Textilglasfaser begrenzter Länge (Spinnfaser) und bestimmten Faserdurchmessers, die aus geschmolzenem Glas mechanisch oder mittels gasförmiger Medien gewonnen ist.

#### Glasspinnfaden

Die bestimmte Anzahl einzelner Glasfilamente, die ohne Drehung in weitgehend paralleler Ordnung zu einem Faden einheitlicher Garnfeinheit vereinigt sind.

#### Textilglasroving

Die bestimmte Anzahl annähernd parallel zu einem Strang zusammengefaßter Glasspinnfäden.

#### Textilglasmatte

Nicht gewebtes Flächengebilde einheitlichen Flächengewichts aus Glasspinnfäden

#### Textilglasgelege

Nicht gewebtes Flächengebilde aus einem oder mehreren Fadensystemen, deren Fäden parallel nebeneinander liegen. Die Fäden können miteinander verklebt sein.

### Textilglasgewebe

Flächengebilde aus Glasgarnen, das auf einer Webmaschine hergestellt ist und aus zwei Fadensystemen (Kette und Schuß) besteht, deren Fäden sich in einer bestimmten Bindungsart rechtwinklig miteinander verkreuzen.

### Textilglas-Rovinggewebe

Glasgewebe, dessen Kette und/oder Schuß vorwiegend aus Glasrovings bestehen.

### 3.3. Herstellungsverfahren von GFK:

Für die Herstellung von Wirrfaserlaminaten gibt es die folgenden Fertigungsverfahren:

- a) Handlaminieren
- b) Faserspritzen
- c) Injektions- und Vakuumverfahren
- d) Naßpressen

Für die Herstellung von Mischlaminaten gibt es alle vier der oben genannten Herstellungsverfahren sowie auch das Schleuderverfahren.

Wickellamine werden im Wickelverfahren mit Zwischenlagen aus Wirrfasern, Geweben oder Gelegen hergestellt.

### Glasvolumenanteil

Der Glasvolumenanteil  $\varphi$  gibt den Volumenanteil des Verstärkungswerkstoffes Glas in einem glasfaserverstärkten Kunststoff an.

### Glasgewichtsanteil

Der Glasgewichtsanteil  $\psi$  gibt den Gewichtsanteil des Verstärkungswerkstoffes Glas in einem glasfaserverstärkten Kunststoff an. Er ist mit dem Glasvolumenanteil über die folgende Beziehung verknüpft

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{1 - \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\rho_H}{\rho_G}} \quad (1)$$

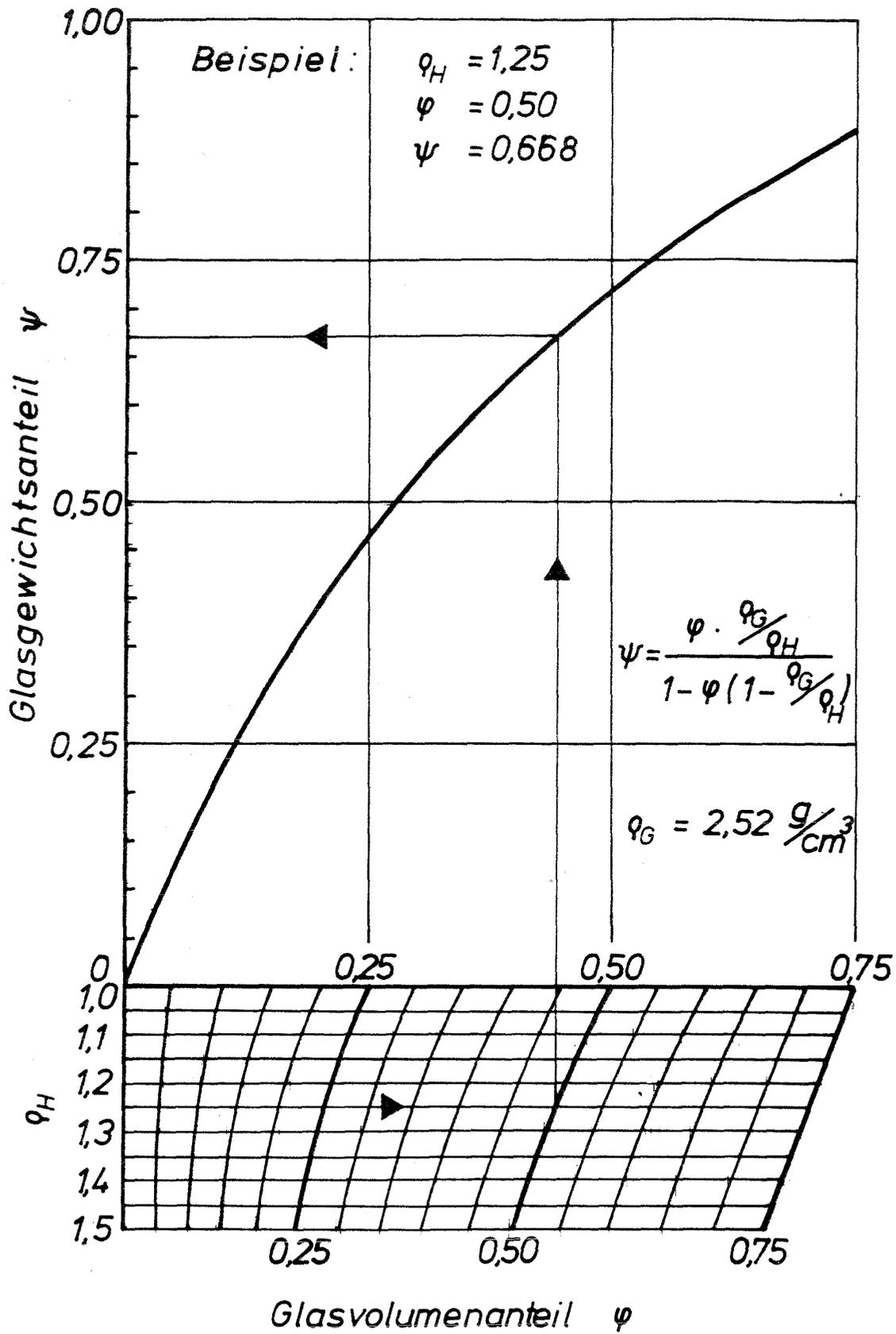


Bild 2: Glasgewichtsanteil  $\psi$  als Funktion des Glasvolumenanteils  $\phi$  bei unterschiedlicher Dichte des Matrixmaterials

Der Zusammenhang zwischen Glasvolumen- und Glasgewichtsanteil läßt sich auf folgende Art darstellen (Bild 2). Dabei wird von einer Glasdichte von  $\rho_G = 2,52 \text{ g/cm}^3$  ausgegangen.

Eine andere Art der Darstellung beider Größen zeigt Bild 3. Hier ist als Eingangsgröße das Verhältnis  $\rho_F/\rho_M$  (Dichte der Faser/Dichte der Matrix) gewählt worden, um den allgemeingültigen Zusammenhang auch auf andere Werkstoffkombinationen ausdehnen zu können.

#### 4. Eigenschaften von Matrix-, Verstärkungs- und Verbundwerkstoffen

##### 4.1. Eigenschaften der Verstärkungswerkstoffe

##### 4.1.1. Reaktionen des Verstärkungsmaterials auf äußeren Kraftangriff

In den folgenden Ausführungen sollen als Verstärkungswerkstoffe ausschließlich Glasfasern behandelt werden.

Gläser reagieren im Rahmen der Einsatzbedingungen glasfaserverstärkter Kunststoffe (GFK) mit hinreichender Genauigkeit gemäß dem Modell des ideal-elastischen Körpers. Äußere Kräfte bewirken also Verformungen gemäß dem Hooke'schen Gesetz für den einachsigen Lastfall,

$$\sigma = E_G \cdot \varepsilon \quad (2)$$

wie er bei faserförmigen Glasverstärkungen den Normalfall bildet.

##### 4.1.2. Reaktionen des Verstärkungswerkstoffes auf Temperaturänderungen

Auf unterschiedliche Temperaturen kann jeder Körper grundsätzlich auf zwei verschiedene Weisen reagieren.

- 1) Er kann seine elastischen Eigenschaften verändern. In diesem Falle wäre der Elastizitätsmodul  $E_G$  eine Funktion der Tempe-

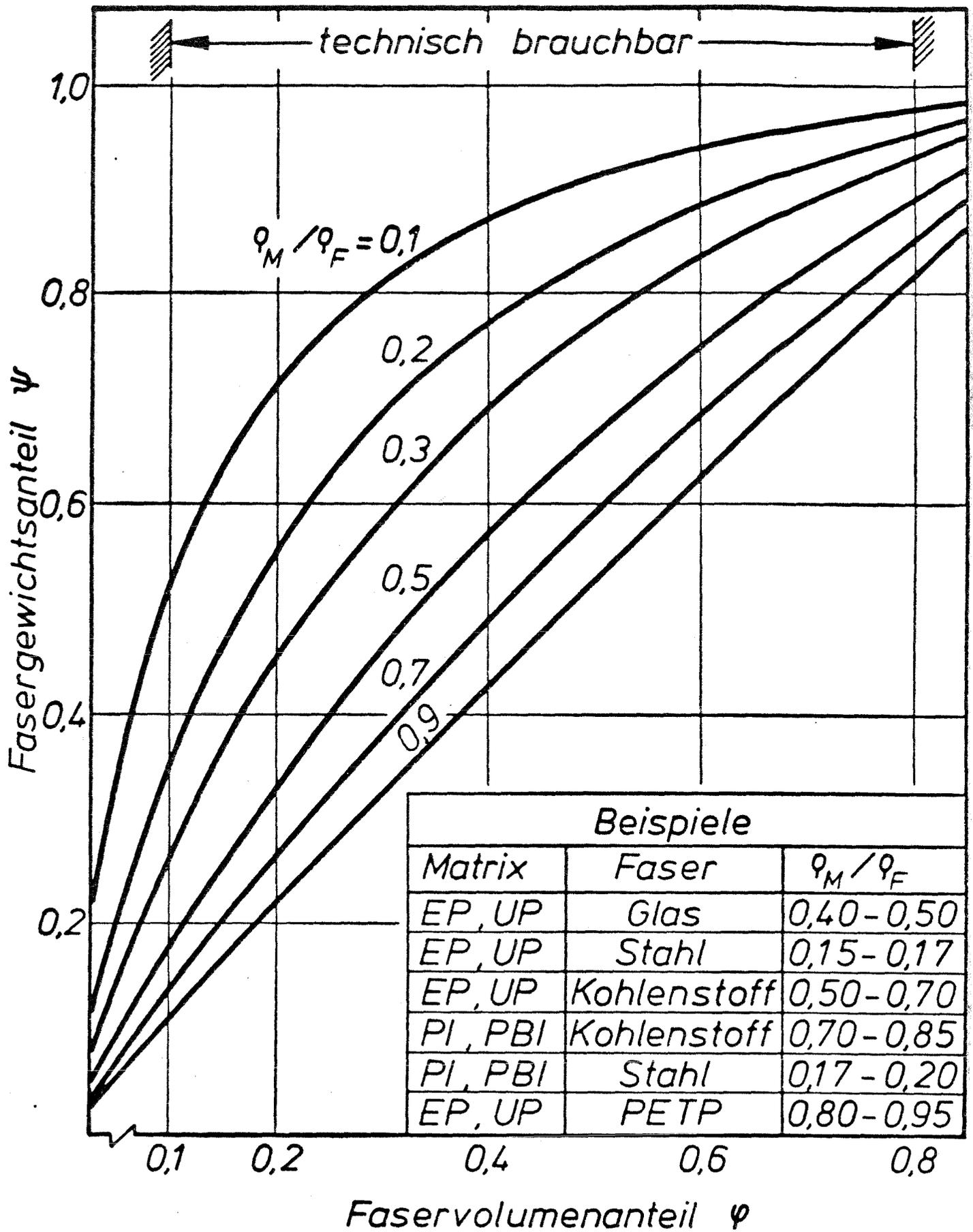


Bild 3: Volumen- und Gewichtsanteile bei Verbundwerkstoffen für unterschiedliche Dichteverhältnisse  $\rho_{\text{Matrix}}/\rho_{\text{Faser}}$

ratur. Steht ein solcher Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte, so wird sich mit der Temperatur auch seine Verformung bzw. Verformungsgeschwindigkeit verändern (wegen  $\sigma = \text{konst.}$ ). Bei Glas bleibt der E-Modul jedoch im normalen Temperaturbereich für GFK-Anwendungen konstant.

- 2) Er wird seine Geometrie gemäß dem physikalischen Effekt der "Wärmeausdehnung" verändern. Dies geschieht in jeder Richtung gemäß dem linearen Wärmeausdehnungsgesetz

$$\Delta l = \alpha_j \cdot l \cdot \Delta \vartheta \quad (3)$$

Ist ein solcher Körper fest eingespannt, so entspricht die Wirkung dieses physikalischen Effektes einer Veränderung des äußeren Spannungszustandes.

$$\Delta \sigma (\vartheta) = E (\vartheta) \cdot \alpha_j \cdot \Delta \vartheta \quad (4)$$

#### 4.1.3. Reaktionen des Verstärkungswerkstoffes auf unterschiedliche Medien

Die Medienanfälligkeit der Verstärkungswerkstoffe müßte normalerweise bei einer Bemessung nicht berücksichtigt werden, da die Verstärkungsfasern allseitig von der Matrix umschlossen werden und somit geschützt sind. Muß jedoch mit der Bildung von Rissen im Verbundwerkstoff gerechnet werden, so kann durch diese ein chemischer Angriff auf die Verstärkungsfasern erfolgen. Bekannt ist in diesem Fall die Schwächung von GFK z. B. durch eindringendes Wasser.

## 4.2. Eigenschaften der Kunststoffmatrixwerkstoffe

### 4.2.1. Reaktionen von Kunststoffen auf äußere Kräfte

Kunststoffe reagieren auf den Einfluß äußerer Kräfte "viskoelastisch". Das heißt, daß eine von außen auf den Körper wirkende Kraft sowohl eine elastische Verformung bewirkt (wie bei den ideal-elastischen Körpern), daß aber auch eine viskose Verformung durch Fließen auftritt.

Eine weitere Grundlage für das Verhalten von Kunststoffen ist das Boltzmann'sche Superpositionsprinzip. Es wird in zwei Fassungen formuliert (Schreyer):

- 1.) Wenn  $\epsilon_1(t)$  die Spannung  $\sigma_1(t)$  hervorruft und  $\epsilon_2(t)$  die Spannung  $\sigma_2(t)$ , dann ruft die Summe  $\epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$  die Gesamtspannung  $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$  hervor.
- 2.) Wenn  $\sigma_1(t)$  die Verformung  $\epsilon_1(t)$  hervorruft und  $\sigma_2(t)$  die Verformung  $\epsilon_2(t)$ , dann ruft die Summe  $\sigma_1(t) + \sigma_2(t)$  die Gesamtverformung  $\epsilon_1(t) + \epsilon_2(t)$  hervor.

Kunststoffe lassen sich für Festigkeitsrechnungen grundsätzlich genauso behandeln wie ideal-elastische Körper, solange ihr viskoelastisches Verhalten berücksichtigt wird und der Bereich eines linearen viskoelastischen Zusammenhanges zwischen Spannung und Deformation (auch zeit- und temperaturabhängig) nicht verlassen bzw. überschritten wird (d. h. keine bleibenden Werkstoffschädigungen, z. B. Mikrorisse, zugelassen werden).

Das Hooke'sche Gesetz lautet dann für den Fall einachsiger Relaxation:

$$\sigma(t) = E(t) \cdot \epsilon \quad (5)$$

bzw.  $\epsilon(t) = \sigma/E(t)$  für den Fall einachsiger Retardation. Für mehrachsige Beanspruchungen ergeben sich entsprechend:

$$\begin{aligned}\sigma_1(t) &= E(t) \cdot [\epsilon_1 - \nu(t) \cdot (\epsilon_2 + \epsilon_3)] \\ \sigma_2(t) &= E(t) \cdot [\epsilon_2 - \nu(t) \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_3)] \\ \sigma_3(t) &= E(t) \cdot [\epsilon_3 - \nu(t) \cdot (\epsilon_1 + \epsilon_2)]\end{aligned}\tag{6}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\epsilon_1(t) &= 1/E(t) \cdot [\sigma_1 - \nu(t) \cdot (\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &\vdots \\ &\text{u.S.w.}\end{aligned}\tag{7}$$

Die Zeit und Temperaturabhängigkeit der Querkontraktionszahl kann bei "harten" Kunststoffen, wozu die hier behandelten Harze zählen, im üblichen Arbeitsbereich vernachlässigt werden.

Daraus folgt, daß zur Bemessung der zeitliche Verlauf der elastischen Eigenschaften der Kunststoffe bekannt sein muß.

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens sind allgemein folgende Darstellungen gebräuchlich.

1. Zeitverformungslinien (Kriechkurven)
2. Zeitspannungslinien
3. Isochrone Spannungs-Verformungs-Diagramme
4. Kriechmodullinien

### Zeitverformungslinien

Die Zeitverformungslinien werden in langzeitigen Druck-, Zug-, Schub- oder Biegeversuchen ermittelt. Sie zeigen das Verformungsverhalten der Werkstoffe unter bestimmten äußeren Bedingungen im halb- oder doppeltlogarithmischen Maßstab. Über der Zeit als Abszisse sind die Verformungen aufgetragen. Als Parameter können Spannungen und Umgebungsbedingungen wie verschiedene Temperaturen oder Medien berücksichtigt werden.

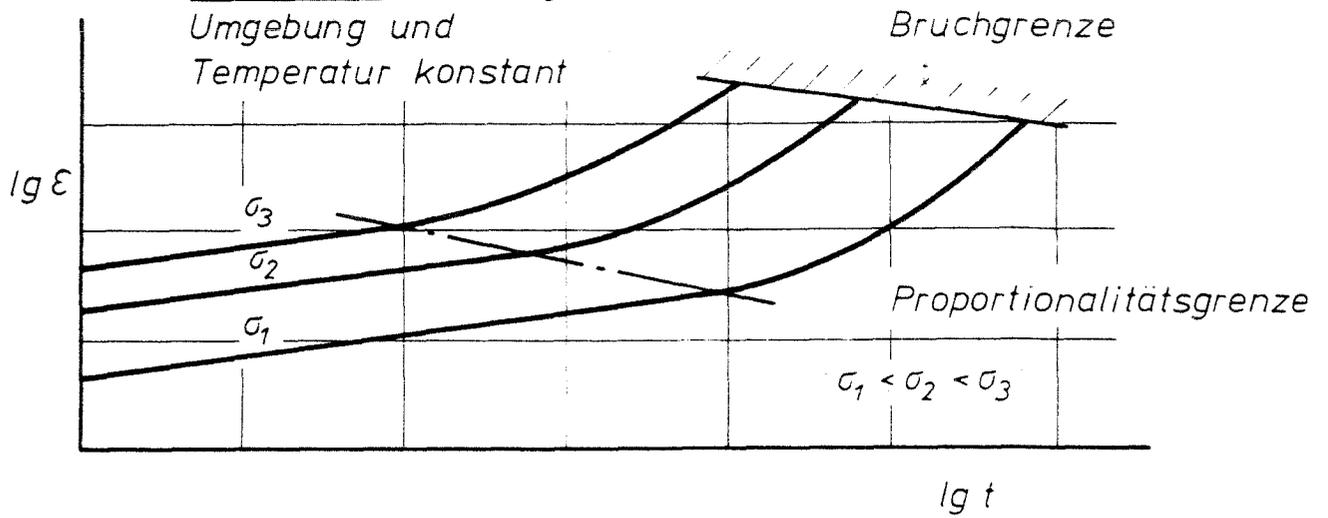
Man erhält die Meßpunkte aus Retardationsversuchen (Kriechversuchen), wobei der Werkstoff einer konstanten Belastung von bestimmter Höhe unterworfen wird, und die zeitabhängigen Verformungen ermittelt werden. Bruch- und werkstoffspezifische Verformungsgrenzen, wie Bereiche erster Werkstoffschädigungen, z. B. Mikrorißbildung, können angegeben sein.

Im Bild 4 sind die Darstellungsmöglichkeiten unter Berücksichtigung verschiedener Parameter aufgeführt.

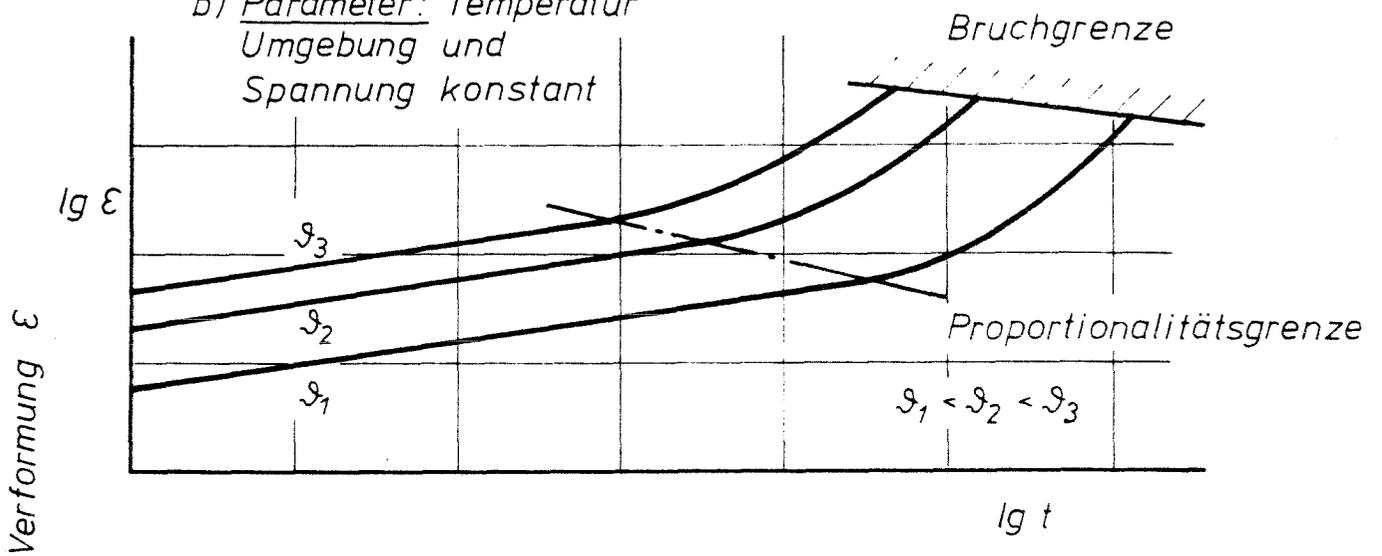
### Zeitspannungslinien

Die Zeitspannungslinien, dargestellt in Bild 5, erhält man entweder aus Relaxationsversuchen - hierbei wird bei einer konstant vorgegebenen Verformung die Spannungsabnahme als Funktion der Zeit ermittelt - oder durch einfaches Umzeichnen der Zeitverformungslinien. Die Darstellung erfolgt analog zu den Zeitverformungslinien im halb- oder doppeltlogarithmischen Maßstab. Die Kurvenscharen geben an, wie bei einer konstant aufgebrauchten Verformung die Spannungen mit der Zeit abnehmen. Als Parameter können hier Verformungen, Medien und Temperaturen berücksichtigt werden. Bruch- und Proportionalitätsgrenzen können gegebenenfalls entnommen werden.

a) Parameter: Spannung  
Umgebung und  
Temperatur konstant



b) Parameter: Temperatur  
Umgebung und  
Spannung konstant



c) Parameter: Umgebungsmedium  
Spannung und  
Temperatur konstant

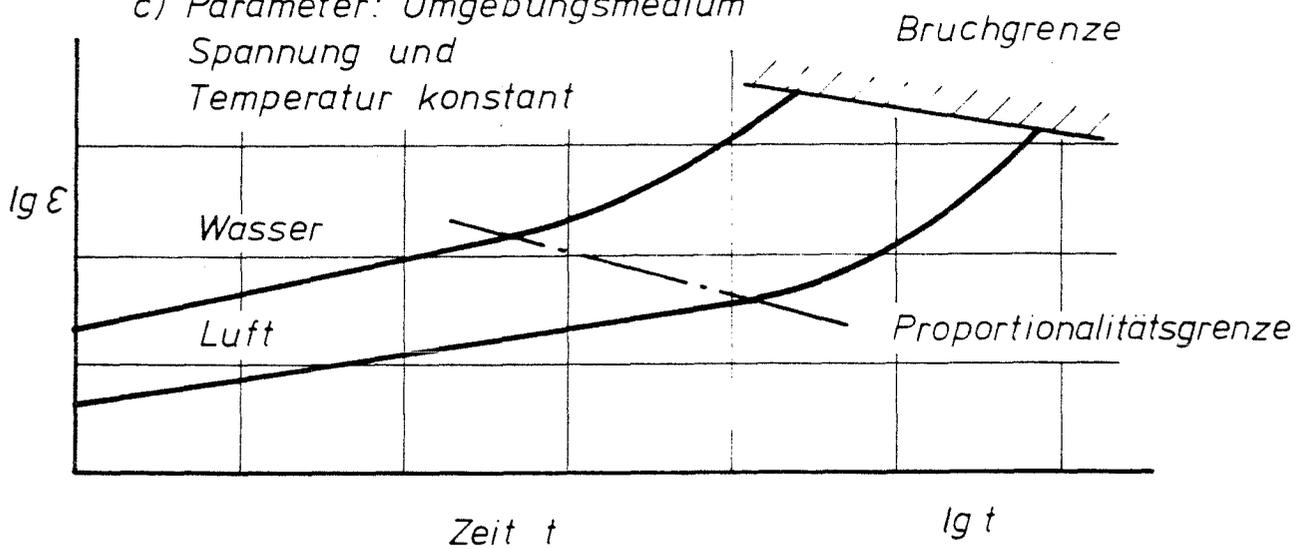


Bild 4: Zeit-Verformungs-Linien

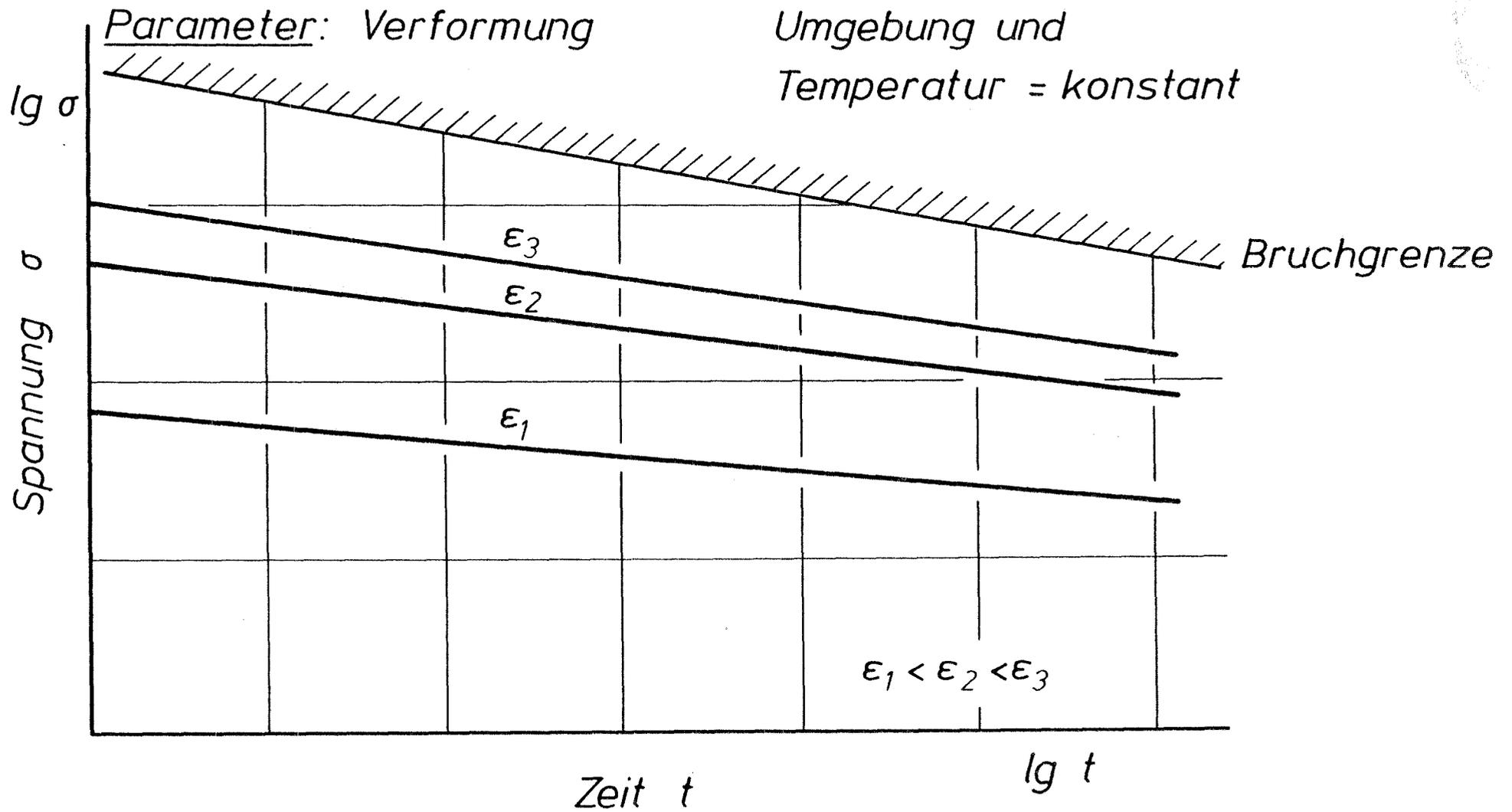


Bild 5: Zeit-Spannungs-Linien

### Isochrone Spannungs-Verformungs-Diagramme

Die isochronen Spannungs-Verformungs-Diagramme erhält man durch Austausch der Parameter aus den Zeitverformungs- bzw. Zeitspannungslinien. Der gesamte funktionale Zusammenhang zwischen den Größen Spannung, Verformung, Zeit und Temperatur (mit Einschränkungen) läßt sich hier in übersichtlicher Form darstellen. Bruch- und andere werkstoffspezifische Grenzen können angegeben sein. Diese in Bild 6 gezeigte Darstellung ist die eigentliche Arbeitsgrundlage für das Dimensionieren mit Kunststoffen. Zulässige Spannungen und Verformungen, sowie auch Verformungen bei gegebenen Spannungen oder Spannungen bei gegebenen Verformungen können unter Berücksichtigung von Zeit und Temperatur entnommen werden. Einschränkend muß jedoch erwähnt werden, daß die Darstellung nur bis zur Proportionalitätsgrenze ("Hooke'schen Bereiche") eine sichere und einwandfreie Übertragung auf höhere Temperaturen zuläßt.

### Kriechmodullinien

Die Kriechmodullinien, dargestellt in Bild 7, beschreiben die zeitliche Abhängigkeit der "elastischen" Eigenschaften von Kunststoffen. Man erhält sie durch Umrechnen der Einzelwerte aus den Zeitverformungslinien

$$\text{z. B.} \quad E_R = E(t) = \sigma / \epsilon(t) \quad (8)$$

bzw. Zeitspannungslinien

$$\text{z. B.} \quad E_C = E(t) = \sigma(t) / \epsilon \quad (9)$$

Die so erzielten Ergebnisse für E sind zwar nicht identisch, führen aber in der Praxis, d. h. im linear-viskoelastischen Last-Verformungsbereich, zu gleichen Werten.

Hierbei bedeuten:

$$E_C = \text{Kriechmodul} = \text{zeitabhängiger Modul} \approx E_R$$

$$E_{(t)} = \text{Modul zur Zeit } t$$

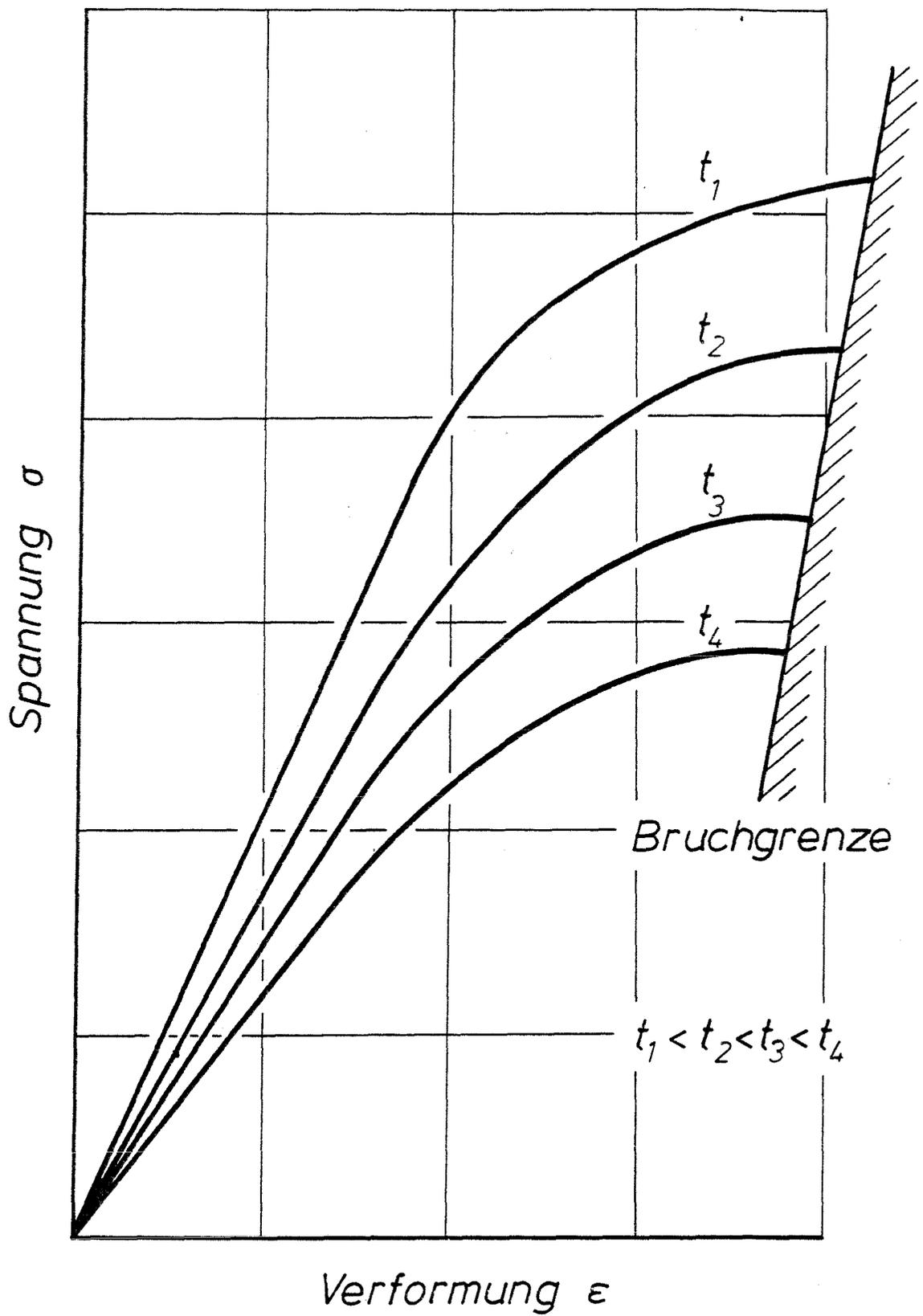


Bild 6: Isochrones Spannungs-Verformungs-Diagramm

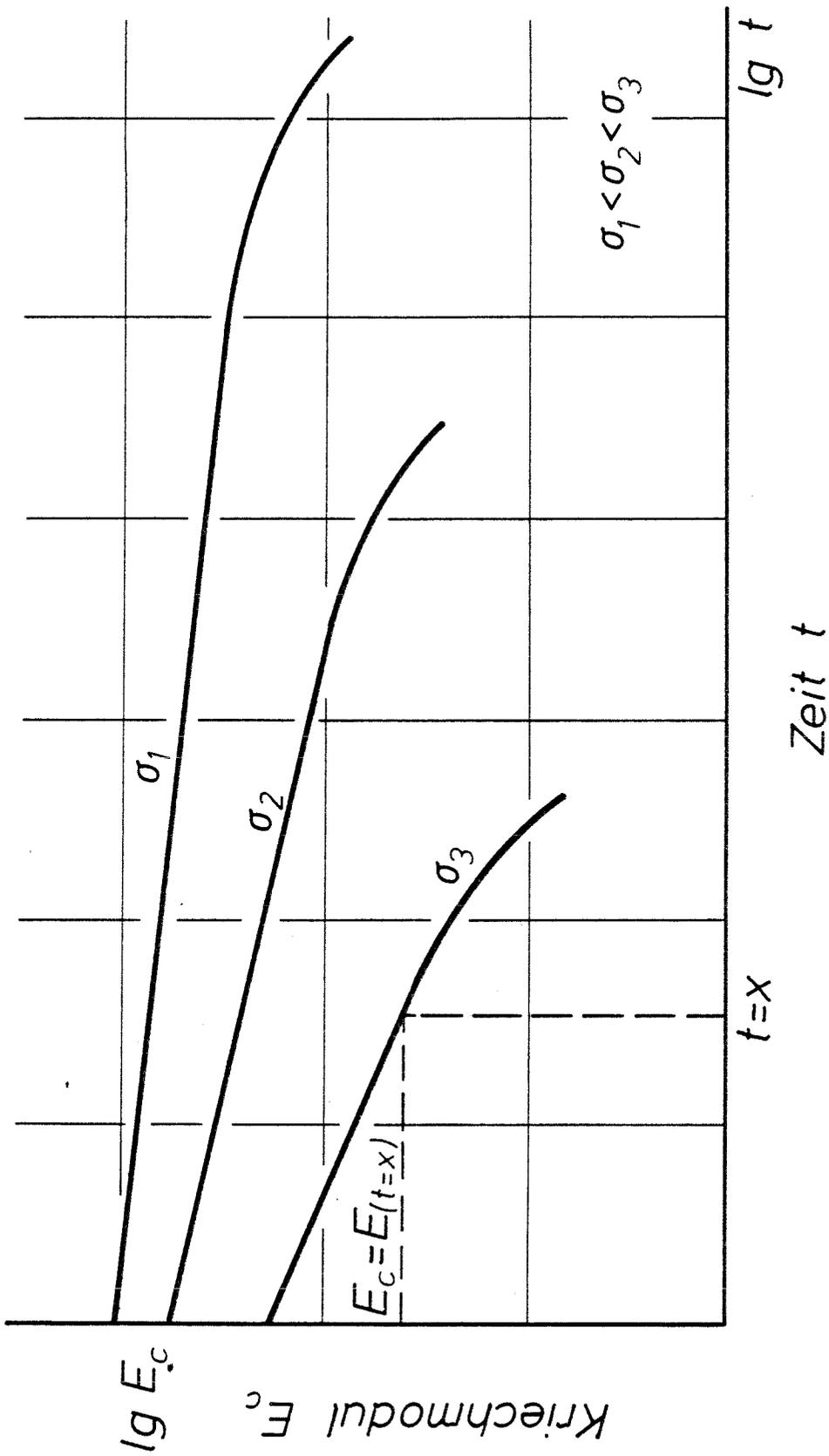


Bild 7: Kriechmodul-Linien

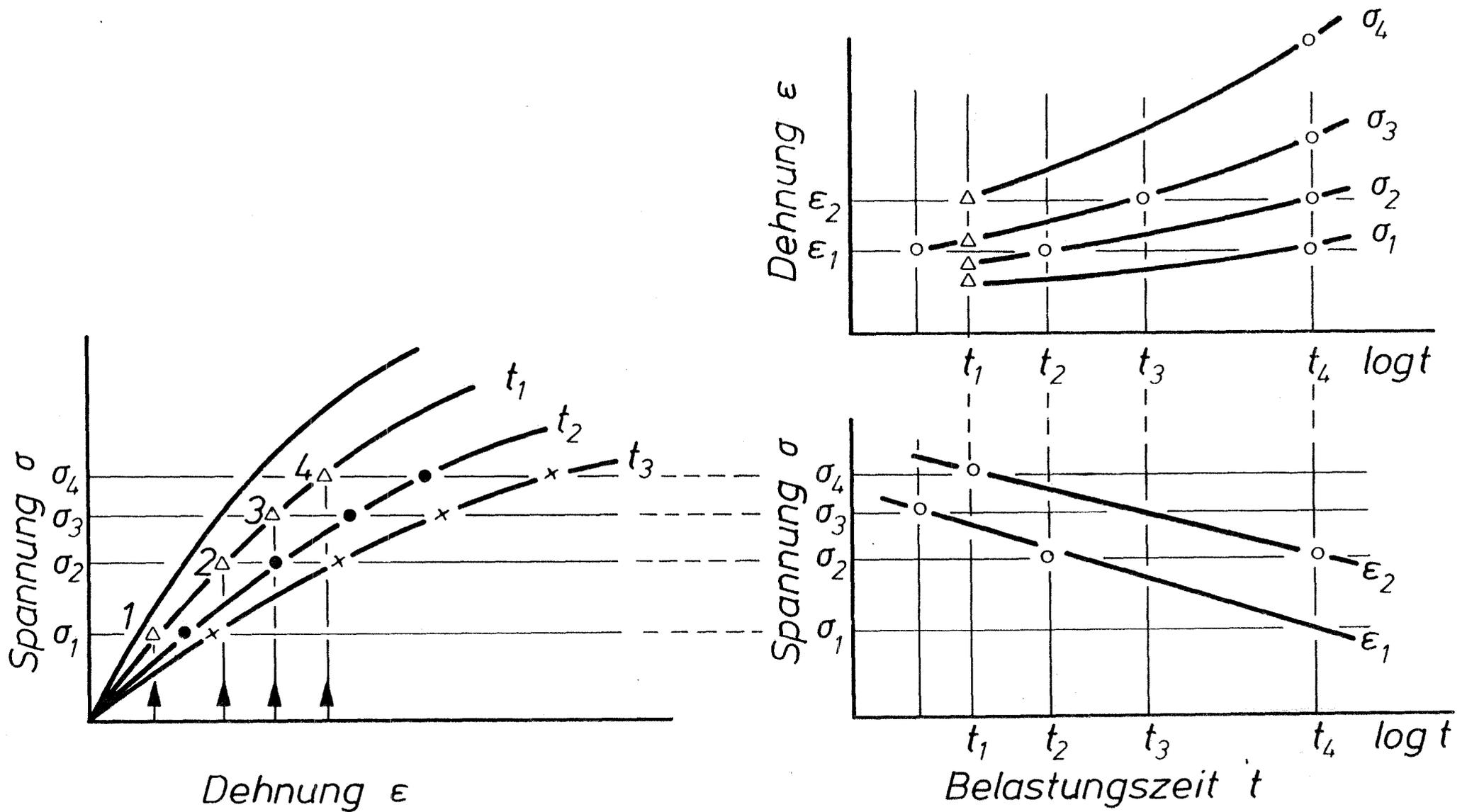


Bild 8: Zusammenhang zwischen Zeitspannungslinien, Zeitverformungslinien und isochronem Spannungs-Dehnungs-Diagramm

$\varepsilon_{(t)}$  = Dehnung zur Zeit t

$\sigma_{(t)}$  = Spannung zur Zeit t

Auch hier können alle bereits genannten Parameter berücksichtigt werden. Der Maßstab kann halb- oder doppeltlogarithmisch sein.

#### Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten

Der Zusammenhang und die Art der graphischen Übertragbarkeit zwischen Zeitverformungs-, Zeitspannungslinien und isochronem Spannungs-Verformungs-Diagramm ist in Bild 8 dargestellt. Aus den Zeitverformungslinien lassen sich Zeitspannungslinien und das isochrone Spannungs-Verformungs-Diagramm durch einfaches Vertauschen der Parameter umzeichnen.

Aus jeder dieser drei Darstellungen können Beanspruchungsgrenzen, Verformungen bei bestimmten Spannungen sowie die Lebensdauer unter bestimmten Bedingungen entnommen werden.

#### 4.2.2. Reaktionen von Kunststoffen auf Temperaturänderungen

Kunststoffe antworten auf Änderungen ihrer Temperatur mit zwei unterschiedlichen Reaktionen:

- 1) Ihre viskoelastischen Eigenschaften verändern sich mit der Temperatur. Dieses Verhalten ist im Temperaturbereich, in dem die Kunststoffe normalerweise angewendet werden, so stark ausgeprägt, daß es bei einer Bauteilbemessung stets berücksichtigt werden muß.

Der E-Modul ist also im normalen Beanspruchungsbereich eine Funktion der Temperatur

$$E = E(\vartheta) \quad (10)$$

In den Gleichungen (5) bis (7) ist also neben dem Zeit- auch stets ein Temperatureinfluß zu berücksichtigen.

Damit lautet z. B. das Hooke'sche Gesetz (einachsig):

$$\sigma(t, \vartheta) = E(t, \vartheta) \cdot \varepsilon \quad (11)$$

Eine erste Aussage über die Temperaturabhängigkeit liefert der Torsionsschwingversuch (freie gedämpfte Torsionsschwingungen). Diese Methode gibt einen Überblick über die Abhängigkeit des Schubmoduls und der Schwingungsdämpfung von der Temperatur (DIN-Norm 53445). Die Interpretation der Resultate gestattet vielfältige Rückschlüsse (Schreyer). Eng verknüpft mit dem Torsionsmodul ist der dynamische Elastizitätsmodul  $E$ , der ein Maß für den Widerstand eines Materials gegen elastische Verformung darstellt.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (12)$$

Bild 9 zeigt ein für GFK typisches Bild vom Torsionsmodul  $G'$  und der zugehörigen Dämpfung.

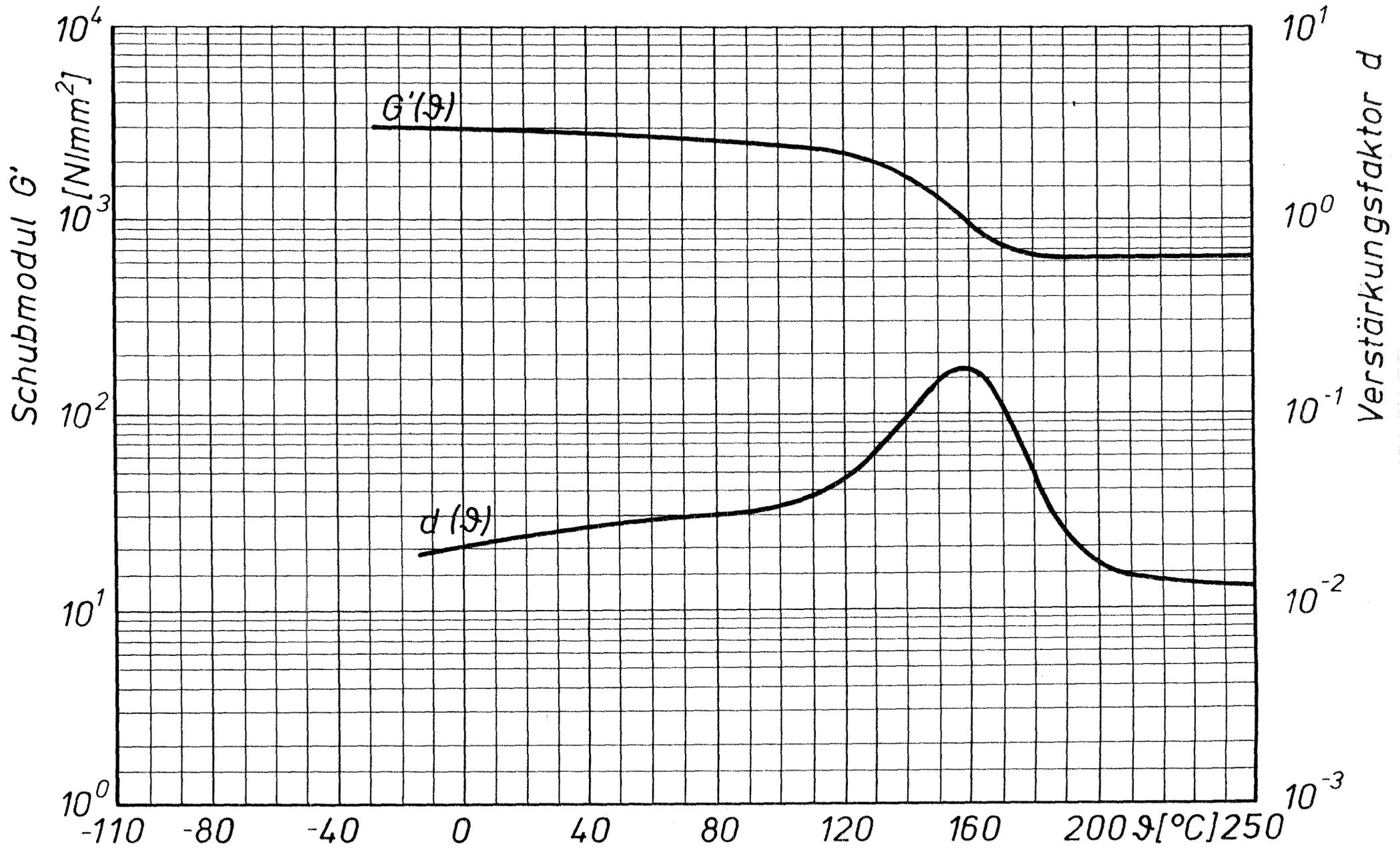


Bild 9: Typischer Verlauf des Moduls  $G'$  und der Dämpfung  $d$  über der Temperatur für ein GF-UP

Eine Möglichkeit, die Zeit- und Temperaturabhängigkeit von Matrixharzen mathematisch zu beschreiben, ist in (Diss. The-  
bing) angezeigt. Läßt sich ein formelmäßiger Zusammenhang in  
der dort gezeigten Form feststellen, so lassen sich diese Zu-  
sammenhänge auch mit Hilfe eines Nomogrammes übersichtlich  
darstellen (Bild 10).

Hier sind für ein Standard-Harz (Typ 1140 nach DIN 16946,  
Blatt 2) die Eingangsgrößen Temperatur und Zeit auf den  
Leitern ① , ② und ④ aufgetragen. Auf Leiter ③ wird  
durch Verbinden der Werte von ① und ② ein Zwischenwert  
erzeugt, der mit ④ verbunden, das gesuchte Ergebnis auf  
Leiter ⑤ liefert.

- 2) Kunststoffe reagieren auf Temperaturänderungen, genau wie  
alle anderen Stoffe auch, mit einer Volumenänderung gemäß  
dem Wärmeausdehnungsgesetz

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta \vartheta \quad (12a)$$

#### 4.2.3. Reaktionen von Kunststoffen auf verschiedene Medien

Kunststoffe haben z. T. eine hohe chemische Beständigkeit. Sie  
sind sehr beständig gegen Mineralsäuren, Laugen und wässrige  
Salzlösungen, welche z. B. den Metallen so sehr schaden. Oft  
haben sie auch eine hohe Beständigkeit gegen Einflüsse der Be-  
witterung. Einige Kunststoffe sind jedoch in manchen Fällen durch  
organische Lösungsmittel lösbar. Für die, bei den GFK hauptsäch-  
lich auftretenden UP- und EP-Harze geben die folgenden Tabellen  
einen ersten Überblick zur Abschätzung. Im Einzelfall sind je-  
doch genaue Untersuchungen notwendig.

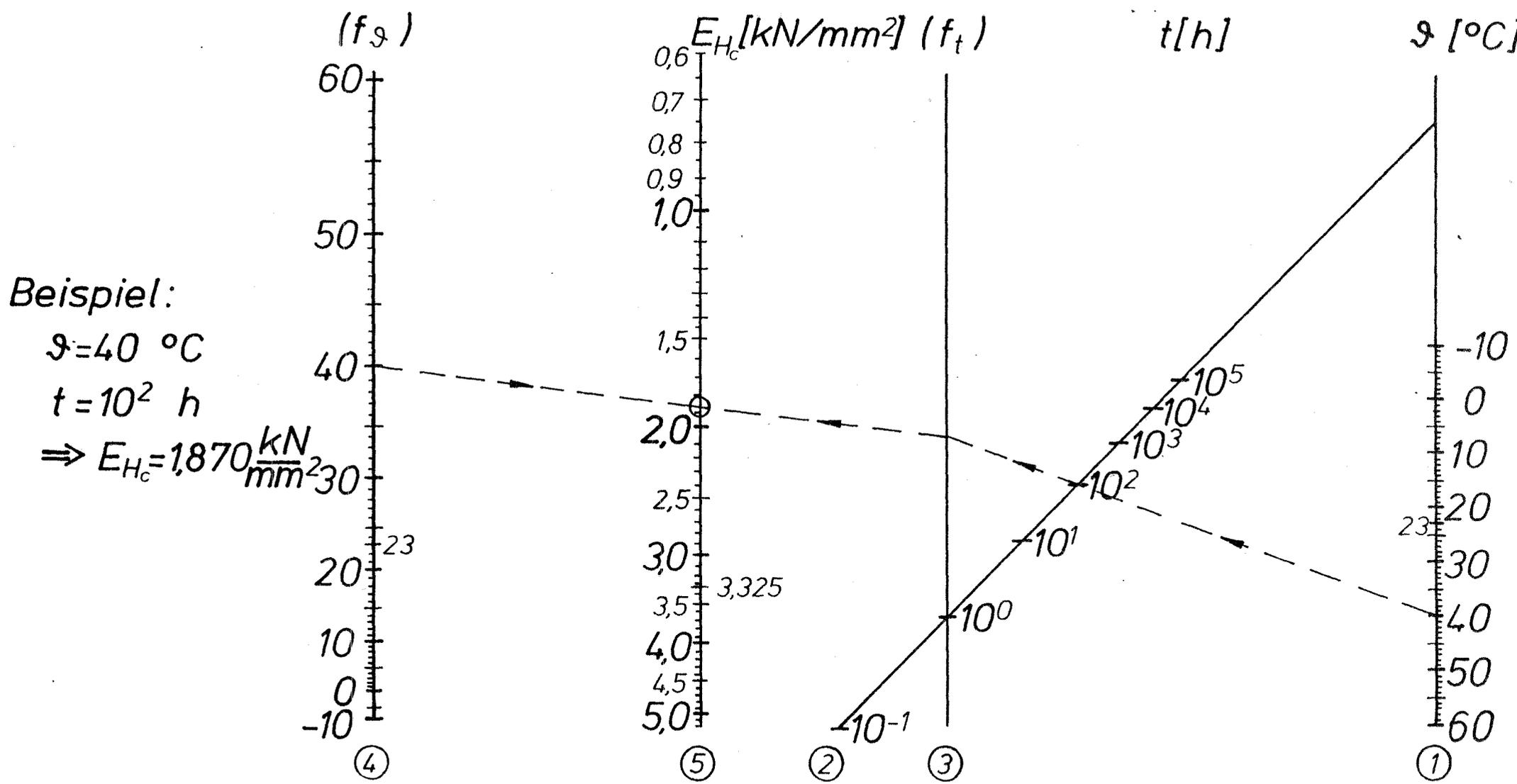


Bild 10: Nomogramm zur Bestimmung des zeit- und temperaturabhängigen Elastizitätsmoduls  $E_{H_c}$  für UP-Harz Typ 1140

+ = beständig; 0 = bedingt beständig; - = unbeständig

Reagens	Konzentration	Temperatur	Lagerzeit	Norm. Typen	Wärmefeste Typen	Erhöhte Chemikalienbest.	Schwerentflammbar	Flexible Typen
Ammoniak, wässrig	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	0 bis -
Ammoniak	konz.	20 °C	1 Jahr	0 bis -	0 vergilbt	0 vergilbt	0 vergilbt	0 bis -
Äther (Diäthyläther)		20 °C	1 Jahr	-	+	-	-	-
Äthylalkohol	96 %	20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	+	-	-
Ameisensäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+ bis 0	+	+	+	+ bis 0
Ameisensäure	konz.	20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	+	+	0 bis -
Aceton	100 %	20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Äthylacetat		20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Anon		20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	+	-	-
Äthylenglykol		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Anilin		20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Benzin		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Benzol		20 °C	1 Jahr	-, auch +	-	-	-	-
Bromwasserstoffsäure	konz.	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	-
Borsäure	4 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+ bis 0
Butylacetat		20 °C	1 Jahr	-	+	+	-	-
Benzylalkohol		20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	+	-	-
Butylalkohol		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+ bis -
Chromsäure	8 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	-
Cyclohexanol		20 °C	1 Jahr	+	+	+	-	-
Crotonaldehyd		20 °C	1 Jahr	-	+	-	-	-
Chloroform		20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Cyclohexan		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Dekalin		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Dioxan		20 °C	1 Jahr	-	+	-	-	-
Essigsäure	konz.	20 °C	1 Jahr	+ bis 0	+	+	0 bis -	-
Essigsäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+ bis 0
Flußsäure	40 %	20 °C	1 Jahr	-	-	-	+	-
Glycerin		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+

Chemische Beständigkeit von Polyesterharzen (Fortsetzung)

Reagens	Konzentration	Temperatur	Lagerzeit	Norm. Typen	Wärmefeste Typen	Erhöhte Chemikalienbest.	Schwerentflammbar	Flexible Typen
Hexan		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Kaliumpermanganatlös.	konz.	20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Methylalkohol		20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	+	-	-
Methylenchlor.		20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Natronlauge	konz.	20 °C	1 Jahr	+ bis 0	+	+	-	+ bis 0
Natronlauge	25 %	20 °C	1 Jahr	+ bis 0	0 bis -	+	-	-
Natronlauge	10 %	20 °C	1 Jahr	0 bis -	-	+	+ bis 0	-
Phosphorsäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Perchlorsäure	70 %	20 °C	1 Jahr	-	-	-	+	-
Petroleum		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Salzsäure	konz.	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	0 bis -
Salzsäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	0 bis -
Schwefelsäure	konz.	20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Schwefelsäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+ bis 0
Salpetersäure	konz.	20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Salpetersäure	10 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	-
Salzlösungen, anorg. (wässr.)	konz.	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Salizylsäure	konz.	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Seifenlösung		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Schmieröl		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+
Schwefelkohlenstoff		20 °C	1 Jahr	0 bis -	+	-	-	-
Toluol		20 °C	1 Jahr	+ bis -	+	+	-	-
Tetrachlorkohlenstoff		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	-
Trichloräthylen		20 °C	1 Jahr	-	+	-	-	-
Tetralin		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	-
Tetrahydrofuran		20 °C	1 Jahr	-	+ bis 0	-	-	-
Wasserstoff-superoxyd	30 %	20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+ bis 0
Wasserstoff-superoxyd	60 %	20 °C	1 Jahr	-	-	-	-	-
Wasser		20 °C	1 Jahr	+	+	+	+	+

CHEMISCHE BESTÄNDIGKEIT VON EPOXYDHARZEN

Reagens	Konzentrat.	Temperatur	Lagerzeit	Beständigkeit
Ammoniak, wässrig	30 %	20 °C	6 Monate	unbeständig
Äther (Diäthyläther)	100 %	20 °C	6 Monate	beständig
Äthylalkohol	100 %	20 °C	6 Monate	beständig
Äthylalkohol	100 %	40 °C	6 Monate	beständig
Ameisensäure	konz.	20 °C	6 Monate	beständig
Ameisensäure	konz.	60 °C	6 Monate	bed. beständig
Anilin	100 %	20 °C	10 Tage	unbeständig
Azetaldehyd, wässrig	40 %	20 °C	6 Monate	beständig
Aceton	100 %	20 °C	3 Tage	unbeständig
Accumulatorensäure	32 %	20 - 40 °C	6 Monate	beständig
Benzin		20 °C	6 Monate	beständig
Benzol		20 °C	6 Monate	beständig
Butylalkohol	100 %	20 °C	6 Monate	beständig
Butylacetat		20 °C	1 Monat	unbeständig
Chlorsulfonsäure	100 %	20 °C	1 Tag	unbeständig
Clophen		20 - 95 °C	6 Monate	beständig
Crotonaldehyd		20 °C	4 Tage	unbeständig
Dioxan		20 °C	4 Tage	unbeständig
Essigsäure	konz.	20 °C	6 Monate	beständig
Flußsäure	konz.	20 °C	6 Monate	beständig
Glyzerin		20 °C	6 Monate	beständig
Kaliumpermanganatlösung	6 %	20 - 100 °C	6 Monate	beständig
Methylenchlorid		20 °C	-	unbeständig
Mineralöl		20 - 40 °C	1 Jahr	beständig
Natronlauge	10 %	20 °C	6 Monate	beständig
Nibrenwachse (D88, D130)		20 - 90 °C	6 Monate	beständig
Salpetersäure	konz.	20 °C	10 Tage	unbeständig
Salpetersäure	50 %	20 °C	20 Tage	unbeständig
Salpetersäure	10 %	20 °C	6 Monate	beständig
Salzsäure	konz.	20 °C	6 Monate	beständig
Salzsäure	50 %	20 °C	6 Monate	beständig
Salzsäure	10 %	20 °C	6 Monate	beständig

Chemische Beständigkeit von Epoxydharzen (Fortsetzung)

Reagens	Konzentrat.	Temperatur	Lagerzeit	Beständigkeit
Schwefelsäure	konz.	20 °C	5 Tage	unbeständig
Schwefelsäure	50 %	20 - 60 °C	6 Monate	beständig
Schwefelsäure	10 %	100 °C	6 Monate	beständig
Stearinsäure	100 %	60 °C	6 Monate	beständig
Salzlösungen, anorg. (wässrig)		20 °C	6 Monate	beständig
Toluol		20 °C	6 Monate	beständig
Tetrachlorkohlenstoff		20 °C	6 Monate	beständig
Trichloräthylen		20 °C	3 Wochen	unbeständig
Wasserstoffperoxyd, wässrig	30 %	20 °C	6 Monate	beständig
Wasser, destilliert		20 °C	1 Jahr	beständig
Wasser, destilliert		70 °C	1 Jahr	beständig
Wasser, destilliert		100 °C	3 Monate	bed. beständig

4.2.4. Kunststoffe unter statischer Last

Kurzbeschreibung:

Das unbelastete Bauteil wird zur Zeit  $t_0$  mit einer zeitlich konstanten Last beaufschlagt. Es reagiert spontan mit einer rein elastischen (zeitunabhängigen) Verformung, der sich eine zeitabhängige Verformung durch viskoses Fließen überlagert (Bild 11).

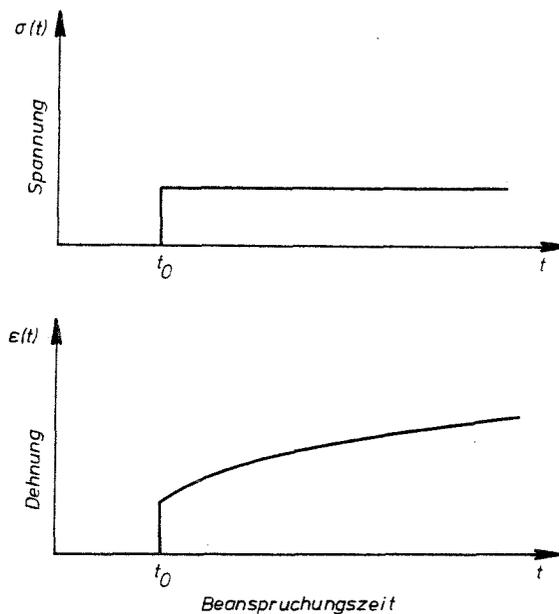


Bild 11:  $\sigma_{(t)}$  und  $\epsilon_{(t)}$  für den statischen Lastfall

formelmäßiger Zusammenhang:

Hooke'sches Gesetz nach Gl. (5, 6, 7)

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t, \mathcal{G}_U)} \quad (13)$$

#### 4.2.5. Kunststoffe unter Lastwechseln

Die Verformungen von Kunststoffen unter wechselnden Lasten lassen sich nach verschiedenen, den Lastformen angepaßten Methoden ermitteln.

##### 1) der zweistufig alternierende Lastfall

###### Kurzbeschreibung:

Das Bauteil wird abwechselnd mit Lasten zweier Größen und zweier Einwirkzeiten belastet. Dabei kommt es jeweils zu einer spontanen elastischen Verformung, der sich durch Kriechen ein viskoser Verformungsanteil überlagert (Bild 12).

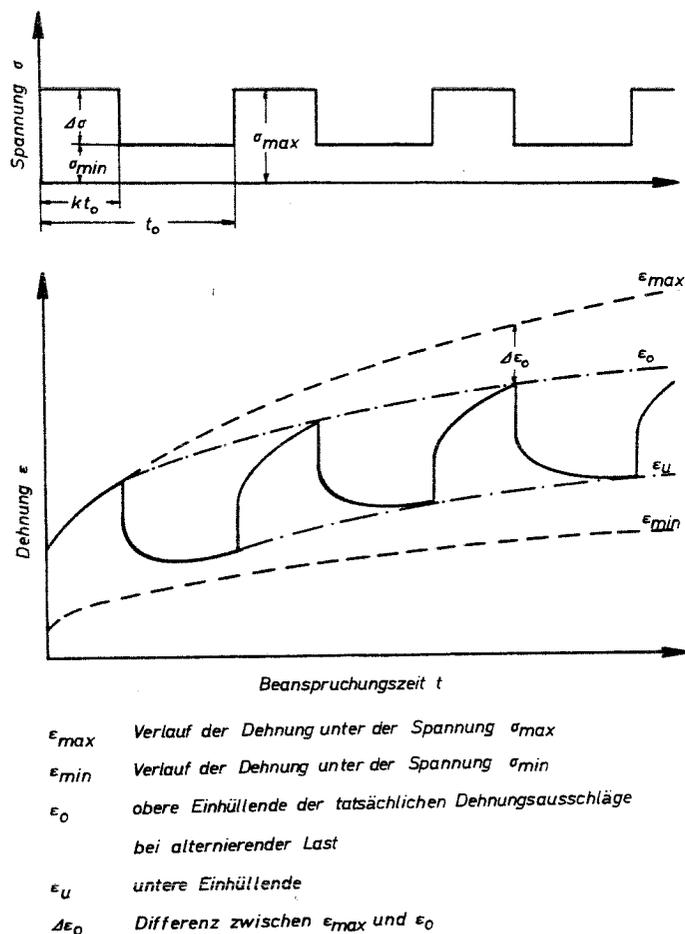


Bild 12: Verlauf von Spannung und Dehnung unter alternierender Belastung

##### formelmäßiger Zusammenhang

$$\epsilon_0(t, \mathcal{I}_U) = \epsilon_{max}(t, \mathcal{I}_U) - \Delta\epsilon_0(t, \mathcal{I}_U) \quad (14)$$

mit

$$\Delta\epsilon_0(t, \mathcal{I}_U) = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}} (1-k) [\epsilon_{max}(t, \mathcal{I}_U) - \epsilon_{max}(k, T_0, \mathcal{I}_U)] \quad (14 a)$$

2) mehrstufig alternierender Lastfall

Kurzbeschreibung:

Das Bauteil wird mit einer Vielzahl unterschiedlich hoher Lasten beaufschlagt, die sich in ihrer Reihenfolge zyklisch wiederholen. Die Dehnungsreaktionen des Werkstoffes sind elastisch und viskos bedingt (Bild 13).

formelmäßiger Zusammenhang

$$\epsilon_0(t) = \epsilon_{max}(t) - \Delta\epsilon_0(t) \quad (15)$$

$$\text{mit } \Delta\epsilon_0(t) = \frac{1}{\sigma_{max}} \sum_{j=1}^n (\Delta\sigma_{j+1} - \Delta\sigma_j) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^j k_i\right) \cdot \left[\epsilon_{max}(t) - \epsilon_{max}\left(\sum_{i=1}^j k_i \cdot T_0\right)\right] \quad (15 a)$$

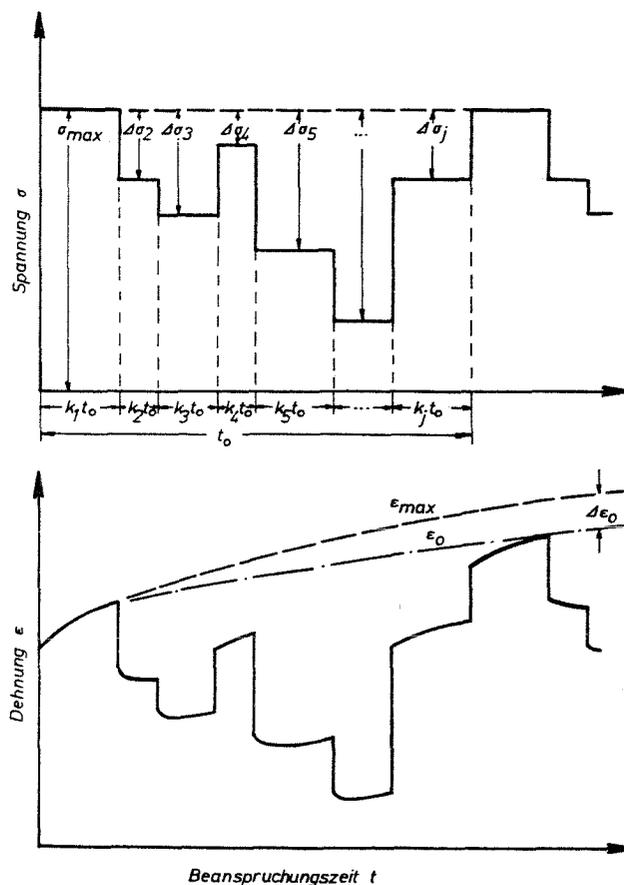


Bild 13: Verlauf von Spannung und Dehnung bei mehrstufiger Belastung

3) Sinusförmig schwingende Belastung mit konstanter Amplitude

Kurzbeschreibung:

Das Bauteil wird mit aufeinanderfolgenden Lastwechseln beaufschlagt. Der Werkstoff kann in der kurzen Einwirkzeit eines Lastzyklus seiner Kriechneigung nicht nachkommen. Näherungsweise kann daher hier der Kurzzeit-Elastizitätsmodul  $E_0$  eingesetzt werden (Bild 14). Aufgrund der relativ hohen inneren Dämpfung der Kunststoffe kommt es jedoch zu Eigenerwärmungen des Bauteiles, die eine Herabsetzung des E-Moduls zur Folge haben können. Die Temperaturerhöhung läßt sich iterativ abschätzen (Bild 15).

a) ohne Eigenerwärmung

Ergibt eine erste Abschätzung der Temperaturerhöhung durch Eigenerwärmung (siehe Kapitel 4.2.5.-8)). Werte für  $\Delta S$ , die kleiner als  $\Delta S = 2 \text{ k}$  sind, so können die Effekte durch Eigenerwärmung vernachlässigt werden.

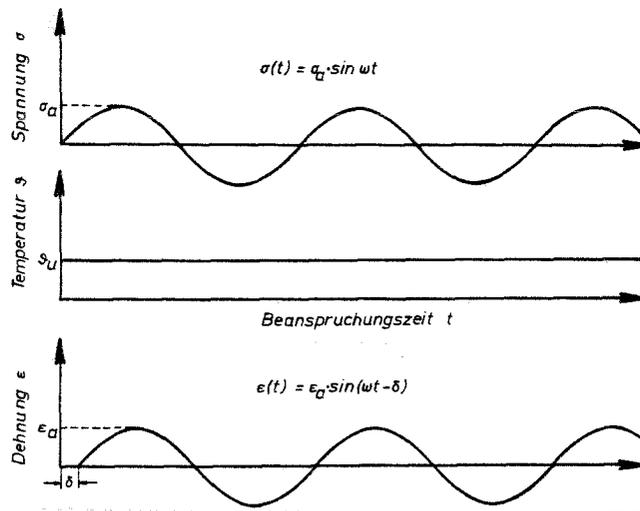


Bild 14: Verlauf von Spannung und Dehnung unter sinusförmiger Belastung ohne Eigenerwärmung des Bauteiles

b) mit Eigenerwärmung

Ergibt eine erste Abschätzung der Eigenerwärmung gemäß Kapitel 4.2.5.-8) eine Temperaturzunahme von  $\Delta S > 2 \text{ k}$ , so muß die Temperaturerhöhung errechnet werden und ihre Auswirkungen auf diese Stoffwerte berücksichtigt werden.

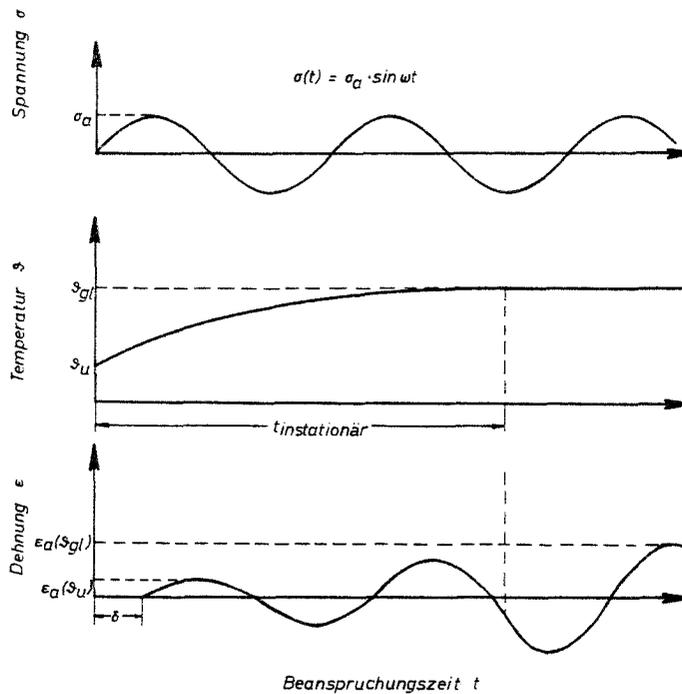


Bild 15: Verlauf von Spannung, Bauteiltemperatur und Dehnung unter sinusförmiger Belastung bei Eigenerwärmung des Bauteils

formelmäßiger Zusammenhang:

$$\epsilon_o (\vartheta_{gl}) = \frac{\sigma_a}{E_o (\vartheta_{gl})} \quad (16)$$

- 4) Sinusförmig schwingende Belastung mit blockweise konstanten Ausschlagsspannungen, welche zu einer Erwärmung führen

Kurzbeschreibung:

Das Bauteil wird sinusförmig schwingend belastet (wie in 3)), wobei die Ausschlagsspannung und/oder Frequenz eine Folge von Sprüngen macht, die sich zyklisch wiederholt. Bei jedem Sprung der Ausschlagsspannung  $\sigma_a$  und/oder Frequenz  $f$  strebt die Gleichgewichtstemperatur des Bauteils einem neuen Wert entgegen. Der Maximalwert der Temperaturschwingung muß ermittelt werden. (Bild 16)

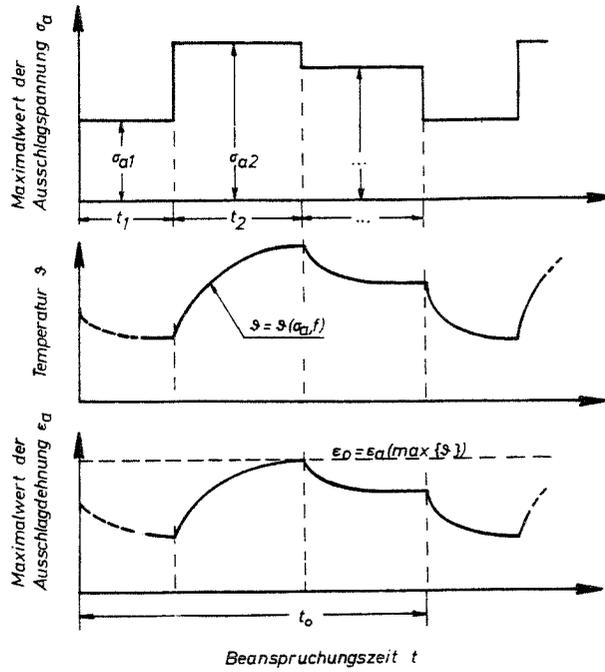


Bild 16: Verlauf der Maximalwerte der Ausschlagspannung und Ausschlagdehnung bei blockweise gleichförmig sinusförmiger Belastung

formelmäßiger Zusammenhang:

$$\epsilon_0(\vartheta_{max}) = \frac{\sigma_a(\text{bei } \vartheta_{max})}{E_0(\vartheta_{max})} \quad (17)$$

5) Stochastisch ungleichförmiger Lastfall mit konstanter Frequenz und sinusförmigem Lastverlauf mit Erwärmung

Kurzbeschreibung:

Die Ausschlagspannung nimmt stochastisch-regellose Werte an, die jedoch statistisch beschreibbar bleiben. Der Maximalwert der Ausschlagspannung ist bekannt. Die Schwingung soll so einheitlich sein, daß die Gleichgewichtstemperatur als konstant angesehen werden kann. (Bild 17)

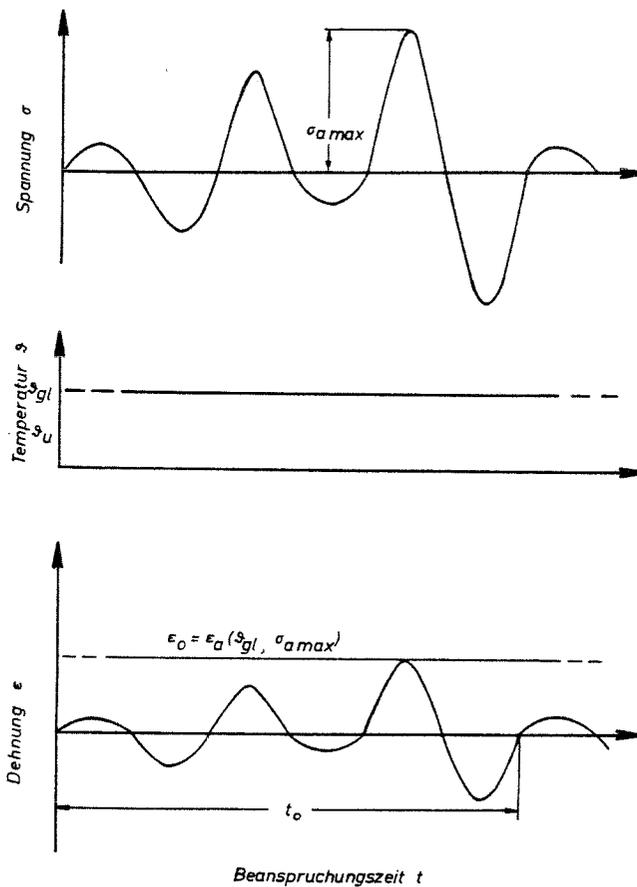


Bild 17: Verlauf von Spannung, Temperatur und Dehnung eines stochastisch schwingend belasteten Bauteiles

formelmäßiger Zusammenhang:

$$\epsilon_o(\vartheta_{gl}) = \frac{\sigma_{a,max}}{E_o(\vartheta_{gl})} \quad (18)$$

- 6) Schwingende Belastungen mit nicht sinusförmigem Lastverlauf, die zur Erwärmung führen

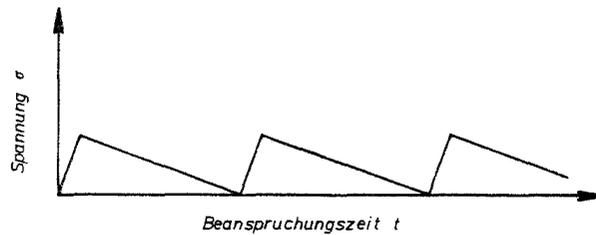


Bild 18: Ein nicht sinusförmiger Spannungsverlauf

Auch nicht sinusförmige Lastverläufe (Bild 18) sind einer Dimensionierungsrechnung zugänglich, wenn der gegebene Verlauf der Ausschlagspannung auf einen Verlauf einer schwingformbezogenen "äquivalenten Ausschlagspannung"  $\sigma_{a\ddot{a}}$  umgerechnet wird.

Unter dieser "äquivalenten Ausschlagspannung"  $\sigma_{a\ddot{a}}$  soll diejenige Ausschlagspannung verstanden werden, die bei sinusförmiger Beanspruchung gleicher Frequenz notwendig wäre, um die gleiche Eigen Erwärmung des Werkstoffes zu erzeugen wie die gegebene Belastung.

$$\sigma_{a\ddot{a}} = \sqrt{C} \cdot \sigma_a \quad (19)$$

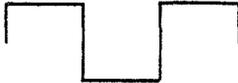
 Sinus	$\sqrt{C} = 1$
 Dreieck	$\sqrt{C} = 0,83$
 Rechteck	$\sqrt{C} = 1,3$

Tabelle 2: Schwingformfaktoren

7) Überlagerungen aus den zuvor beschriebenen Lastverläufen

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Lastverläufe werden nur ein kleines Feld der in der Wirklichkeit vorkommenden Lastprobleme wiedergeben. Im Normalfall werden sich die oben beschriebenen "reinen" Lastfälle zu einem komplizierten Gesamtlastproblem überlagern.

7a) Überlagerung aus statischen und dynamischen Lasten

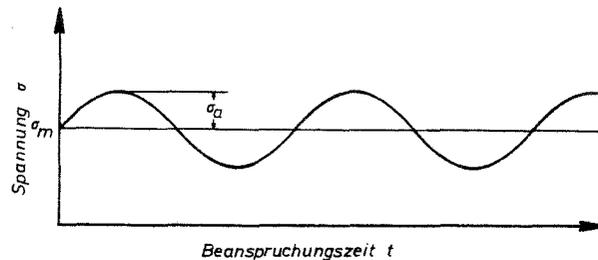


Bild 19: Periodische Lastfunktion mit statischer Vorspannung

Gemäß dem Boltzmann'schen Superpositionsprinzip addieren sich im linear-visko-elastischen Bereich der Kunststoffe die Dehnungen genauso wie die sie bewirkenden Spannungen. Für die Dimensionierung so belasteter Bauteile bedeutet dies:

1. Der Lastverlauf muß in eine statische oder alternierende Grundlast und eine überlagerte Schwingbeanspruchung zerlegt werden.
2. Diese beiden "reinen" Lastformen werden einzeln behandelt und anschließend ihre resultierenden Dehnungen addiert, wobei zu beachten bleibt, daß das Bauteil bei der durch die Schwingung hervorgerufenen Eigenerwärmungstemperatur zu berechnen ist.

7b) Überlagerungen aus mehreren schwingenden Lastverläufen

Prinzipiell geschieht hier dasselbe wie in Abschnitt 7a) beschrieben. Die Hauptschwierigkeit beim Umgang mit solchen Lastverläufen liegt jedoch in der Zerlegung der Belastung in eine Grundschiwingung und eine oder mehrere Oberschwingungen. Die mathematische Grundlage hierzu bietet die Fourier-Analyse.

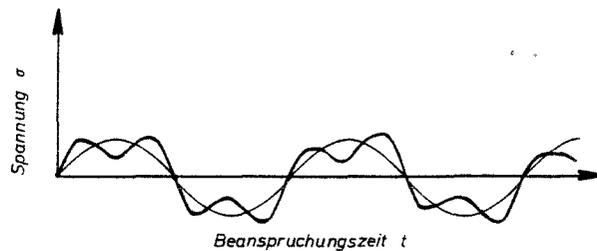


Bild 20: Spannungsüberlagerung, verursacht durch zwei sinusförmige Beanspruchungen

8) Ermittlung der sich einstellenden Gleichgewichtstemperatur bei schwingenden Belastungen von Kunststoffbauteilen

Die sich einstellende Gleichgewichtstemperatur  $\mathcal{S}_{gl}$  läßt sich durch iteratives Anwenden der Gleichung

$$\mathcal{S}_{gl} = \mathcal{S}_u + \Delta \mathcal{S} = \frac{\sigma_a^2}{E(\mathcal{S})} \cdot d(\mathcal{S}) \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{s}{\alpha^*} + \mathcal{S}_u \quad (20)$$

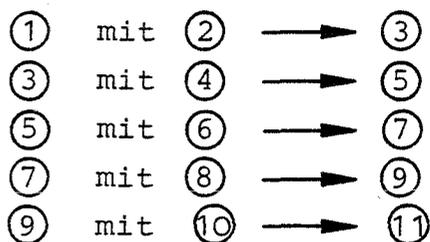
ermitteln. Für nicht sinusförmige Schwingung ist die schwingformbezogene äquivalente Ausschlagspannung  $\sigma_{a\ddot{a}}$  in Gl. (20) einzusetzen.

Im Falle einer stochastischen Schwingung muß ein lastformbezogener äquivalenter Ausschlagspannungswert  $\sigma_a$  eingesetzt werden, der durch Anwenden einer statistischen Methode - des Matrixverfahrens - ermittelt wird.

Eine Lösung der Gleichung (20) ist auch durch Anwenden des Nomo-gramms in Abb. 21 möglich.

Dabei ist wie folgt vorzugehen:

Alle durch gerade Zahlen gekennzeichneten Leitern sowie Leiter ① enthalten die Variablen gemäß Gleichung (20). Ungerade Leitern, mit Ausnahme der Leiter ①, sind Hilfsleitern.



Dieser Wert wird danach gespreizt (vergrößert) als Ergebnis dargestellt.



Das Nomogramm ist für homogene, gefüllte und verstärkte Kunststoffe anwendbar. Dabei können die einzelnen Kenngrößen in dem üblichen Einsatz entsprechenden Bereichen variiert werden.

Hinweis: Da zur Bestimmung der Temperaturerhöhung zwei temperaturabhängige Daten ( $E_0(\mathcal{S})$  und  $d(\mathcal{S})$ ) Verwendung finden, muß die Gleichgewichtstemperatur iterativ ermittelt werden.

### 4.3. Eigenschaften von Verbundwerkstoffen

#### 4.3.1. Ursachen

Obwohl im Prinzip Verstärken und Versteifen zwei verschiedene Eigenschaftsänderungen betreffen, unterscheidet man oft nicht exakt zwischen ihnen, weil beides in vielen praktisch bedeutenden Fällen gemeinsam auftritt.

Es bedeutet richtigerweise:

Verstärken: Steigerung der Festigkeit, d. h. der zumutbaren Belastung (Spannung)

$$\sigma_V > \sigma_H \text{ bzw. } \sigma_V / \sigma_H > 1 \quad (21)$$

Versteifen: Erhöhen des Elastizitätsmoduls

Es gilt:  $E_V > E_H \text{ bzw. } E_V / E_H > 1 \quad (22)$

Verstärken hat stets auch ein Versteifen zur Folge, eine Versteifung jedoch bewirkt nicht immer eine Verstärkung, sondern oftmals auch eine geringere Zugbeanspruchbarkeit.

Beispiel: Füllung mit Pulver senkt die Zugfestigkeit, obwohl der Zugmodul mäßig ansteigt.

Er steigt aber nur so lange, wie auf Grund der Packungsdichte noch ein allseitiges Umschließen des Füllstoffes durch die Matrix möglich ist. Der Modul wird auch wieder kleiner, wenn während der Belastung Ablösungen zwischen Matrix und Füllstoffoberfläche auftreten.

#### 4.3.2. Mischungsregel, Parallel- bzw. Reihenschaltung von Matrix und Verstärkungstoff

Bei kleinen Deformationen und Füllstoffgehalten, die geringer sind als die größtmögliche Packungsdichte, läßt sich die Ursache für die Versteifung der Matrix durch Füllstoffe unter Zug- und Druckbeanspruchung wie folgt beschreiben.

Zur Berechnung und Veranschaulichung diene das Modell aus zwei jeweils homogenen Phasen, die abwechselnd aufeinandergeschichtet und fest miteinander verbunden sind. Sie werden je nach Beanspruchung parallel oder senkrecht zur Schichtebene belastet (Bild 22). Nach diesen beiden Grenzfällen unterscheidet man zwischen einer Parallel- und einer Reihenschaltung jeweils von Verstärkungswerkstoff und Matrix.

#### Parallelschaltung von Faser und Verstärkungswerkstoff

In diesem Fall (Bild 22,a) unterliegen bei Belastung alle Schichten der gleichen Verformung. Die Belastung verteilt sich auf Matrix und Verstärkungswerkstoff nach ihrem jeweiligen Volumenanteil und dem Elastizitätsmodul der Komponenten.

$$\text{Es gilt also: } \epsilon_{V_{II}} = \epsilon_H = \epsilon_G \quad (23)$$

Ferner gilt bezüglich der Volumenanteile von Füllstoff und Matrix:

$$\varphi_H + \varphi_G = 1 \quad (24)$$

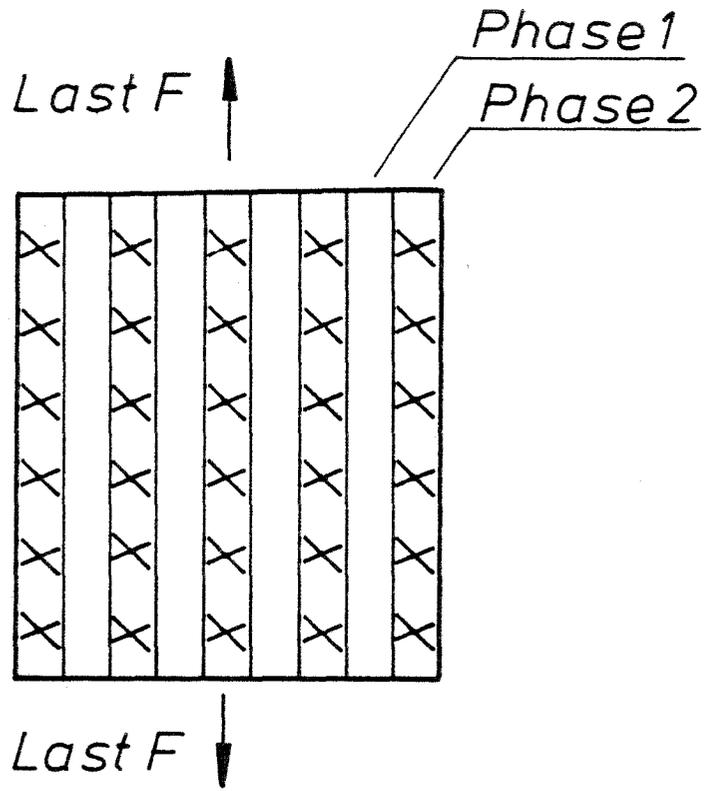
Die übertragbaren Kräfte  $F$  des Verbundes sind

$$F_{V_{II}} = F_G = F_H$$

und bei Berücksichtigung der Querschnittsanteile  $A$  erhält man die Spannungen

$$\sigma_{V_{II}} \cdot A_V = \sigma_G \cdot A_G + \sigma_H \cdot A_H$$

a) Parallelschaltung



b) Reihenschaltung

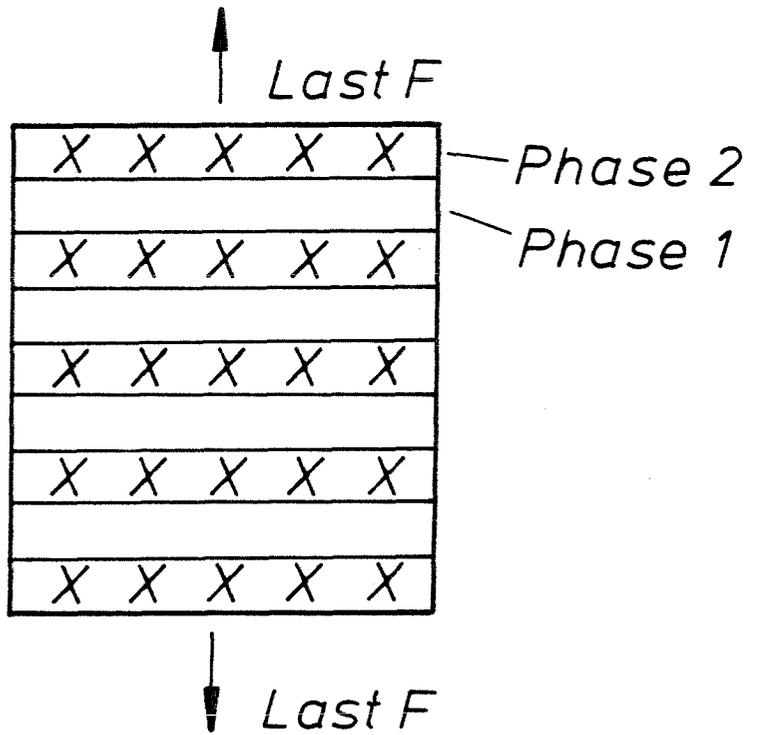


Bild 22: Parallel- bzw. Reihenschaltung zweier homogener Phasen (Modell)

Die Querschnittsanteile entsprechen den Volumenanteilen; damit lautet die Mischungsregel für die Spannungen bei einer Parallelschaltung von Faser und Matrix (mit  $\varphi \hat{=}$  Faservolumenanteil)

$$\sigma_{V_{II}} = \varphi \sigma_G + (1-\varphi) \sigma_H = \sigma_H + \varphi (\sigma_G - \sigma_H) \quad (25)$$

Der Zusammenhang ist in Bild 23 als Diagramm in normierter Form dargestellt.

Unter Berücksichtigung des Hooke'schen Gesetzes erhält man daraus die Mischungsregel für den Elastizitätsmodul des Verbundes bei Parallelschaltung von Faser und Matrix als

$$E_{V_{II}} = \varphi E_G + (1-\varphi) E_H = E_H + \varphi (E_G - E_H) \quad (26)$$

Der Zusammenhang ist in Bild 24 als Diagramm in normierter Form dargestellt.

Man erkennt, daß bei einer solchen Parallelbeanspruchung sowohl die Belastbarkeit als auch der Elastizitätsmodul des Verbundes linear mit dem Faservolumenanteil ansteigen.

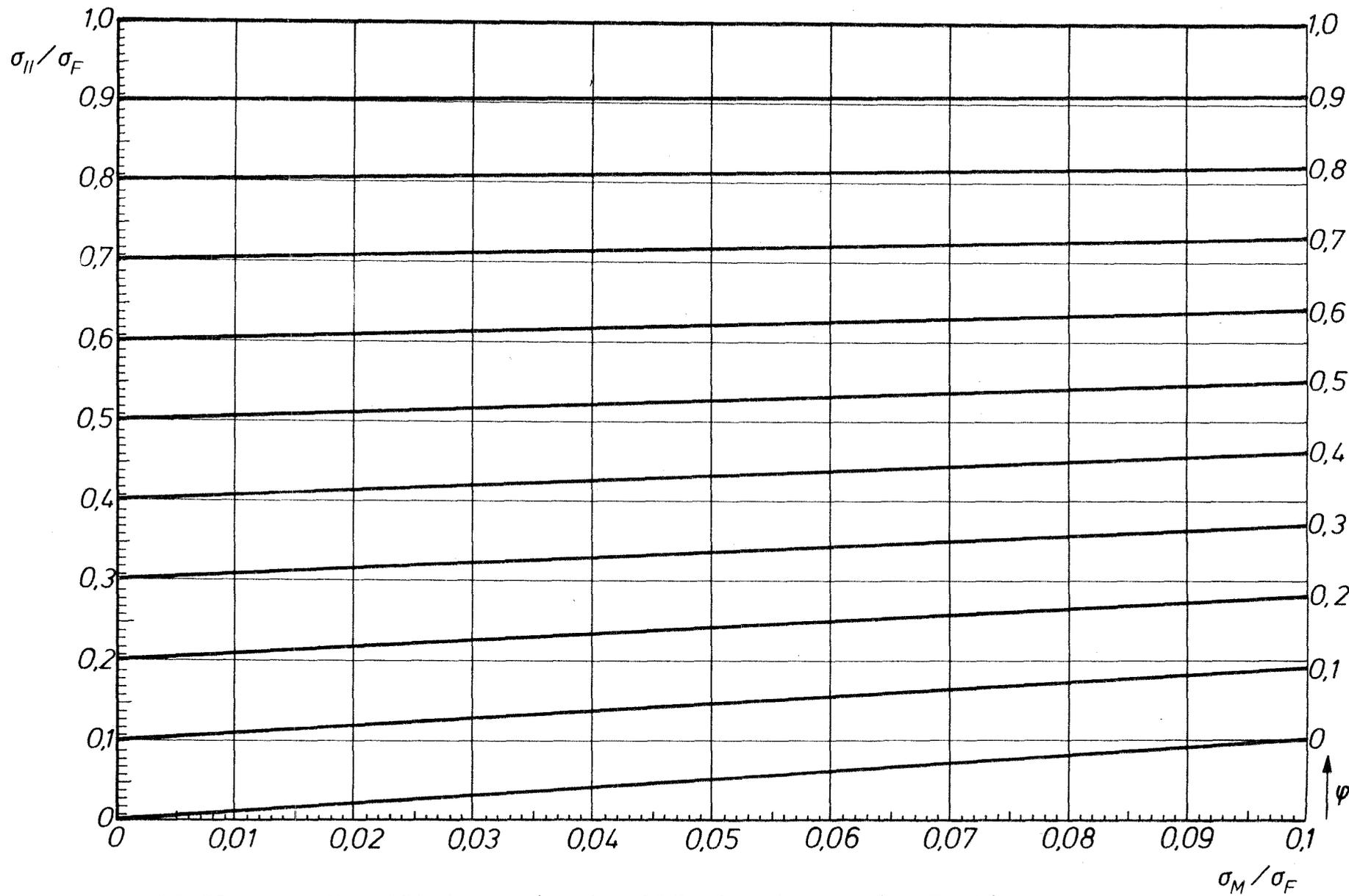


Bild 23: Das Verhältnis  $\sigma_{11}/\sigma_G$  in Abhängigkeit von der Festigkeit des Harzes  $\sigma_H$  und vom Glasvolumenanteil  $\varphi$  (Parallelschaltung)

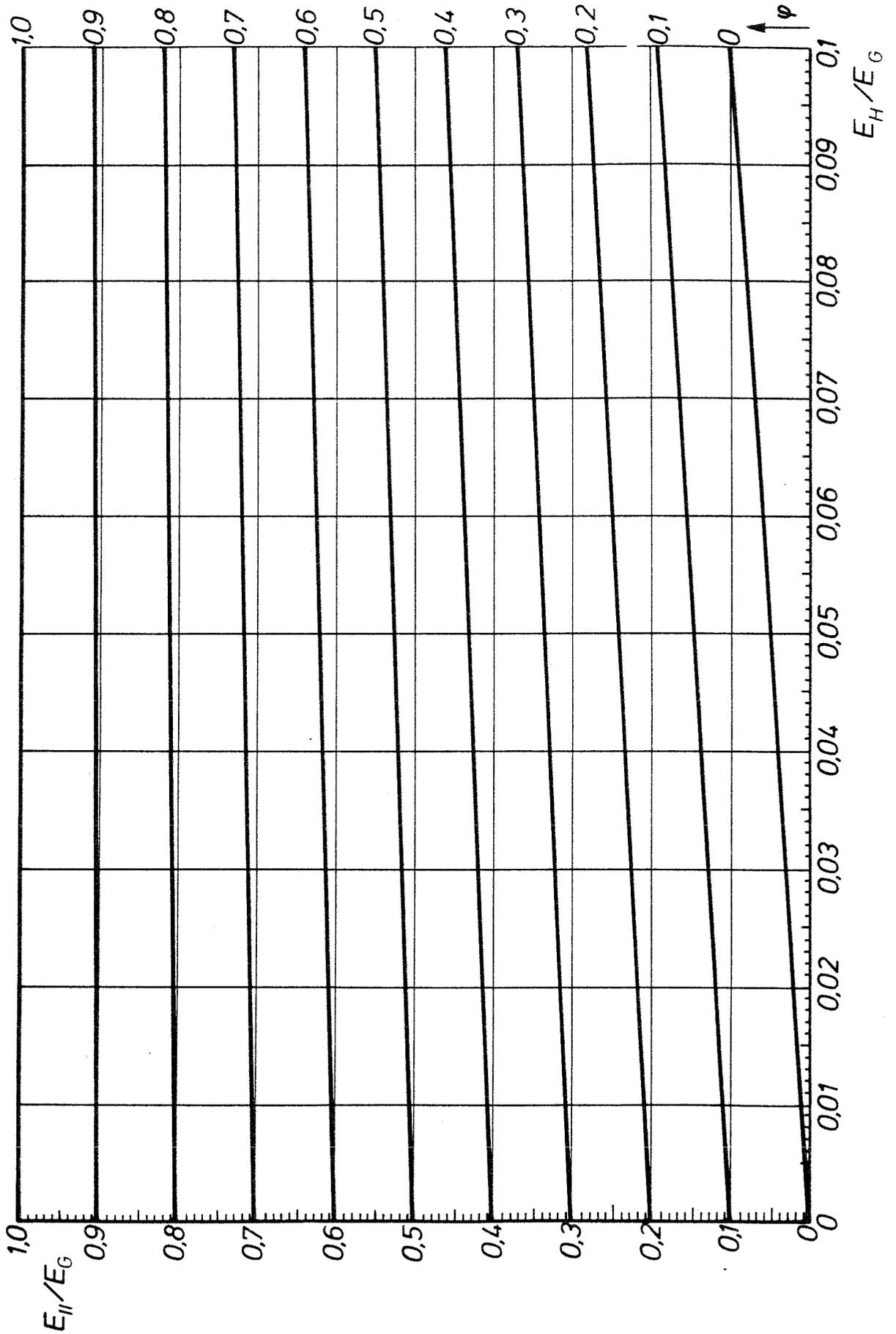


Bild 24: Das Verhältnis der Moduln  $E_{||}/E_G$  in Abhängigkeit vom Harzmodul  $E_H$  und dem Glasvolumenanteil  $\varphi$  (Parallelschaltung)

### Reihenschaltung von Faser und Verstärkungswerkstoff

Jetzt unterliegen (Bild 22,b) alle Schichten der gleichen äußeren Belastung; die Gesamtverformung verteilt sich dagegen auf die einzelnen Schichten nach ihrem jeweiligen Volumenanteil und dem Elastizitätsmodul der einzelnen Komponenten.

Es gilt also:

$$\sigma_{V_L} = \sigma_H = \sigma_G \quad (27)$$

Mit  $\epsilon = \sigma/E$

erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (24) und (27) nach einigen Umformungen die Mischungsregel für eine Reihenschaltung von zwei Komponenten bezüglich des Elastizitätsmoduls des Verbundes zu:

$$E_{V_L} = \frac{E_H}{(1-\varphi) + \varphi \cdot E_H/E_G} \quad (28)$$

Der Zusammenhang ist in Bild 26 als Nomogramm dargestellt, in normierter Form in Bild 25.

Bezüglich der übertragbaren Spannungen bei einer Reihenschaltung kommt neben anderen Einflüssen der Belastbarkeit der Grenzfläche Faser/Matrix eine entscheidende Bedeutung zu.

Daher muß man berücksichtigen, daß

$$\sigma_{V_L} \leq \sigma_H \leq \sigma_G = \sigma_{\text{Grenzfläche}}$$

ist.

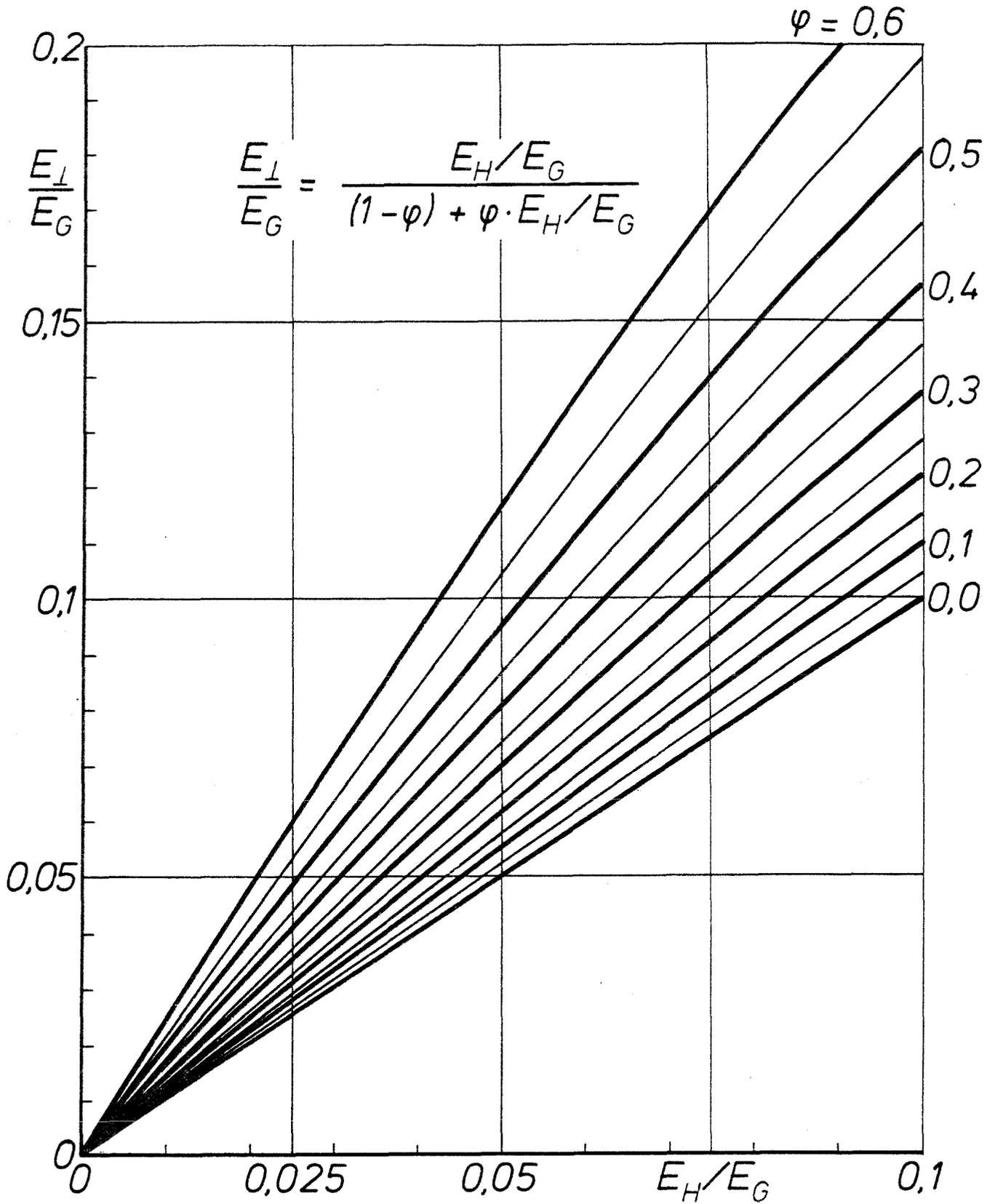


Bild 25: Das Verhältnis der Moduln  $E_{\perp}/E_G$  in Abhängigkeit vom Harzmodul  $E_H$  und dem Glasvolumenanteil  $\psi$  (Reihenschaltung)

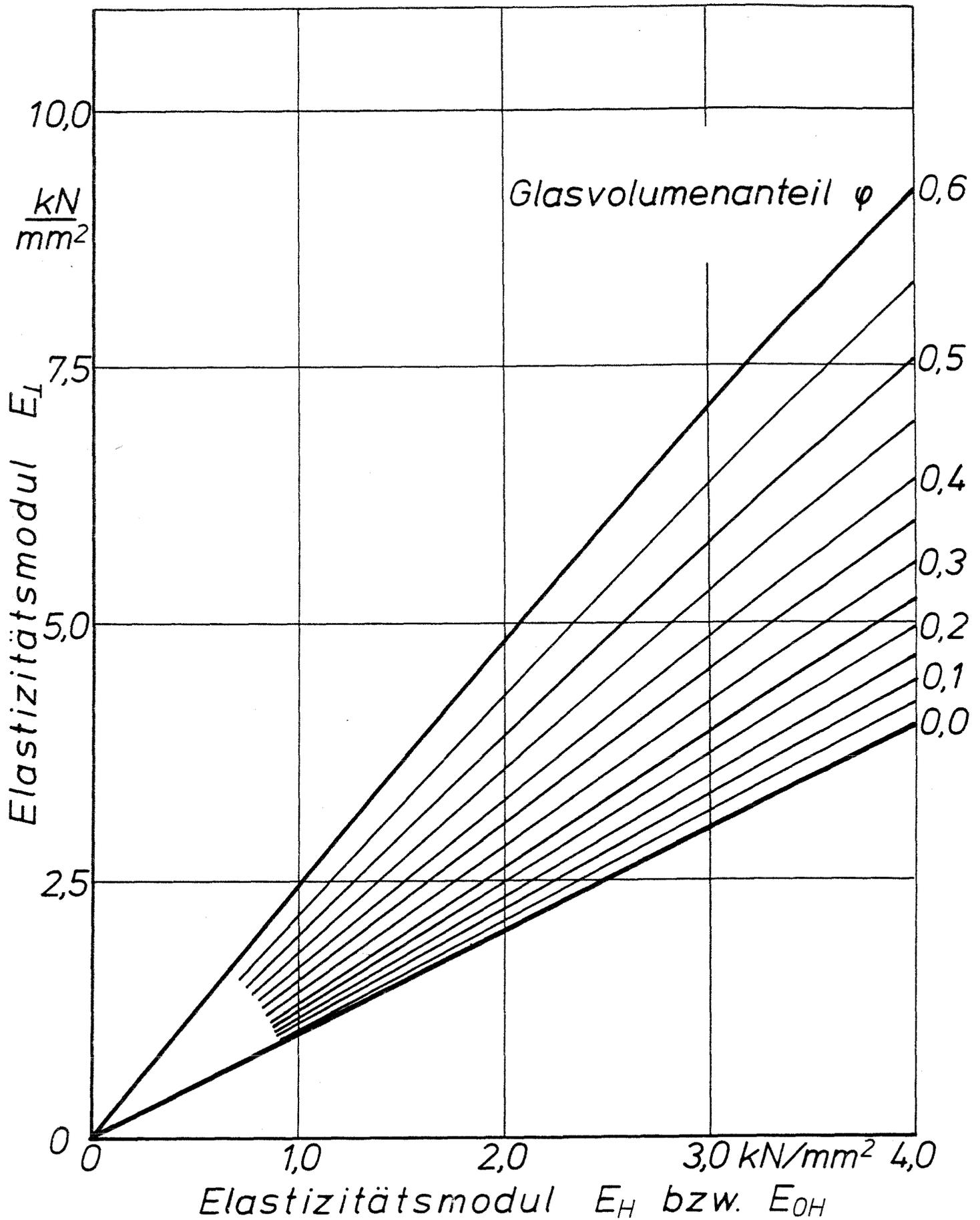


Bild 26: Der Elastizitätsmodul  $E_I$  als Funktion des Harzmoduls  $E_H$  und des Glasvolumenanteils  $\varphi$

Die absoluten Grenzen für eine Verstärkung bzw. Versteifung sind in beiden Fällen (Parallel- wie Reihenschaltung) trivial; es gilt:

$$\varphi = 0 \longrightarrow \sigma_V = \sigma_H \quad ; \quad E_V = E_H$$

$$\varphi = 1 \longrightarrow \sigma_V = \sigma_G \quad ; \quad E_V = E_G$$

Aus geometrischen Gründen und aus der Forderung, daß die Faser allseitig von der Matrix umschlossen sein soll, ist der Fall  $\varphi = 1$  jedoch nicht erreichbar. Technisch verwirklichtbare und daher realistische maximale Füllgrade liegen etwa bei  $\varphi = 0,8$ . Dafür können überschlägig folgende Grenzen angegeben werden:

$$\varphi = 0,8 \begin{cases} \longrightarrow \sigma_{V_{II}} \approx 0,8 \sigma_F \quad ; \quad E_{V_{II}} \approx 0,8 E_F \\ \longrightarrow \sigma_{V_I} \approx 0,5 \sigma_H \quad ; \quad E_{V_I} \approx 0,5 E_F \end{cases}$$

Quer zur Beanspruchung ausgerichtete Fasern bewirken also i. a. eine Schwächung, die unter die Matrixfestigkeit führt.

#### 4.3.3. Verstärkung durch Füllstoffe und Fasern

Aus der Anschauung des Modells nach Bild 22 wird deutlich, daß bei einer Parallelschaltung von Füllstoff und Matrix neben der Versteifung auch immer eine Verstärkung erzielt wird, wenn der Füllstoff eine höhere Festigkeit hat als die Matrix. Für die Reihenschaltung lehrt uns die Erfahrung, daß immer die schwächste Stelle zuerst bricht. Dies ist nach der Einlagerung von Füllstoffen meistens immer noch die Matrix oder die Grenzfläche Füllstoff/Matrix. Bei einer solchen Anordnung ist also eine Festigkeitserhöhung des Verbundes nicht möglich, im Gegenteil, oft wirken die eingelagerten Füllstoffe wie Kerben im Verbund und setzen sogar die Festigkeit gegenüber der Matrix noch herab.

Eine Verstärkung wird also im wesentlichen erst wirksam, wenn eine durchgehende Phase (Faser) vorhanden ist und die Richtung der angreifenden Last parallel zur Richtung der Phase verläuft. Die beste Verstärkungswirkung erreicht man, wenn diese Phase durch einen Verstärkungswerkstoff aus durchgehenden, sogenannten Endlosfasern besteht, und die äußeren Kräfte unmittelbar in die Verstärkungsfasern eingeleitet werden.

Eine gute Verstärkungswirkung läßt sich jedoch auch mit nicht-durchlaufenden Fasern erreichen (z. B. bei einer Glasmattenverstärkung). In diesem Fall müssen die äußeren Kräfte allerdings im wesentlichen durch Schubkräfte zwischen Faser und Matrix über die Matrix von einem Faserstück in das nächstliegende übertragen werden. Eine gute Verstärkungswirkung setzt hier also neben der Festigkeit der Matrix eine größtmögliche Haftung zwischen Faser und Matrix voraus. Dies erfordert wiederum eine allseitig vom Harz umschlossene und vollständig benetzte Faseroberfläche - dafür werden auf die Fasern i. a. Haftvermittler aufgebracht - und zusätzlich auch eine bestimmte Mindestlänge der Fasern.

## 5. Bemessen von Bauteilen aus glasfaserverstärkten Kunststoffen

Im folgenden soll nun dem Entwicklungsingenieur das Werkzeug in die Hand gegeben werden, mit dem er Bauteile aus glasfaserverstärkten Kunststoffen bemessen kann.

Dabei werden im wesentlichen Formeln und Nomogramme vorgestellt, deren Anwendung hier erläutert werden soll, auf deren theoretisch-physikalische oder experimentelle Begründung jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet werden muß.

Bemessen lassen sich GFK-Laminat nur dann mit erträglichem Aufwand, solange sie symmetrisch aufgebaut sind. Zur Ermittlung der Eigenschaften des Laminates wird schichtenweise vorgegangen. Hierbei geht man von der Vorstellung aus, daß die Eigenschaften des Verbundes in einer Richtung sich aus der Summe der anteilmäßigen Eigenschaften der Einzelschichten in dieser Richtung zusammensetzen.

Schichten mit Wirrfaserverstärkung (quasiisotrope Schichten) lassen sich im wesentlichen mit zwei Verfahren unterschiedlicher Genauigkeit bemessen.

Schichten mit gerichteten (anisotropen) Eigenschaften lassen sich nach zwei Bemessungsverfahren berechnen, die auf zwei verschiedene Theorien - der Kontinuums- und der Netztheorie - basieren.

Zusätzlich zur Bemessung der elastischen Eigenschaften und der Festigkeit werden auch Möglichkeiten zur Bestimmung von Wärmeausdehnung und Wärmeleitfähigkeit von GFK-Verbundwerkstoffen angegeben.

## 5.1. Bemessen einer quasiisotropen Schicht

### 5.1.1. Ermittlung des E-Moduls einer quasiisotropen Schicht (Wirrlaminat) ohne Berücksichtigung des Temperatur- und Zeiteinflusses

Die nach der Mischungsregel für UD-Laminat (Parallelschaltung) sich ergebende Beziehung für den E-Modul in Verstärkungsrichtung (siehe 4.3.2.) wird durch einen Abminderungsfaktor  $k_\varphi$  für Mat-  
tenverstärkungslagen umgeformt.

$$E_V = E_H + k_\varphi \cdot \varphi (E_G - E_H) \quad (30)$$

Experimentell ergeben sich für  $k_\varphi$  Werte zwischen 0,4 und 0,45. Man liegt für Überschlagsrechnungen auf der sicheren Seite, wenn man mit

$$k_\varphi = 0,4 \quad (31)$$

rechnet.

In Bild 27 ist der Zusammenhang aus Gl. (30) in normierter Form dargestellt. Bild 28 stellt in Diagrammform den Zusammenhang mit absoluten Zahlenwerten dar, wobei hier auch der Schubmodul  $G_M$  (Umrechnung nach Gl. (12)) ermittelt werden kann.

Den in Gl. (30) formelmäßig ausgedrückten Zusammenhang stellen die Nomogramme in Abb. 29 und 30 graphisch dar.

In beiden Abbildungen werden der Glasvolumenanteil  $\varphi$  und der Verstärkungsfaktor  $k_\varphi$  als Eingangsgrößen benutzt. Diese beiden Größen liefern zusammen mit dem auf die Fasersteifigkeit normierten Elastizitätsmodul des Harzes den E-Modul  $E_V$  des Verbundwerkstoffes - ebenfalls in normierter Form.

Bild 30 bietet darüber hinaus die Möglichkeit, statt des Glasvolumenanteils  $\varphi$  den in der Praxis leichter bestimmbar Glasgewichtsanteil  $\psi$  in Verbindung mit den Dichten von Harz und Glas zu verwenden.

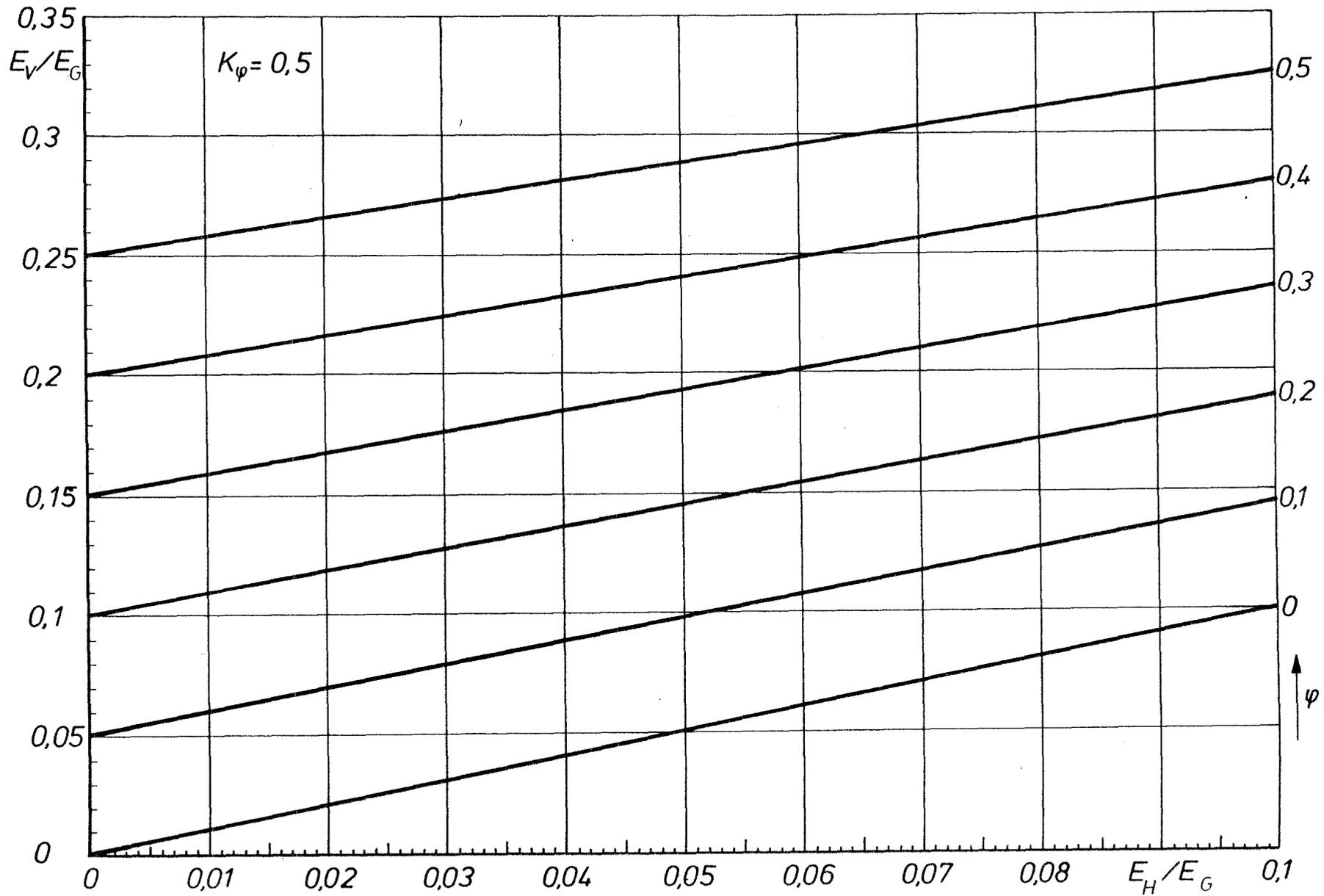
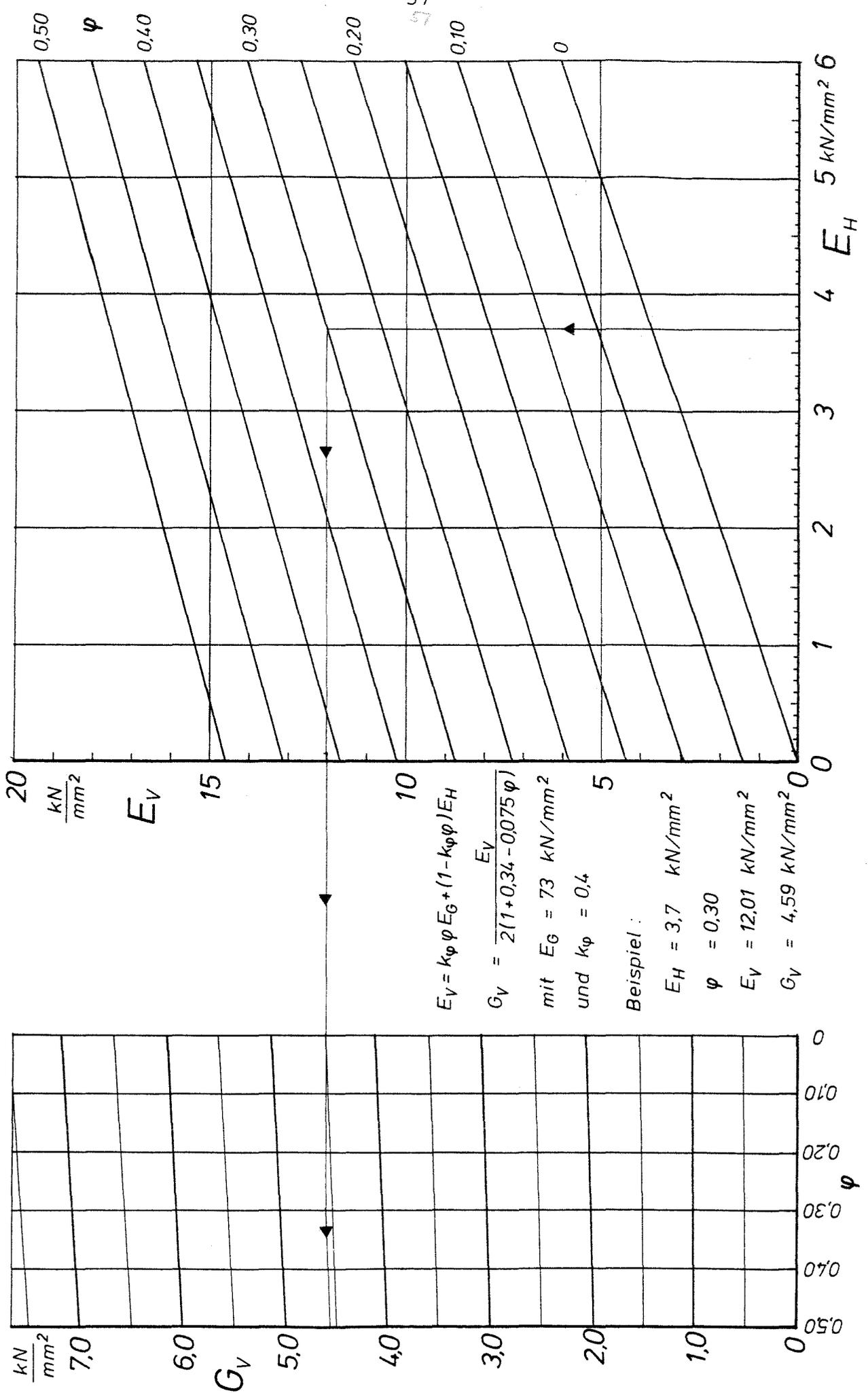
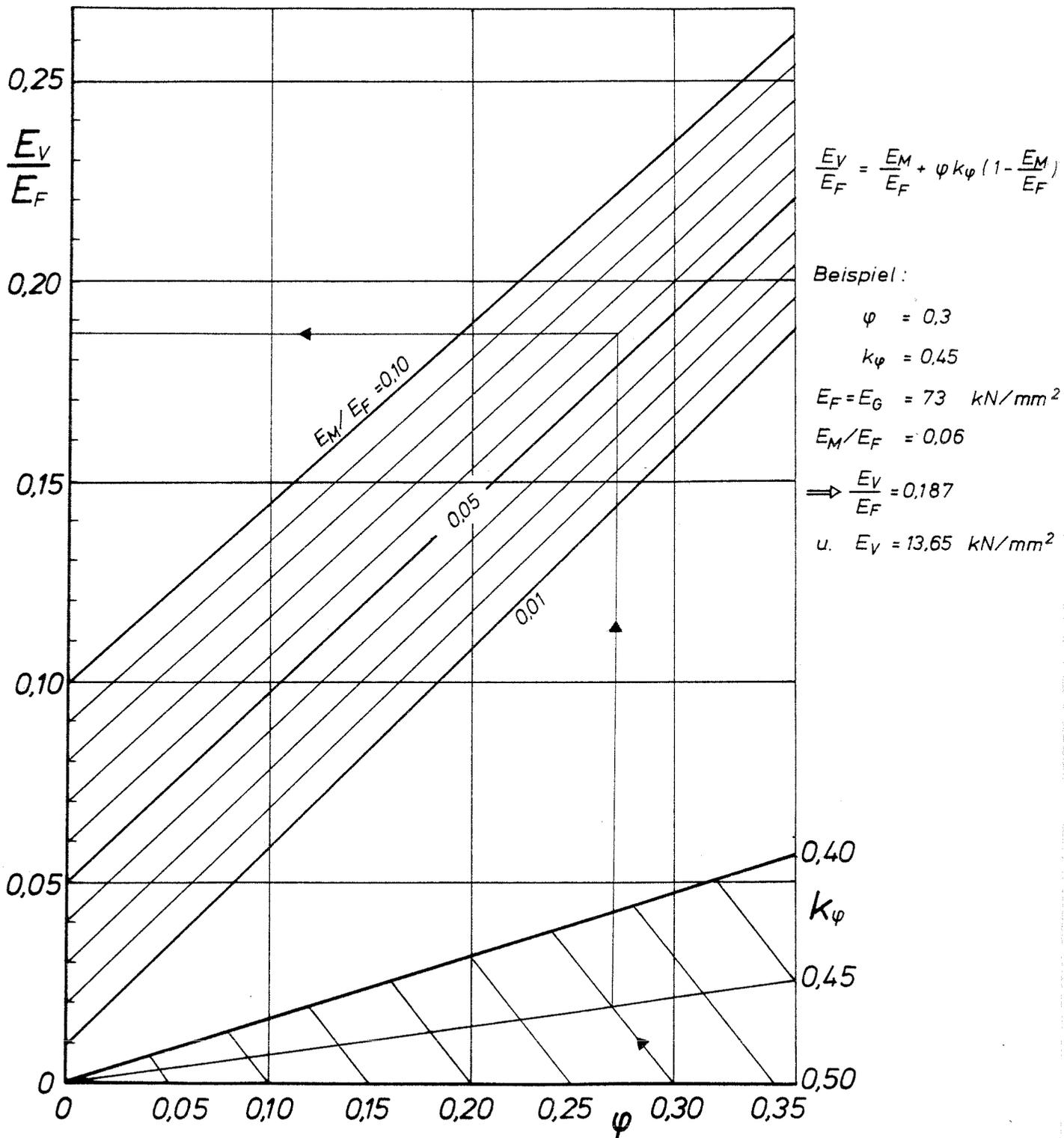


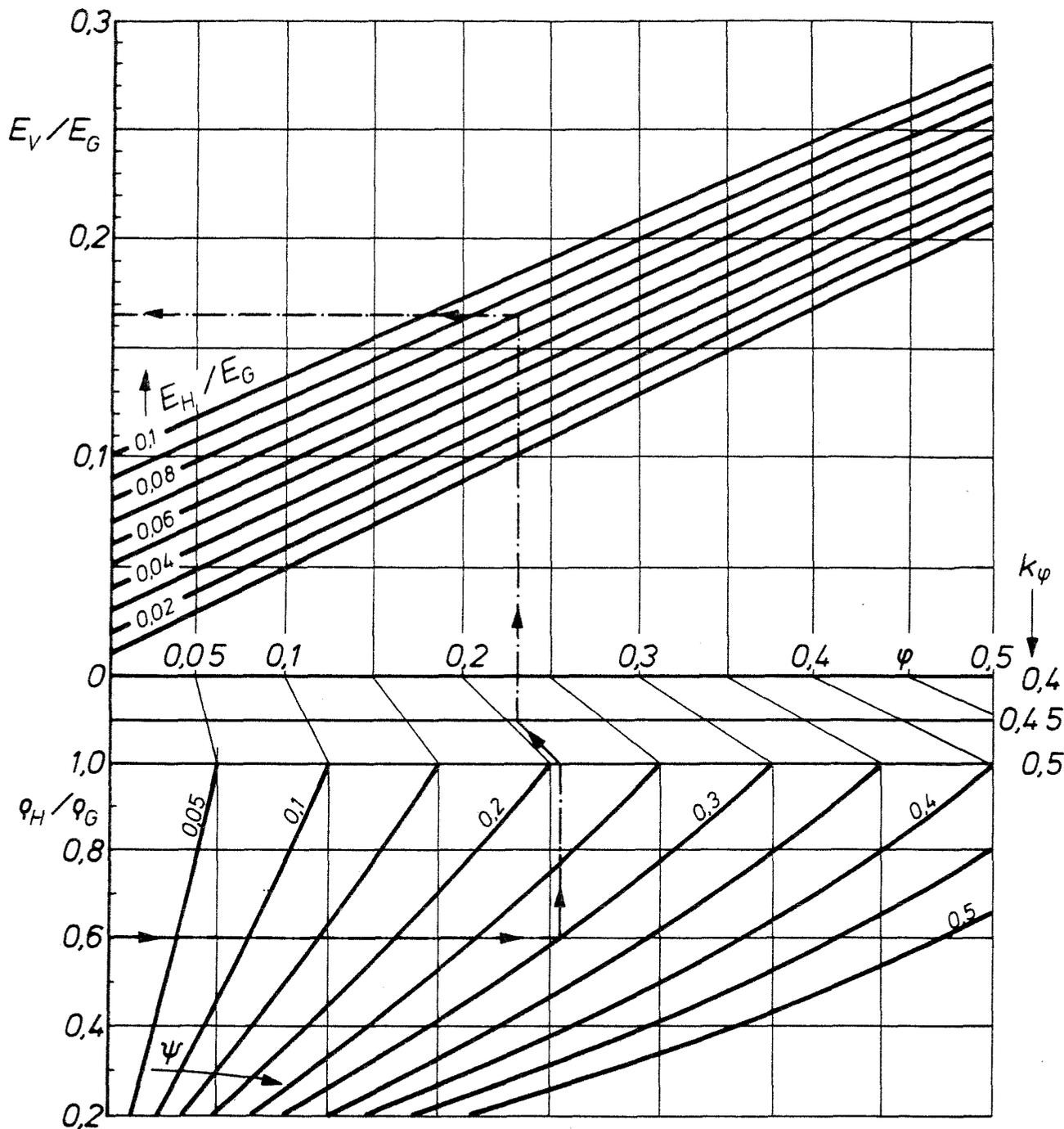
Bild 27: Das Verhältnis der Moduln  $E_V/E_G$  als Funktion des Harzmoduls  $E_H$  und des Glasvolumenanteils  $\varphi$



**Bild 28:** Der Elastizitätsmodul  $E_V$  von mattenverstärktem GFK in Abhängigkeit vom Harzmodul und dem Glasvolumenanteil  $\varphi$



**Bild 29:** Nomogramm zur Bestimmung des auf den Glasmodul normierten E-Moduls von mattenverstärktem GFRK



Beispiel:  $k_\psi = 0,45$   
 $\rho_H/\rho_G = 0,6$   
 $\psi = 0,3$   
 $E_H/E_G = 0,08$  }  $\Rightarrow E_V/E_G = 0,165$

Bild 30: Nomogramm zur Ermittlung des auf den Glasmodul normierten E-Moduls von mattenverstärktem GFK mit dem Dichteverhältnis  $\rho_H/\rho_G$  und dem Glasgewichtsanteil  $\psi$  als Eingangsgrößen

Bild 29 bietet die Möglichkeit, aus dem Glasvolumenanteil  $\varphi$  und den Schubmoduln des Glases und Harzes den Schubmodul des Verbundwerkstoffes einfach zu bestimmen.

Einschränkend muß gesagt werden:

- 1) Die Zeitabhängigkeit der elastischen Eigenschaften des Harzes werden nicht berücksichtigt. Gl. (30) darf also nur auf kurzzeitig beanspruchte Bauteile angewandt werden.
- 2) Die Temperaturabhängigkeit der elastischen Eigenschaften der Harzmatrix werden in Gl. (30) nicht berücksichtigt. Sie darf also nur auf Bauteile angewandt werden, deren Einsatztemperatur den Temperaturen entspricht, bei denen  $E_H$  gemessen wurde.
- 3) Die Mindestfaserlänge darf nicht unterschritten werden.

$$l > l_{krit} \quad (32)$$

- 4) Der Verbundwerkstoff muß rißfrei bleiben, d. h. , er muß sich linear-viskoelastisch verhalten. Dies ist nur bei Dehnungen  $\varepsilon \approx 0,5 \%$  gewährleistet.

5.1.2. Ermittlung des E-Moduls einer quasiisotropen Schicht unter Berücksichtigung der Temperatur- und Zeitabhängigkeit der Harzkenngrößen

---

(nach Menges, Roskothen und Adamczak)

Um die Zeit-, Temperatur- und Glasgehaltsabhängigkeit des Elastizitätsmoduls eines mattenverstärkten Verbundwerkstoffes zu beschreiben, wird von Menges, Roskothen und Adamczak folgende Gleichung angegeben, deren empirische Beiwerte aus einer Vielzahl von Experimenten ermittelt wurden.

$$E_{\text{Matte}} = E_c(t, \mathcal{S}, \varphi) = E_H(t_0, \mathcal{S}_0) \cdot f_\varphi \cdot f_{\mathcal{S}} \cdot f_t \quad (33)$$

Hierbei bedeutet:

$E_c(t, \mathcal{S}, \varphi) \hat{=}$  zeit-, glasgehalts- und temperaturabhängiger Kriechmodul des Laminates

$E_H(t_0, \mathcal{S}_0) \hat{=}$  Elastizitätsmodul des Harzes bei einer Bezugszeit  $t_0$  und einer Bezugstemperatur

$f_\varphi \hat{=}$  Verstärkungsfaktor, berücksichtigt den Einfluß der Verstärkung

$f_{\mathcal{S}} \hat{=}$  Temperaturfaktor, berücksichtigt den Einfluß der Temperatur

$f_t \hat{=}$  Zeitfaktor, berücksichtigt den Einfluß der Zeit

Die Einzeleinflüsse werden also multiplikativ überlagert.

Die Einflußfaktoren  $f_\varphi$ ,  $f_{\mathcal{S}}$ ,  $f_t$  werden nun gemäß der folgenden Beziehungen ermittelt:

a) Der Glasgehaltseinfluß:

$$f_{\varphi} = 1 + k_{\varphi}(\varphi) \cdot \varphi \left( \frac{E_G}{E_H(t_0, \vartheta_0)} - 1 \right) \quad (34)$$

wobei der Traganteil  $k_{\varphi}(\varphi)$  aus experimentell ermittelten Daten mit Hilfe der Regressionsrechnung zu

$$k_{\varphi}(\varphi) = 0,325 - 0,709 \varphi + 5,21 \varphi^2 \quad (35)$$

gefunden wurde.

b) Der Temperatureinfluß:

$$f_{\vartheta} = \exp[-k_{\vartheta}(k_{\vartheta_0}, \varphi) \cdot (\vartheta - \vartheta_0)] \quad (36)$$

Die folgende Beziehung für  $k_{\vartheta}(k_{\vartheta_0}, \varphi)$  ist wieder durch Regressionsrechnungen aus einer Vielzahl experimentell gewonnener Daten ermittelt worden:

$$k(k_{\vartheta_0}, \varphi) = 0,0018 + 0,943 k_{\vartheta_0} - 4,424 k_{\vartheta_0} \varphi + 6,519 k_{\vartheta_0} \varphi^2 \quad (37)$$

Der Faktor  $k_{\vartheta_0}$  ist der Temperaturexponent des reinen Harzes. Er muß im Experiment in zwei Kurzzeitzugversuchen an Reinharz bestimmt werden, wobei der  $E_H(t_0)$ -Modul des Harzes bei zwei Temperaturen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  aufgenommen werden muß. Dann errechnet sich der Temperaturexponent zu

$$k_{\vartheta_0} = \frac{\ln [E_H(t_0, \vartheta_0) / E_H(t_0, \vartheta_1)]}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \quad (38)$$

Die Daten für  $E_H(\vartheta_0, t_0)$  und  $E_H(\vartheta_1, t_0)$  lassen sich meist auch aus den Angaben der Rohstoffhersteller entnehmen.

c) Der Zeiteinfluß:

$$f_t = \frac{t^{-k_t(k_{t_0}(\mathcal{S}), \varphi)}}{t_0} \quad (39)$$

Eine statistische Auswertung experimenteller Daten ergibt für den Zeitexponenten  $k_t$

$$k_t(k_{t_0}(\mathcal{S}), \varphi) = 0,0092 + (0,926 - 4,366 \varphi + 6,688 \varphi^2) \cdot k_{t_0}(\mathcal{S}) \quad (40)$$

Hierbei ist der Faktor  $k_{t_0}(\mathcal{S})$  der Zeitexponent des Reinharzes, der wieder aus zwei Daten aus zwei Zugversuchen ermittelt werden kann, oder aus den Angaben der Rohstoffhersteller folgt.

$$k_{t_0}(\mathcal{S}_0) = \frac{\ln [E_H(t_0, \mathcal{S}_0) / E_H(t_1, \mathcal{S}_0)]}{\ln(t_1/t_0)} \quad (41)$$

$$k_{t_0}(\mathcal{S}_1) = \frac{\ln [E_H(t_0, \mathcal{S}_1) / E_H(t_1, \mathcal{S}_1)]}{\ln(t_1/t_0)} \quad (42)$$

$$k_{t_0}(\mathcal{S}) = k_{t_0}(\mathcal{S}_0) + [k_{t_0}(\mathcal{S}_1) - k_{t_0}(\mathcal{S}_0)] \cdot \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_0}{\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0} \quad (43)$$

Mit diesen Gleichungen (33) bis (43) ist es also möglich, die Einflüsse von Zeit, Temperatur und Glasgehalt auf den Elastizitätsmodul eines Mattenlaminates zu bestimmen. Im Experiment abgesichert sind diese Ergebnisse jedoch nur unter folgenden Voraussetzungen:

- Das Laminat soll rißfrei bleiben, d. h. es soll sich linearviskoelastisch verhalten.
- Die Mindestfaserlänge darf nicht unterschritten werden.

$$l > l_{krit}$$

- Die elastischen Eigenschaften des Harzes müssen bestimmt sein durch

- a) 2 Kurzzeitzugversuche nach DIN 53455  
bei zwei Temperaturen

$$E_H(t_0, \mathcal{S}_0) , E_H(t_0, \mathcal{S}_1)$$

- b) 2 Kriechversuche nach DIN 53444  
(z. B. über 100 h) bei den gleichen Temperaturen

$$E_H(t_1, \mathcal{S}_0) , E_H(t_1, \mathcal{S}_1)$$

- Die maximal zulässige Temperatur darf  $\mathcal{S}_{\max} = 80 \text{ }^\circ\text{C}$  nicht überschreiten.
- Der Glasvolumenanteil muß im Bereich zwischen 8 % und 26 % liegen.

Um den Rechenaufwand für das Gleichungssystem (33) bis (43) aus dem Weg zu gehen, wurde das Nomogramm in Abb. 32 erstellt, das für ein Standardharz alle oben angeführten Beziehungen graphisch berücksichtigt (Brand).

Für andere Harze stellen die nachfolgenden Nomogramme (33) bis (35) eine Möglichkeit zur Bestimmung der Einflußfaktoren  $f_\varphi$ ,  $f_g$  sowie  $f_t$  dar, sofern die erforderlichen Kenngrößen des Harzes vorliegen. Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß diese Daten keine Allgemeingültigkeit beinhalten, da sie neben dem jeweiligen Harzsystem auch entscheidend von der gewählten Harz-Härter-Kombination und den Reaktionsbedingungen während der Härtung und Nachhärtung beeinflusst werden können.

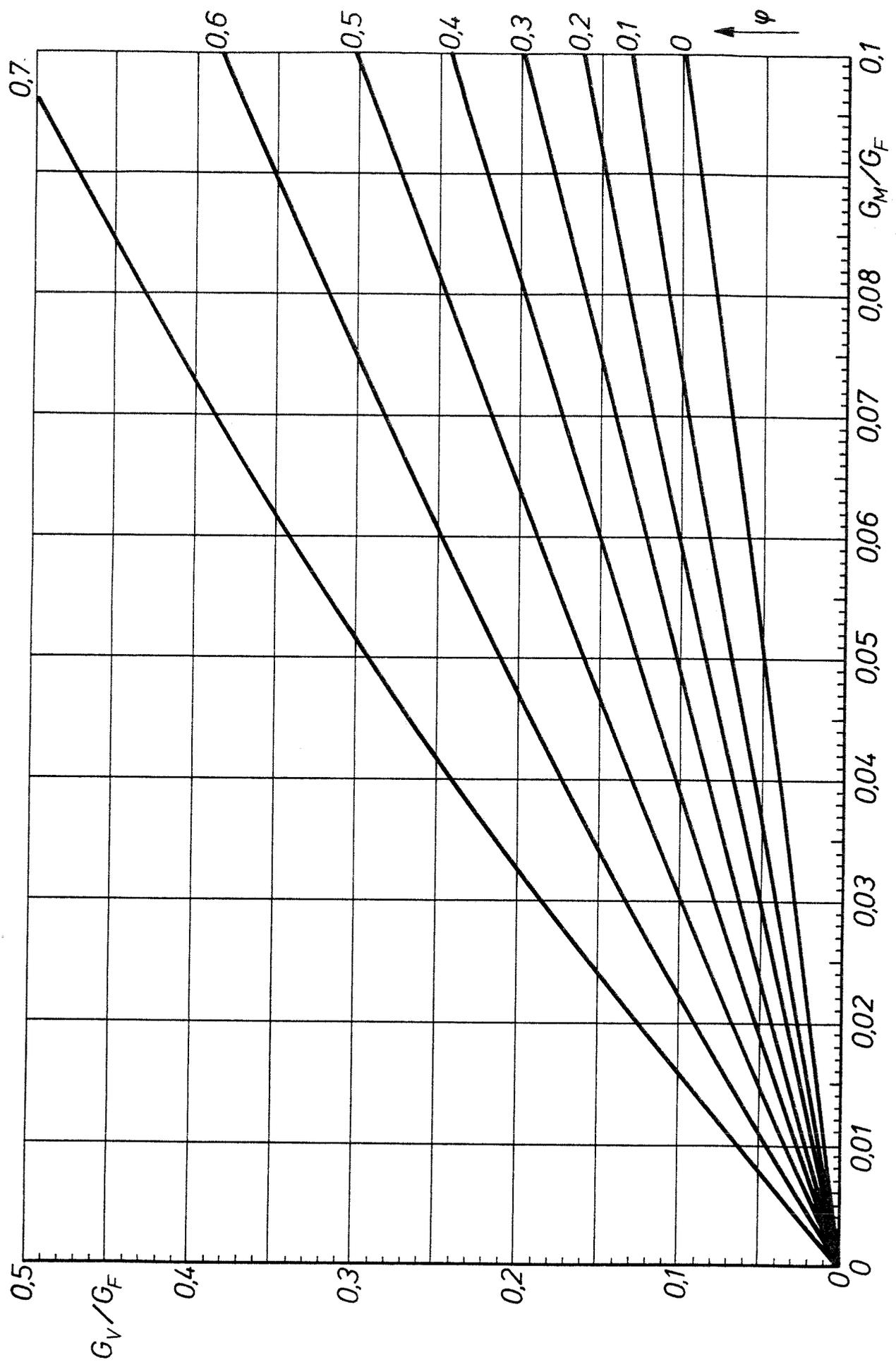


Bild 31: Nomogramm zur Bestimmung des normierten Schubmoduls bei mattenverstärktem GFK

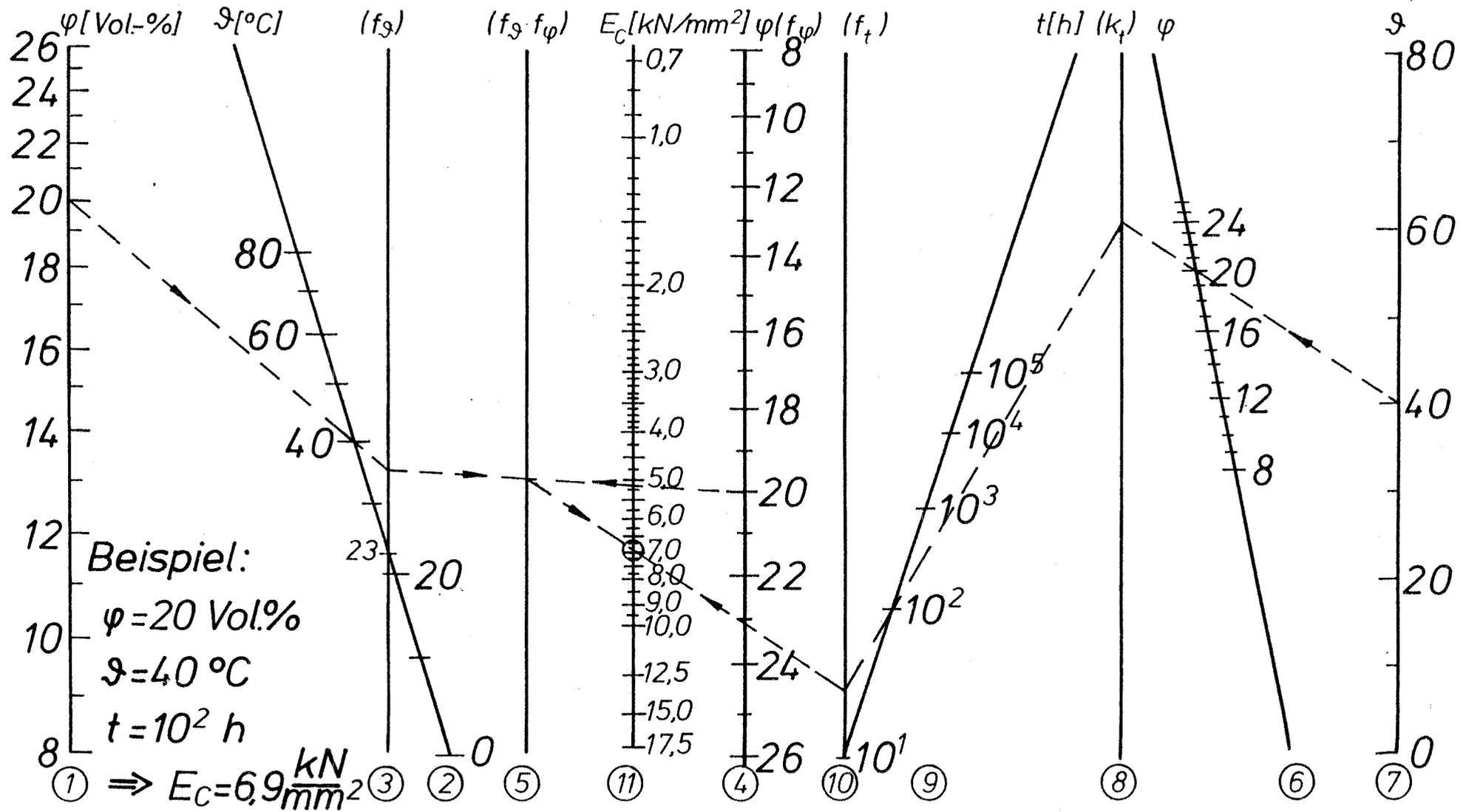


Bild 32: Nomogramm zur Bestimmung des zeitabhängigen Elastizitätsmoduls für GSM-UP

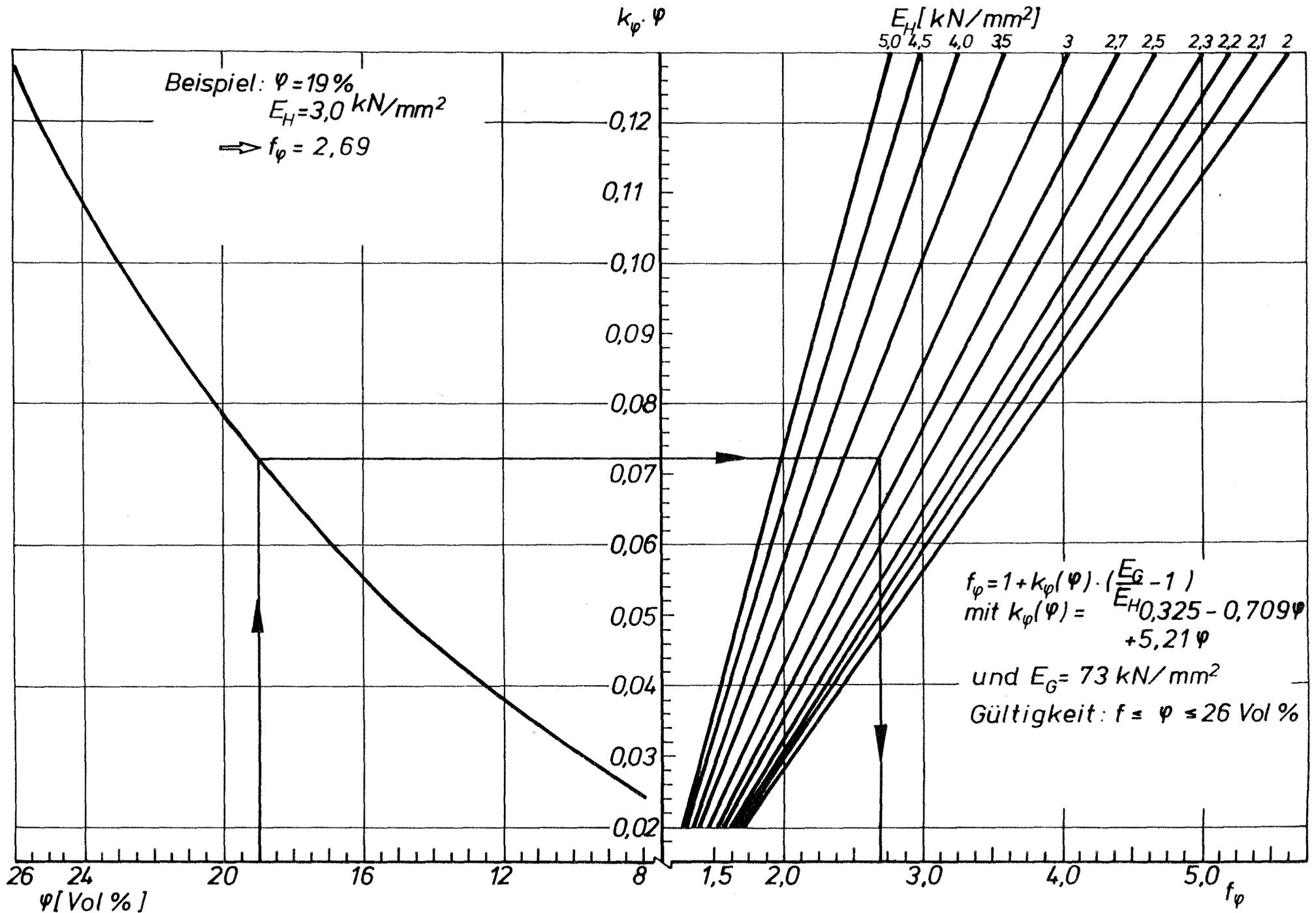


Bild 33: Nomogramm zur Bestimmung des Verstärkungsfaktors  $f_\varphi$  aus Glasvolumenanteil und Harzmodul

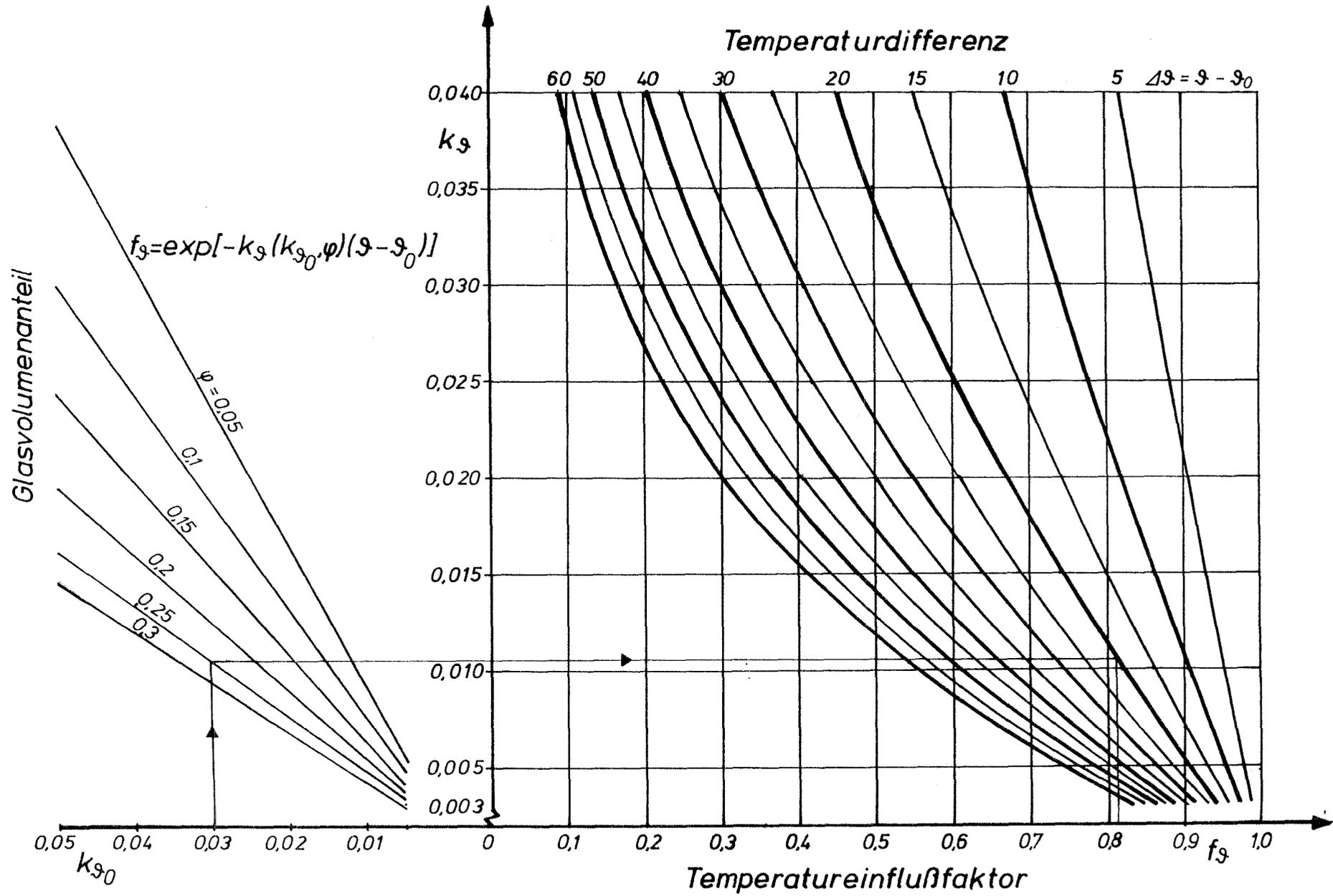


Bild 34: Nomogramm zur Ermittlung des Temperatureinflussfaktors  $f_g$  für Mattenlaminat



### 5.1.3. Zwei Vorgehensweisen zum Bemessen einer quasiisotropen Schicht im ebenen Spannungszustand

Bis heute erfolgt eine Bemessung meistens in der Form, daß die tragende Querschnittsfläche eines Bauteiles gewählt wird und dann die sich mit dieser Fläche und den äußeren Lasten ergebenden Spannungen errechnet werden. Diese Spannungen werden dann mit einem aus einer Versagenshypothese (z. B. Gestaltänderungs-Energie-Hypothese) abgeleiteten zulässigen Spannungswert verglichen. Gegebenenfalls wird die Querschnittsfläche vergrößert oder verkleinert und die Rechenoperation wiederholt, bis ein optimal bemessener Bauteilquerschnitt erreicht scheint, d. h., daß errechnete Spannung und zulässige Spannung dort in etwa gleich sind.

Eine solche Vorgehensweise ist selbstverständlich auch mit isotrop verstärkten Kunststoffen möglich (Matten-, Kurzfaserverstärkung). Das Flußdiagramm I veranschaulicht den Ablauf dieser Bemessungsmethode in graphischer Form.

Darüber hinaus bieten jedoch gerade die Verbundwerkstoffe den Vorteil, auch dann, wenn die Geometrie in den kritischen Querschnitten vorgegeben ist, eine lastproblemorientierte, wirtschaftliche Bemessung vorzunehmen. Hierzu wird der Elastizitätsmodul des Werkstoffes auf die Bedürfnisse des Bauteiles eingestellt.

Die Vorgehensweise bei diesem Verfahren gliedert sich in die folgenden Schritte:

- 1) Zusammenstellen aller äußerer Lasten und Geometrien
- 2) Zusammenstellen aller Werkstoffkennwerte der gewählten Matrix und Verstärkung
- 3) Ermittlung der Schnittlasten und der gefährdeten Querschnitte
- 4) Berechnung der Normalspannungen in den gefährdeten Querschnitten
- 5) Ermittlung einer geeigneten Vergleichsspannung

- 6) Berechnung des minimal erforderlichen Elastizitätsmoduls des Laminates

$$\min \{E_M\} = \sigma_v / \epsilon_{zul} \cdot S$$

- 7) a) Iteratives Bestimmen des erforderlichen Glasvolumenanteiles für  $\min \{E_M\}$  nach Kapitel 5.1.2.

oder b) Bestimmen des erforderlichen Glasvolumenanteiles  $\varphi_{erf}$  wahlweise aus den Nomogrammen in den Bildern 27 bis 30 in Kapitel 5.1.1.

Diese Vorgehensweise der Anpassung der Werkstoffeigenschaften an die aus Lasten und Bauteilgeometrie gestellten Bedingungen wird in Flußdiagramm II graphisch dargestellt.

Anfang

Zusammenstellen aller äußeren Lasten und Umwelteinflüsse:  
Kräfte = Kräfte (t),  $\mathcal{S}$ , t, Medien

Werkstoffwahl nach den Kriterien:

- Festigkeit
- Steifigkeit
- Temperatur- und Medienbeständigkeit
- Preis
- Verarbeitbarkeit
- usw.

Zusammenstellung der Werkstoffkennwerte der gewählten Werkstoffe:

$E(\mathcal{S}, t)$ ,  $\sigma_{Zzul}$ ,  $\sigma_B$ ,  $\varphi$ ,  $E_0$ , usw.

Ermittlung der Schnittlasten in den gefährdeten Querschnitten

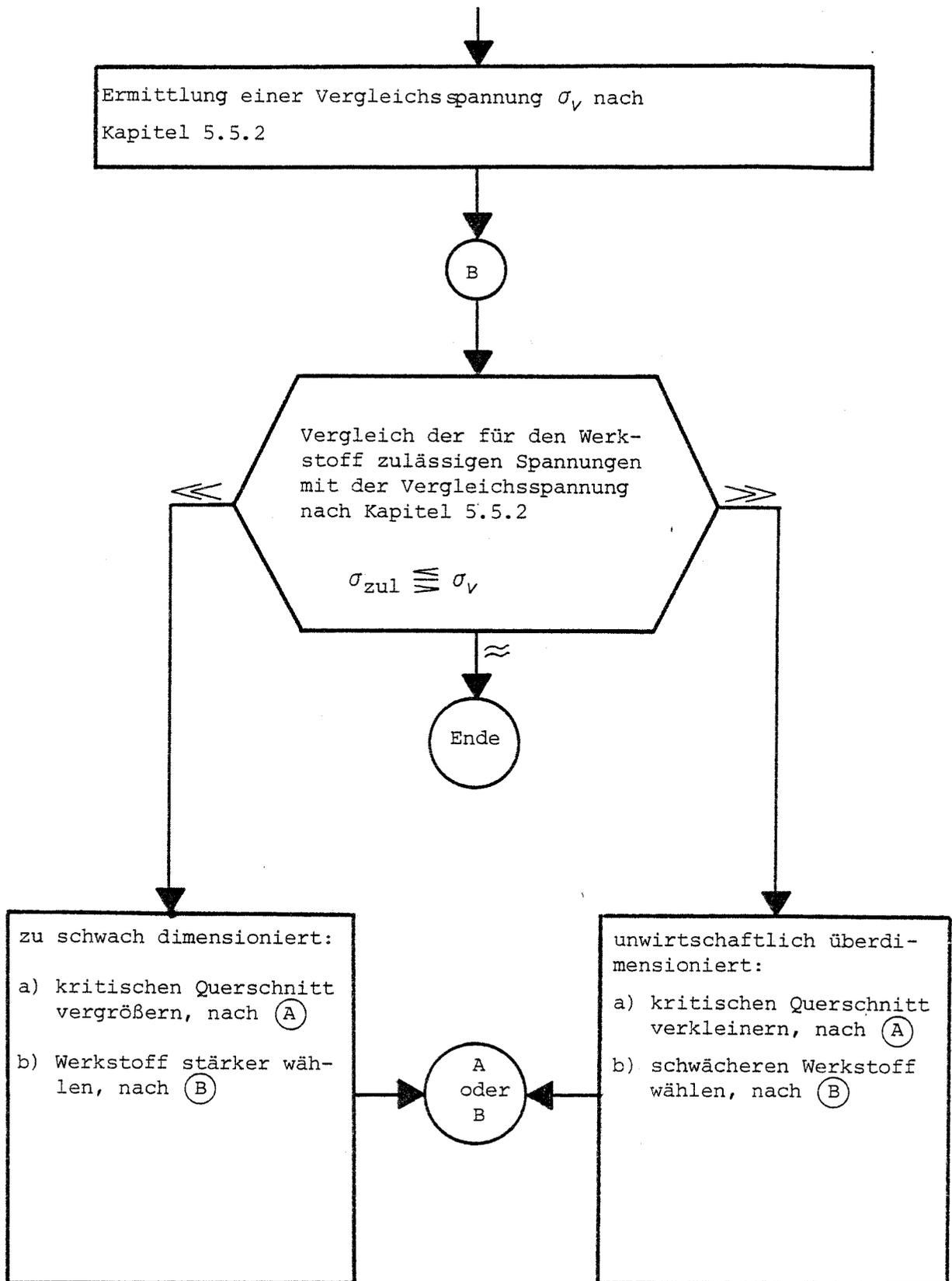
Wahl der Geometrie eines gefährdeten Querschnitts

Bestimmung der sich mit dem gewählten Querschnitt ergebenden Zug- und Schubspannungen

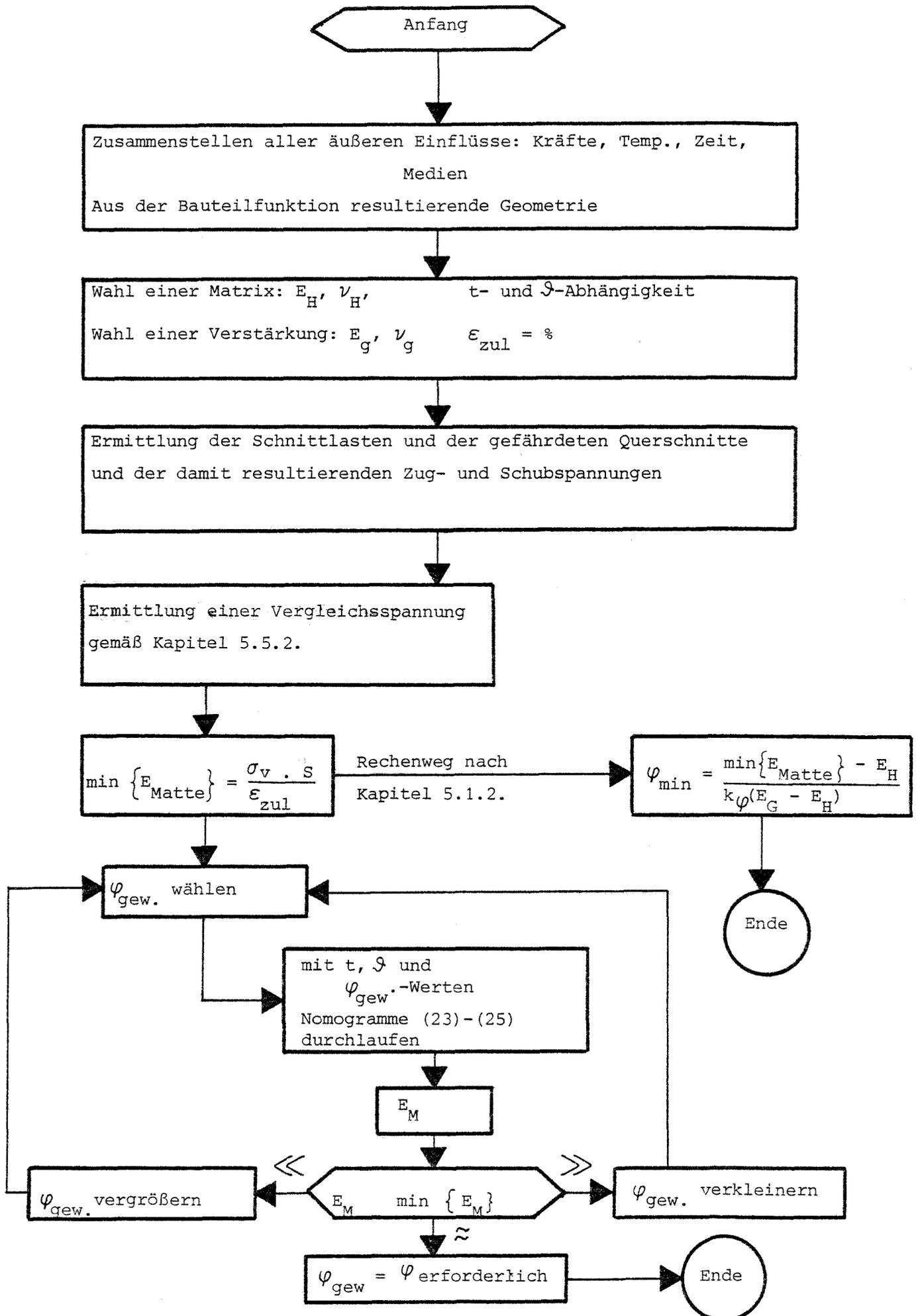
$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$

bitte wenden

Fortsetzung



Flußdiagramm I: Iteratives Bemessen eines Bauteiles durch Dimensionieren der gefährdeten Querschnitte



Flußdiagramm II: Bemessen eines Bauteiles durch Zuschnitt der Werkstoffeigenschaften auf die mechanischen und geometrischen Erfordernisse

## 5.2. Bemessung orthotrop faserverstärkter Verbundwerkstoffe mit Hilfe der Kontinuums- --- theorie

Im folgenden soll auf die Berechnung orthotrop faserverstärkter Kunststoffe unter ebener Beanspruchung mit Hilfe der Kontinuums-  
theorie eingegangen werden.

Grundlage dieser Theorie ist, daß der Werkstoff ein Kontinuum darstellt, d. h. im wesentlichen, daß alle Komponenten und alle Schichten des Verbundwerkstoffes - ohne örtliche Trennungen (Risse) - fest aneinander haften und gemeinsam Lasten übertragen.

Ein orthotroper Verbundwerkstoff besteht in der Regel aus mehreren bezüglich der Verstärkungsrichtungen unterschiedlich orientierten Einzelschichten. Die Summe der relativen Eigenschaftsanteile aller Schichten, bezogen auf eine äußere Beanspruchungsrichtung, ergibt die Eigenschaften des Verbundes in dieser Richtung. Das bedeutet, daß man zur rechnerischen Ermittlung der Eigenschaften des Verbundes stets von den Kennwerten einer unidirektionalen Einzelschicht ausgehen muß.

Zur Berechnung der Spannungen oder Verformungen eines orthotropen Verbundwerkstoffes sind u. a. von PUCK folgende nacheinander erforderlichen Rechenschritte zusammengestellt worden (zusätzliche Vereinfachung: reine Membranspannungen, d. h. keine Veränderung des Spannungszustandes in Dickenrichtung des Laminates):

### 1. Ermittlung der Grund-Kenngrößen der Einzelschicht

$$E_{||}, E_{\perp}, \nu_{||\perp}, \nu_{\perp||}, G_{\#} = f(E_G, E_H, \nu_G, \nu_H, \varphi)$$

Zur Berechnung dieser Grundkenngrößen dient als Grundlage die Mischungsregel für Parallel- bzw. Reihenschaltung von Faser und Matrix (vgl. Abschnitt 4.3.1.). Bei der Berechnung des Schubmoduls der Einzelschicht parallel und senkrecht zum Faserverlauf liegt ebenfalls eine Reihenschaltung vor.

Die Grundelastizitätskenngrößen lassen sich als Funktion des Faservolumenanteils nach folgenden Regeln ermitteln; wobei für jede Regel auch ein Nomogramm angegeben wird:

$$E_{II} = \varphi \cdot E_G + (1 - \varphi) \cdot E_H \quad (44)$$

Für den Elastizitätsmodul  $E_{\perp}$  in senkrechter Richtung zum Faserverlauf geben verschiedene Autoren unterschiedliche Beziehungen an

$$E_{\perp} = \frac{E_H (1 + 0,85 \varphi^2)}{(1 - \nu_H^2) [(1 - \varphi)^{1,25} + \varphi \frac{E_H}{(1 - \nu_H^2) E_G}]} \quad (45)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_H}{(1 - \varphi) + \varphi \cdot E_H / E_G} \quad (46)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_H^{\circ}}{(1 - \varphi) + \varphi \cdot E_H^{\circ} / E_G} \quad \text{mit} \quad E_H^{\circ} = \frac{E_H}{1 - \nu_H^2} \quad (47)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_H^{\circ}}{(1 - \varphi)^{1,25} + E_H^{\circ} / E_G} \quad \text{mit} \quad E_H^{\circ} = \frac{E_H}{1 - \nu_H^2} \quad (\text{Puck}) \quad (48)$$

$$E_{\perp} = \frac{E_H^{\circ}}{(1 - \varphi)^{1,45} + \varphi \cdot E_H^{\circ} / E_G} \quad \text{mit} \quad E_H^{\circ} = \frac{E_H}{1 - \nu_H^2} \quad (\text{Förster}) \quad (49)$$

$$E_{\perp} = E_H \frac{1 + 0,2 \cdot \varphi \cdot K}{1 - \varphi \cdot K} \quad (\text{nach Tsai-Halpin}) \quad (50)$$

$$\text{mit } K = \frac{E_G / E_H - 1}{E_G / E_H + 0,2}$$

$$\nu_{\perp\parallel} = \varphi \cdot \nu_G + (1-\varphi) \cdot \nu_H \quad (51)$$

$$\nu_{\parallel\perp} = \nu_{\perp\parallel} \cdot \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} \quad (52)$$

$$G_{\#} = G_H \frac{1 + 0,4 \sqrt{\varphi}}{(1-\varphi)^{1,45} + \varphi \cdot G_H / G_G} \quad \text{nach Förster} \quad (53)$$

$$G_{\#} = G_H \frac{1 + 0,6 \cdot \varphi^{0,5}}{(1-\varphi)^{1,25} + \varphi \cdot G_H / G_G} \quad \text{nach Puck} \quad (54)$$

Die Gleichungen (45), (47), (48), (49), (50), (53), (54) sind empirisch durch Experimente korrigierte Beziehungen in Abwandlung von Gleichung (28) nach der reinen Reihenschaltung.

## 2. Steifigkeiten der Einzelschicht

$$c_{\parallel}, c_{\perp}, c_{\perp\parallel}, c_{\#} = f(E_{\parallel}, E_{\perp}, \nu_{\perp\parallel}, \nu_{\parallel\perp}, G_{\#})$$

Die Steifigkeiten sind bezogen auf die Orthotropieachsen der Einzelschichten ( // bzw.  $\perp$  )

$$c_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{\parallel}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \cdot \nu_{\parallel\perp}}; \quad c_{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E_{\perp}}{1 - \nu_{\perp\parallel} \cdot \nu_{\parallel\perp}} \quad (55)$$

$$c_{\perp\parallel} = \nu_{\perp\parallel} \cdot c_{\perp} \quad ; \quad c_{\#} = G_{\#}$$

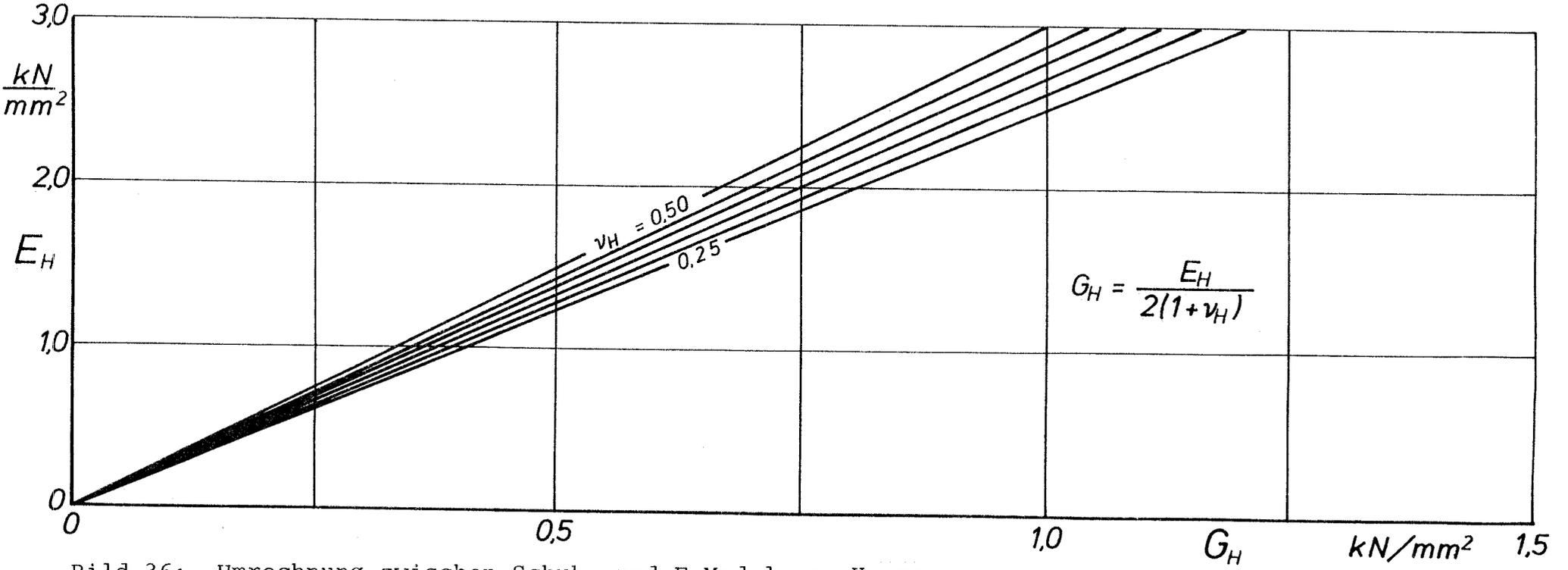
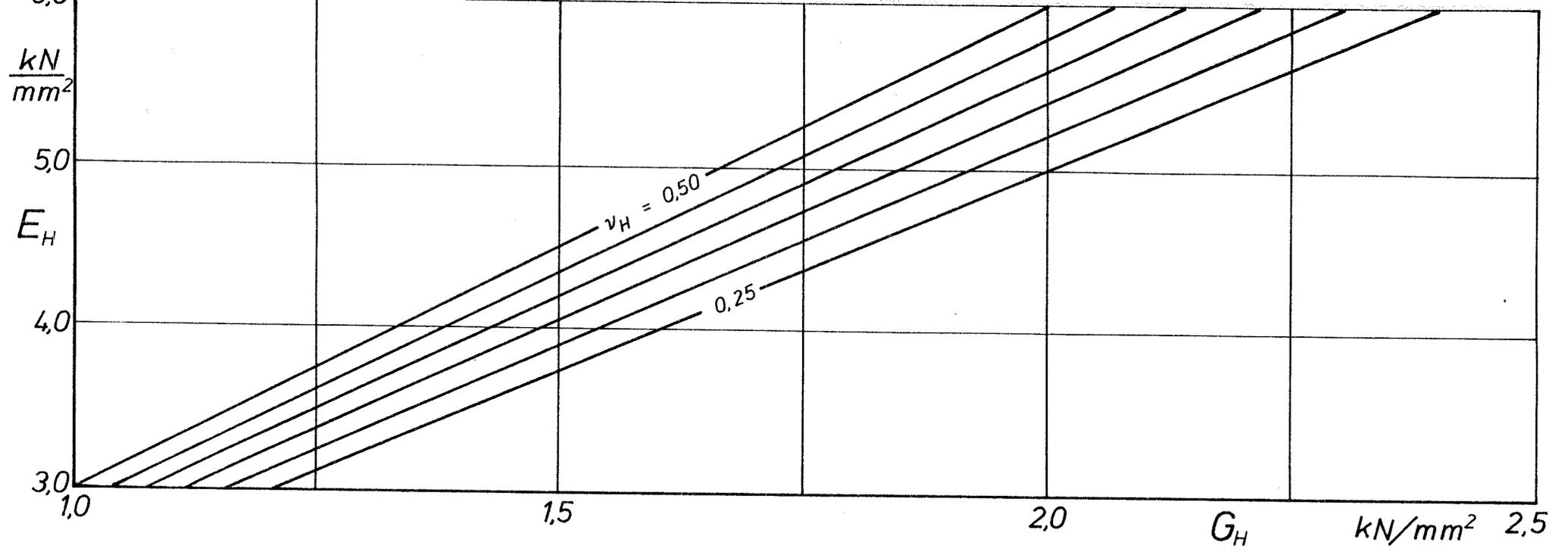
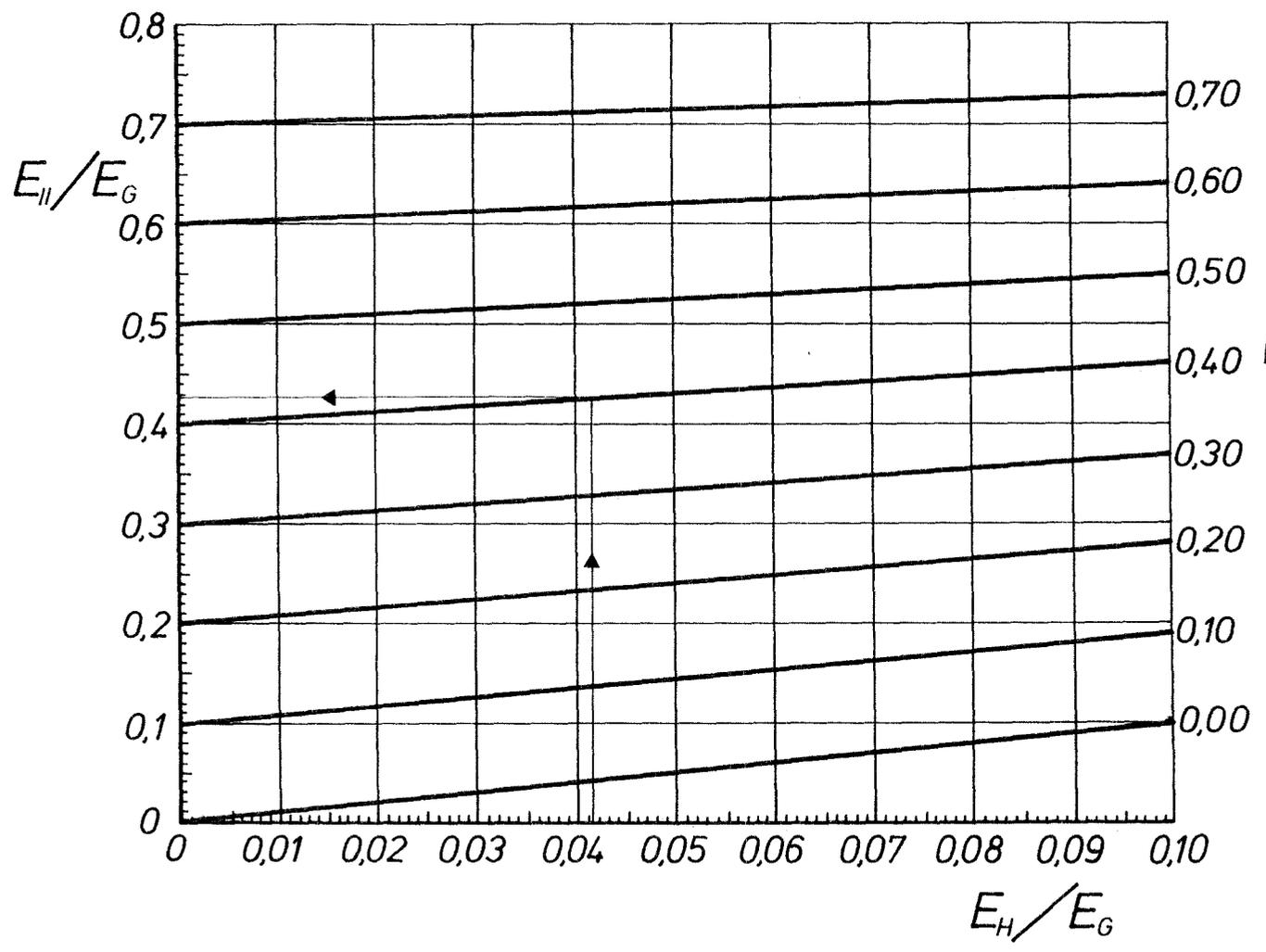


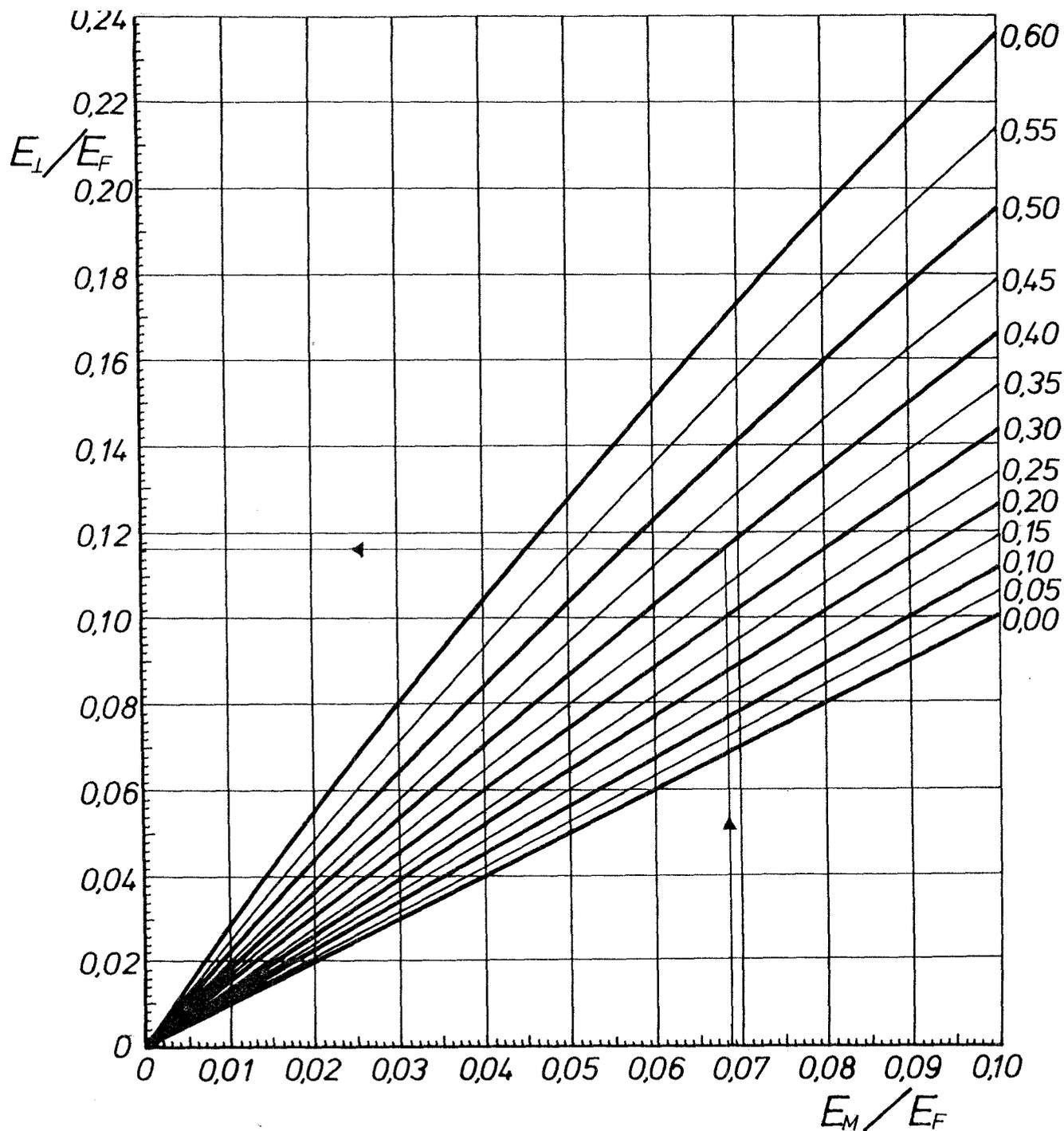
Bild 36: Umrechnung zwischen Schub- und E-Modul von Harzen

Bild 37: Nomogramm zur Bestimmung des normierten Zug-E-Moduls in Verstärkungsrichtung



$$\frac{E_{II}}{E_G} = \psi + (1 - \psi) \frac{E_H}{E_G}$$

Beispiel:  $E_G = 73 \text{ kN/mm}^2$   
 $E_H = 3 \text{ kN/mm}^2$   
 $\frac{E_H}{E_G} = 0,0411$   
 $\psi = 0,4$   
 $\Rightarrow \frac{E_{II}}{E_G} = 0,427$   
 $E_{II} = 31,17 \text{ kN/mm}^2$



$$\frac{E_L}{E_F} = \frac{E_M}{E_F} \cdot \frac{1 + 0,2 \cdot \psi \cdot k}{1 - \psi \cdot k}$$

mit  $k = \frac{E_F/E_M - 1}{E_F/E_M + 0,2}$

Beispiel :

$$E_M = 5 \text{ kN/mm}^2$$

$$E_G = E_F = 73 \text{ kN/mm}^2$$

$$E_M/E_F = 0,0685$$

$$\psi = 0,40$$

$$E_L/E_F = 0,1162$$

$$E_L = 8,49 \text{ kN/mm}^2$$

Bild 38: Nomogramm zur Bestimmung des normierten Elastizitätsmoduls  $E_L$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung mit dem Harzmodul  $E_H$  und dem Glasvolumenanteil  $\psi$  nach Tsai-Halpin<sup>H</sup>

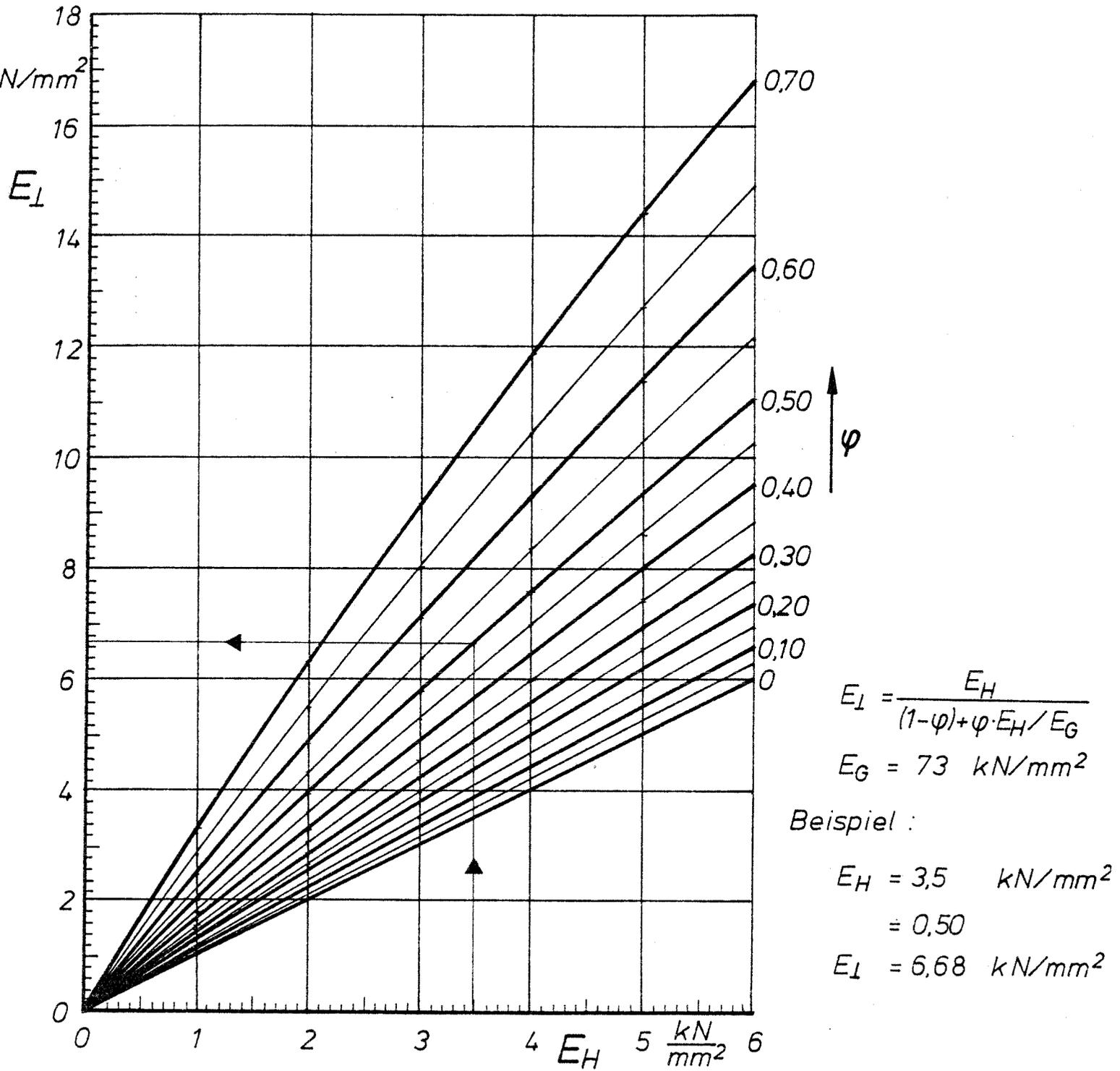
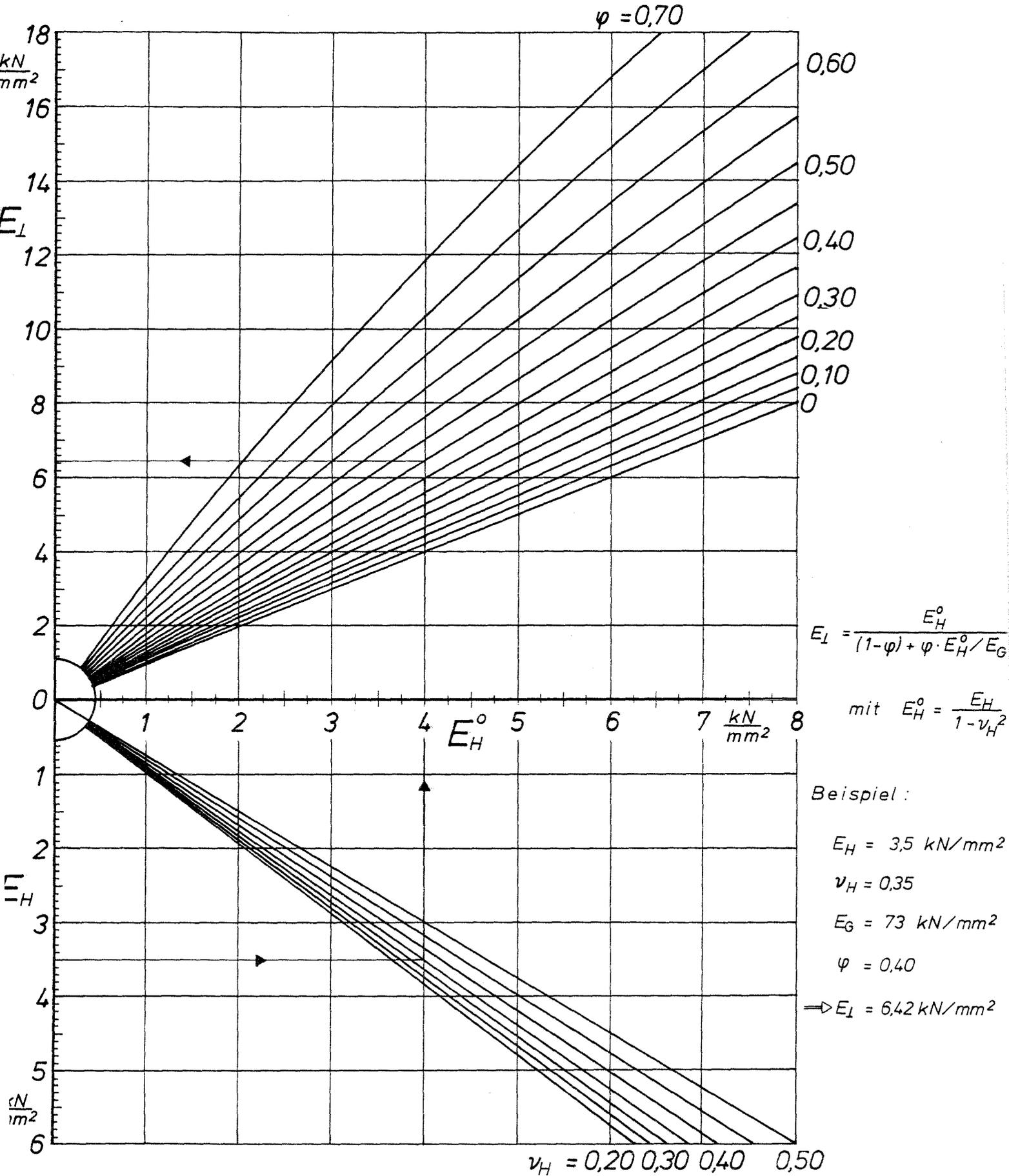
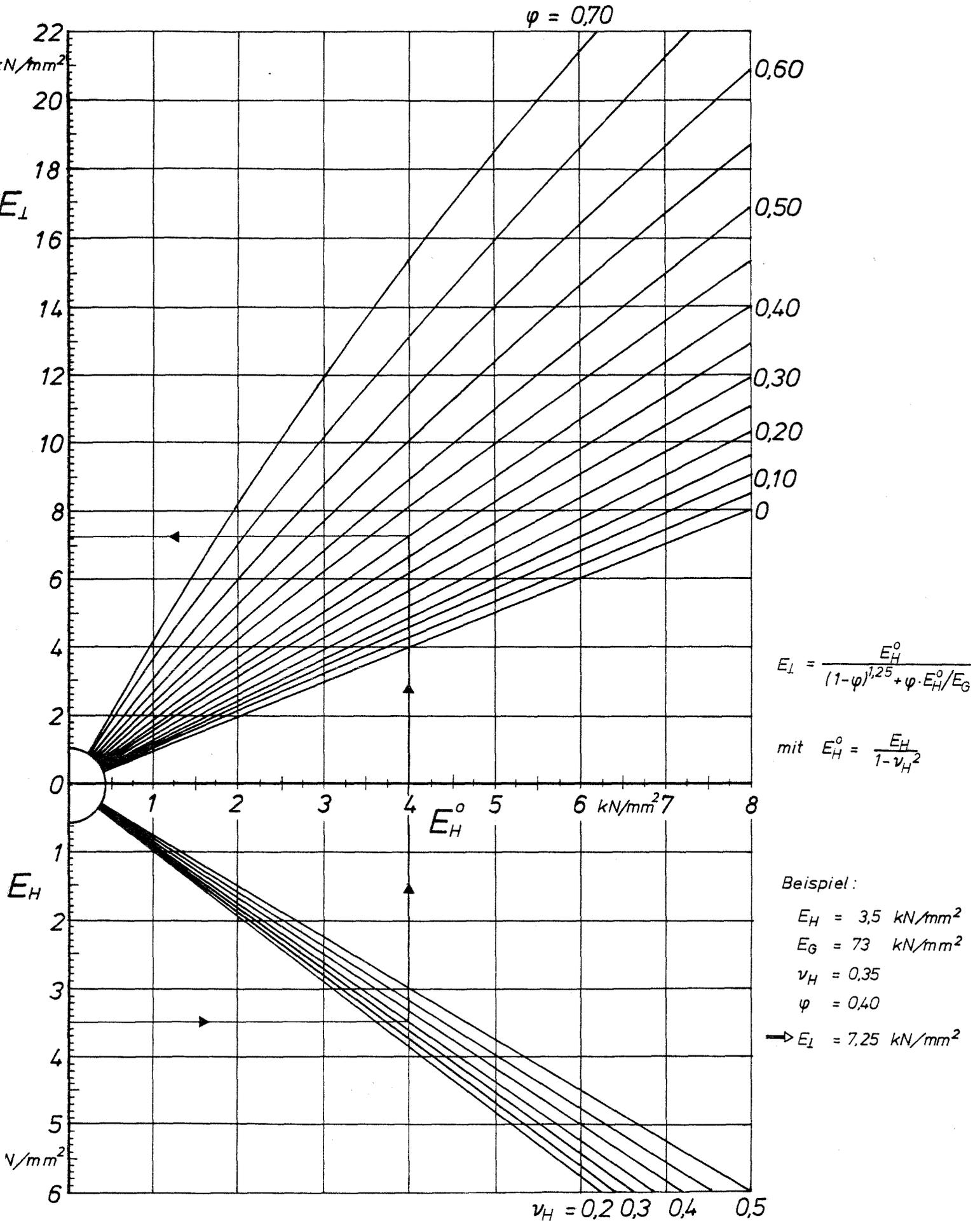


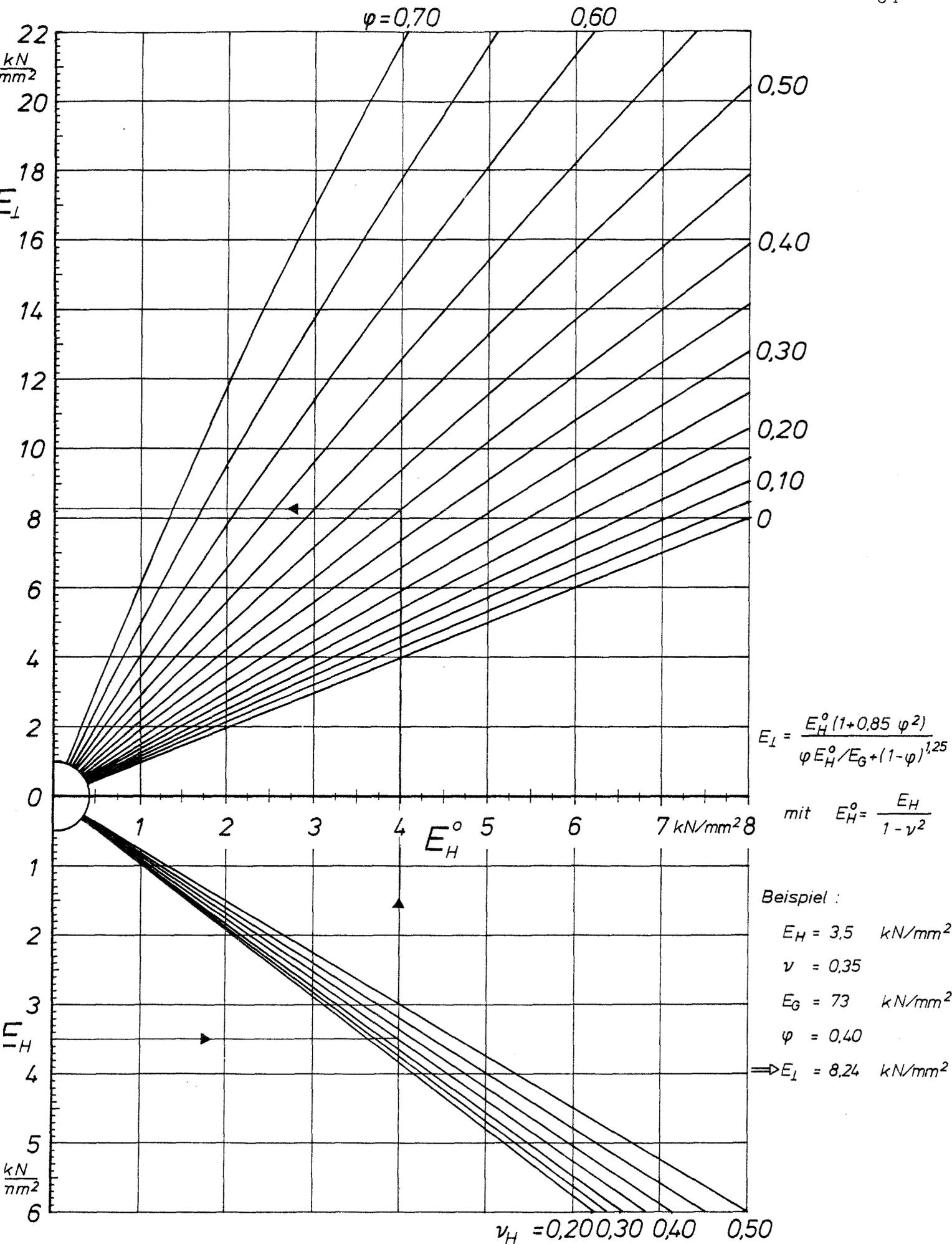
Bild 39: Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_{\perp}$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung bei UD-GFRK nach Puck ohne Berücksichtigung der Querkontraktion



**Bild 40:** Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_L$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung bei UD-GFRK nach Puck mit Berücksichtigung der Querkontraktion



**Bild 41:** Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmodul  $E_L$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung bei UD-GFK nach Puck



**Bild 42:** Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_L$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung bei UD-GFRK nach Puck

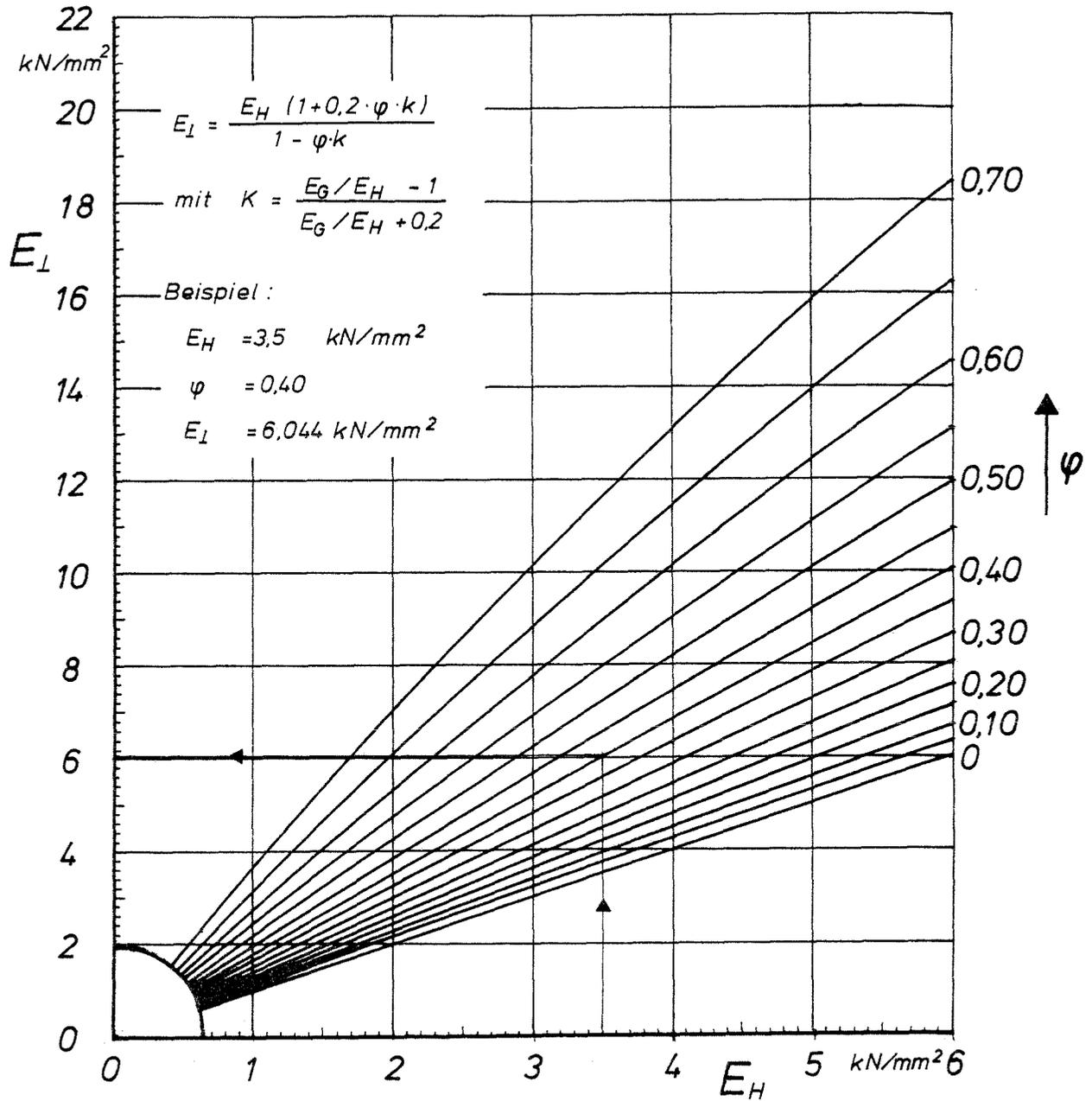


Bild 43: Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_L$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung von UD-GFRK nach Tsai-Halpin

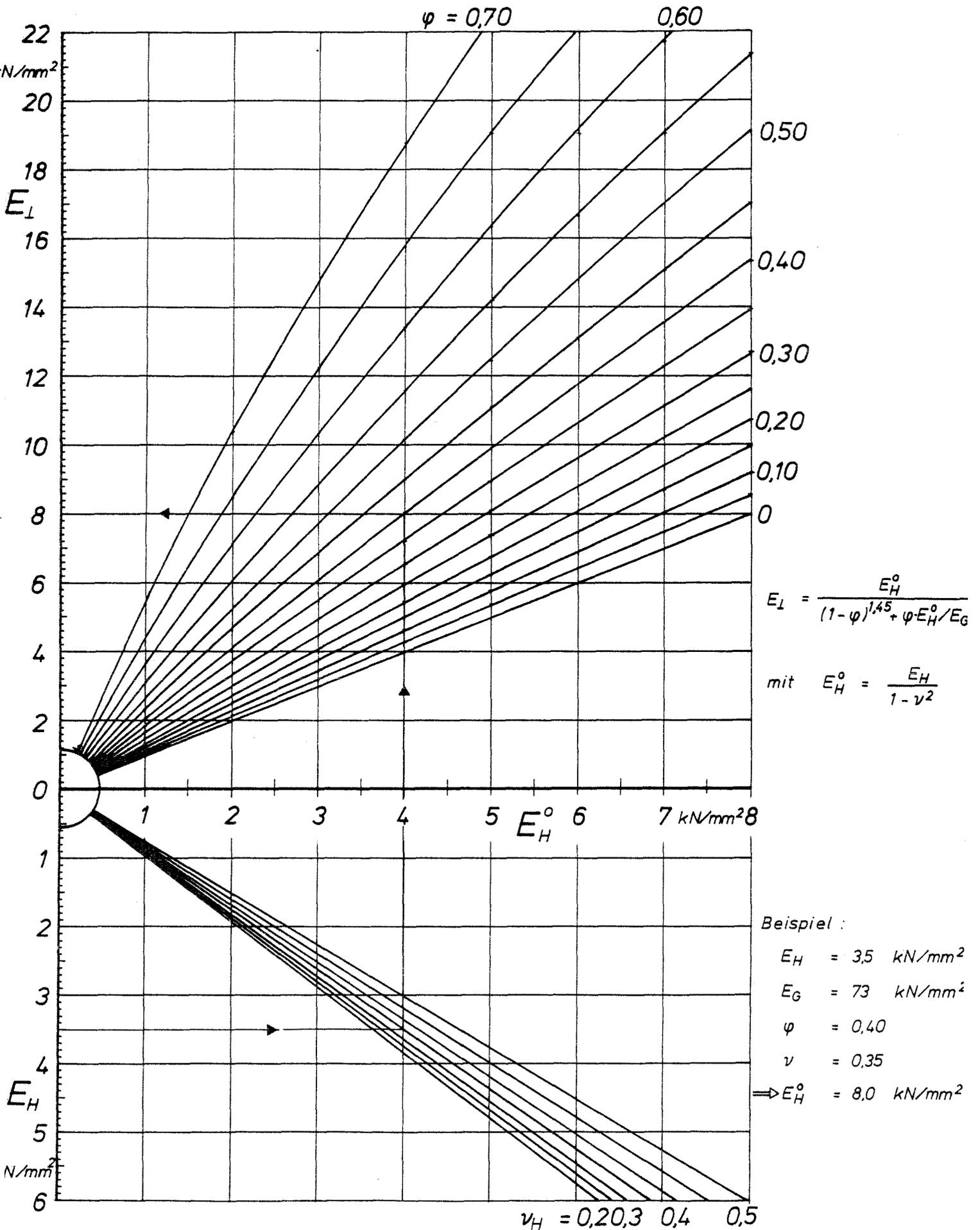


Bild 44: Nomogramm zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_{\perp}$  senkrecht zur Verstärkungsrichtung von UD-GFRK nach Förster

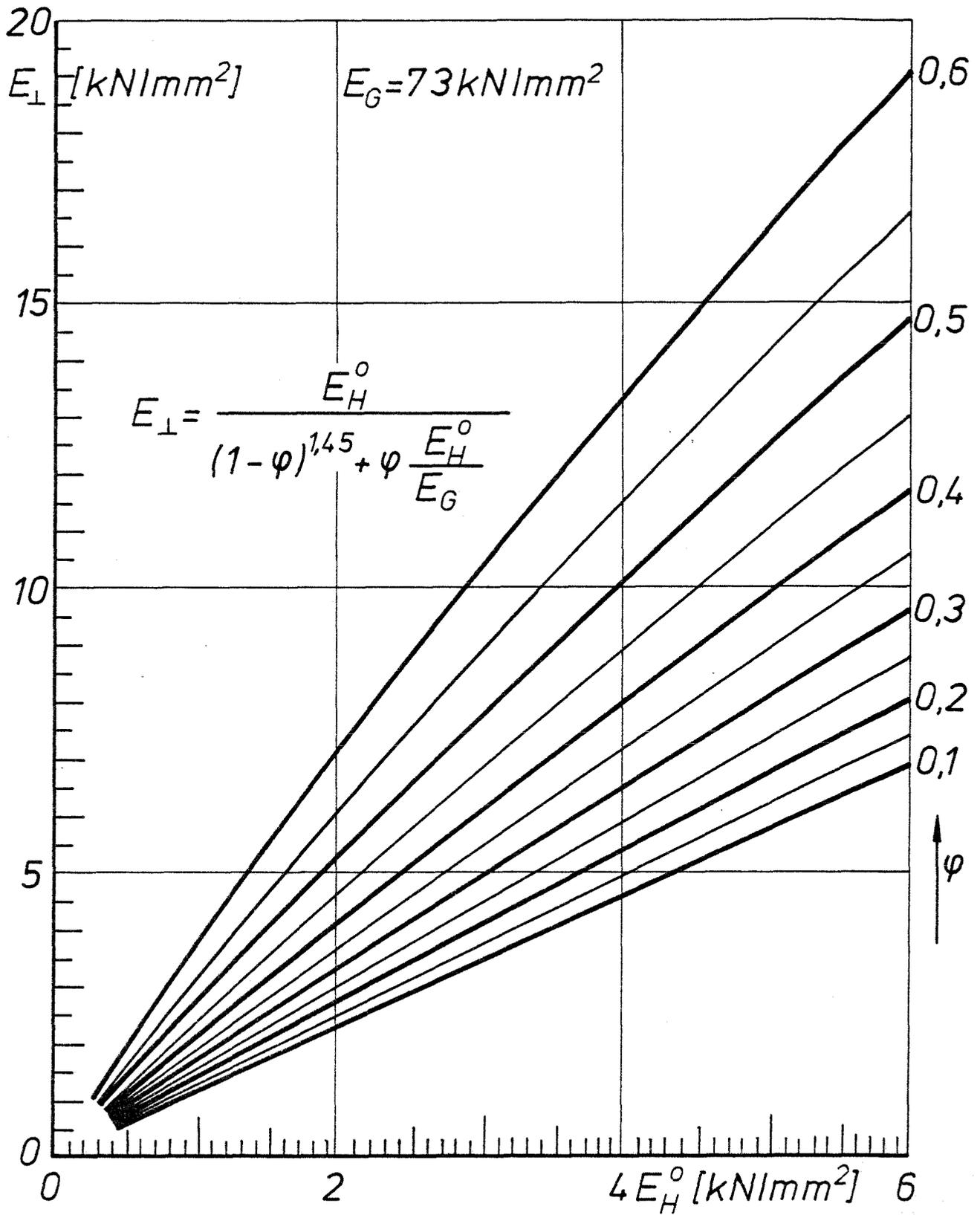


Bild 44 a

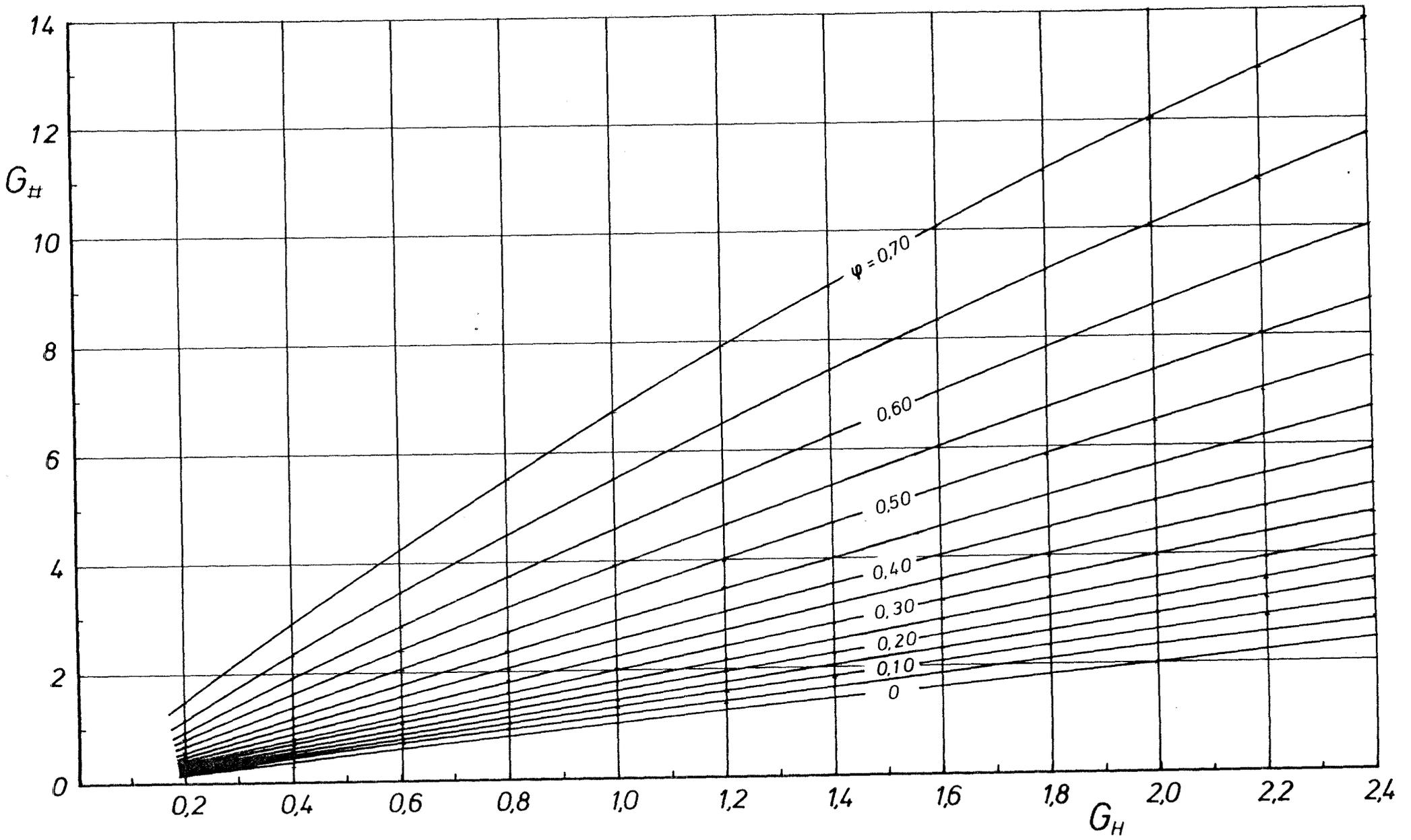


Bild 45: Nomogramm zur Bestimmung des Schubmoduls von UD-GFK aus dem Schubmodul des Harzes  $G_H$  und dem Glasvolumenanteil  $\varphi$  nach Förster

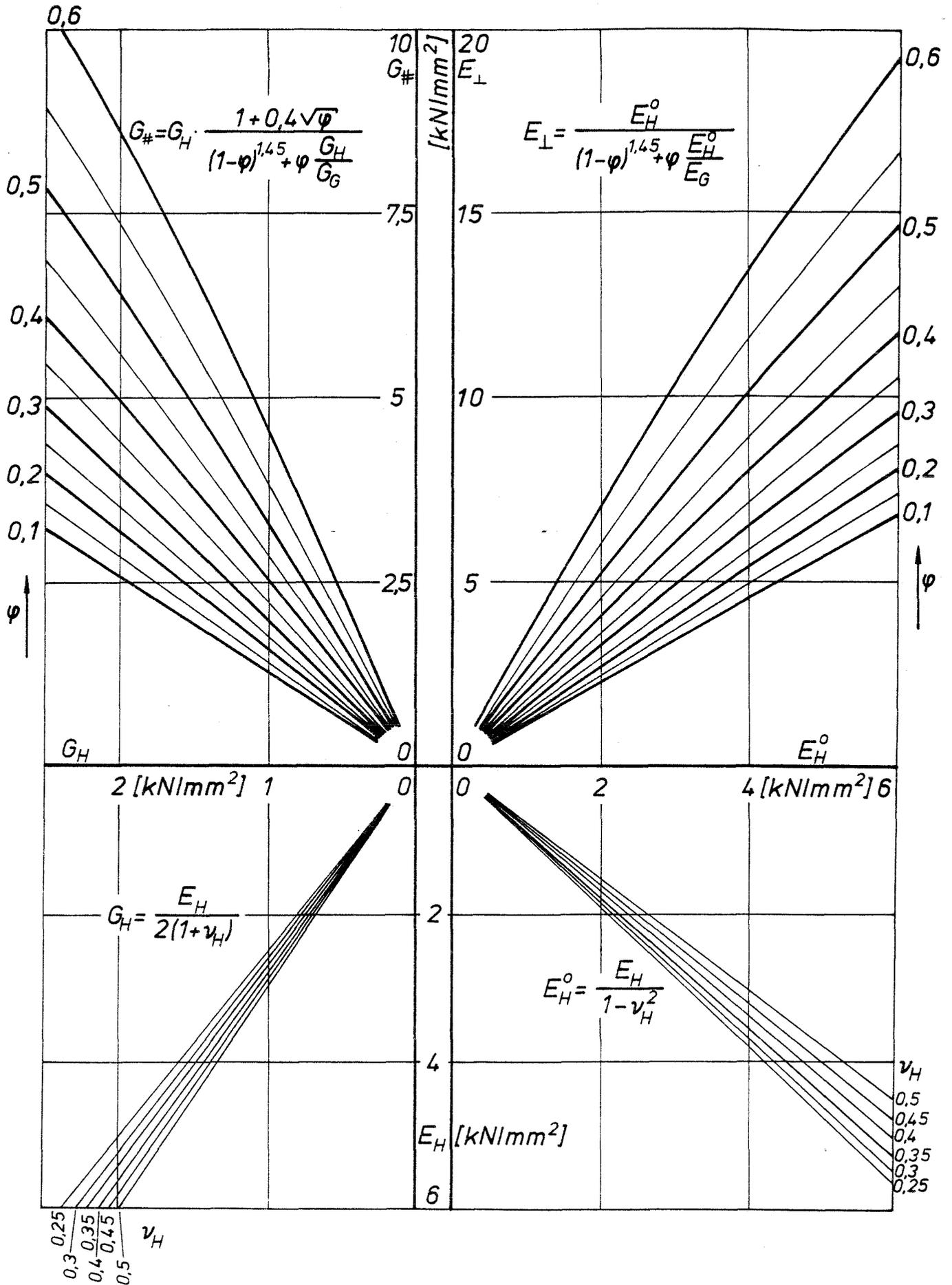


Bild 45 a: Nomogramm zur Bestimmung der Größen  $E_L$  und  $G_{\#}$  von UD-GFK nach Förster aus den Größen  $E_H$  und  $\nu_H$

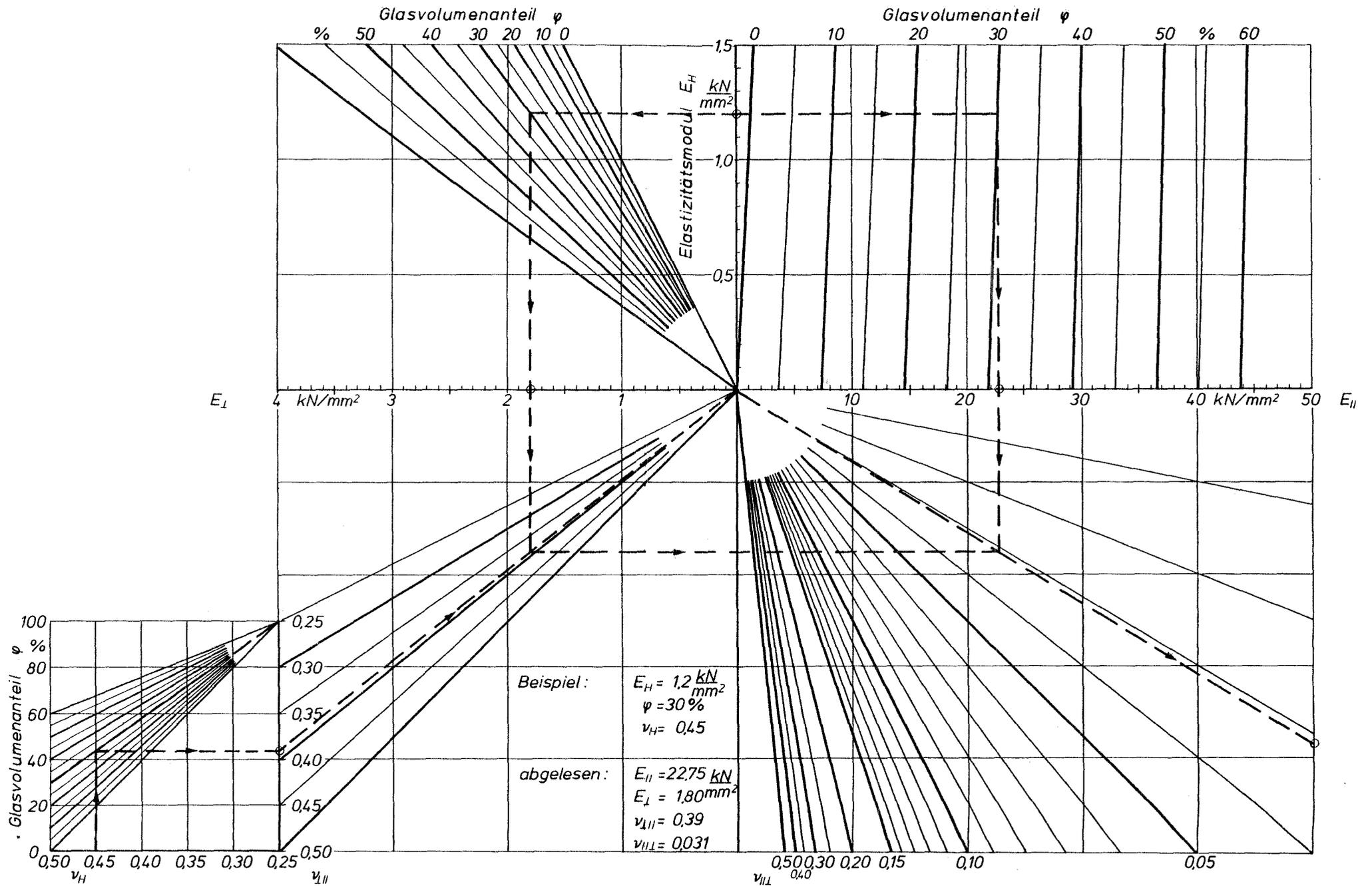


Bild 46: Nomogramm zur Bestimmung der Größen:  
 $E_{II}$ ,  $E_I$ ,  $\nu_{II}$ ,  $\nu_{II}$  als  $f(\varphi)$

Eingangsgrößen:  $E_H$ ,  $\nu_H$ ,  $\varphi$   
 Bereich:  
 $0 \leq E_H \leq 1,5 \frac{kN}{mm^2}$

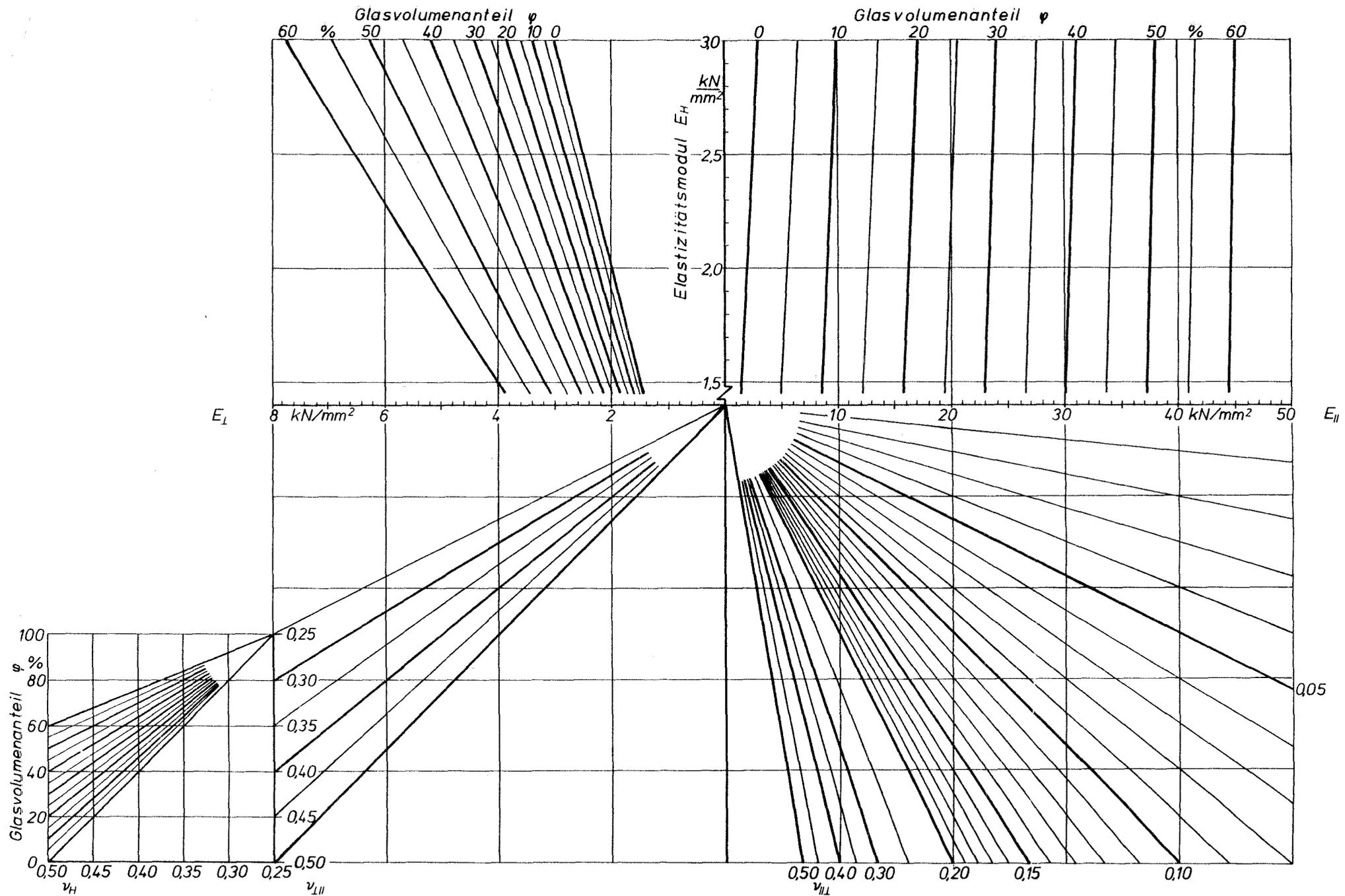


Bild 47: Nomogramm zur Bestimmung der Größen:  
 $E_{II}$ ,  $E_L$ ,  $\nu_{II}$ ,  $\nu_{II}$  als  $f(\varphi)$

Eingangsgrößen:  $E_H$ ,  $\nu_H$ ,  $\varphi$   
 Bereich:  
 $1,5 \leq E_H \leq 3,0 \text{ kN/mm}^2$

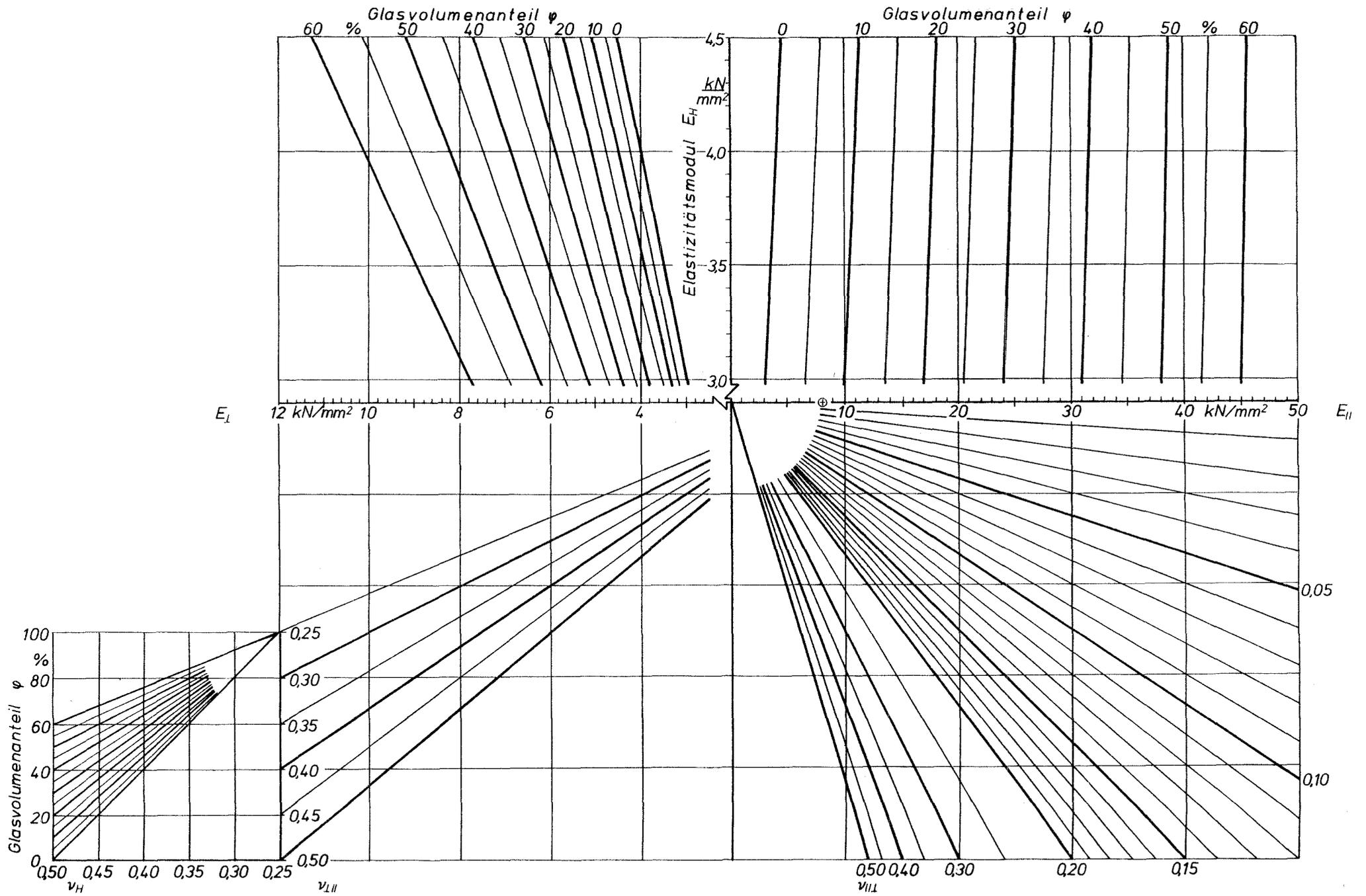
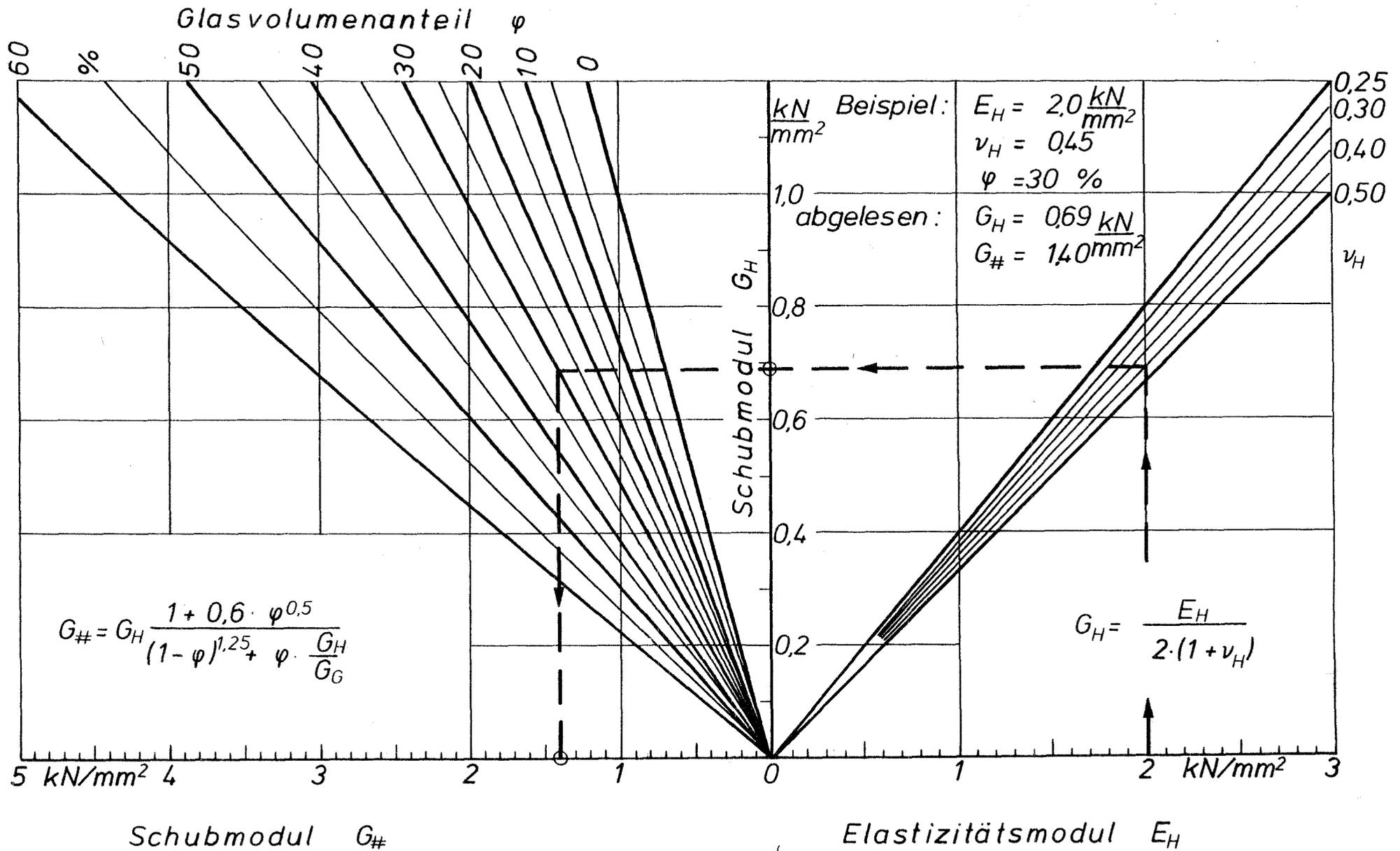
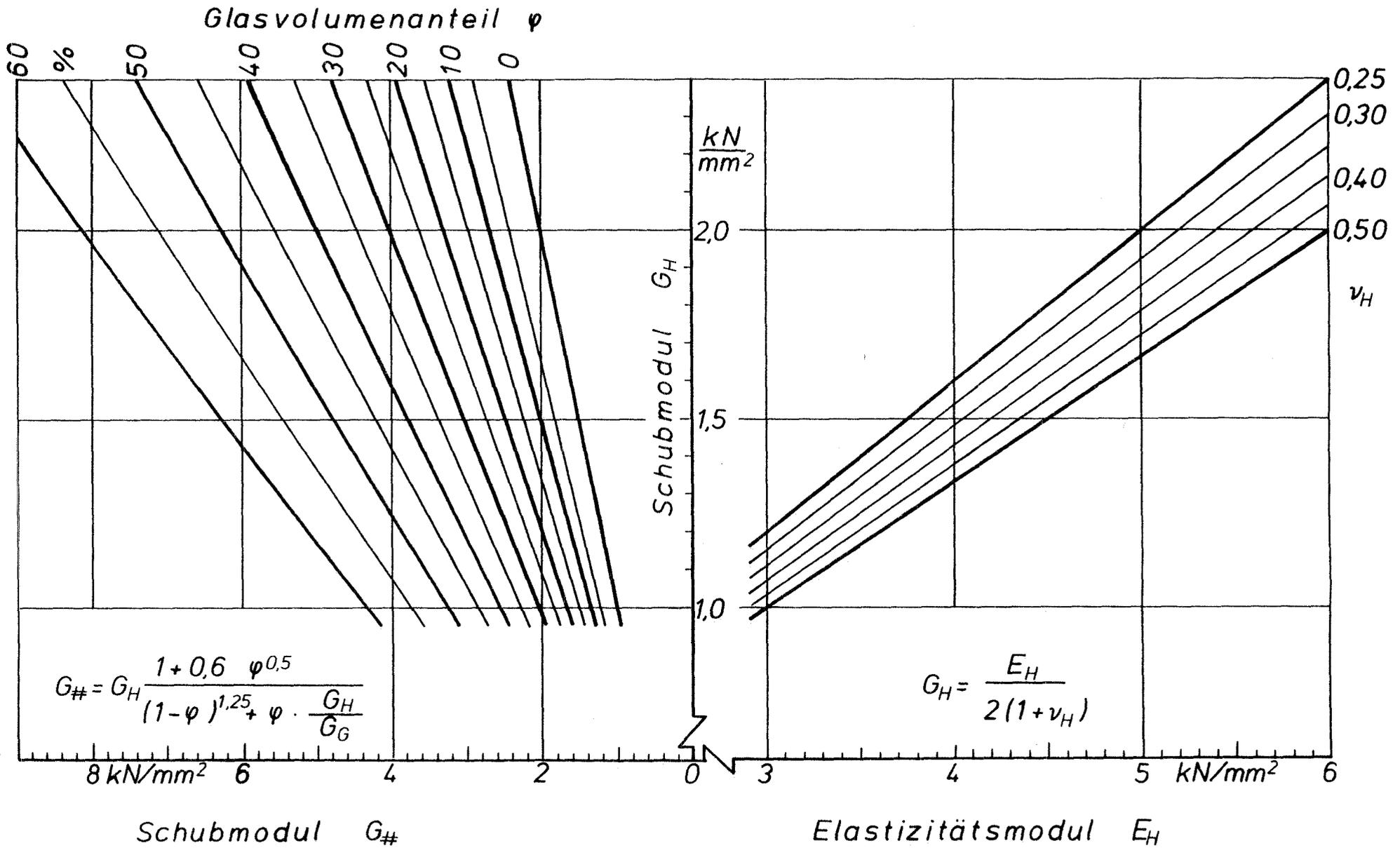


Bild 48: Nomogramm zur Bestimmung der Größen:  
 $E_{II}$ ,  $E_L$ ,  $\nu_{LII}$ ,  $\nu_{LII}$  als  $f(\psi)$

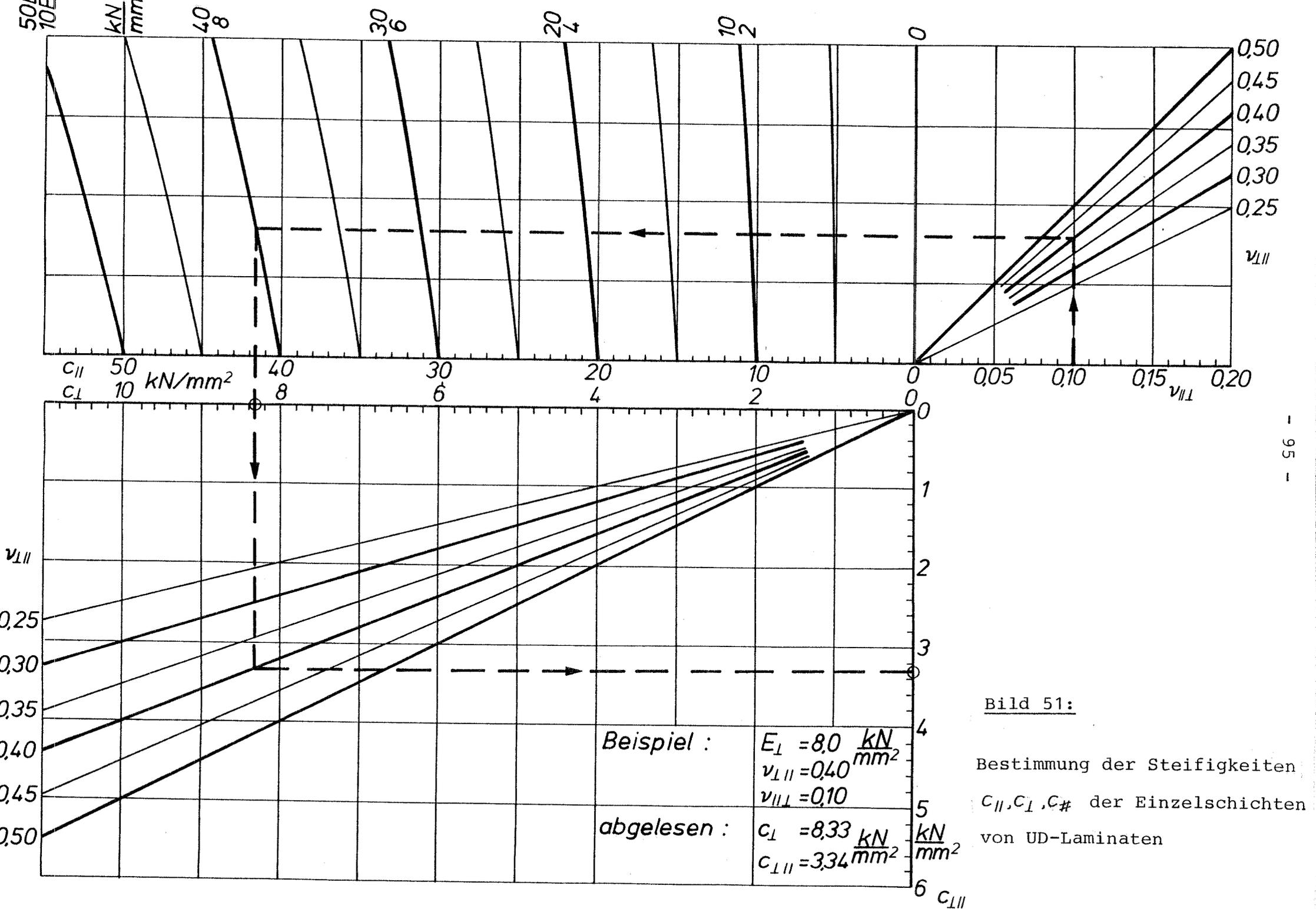
Eingangsgrößen:  $E_H$ ,  $\nu_H$ ,  $\psi$   
 Bereich:  
 $3,0 \leq E_H \leq 4,5 \text{ kN/mm}^2$



**Bild 49:** Nomogramm zur Bestimmung des Schubmoduls  $G_{\#}$  als  $f(\varphi)$ ;  
 Eingangsgrößen:  $E_H, \nu_H, \varphi$   
 Bereich:  $0 \leq E_H \leq 3,0 \text{ kN/mm}^2$



**Bild 50:** Nomogramm zur Bestimmung des Schubmoduls  $G_{\#}$  als  $f(\varphi)$ ;  
 Eingangsgrößen:  $E_H$ ,  $\nu_H$ ,  $\varphi$   
 Bereich:  $3,0 \leq E_H \leq 6,0 \text{ kN/mm}^2$



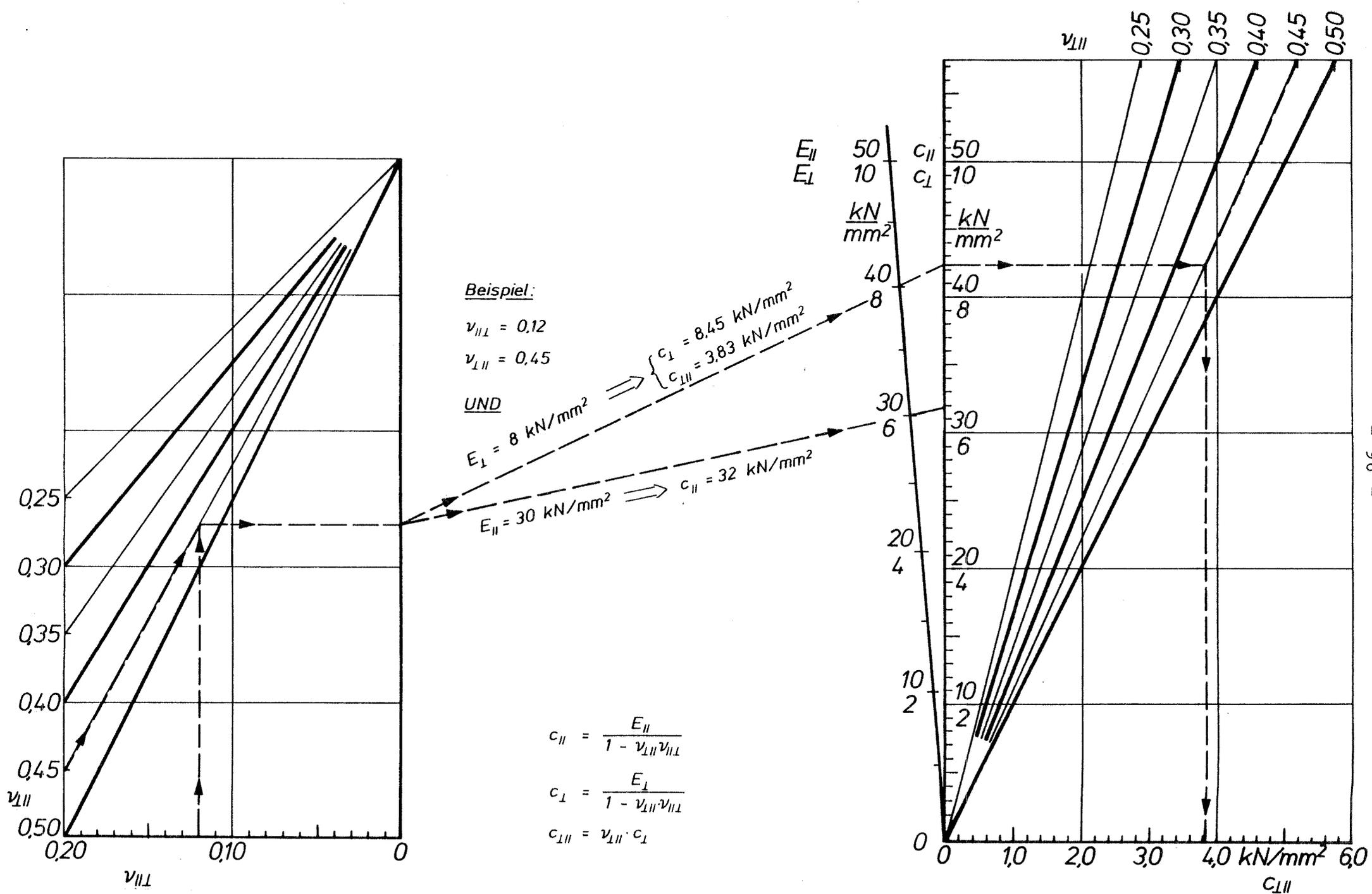


Bild 52: Nomogramm zur Bestimmung der Steifigkeiten  $c_{III}$ ,  $c_{II}$  und  $c_I$  der Einzelschichten von UD-Laminaten

Die "Gesamt-Glasdicke" ist dann unabhängig von den Winkeln der Faserrichtungen und von der Zahl der Schichten.

Nachtrag zu 1):

Gleiche Vorzeichen für alle Schichtkräfte  $p_{llk}$  erhält man:

a) für Lamine mit 2 Faserrichtungen bei Anwenden der Bedingung in Gleichung (76)

$$\operatorname{tg} \beta_2 = - \frac{p_y / p_x}{\operatorname{tg} \beta_1} \quad (88)$$

b) für Lamine mit 3 Faserrichtungen

I. mit  $\beta_3 = 90^\circ$  (eine Faserrichtung liegt in y-Richtung) durch Anwenden der Bedingung

$$\frac{p_y}{p_x} > \frac{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2} \quad (89)$$

(siehe Bild 64)

II. mit  $\beta_3 = 0^\circ$  (eine Faserrichtung liegt in x-Richtung) durch Anwenden der Bedingung

$$\frac{p_y}{p_x} < \frac{\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2}{\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2} \quad (90)$$

(siehe Bild 64)

3. Transformation der Steifigkeiten der Einzelschicht k in  
 ----- die Symmetrieachsen des Verbundes (1, 2) -----

$$c_{11k}, c_{22k}, c_{33k}, c_{12k} = f(c_{||}, c_{\perp}, c_{\perp||}, c_{\#}, \alpha_k)$$

Die Schichtwinkel  $\alpha_k$  zählen positiv, wenn im mathematisch positiven Sinn aus der Richtung parallel zur Faser der Schicht k in die Symmetrieachse x des Verbundes gedreht wird.

$$\begin{aligned} c_{11k} &= c_{||k} \cdot \cos^4 \alpha_k + c_{\perp k} \cdot \sin^4 \alpha_k + \frac{1}{2} C_{1k} \sin^2 2\alpha_k \\ c_{22k} &= c_{\perp k} \cdot \cos^4 \alpha_k + c_{||k} \cdot \sin^4 \alpha_k + \frac{1}{2} C_{1k} \sin^2 2\alpha_k \\ c_{33k} &= c_{\#k} + \frac{1}{4} C_{2k} \cdot \sin^2 2\alpha_k \\ c_{12k} &= c_{\perp||k} + \frac{1}{4} C_{2k} \cdot \sin^2 2\alpha_k = c_{21k} \\ c_{1k} &= c_{\perp||k} + 2c_{\#k}, \quad c_{2k} = c_{||k} + c_{\perp k} - 2c_{1k} \end{aligned} \tag{56}$$

Die Ausdrücke nach Gleichung (56) sind symmetrisch für positive und negative Winkel  $\pm \alpha_k$ . Die Indices beziehen sich auf die Richtung der Normalbeanspruchung (Spannungen und Dehnungen). In diesen Rechnungen sind sie untereinander austauschbar. Der Index 3 gibt Scherbeanspruchungen in Bezug auf die Richtungen 1 und 2 an.

Ist der Laminataufbau nicht symmetrisch zu den Achsen 1 und 2 (also auch nicht orthotrop), so ist das Gleichungssystem 56 wie folgt zu ergänzen:

$$\begin{aligned} c_{13k} &= 1/2 [C_{2k} \sin^2 \alpha_k - (c_{||} - c_{1k})] \sin 2\alpha_k \\ c_{23k} &= 1/2 [(c_{\perp} - c_{1k}) - C_{2k} \sin^2 \alpha_k] \sin 2\alpha_k \end{aligned} \tag{57}$$

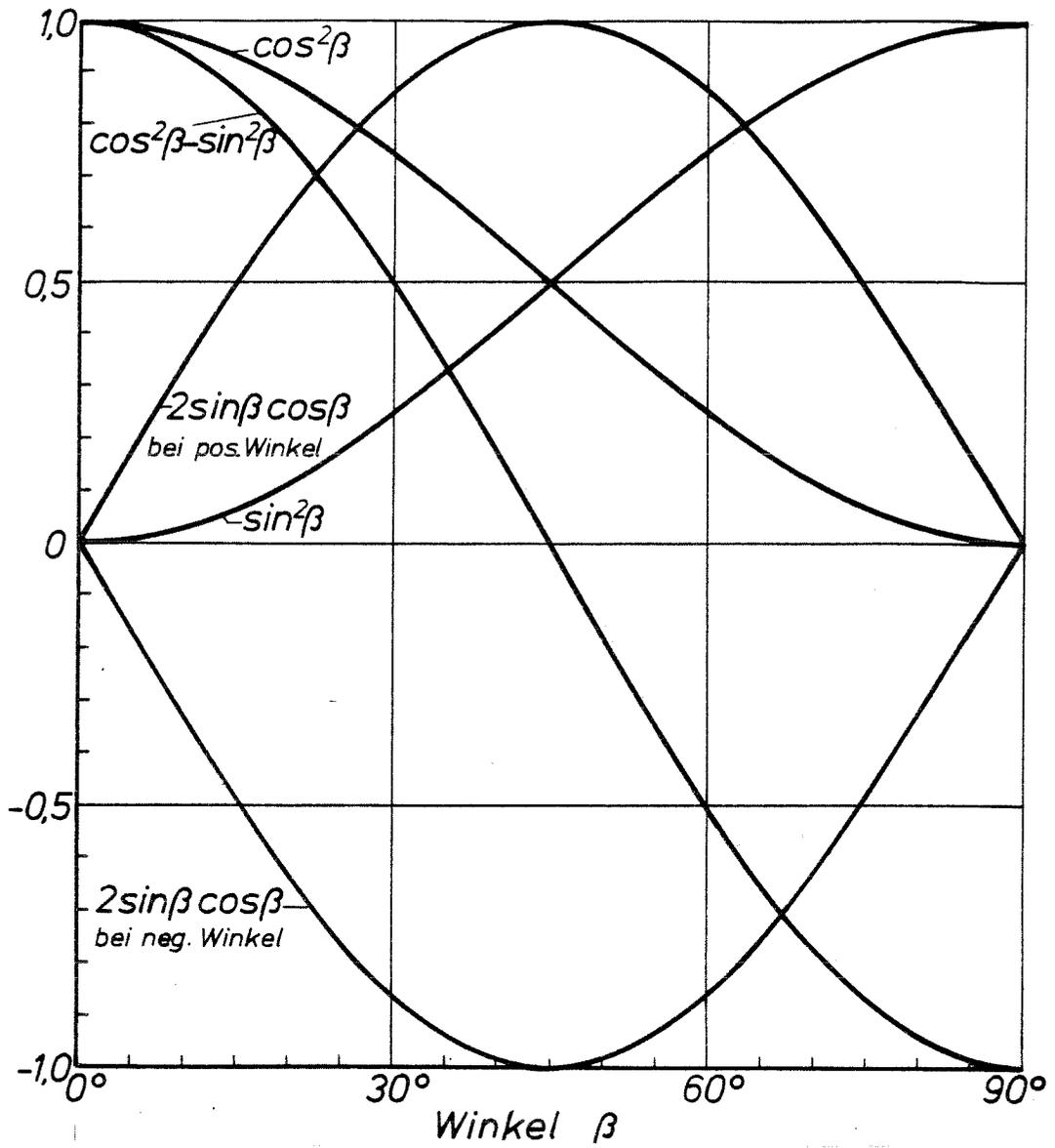


Bild 53: Transformationen

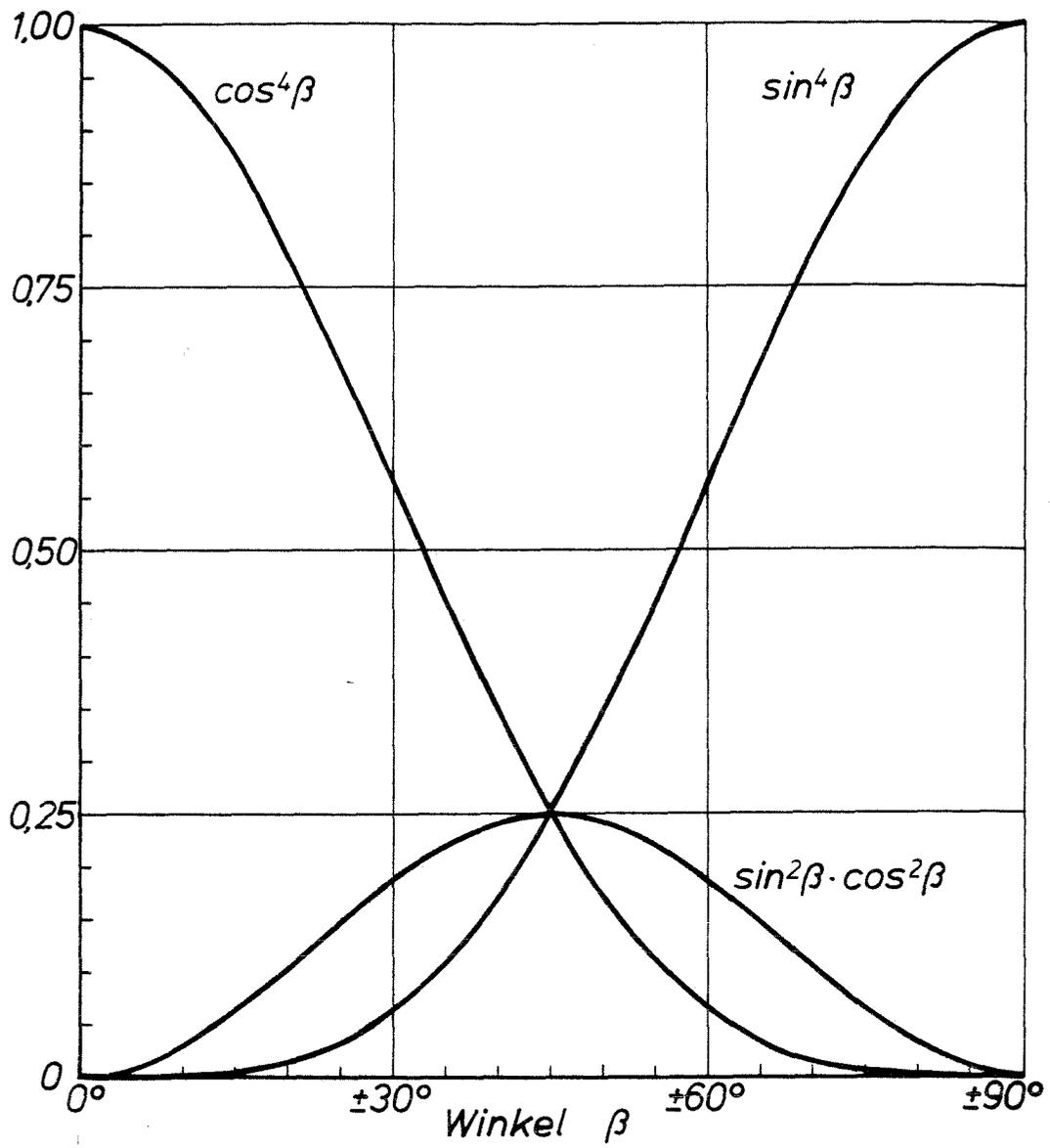


Bild 54: Transformationen

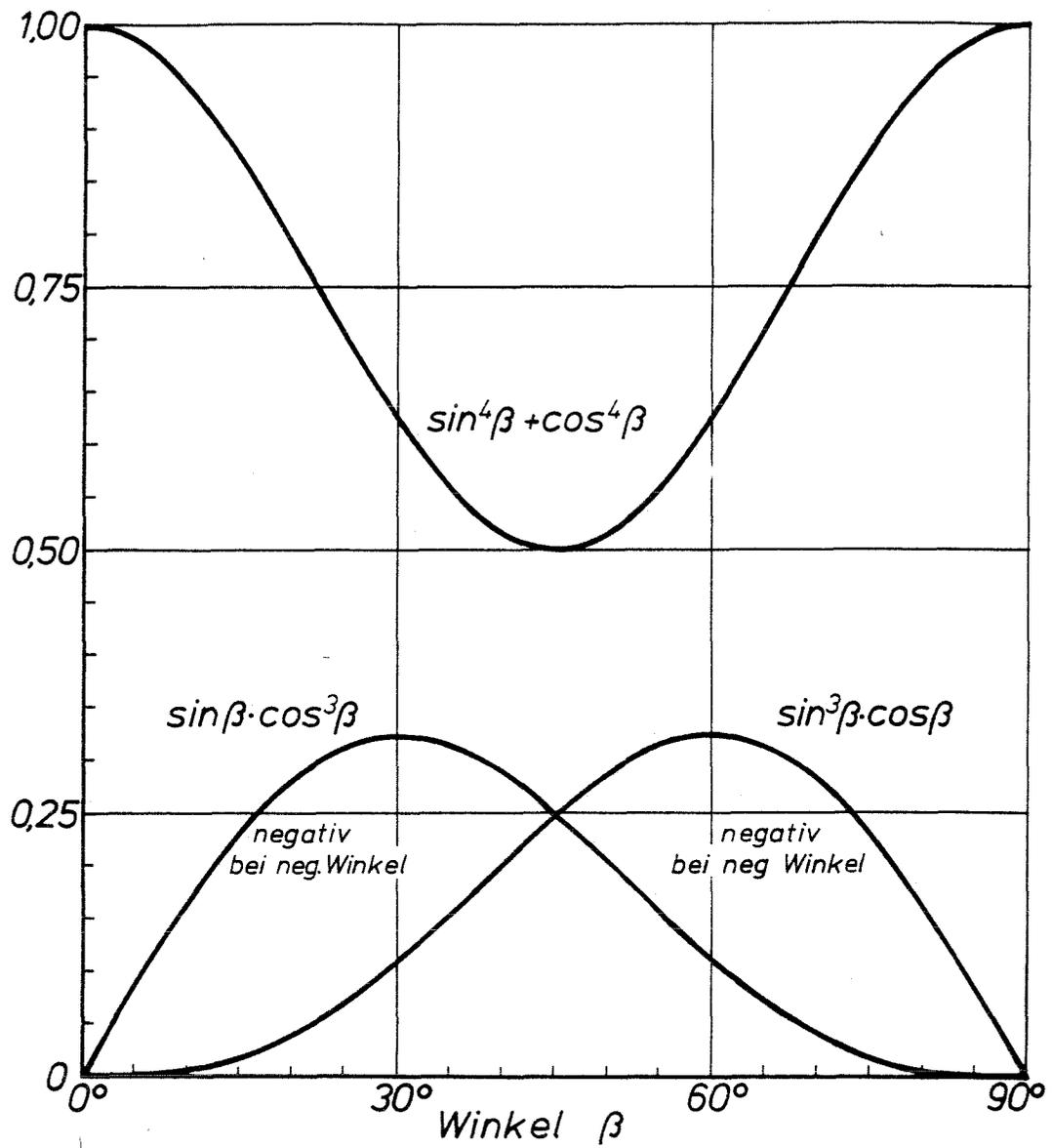


Bild 55: Transformationen

Diese Ausdrücke ändern ihre Vorzeichen mit der Winkeländerung von  $+\alpha_k$  nach  $-\alpha_k$ . Sie werden ebenfalls schichtenweise aufsummiert (wie Schritt 4), um die Laminatsteifigkeiten  $\hat{c}_{13}$  und  $\hat{c}_{23}$  zu erhalten. Die Nachgiebigkeiten des Verbundes  $\hat{s}_{ij}$  (Schritt 5) werden durch die Inversion der Steifigkeitsmatrix gewonnen und die Verformungen des Verbundes dann als Erweiterung des Schrittes 6 nach folgender Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Mit Schritt 7 werden dann auch für die nicht orthotropen Verbunde die Verformungen in den Hauptachsen jeder Einzelschicht ermittelt.

Damit gehen wir zurück zu den Rechenschritten für die Betrachtung orthotroper Verbunde.

#### 4. Gesamtsteifigkeiten des Verbundes

$$\hat{c}_{ij} = f(c_{ij}, k, t'_k)$$

Überlagerungsgesetz

$$\hat{c}_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \cdot c_{11k}; \quad \hat{c}_{12} = \sum_{k=1}^n \frac{t_k}{t} \cdot c_{12k} \quad \text{USW.} \quad (59)$$

$k$  dient der Numerierung der  $n$  Einzelschichten mit der Dicke  $t_k$ ;  $t$  ist die Gesamtdicke des Verbundes  
 über den Steifigkeiten kennzeichnet die Werte des Gesamtverbundes

5. Nachgiebigkeiten des Verbundes

$$\hat{S}_{ij} = f(\hat{C}_{ij})$$

Das Gleichungssystem für die Nachgiebigkeiten  $s$  ist die Umkehrung (inverse Matrix) des Gleichungssystems für die Steifigkeiten.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{11} &= \frac{\hat{C}_{22}}{N}; \quad \hat{S}_{12} = -\frac{\hat{C}_{12}}{N} \\ \hat{S}_{22} &= \frac{\hat{C}_{11}}{N}; \quad \hat{S}_{33} = \frac{1}{\hat{C}_{33}} \end{aligned} \tag{60}$$

mit

$$N = \hat{C}_{11} \cdot \hat{C}_{22} - \hat{C}_{12}^2$$

6. Verzerrungen des Verbundes als Funktion der Laminatmittelspannungen

$$\begin{aligned} \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} &= f(\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\tau}_{xy}, \hat{S}_{ij}) \\ \epsilon_x &= \hat{S}_{11} \cdot \hat{\sigma}_x + \hat{S}_{12} \cdot \hat{\sigma}_y \\ \epsilon_y &= \hat{S}_{12} \cdot \hat{\sigma}_x + \hat{S}_{22} \cdot \hat{\sigma}_y \\ \gamma_{xy} &= \hat{S}_{33} \cdot \hat{\tau}_{xy} \end{aligned} \tag{61}$$

7. Verzerrungstransformation zurück in die Schichtrichtungen

$$\epsilon_{\parallel k}, \epsilon_{\perp k}, \gamma_{\# k} = f(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \alpha_k)$$

Verzerrungen der Einzelschichten bezogen auf die jeweiligen Faserrichtungen:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel k} &= \epsilon_x \cdot \cos^2 \alpha_k + \epsilon_y \cdot \sin^2 \alpha_k - 1/2 \gamma_{xy} \sin 2\alpha_k \\ \epsilon_{\perp k} &= \epsilon_x \sin^2 \alpha_k + \epsilon_y \cos^2 \alpha_k + 1/2 \gamma_{xy} \sin 2\alpha_k \\ \gamma_{\# k} &= (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\alpha_k + \gamma_{xy} \cos 2\alpha_k \end{aligned} \tag{62}$$

Damit sind die Verzerrungen jeder Einzelschicht in Bezug auf deren Hauptrichtungen (Faserverlauf) angegeben. Nimmt man ein Verformungskriterium für die Beanspruchbarkeit, so ist nach

Vergleich der hier in Schritt 7 errechneten Verformungen mit den zulässigen Werten das Ziel der Rechnung erreicht.

Bei Zugrundelegung eines Spannungskriteriums wird noch der folgende Rechenschritt ausgeführt.

8. Berechnung der Spannungen in den Einzelschichten

$$\begin{aligned} \sigma_{||k}, \sigma_{\perp k}, \tau_{\#k} &= f(c_{||}, c_{\perp}, c_{\perp||}, c_{\#}, \epsilon_{||k}, \epsilon_{\perp k}, \gamma_{\#k}) \\ \sigma_{||k} &= c_{||} \epsilon_{||k} + c_{\perp||} \epsilon_{\perp k} \\ \sigma_{\perp k} &= c_{\perp||} \epsilon_{||k} + c_{\perp} \epsilon_{\perp k} \\ \tau_{\#k} &= c_{\#} \gamma_{\#k} \end{aligned} \quad (63)$$

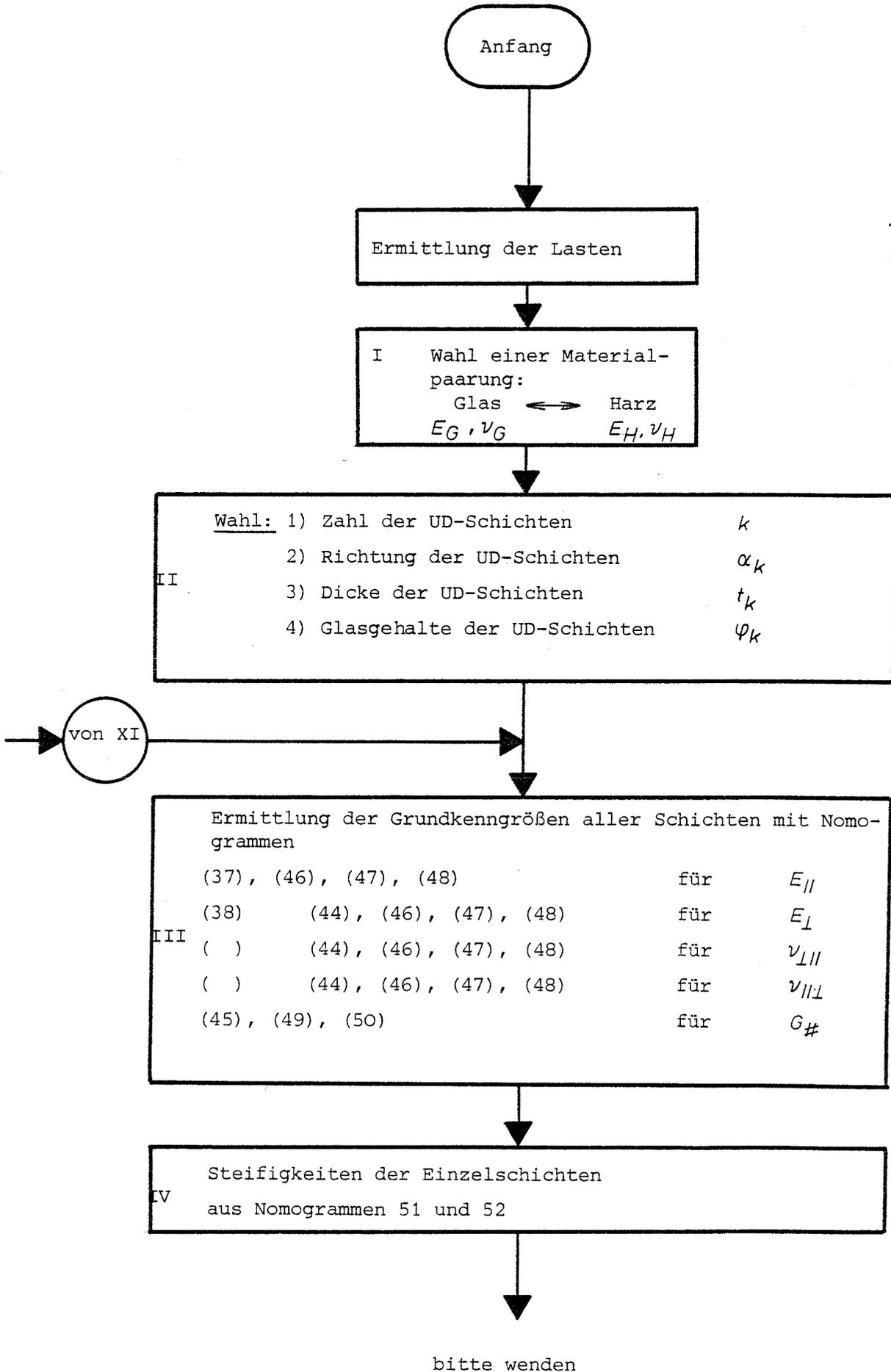
Diese Spannungen sind nun mit jenen aus Bruchkriterien für ein- oder mehrachsige Beanspruchungen zu vergleichen.

Die vorstehend aufgeführten Lösungen sind elastizitätstheoretisch abgeleitet und gelten daher zunächst nur für rein elastisches Werkstoffverhalten. Es ist jedoch bereits in einer Reihe von Arbeiten (zumindest für orthotrope Lamine) auch experimentell nachgewiesen worden (z. B. Schneider, Brintrup), daß man die Viskoelastizität der Harzmatrix in dieser Rechnung berücksichtigen kann, wenn man statt der Kurzzeit-Elastizitätskenngrößen des Harzes deren zeit- und temperaturabhängige Werte oder auch deren Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit in die Beziehungen der Kontinuumsmechanik einsetzt.

Die Optimierung eines Laminataufbaus für einen gegebenen Beanspruchungsfall kann durch Variation der Eingabedaten in einer Iterationsrechnung nach den vorstehenden Rechenschritten erfolgen.

Dieses iterative Bemessungsverfahren erzeugt ausgesprochen viele Einzeldaten in jedem Iterationsschritt. Damit die Handhabung übersichtlich bleibt, ist es zweckmäßig, alle Werte in ein Formblatt einzutragen. Als Beispiel wird die hier folgende Systematik abgedruckt.

In einem Flußdiagramm stellt sich der Bemessungsvorgang eines Mehrschichtverbundes in der folgenden Form dar.



Fortsetzung

↓

Transformationen der Steifigkeiten der Einzelschichten  
in die Symmetrieachsen des Verbundes (1, 2)

V

$$\begin{matrix} c_{11k} & & c_{33k} & & \begin{pmatrix} c_{13k} \\ c_{23k} \end{pmatrix} \\ c_{22k} & & c_{12k} & & \end{matrix}$$

Nomogramme 53 bis 55

↓

Überlagerung zur Gesamtsteifigkeit des Verbundes

VI

$$\hat{c}_{11} = \sum_{k=1}^n t_k/t \cdot c_{11k}$$
$$\hat{c}_{22} =$$

↓

Nachgiebigkeiten des Verbundes

VII

$$\hat{s}_{11} = \hat{c}_{22}/N, \hat{s}_{12} = \hat{c}_{12}/N$$
$$\hat{s}_{22} = \hat{c}_{11}/N, \hat{s}_{33} = \hat{c}_{33}^{-1}$$
$$N = \hat{c}_{11} \cdot \hat{c}_{22} - \hat{c}_{22}^2$$

↓

Verzerrungen des Verbundes

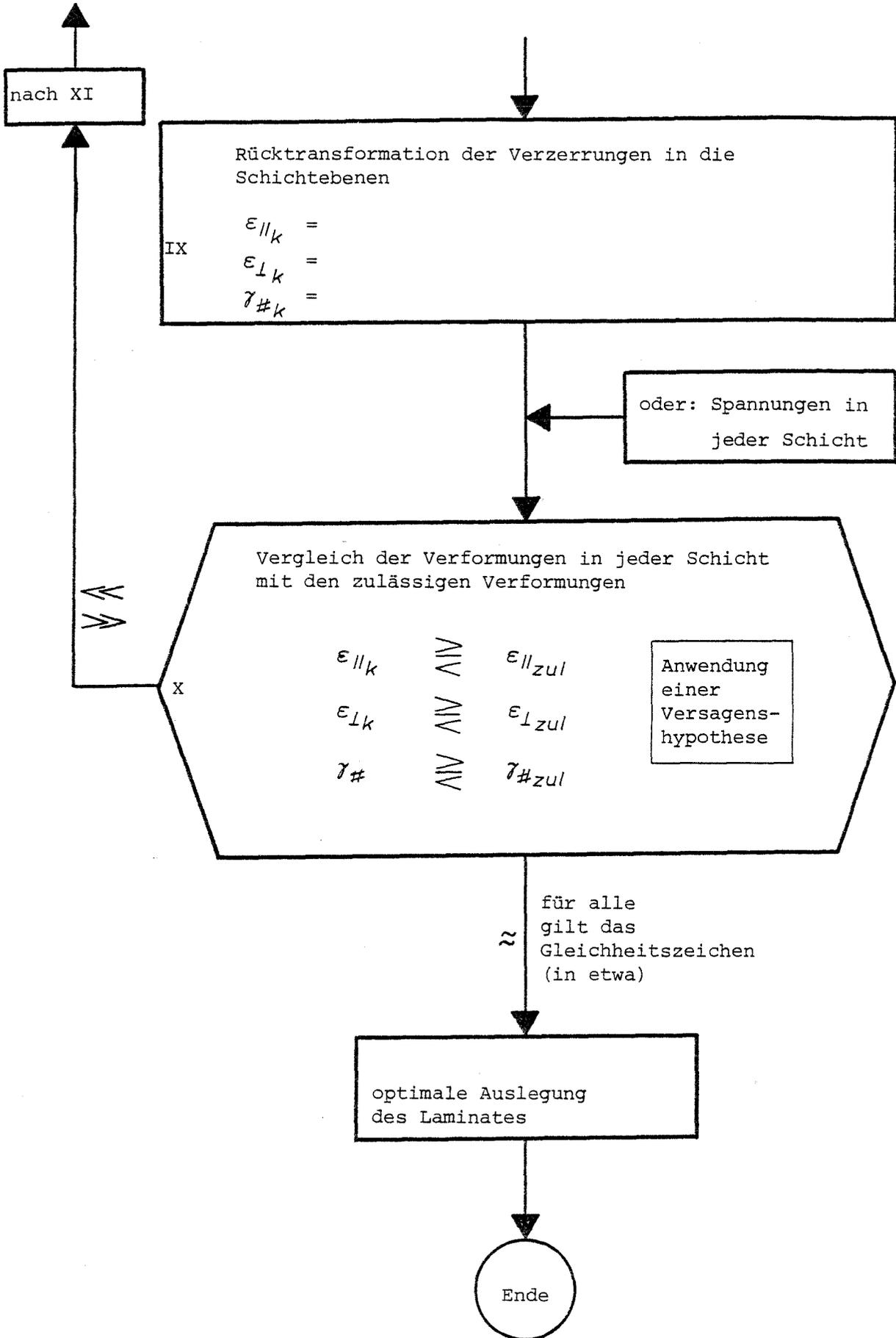
VIII

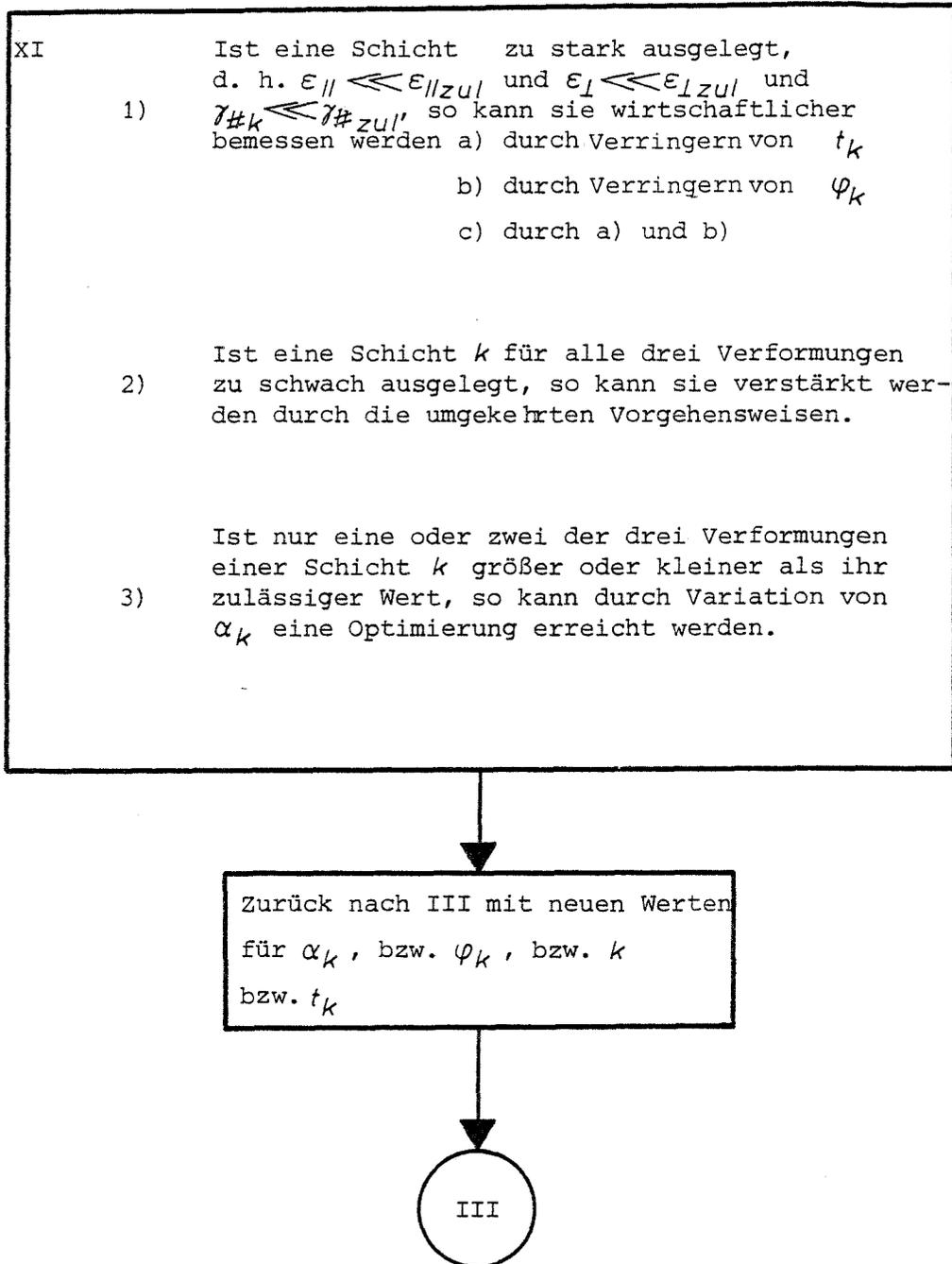
$$\epsilon_x = \hat{s}_{11} \hat{\sigma}_x + \hat{s}_{12} \hat{\sigma}_y$$
$$\epsilon_y = \hat{s}_{12} \hat{\sigma}_x + \hat{s}_{22} \hat{\sigma}_y$$
$$\gamma_{xy} = \hat{s}_{33} \hat{\tau}_{xy}$$

↓

bitte wenden

Fortsetzung





Flußdiagramm III: Iteratives Bemessen eines orthotropen UD-Laminates nach der Kontinuumstheorie

O.	Ermittlung der Schnittlasten						
	$\hat{\sigma}_x = \text{N/mm}^2$ $\hat{\sigma}_y = \text{N/mm}^2$ $\hat{\tau}_{xy} = \text{N/mm}^2$						
I.	Werkstoffwahl						
	$E_H = \text{N/mm}^2$ $E_G = \text{N/mm}^2$ $\nu_H =$ $\nu_G =$			$E_M = \text{N/mm}^2$ $\nu_M \approx 0,36$			
II.	Laminatzusammenstellung (wählen)						
		Schicht k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
	$\varphi_k$ (%)						
	$t_k$ (mm)						
	$\alpha_k$						
	$t = \sum_{k=1}^n t_k =$						mm
III.	Elastizitätsgrößen der Schichten						
	$E_{II}$ [ ]						
	$E_L$ [ ]						
	$\nu_{LII}$						
	$\nu_{IIL}$						
	$G_{\#}$ [ ]						

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
IV.	Steifigkeiten der Einzelschichten						
	$c_{  } [ ]$						
	$c_{\perp} [ ]$						
	$c_{\perp  } [ ]$						
	$c_{\#} [ ]$						
V.	Transformation in die Symmetrieachsen des Verbundes						
	$C_1 [ ]$						
	$C_2 [ ]$						
	$c_{11} [ ]$						
	$c_{22} [ ]$						
	$c_{33} [ ]$						
	$c_{12} [ ]$						
VI.	Gesamtsteifigkeit des Verbundes						
	$\hat{c}_{11} [ ]$						
	$\hat{c}_{22} [ ]$						
	$\hat{c}_{33} [ ]$						
	$\hat{c}_{12} [ ]$						
VII.	Nachgiebigkeiten des Verbundes						
	$\hat{s}_{11} [ ]$						
	$\hat{s}_{22} [ ]$						
	$\hat{s}_{33} [ ]$						
	$\hat{s}_{12} [ ]$						

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
VIII.	Verzerrungen des Verbundes						
	$\epsilon_x$ (%)						
	$\epsilon_y$ (%)						
	$\gamma_{xy}$ (%)						
IX.	Verzerrungen der Einzelschichten						
	$\epsilon_{  }$ (%)						
	$\epsilon_{\perp}$ (%)						
	$\gamma_{\#}$ (%)						
X.	(oder:) Spannungen der Einzelschichten						
	$\sigma_{  }$ ( )						
	$\sigma_{\perp}$ ( )						
	$\tau_{\#}$ ( )						
XI.	Vergleich der Belastungen der Einzelschicht mit den zulässigen Werten						
	$\epsilon_{  }$ od. $\sigma_{  }$	zu groß $\gg$ zu klein $\ll$ richtig =	$\gg$ $\ll$ =	$\gg$ $\ll$ =	$\gg$ $\ll$ =		
	$\epsilon_{\perp}$ od. $\sigma_{\perp}$						
	$\gamma_{\#}$ od. $\tau_{\#}$						

		k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6
XII.	Veränderte Vorgabewerte aus II						
	$\varphi$ (%)						
	$t_k$						
	$\alpha_k$						
	$t = \sum_{k=1}^n t_k$						

### 5.3. Bemessen mit Hilfe der Netztheorie

#### 5.3.1. Vereinbarungen

Bei Anwendung der "Netzwerktheorie" (oder kurz: "Netztheorie") wird angenommen, daß nur die Fasern Kräfte (in ihrer Längsrichtung) übertragen können. Statt des wirklichen Glas/Harz-Verbundstoffes wird nur das Faser-Netzwerk betrachtet. Die Netztheorie beschreibt das Verhalten von Laminaten bei Beanspruchungen in der Nähe der Faser-Bruchgrenze im allgemeinen recht gut, denn meist entstehen schon weit unterhalb der Faserbruchgrenze im Harz oder an der Glas/Harz-Grenzfläche viele parallel zu den Fasern verlaufende Risse, deren Zahl mit steigender Belastung zunimmt. Die Kraftübertragung über die Grenzflächen und das Harz wird deshalb bei Annäherung an die Faser-Bruchgrenze immer geringer. Mit Bildung erster Risse wird somit sowieso die Kontinuumsstheorie ungültig. Man rechnet dann zweckmäßig in solchen Fällen mit der Netztheorie.

Für den Umgang mit den Methoden der Netztheorie müssen noch einige Vereinbarungen getroffen werden. Es ist unerlässlich, sich strikt an diese Vereinbarungen zu halten, denn die Spannungsverteilung in mehrschichtigem GFK ist meist so wenig der Anschauung zugänglich, daß man z. B. oft nicht einmal aus der Anschauung heraus vorhersagen kann, ob eine bestimmte Spannung eine Zug- oder Druckspannung sein muß.

#### Vereinbarung 1

Verwendung finden nur Rechtskoordinatensysteme.

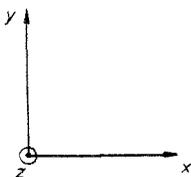


Bild 56: Koordinatenvereinbarung

Vereinbarung 2

Spannungen erhalten ein positives Vorzeichen, wenn sie in die positiven Achsrichtungen weisen.

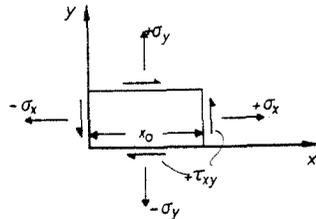


Bild 57: Vorzeichenvereinbarung bei Spannungen

Vereinbarung 3

Dehnungen  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  sind positiv, wenn sie Verlängerungen der Elementkantenlängen bewirken.

Schiebungen  $\gamma_{xy}$  sind positiv, wenn sie Verformungen gemäß Bild 58 hervorrufen.

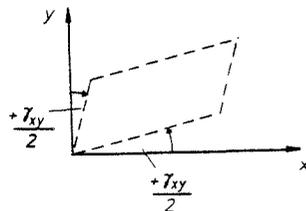


Bild 58: Vorzeichenvereinbarung bei Schiebungen

Vereinbarung 4

Es sollen nur ebene Beanspruchungen betrachtet werden. Ein solcher Spannungszustand ist im allgemeinen durch zwei (zueinander senkrechte) Normalspannungen und eine Schubspannung gegeben. Durch Drehung läßt er sich immer in einen Zustand überführen, in dem die Schubspannung zu Null wird (Hauptspannungszustand) und in einen, wo die Normalspannungen zu Null werden (reiner Schubspannungszustand).

Vereinbarung 5

Es sollen nur symmetrische Lamine betrachtet werden; diese Bedingung beinhaltet, daß bei ebener Beanspruchung keine Verformungen in z-Richtung auftreten (Membranspannungszustand).

Vereinbarung 6

Das Laminat der Dicke  $t$  soll aus  $n$  unidirektionalen Schichten mit der Schichtdicke  $t_k$  aufgebaut werden.

$$t = \sum_{k=1}^n t_k \quad (64)$$

Vereinbarung 7

Jede Schicht kann nur Zug- oder Druckkräfte in Faserrichtung aufnehmen, d. h.

- a) alle Spannungen senkrecht zur Faserrichtung sind gleich Null

$$\sigma_{\perp} = 0$$

- b) alle Schiebungen in einer Schicht sind gleich Null

$$\tau_{\perp\parallel} = \tau_{\parallel\perp} = 0$$

Weiterhin soll die folgende Transformation angewandt werden:

Sind die auf ein a,b-Koordinatensystem bezogenen Spannungen  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$ ,  $\tau_{ab}$  eines ebenen Spannungszustandes bekannt, so ergeben sich daraus die auf ein entgegen dem Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) um den Winkel  $\theta$  gegenüber dem a,b-System gedrehtes c,d-Koordinatensystem bezogenen Spannungen  $\sigma_c$ ,  $\sigma_d$ ,  $\tau_{cd}$  mit Hilfe folgender Transformationsformeln (Mohr'scher Spannungskreis):

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \sigma_a \cos^2 \theta + \sigma_b \sin^2 \theta + \tau_{ab} \sin 2\theta \\ \sigma_d &= \sigma_a \sin^2 \theta + \sigma_b \cos^2 \theta - \tau_{ab} \sin 2\theta \\ \tau_{cd} &= -\frac{1}{2} \sigma_a \sin 2\theta + \sigma_b \sin 2\theta + \tau_{ab} \cos 2\theta\end{aligned}\tag{65}$$

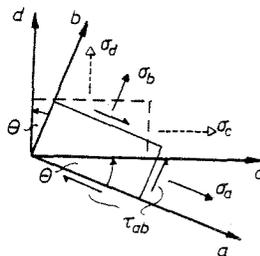


Bild 59: Vorzeichenvereinbarung bei Koordinatentransformation

### 5.3.2. Ermittlung der Kräfte in den Faserschichten

#### 5.3.2.1. Definition, Gleichgewichtsbedingungen

Die auf Schnitten durch das gesamte Laminat wirkenden äußeren Normalkräfte  $p_x$ ,  $p_y$  und äußeren Schubkräfte  $p_{xy}$  (je Einheit der Breite) ergeben sich als Summe der in x- und y-Richtung wirkenden Kräfte (je Einheit der Breite) in den n Einzelschichten mit  $p_{||k}$  als in Faserrichtung wirkender Schichtkraft zu:

$$\begin{aligned} p_x &= \sum_{k=1}^n p_{||k} \cos^2 \alpha_k \\ p_y &= \sum_{k=1}^n p_{||k} \sin^2 \alpha_k \\ p_{xy} &= \sum_{k=1}^n p_{||k} (-1/2 \sin 2\alpha_k) \end{aligned} \quad (66)$$

Weiterhin gilt für die Spannung im Glas der k-ten Schicht

$$\sigma_{Glas_k} = \frac{p_{||k}}{t_{Glas_k}} \quad (67)$$

Die parallel zur Faserrichtung gerichtete Mittelspannung im Glas beträgt:

$$\sigma_{||k} = \varphi_k \cdot \sigma_{G_k} \quad (68)$$

mit  $\varphi_k \hat{=} \text{Glasvolumenanteil der k-ten Schicht}$

$$\varphi_k = t_{g_k} / t_k \quad (69)$$

5.3.2.2. Kräfte in den Faserschichten bei Laminaten mit  
drei Faserrichtungen

Legt man eine Faserrichtung in Richtung der x-Achse, so wird  $\alpha_1$  zu Null und es ergeben sich die folgenden Formeln für die Schichtkräfte:

$\alpha_1 = 0$ :

$$P_{111} = p_x + \frac{\cos^2 \alpha_2 \sin 2 \alpha_3 - \cos^2 \alpha_3 \sin 2 \alpha_2}{D} \cdot (p_y + 2 p_{xy}) \quad (70)$$

$$P_{112} = - \frac{\sin 2 \alpha_3}{D} p_y - \frac{2 \sin^2 \alpha_3}{D} p_{xy} \quad (71)$$

$$P_{113} = \frac{\sin 2 \alpha_2}{D} p_y + \frac{2 \sin^2 \alpha_2}{D} p_{xy} \quad (72)$$

mit  $D = \sin^2 \alpha_3 \sin 2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2 \sin 2 \alpha_3$

Eine weitere Vereinfachung der Formeln (70) bis (72) ergibt sich, wenn man festlegt:

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \omega, \alpha_3 = -\omega$ :

$$P_{111} = p_x - \operatorname{ctg}^2 \omega \cdot p_y \quad (73)$$

$$P_{112} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \cdot (p_y / 2 - p_{xy}) \quad (74)$$

$$P_{113} = \frac{1}{2 \sin^2 \omega} p_y + \frac{1}{\sin 2 \omega} p_{xy} \quad (75)$$

Bei einem Laminat mit drei verschiedenen Faserrichtungen erhält man für jede beliebige Belastungskombination  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_{xy}$  endliche Ergebnisse für die Schichtkräfte  $p_{||1}$ ,  $p_{||2}$ ,  $p_{||3}$ .

Das bedeutet, daß ein Laminat mit drei (oder mehr) Faserrichtungen imstande ist, jede beliebige ebene Belastung ohne Mitwirkung des Harzes allein durch Kräfte in den Fasern aufzunehmen.

### 5.3.2.3. Kräfte in den Faserschichten bei Laminaten mit zwei Faserrichtungen

Ein Laminat mit zwei Faserrichtungen ist nicht imstande, jeden beliebigen ebenen Belastungszustand ohne Mitwirkung des Harzes allein durch Faserkräfte aufzunehmen. Es ist nicht imstande, äußere Schubkräfte  $p_{xy}$  zu übertragen.

Ein solches Laminat kann jedoch im Hauptspannungszustand ( $p_{xy} = 0$ ) eingesetzt werden. Das  $x, y$ -Koordinatensystem soll dann in Richtung der Hauptspannungen gewählt werden.  $p_x$  und  $p_y$  werden damit zu Haupt-Normalkräften. Der Winkel einer Schichtrichtung zur  $x$ -Richtung soll mit  $\beta_k$  bezeichnet werden. Dann sind die beiden Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  eines Laminates mit zwei Verstärkungsrichtungen über die Beziehung

$$\operatorname{tg} \beta_2 = - \frac{p_y / p_x}{\operatorname{tg} \beta_1} \quad (76)$$

miteinander verknüpft. Zu einem bestimmten Verhältnis der Hauptnormalspannungen lassen sich also beliebig viele Winkelpaare  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  finden, die diese Bedingung erfüllen. Für die Schichtkräfte ergeben sich hiermit aus Gleichgewichtsbetrachtungen die folgenden Formeln:

$$p_{||1} = \frac{1}{\cos \beta_1 (\cos \beta_1 - \sin \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2)} p_x \quad (77)$$

$$P_{//2} = \frac{1}{\sin \beta_2 (\sin \beta_2 - \cos \beta_2 \operatorname{tg} \beta_1)} p_y \quad (78)$$

Ein in der Praxis häufig vorkommender Sonderfall des Laminates mit 2 Faserrichtungen ist das Laminat mit  $\beta_1 = \omega$  und  $\beta_2 = -\omega$ . Für diesen Sonderfall wird aus Gleichung (76)

$$\operatorname{tg} \omega = \sqrt{p_y / p_x} \quad (79)$$

für die Winkelwahl. Eine reelle Lösung existiert nur bei gleichem Vorzeichen für  $p_x$  und  $p_y$ .

Für die Schichtkräfte ergibt sich dann:

$$P_{//1} = P_{//2} = \frac{p_x + p_y}{2} \quad (80)$$

Werden nun in die Faserrichtungen gleiche Mengen an Fasern gelegt, so werden wegen  $P_{//1} = P_{//2}$  auch die Spannungen in den Faserrichtungen gleich  $\sigma_{//1} = \sigma_{//2}$ . Man spricht dann von einem "ausgeglichenen Winkelverbund" (AWV).

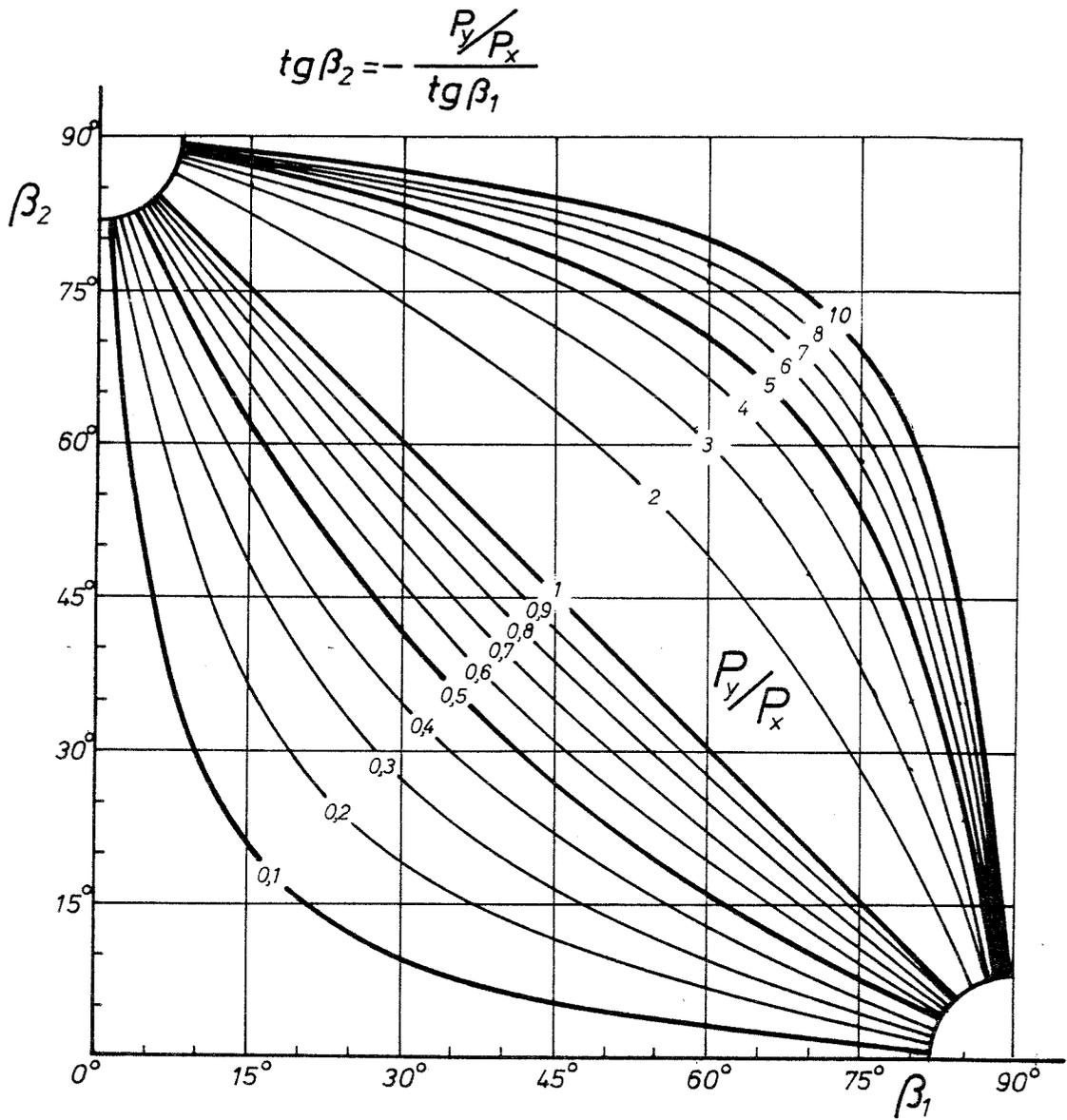


Bild 60: Nomogramm zur Wahl der beiden Verstärkungswinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  eines Laminates mit 2 Verstärkungsrichtungen in Abhängigkeit des Verhältnisses der Hauptnormalkräfte  $P_x/P_y$

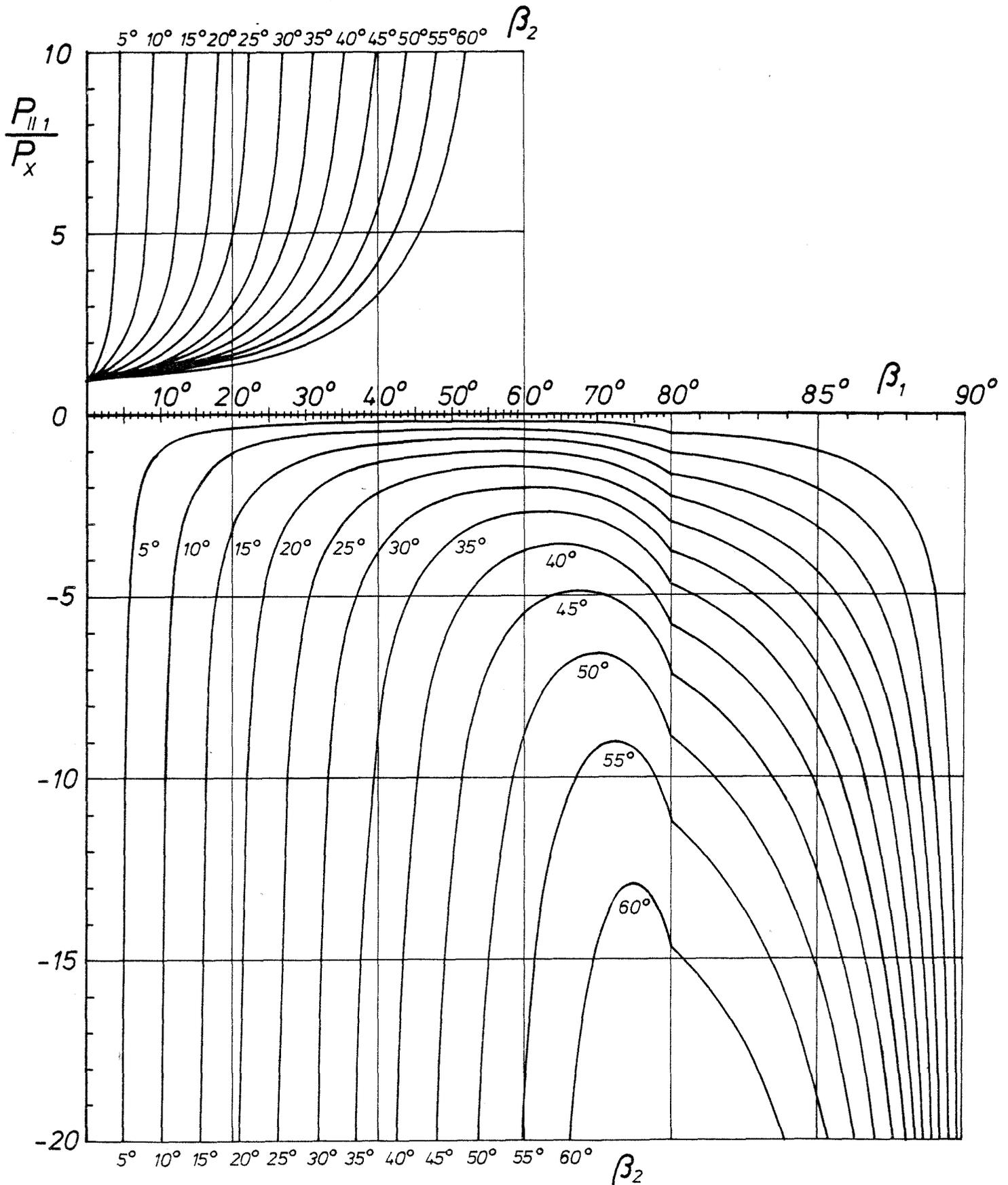


Bild 61: Nomogramm zur Ermittlung der Schichtkraft  $P_{||1}$  eines Laminates mit 2 Verstärkungsrichtungen aus den beiden Verstärkungswinkeln und der Hauptnormalkraft  $P_x$

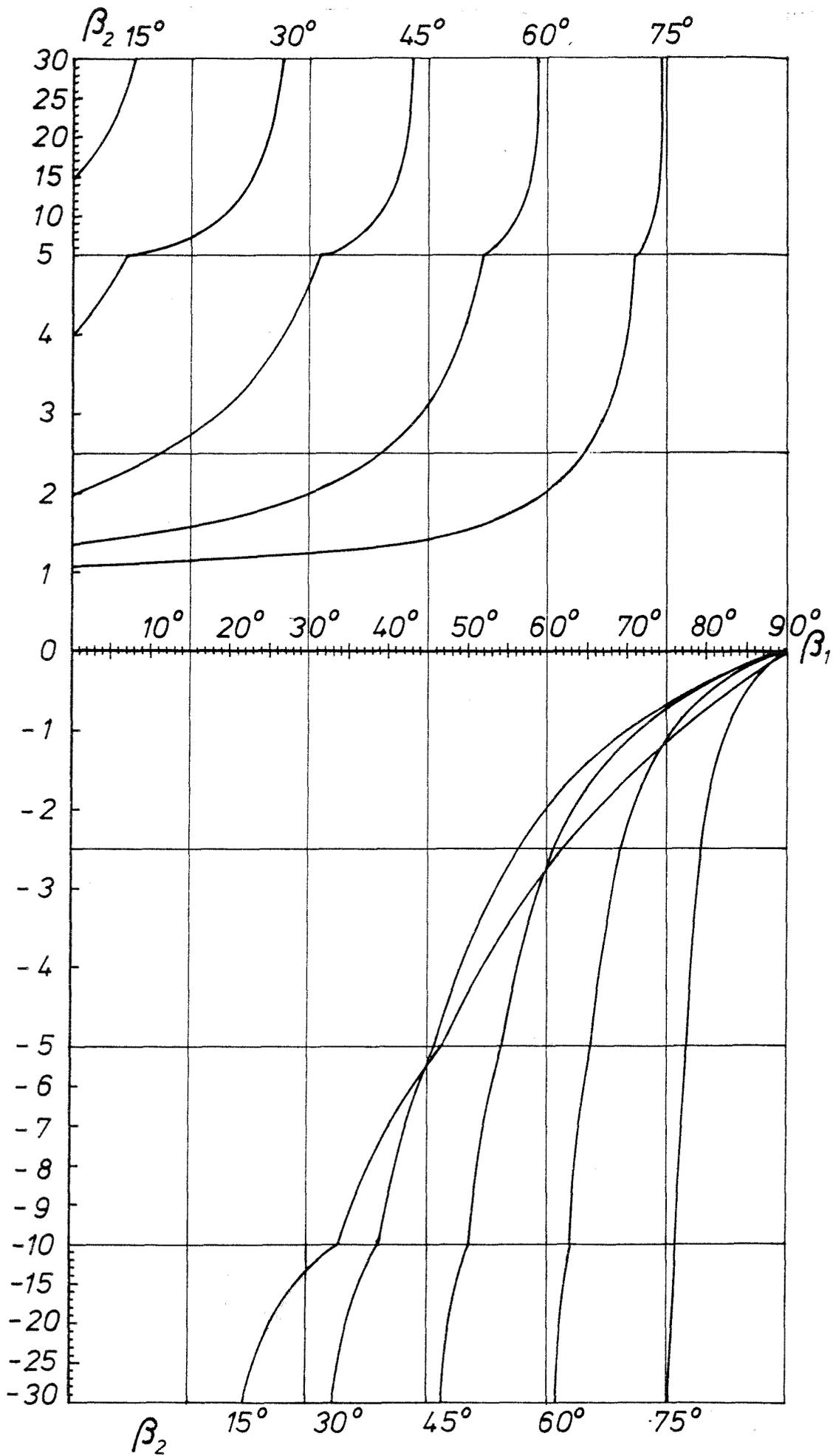


Bild 62: Nomogramm zur Ermittlung der Schichtkraft  $p_{||2}$  eines Laminates mit 2 Verstärkungsrichtungen aus den Schichtwinkeln  $\beta_1$  und  $\beta_2$  und der Hauptnormalkraft  $p_y$

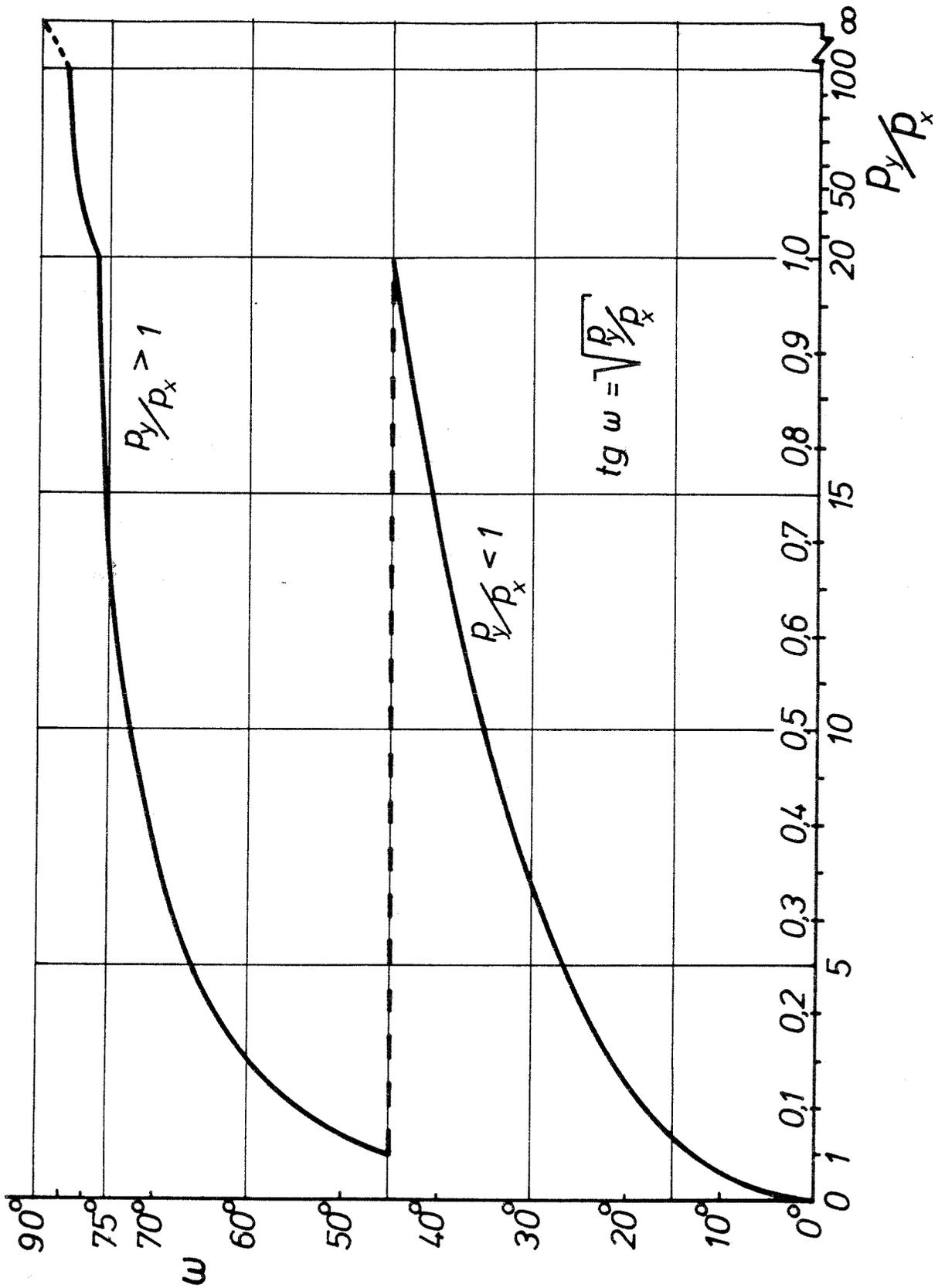


Bild 63: Nomogramm zur Winkelwahl bei Laminaten mit 2 Verstärkungsrichtungen und  $\beta_1 = \omega$  und  $\beta_2 = -\omega$

### 5.3.3. Optimierungsregeln

Als optimal soll hier eine solche Faseranordnung angesehen werden, die eine vorgegebene Belastung mit einem minimalem Aufwand an Fasern zu tragen vermag.

#### 5.3.3.1. im einachsigen Spannungszustand

Alle Fasern in Lastrichtung legen!

$$\sigma_{zul} \geq S \cdot \sigma_{II} \quad (81)$$

#### 5.3.3.2. im zweiachsigen Spannungszustand

Für den Membranspannungszustand ist es erforderlich, mehrere Faserrichtungen im Laminat vorzusehen. Als Maß für den Faser-aufwand ist die "Gesamt-Glasdicke"  $t_G$  des Laminates

$$t_G = \sum_{k=1}^n t_{G_k} \quad (82)$$

anzusehen. Weiterhin gilt für eine zugbeanspruchte Schicht

$$t_{G_k} = p_{II_k} / \sigma_{G_z} \quad (83)$$

und für eine druckbeanspruchte Schicht

$$t_{G_k} = |p_{II_k}| / |\sigma_{G_d}| \quad (84)$$

Damit gilt für die Gesamt-Glasdicke  $t_G$

$$t_G = \sum_{k=1}^n p_{||k} / \sigma_{Gz} + \sum_{k=1}^n |p_{||k}| / |\sigma_{Gd}| \quad (85)$$

### 5.3.3.3. für Hauptnormalkräfte mit gleichem Vorzeichen

Voraussetzung:  $p_x$  und  $p_y$  sind Hauptnormalspannungskräfte mit gleichem Vorzeichen.

Dann gilt die folgende Optimierungsregel:

- 1) Durch eine geeignete Wahl von  $\beta_k$  ist dafür Sorge zu tragen, daß alle  $p_{||k}$  das gleiche Vorzeichen wie  $p_x$  und  $p_y$  erhalten.
- 2) Die Schichtdicken  $t_{GK}$  sind entsprechend der in den Schichten wirkenden Schichtkräfte  $p_{||k}$  zu wählen, so daß in allen Schichten gleiche Spannungen  $\sigma_{G||}$  herrschen.

$$\sigma_{Gzul} \geq S \cdot \sigma_{G||k} = S \cdot p_{||k} / t_{Gk} \quad (86)$$

- 3) Wenn die Punkte 1) und 2) erfüllt sind, gilt für die minimale "Gesamt-Glasdicke"

$$\text{für Zug: } t_{gmin} = \frac{p_x + p_y}{\sigma_{Gz}} \quad (87)$$

$$\text{für Druck: } t_{gmin} = \frac{|p_x| + |p_y|}{|\sigma_{Gd}|}$$

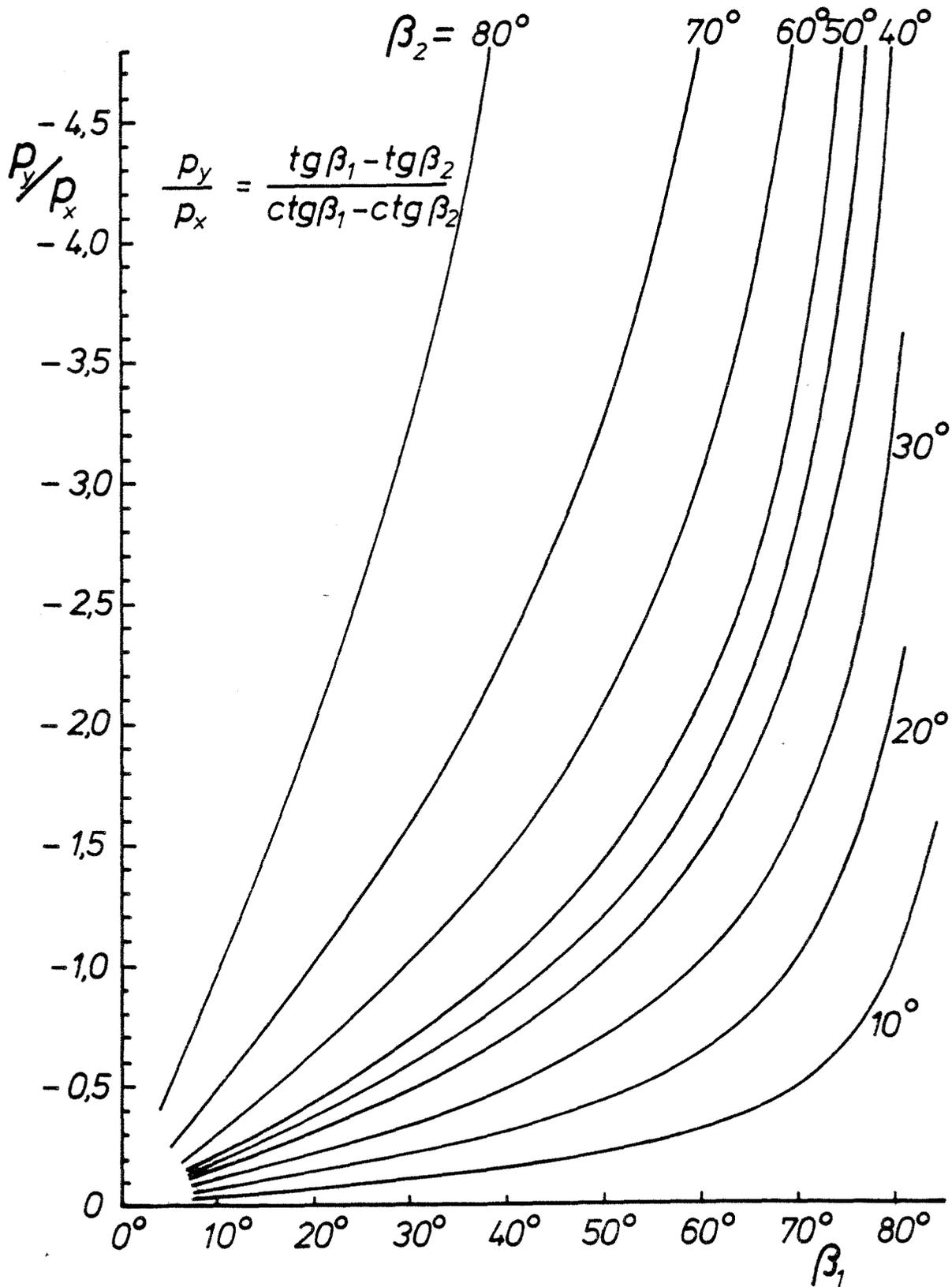


Bild 64: Nomogramm zur Ermittlung des Verhältnisses der Hauptnormalkräfte  $p_y/p_x$  aus den Schichtwinkeln  $\beta_1$  und  $\beta_2$

- III. mit  $\beta_3 = 90^\circ$ ,  $\beta_1 = \omega$ ,  $\beta_2 = -\omega$  (ausgeglichener Winkelverbund mit zusätzlicher Verstärkung in y-Richtung) durch Anwenden der Bedingung

$$\sqrt{p_y/p_x} > \operatorname{tg} \omega$$

basierend auf Gleichung (79) (Nomogramm Bild 63).

Für die Schichtkräfte gilt dann:

$$\begin{aligned} p_{||1} &= p_{||2} = p_x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 \omega} \\ p_{||3} &= -p_x \cdot \operatorname{tg}^2 \omega + p_y \end{aligned} \quad (91)$$

Diese Zusammenhänge sind in Bild 65 dargestellt.

- IV. mit  $\beta_3 = 0^\circ$ ,  $\beta_1 = \omega$ ,  $\beta_2 = -\omega$  (ausgeglichener Winkelverbund mit zusätzlicher Verstärkung in x-Richtung) durch Anwenden der Bedingung

$$\sqrt{p_y/p_x} < \operatorname{tg} \omega$$

basierend auf Gleichung (79) (Nomogramm Bild 63).

Für die Schichtkräfte gilt dann:

$$\begin{aligned} p_{||1} &= p_{||2} = p_y \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \omega} \\ p_{||} &= -p_y \cdot \operatorname{ctg}^2 \omega + p_x \end{aligned} \quad (92)$$

Auch diese Zusammenhänge sind in Bild 65 dargestellt.

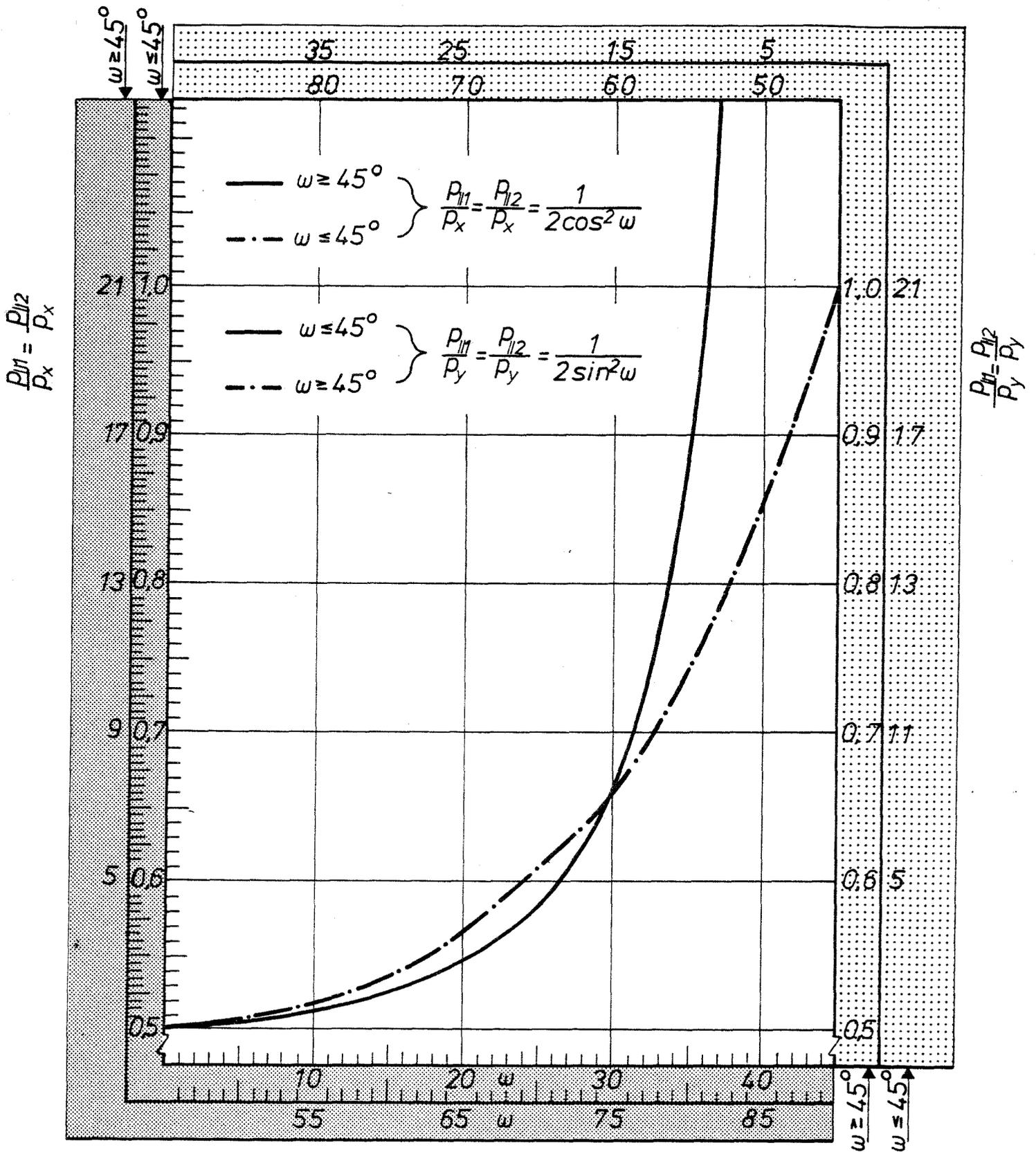


Bild 65: Nomogramm zur Ermittlung der Schichtkräfte  $p_{||1}$  und  $p_{||2}$  eines ausgeglichenen Winkelverbundes mit zusätzlicher Verstärkung in y-Richtung (linke und untere Skala) bzw. x-Richtung (rechte und obere Skala)

5.3.3.4. für Hauptnormalkräfte mit ungleichem Vorzeichen

Voraussetzung:  $p_x$  und  $p_y$  sind Haupt-Normalspannungskräfte mit ungleichem Vorzeichen.

Der kleinstmögliche Faseraufwand wird erreicht, wenn die Fasern in Richtung der Hauptspannungen gelegt werden, d. h.  $\beta_1 = 0^\circ$ ,  $\beta_2 = 90^\circ$ . Dann gilt  $p_{\parallel 1} = p_x$  und  $p_{\parallel 2} = p_y$ . Für alle anderen Faseranordnungen wird die "Gesamt-Glasdicke" größer. Es gilt:

$$t_g = \frac{1}{\sigma_{Gz}} \cdot \sum_{k=1}^n p_{\parallel k_z} + \frac{1}{|\sigma_{Gd}|} \cdot \sum_{k=1}^n |p_{\parallel k_d}| > t_{g_{min}} \quad (93)$$

mit

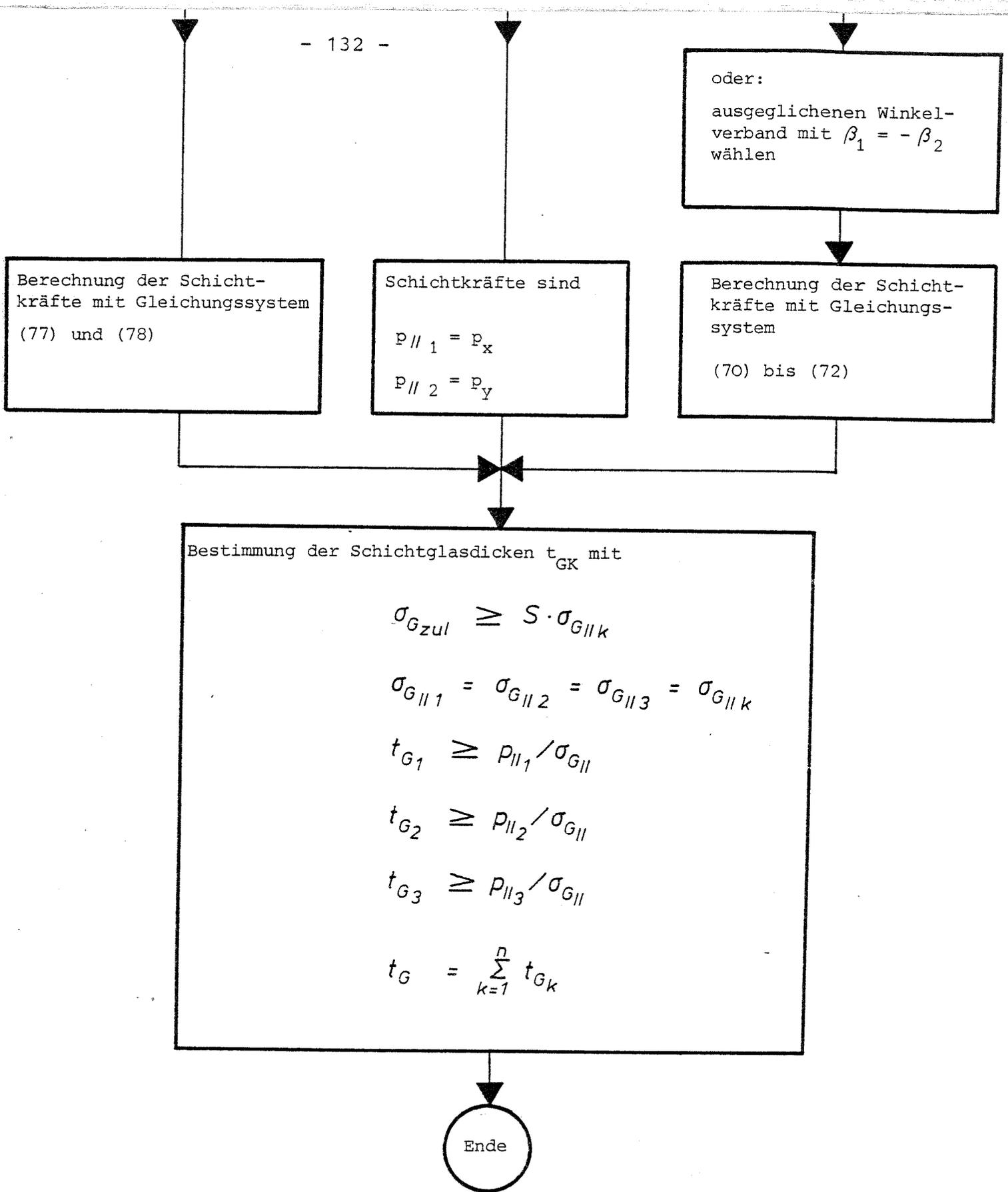
$$t_{g_{min}} = \frac{p_x}{\sigma_{Gz}} + \frac{|p_y|}{|\sigma_{Gd}|} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} p_x > 0 \\ p_y < 0 \end{array} \quad (94)$$

beziehungsweise

$$t_{g_{min}} = \frac{|p_x|}{|\sigma_{Gd}|} + \frac{p_y}{\sigma_{Gz}} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} p_x < 0 \\ p_y > 0 \end{array} \quad (95)$$

für den Fall  $\beta_1 = 0^\circ$  und  $\beta_2 = 90^\circ$ .





Flußdiagramm IV: Flußdiagramm zur Darstellung des Berechnungsweges bei einer Bauteilbemessung nach der Netztheorie

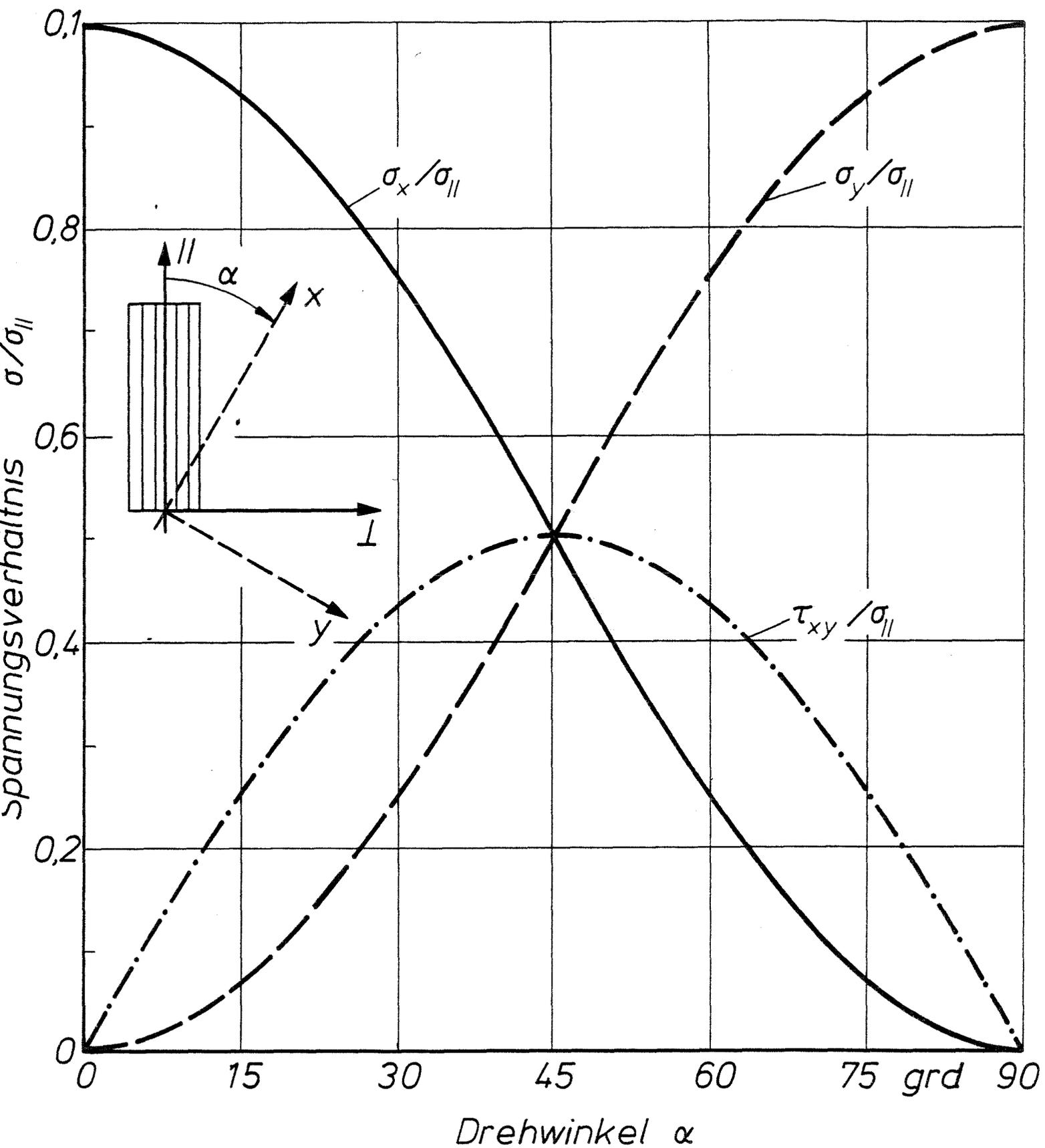


Bild 66: Spannungsverhältnisse als Funktion des Drehwinkels nach Netztheorie

5.4.            Nomogramme zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln  
                  und Schubmoduln einiger charakteristischer GFK-  
                  Verbunde

---

Es sollen nun eine Reihe von Nomogrammen aufgeführt werden, die es gestatten, die Schubmoduln und die Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung von verschiedenen typischen Laminataufbauten aus den Materialkennwerten von Harz und Glas zu ermitteln. Die Nomogramme basieren auf der Kontinuumstheorie, wobei zur Berechnung von  $E_{\perp}$  und  $G_{\#}$  die Lösungsansätze nach Förster (vgl. Gl. (49) und (53)) angewandt werden.

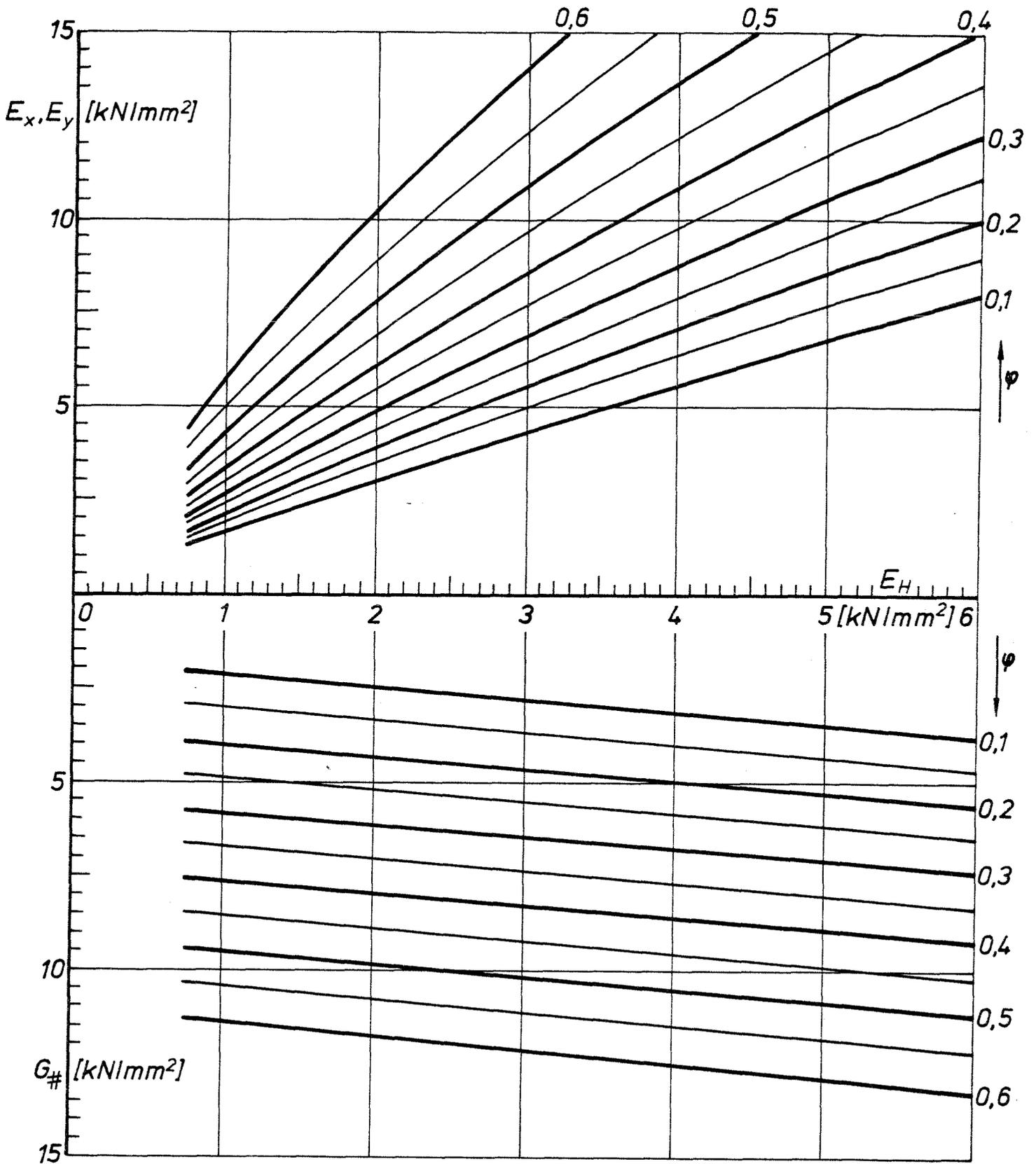


Bild 67: Nomogramm zur Ermittlung der Verbundelastizitätsmoduln und des Schubmoduls eines Verbundes ( $\pm 45^\circ, \mp 45^\circ$ )<sub>s</sub>

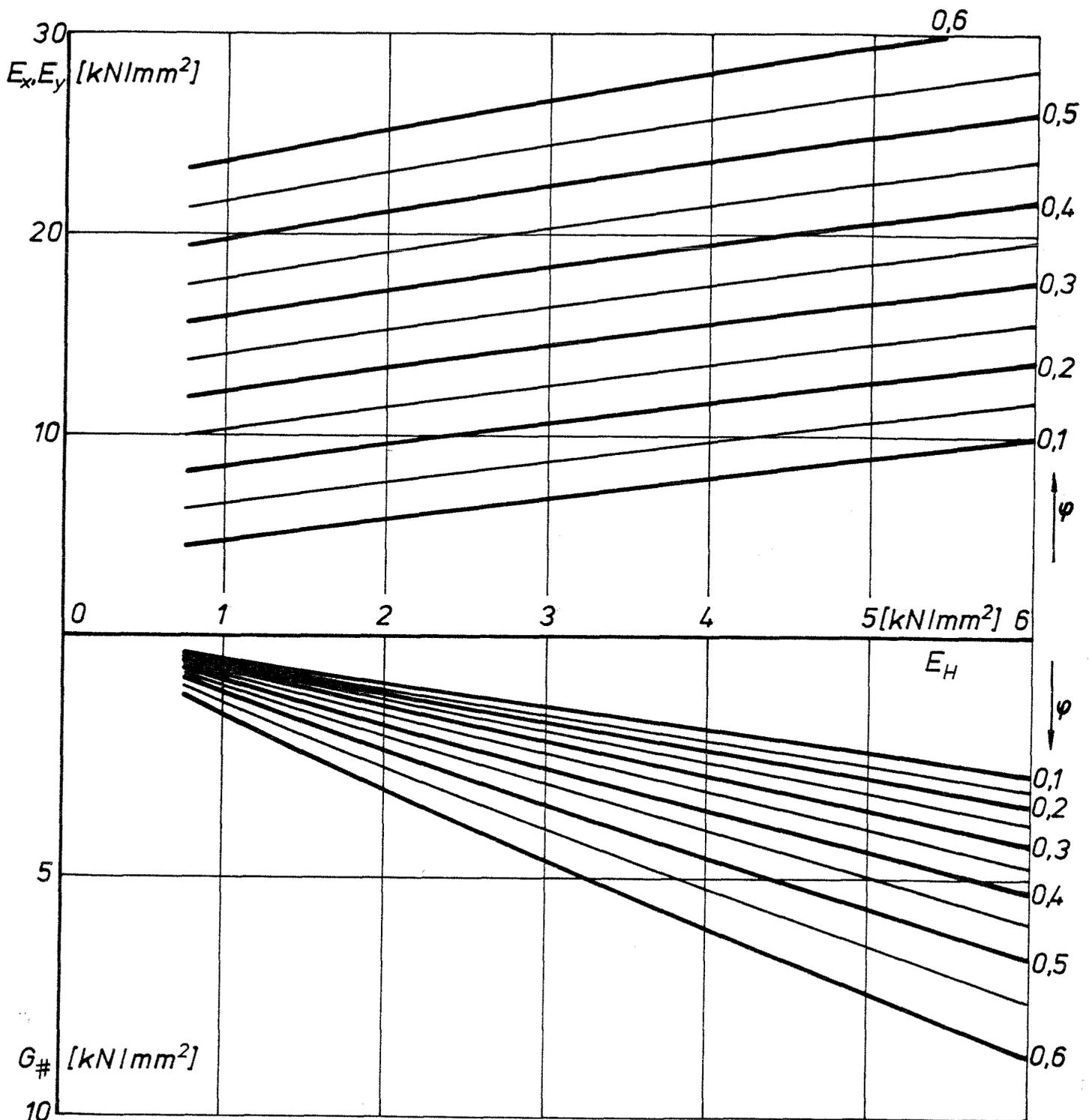


Bild 68: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitäts- und Schubmoduln in den Verstärkungsrichtungen eines  $(1 : 1)_s$ -Verbundes

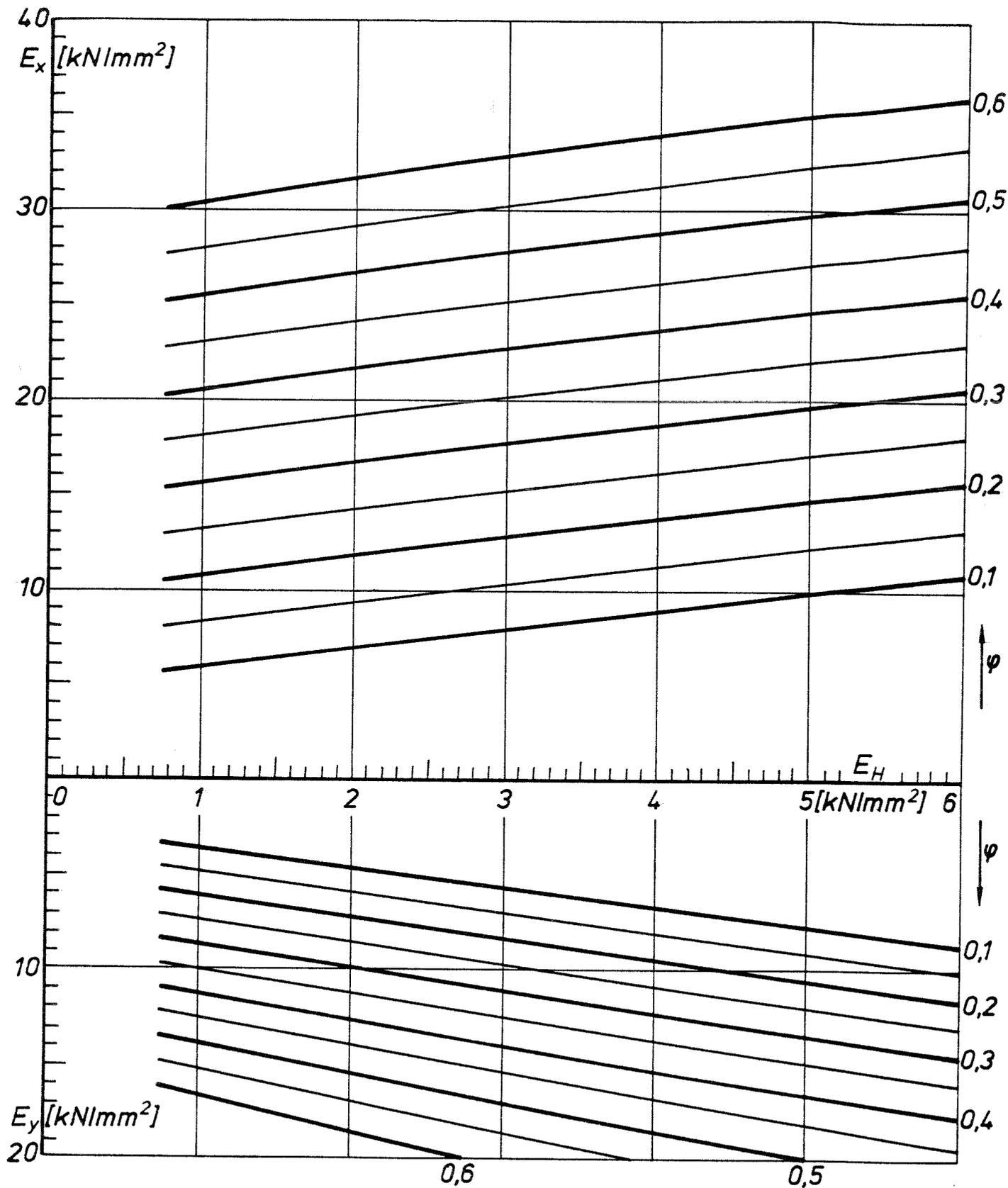


Bild 69: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(2 : 1)_s$ -Verbundes

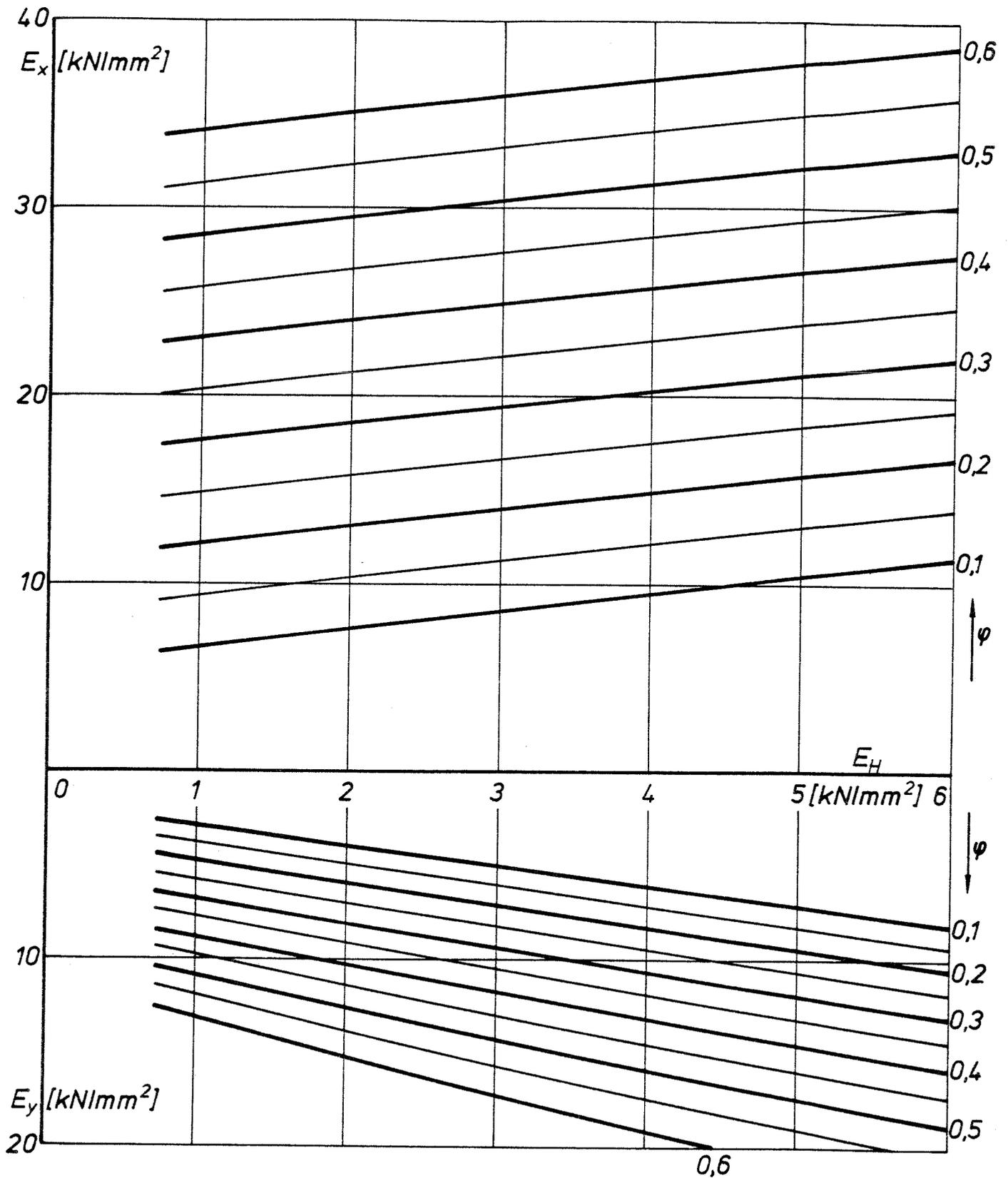


Bild 70: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(3 : 1)_s$ -Verbundes

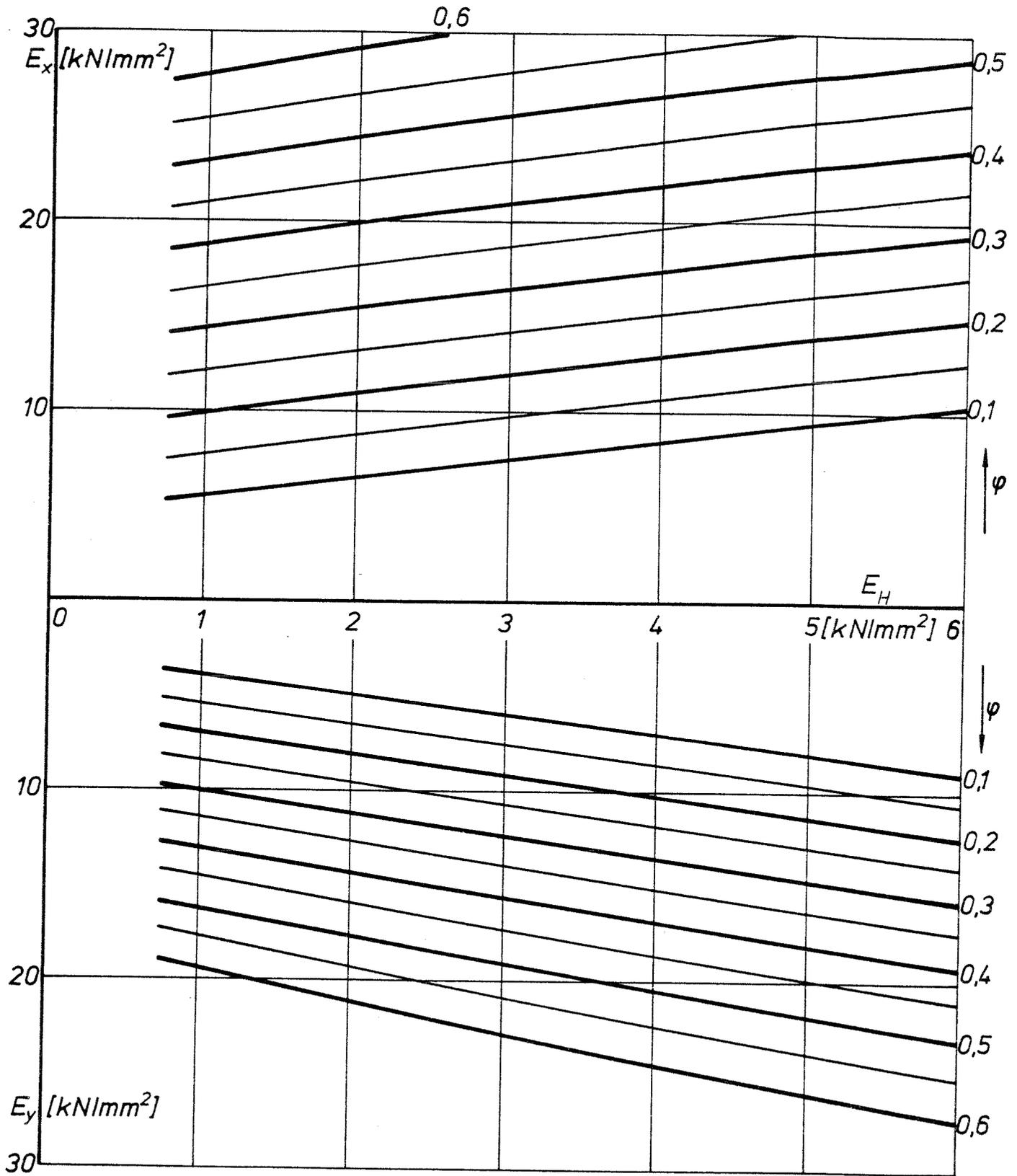


Bild 71: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines (3 : 2)<sub>s</sub>-Verbundes

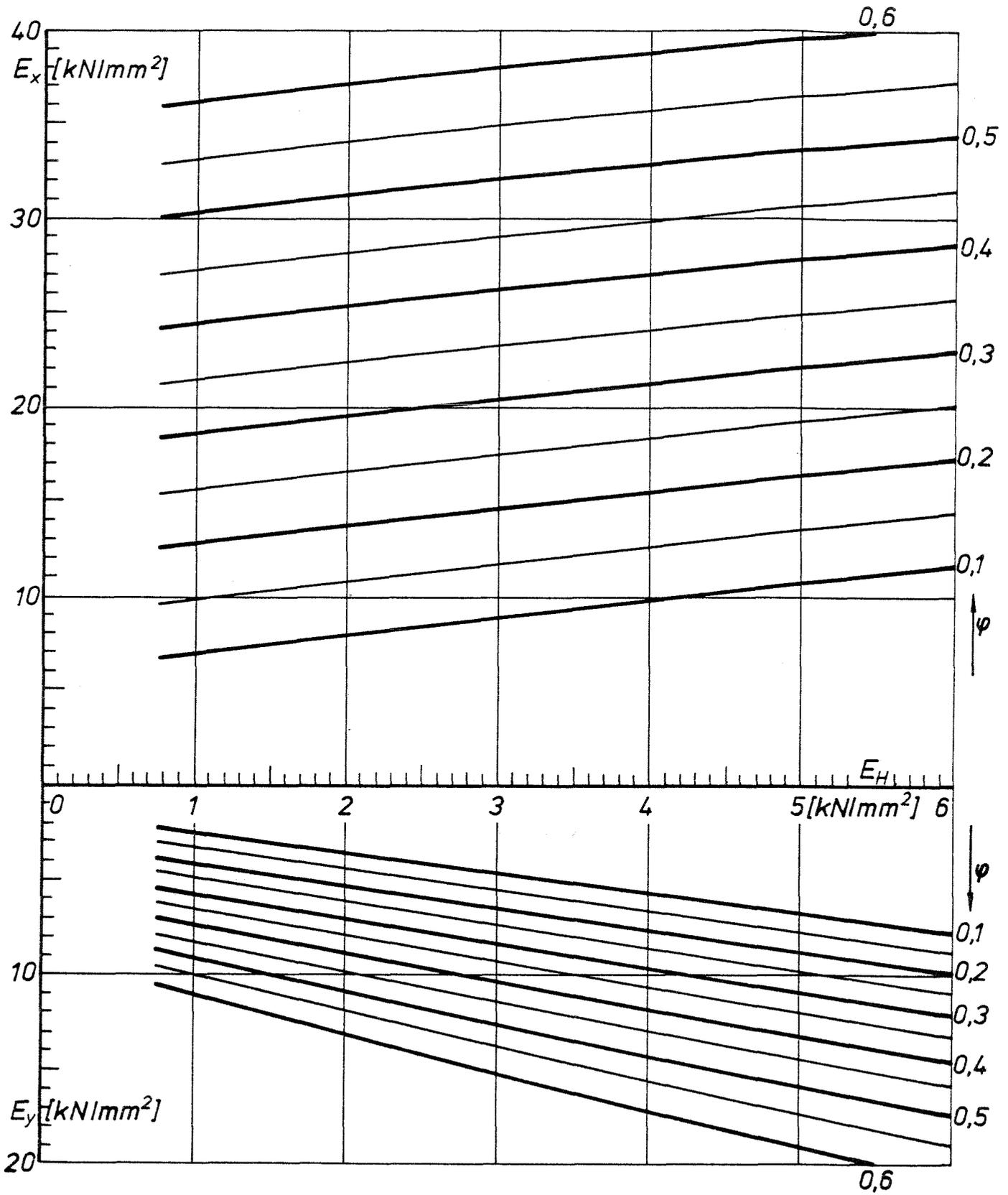


Bild 72: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(4 : 1)_s$ -Verbundes

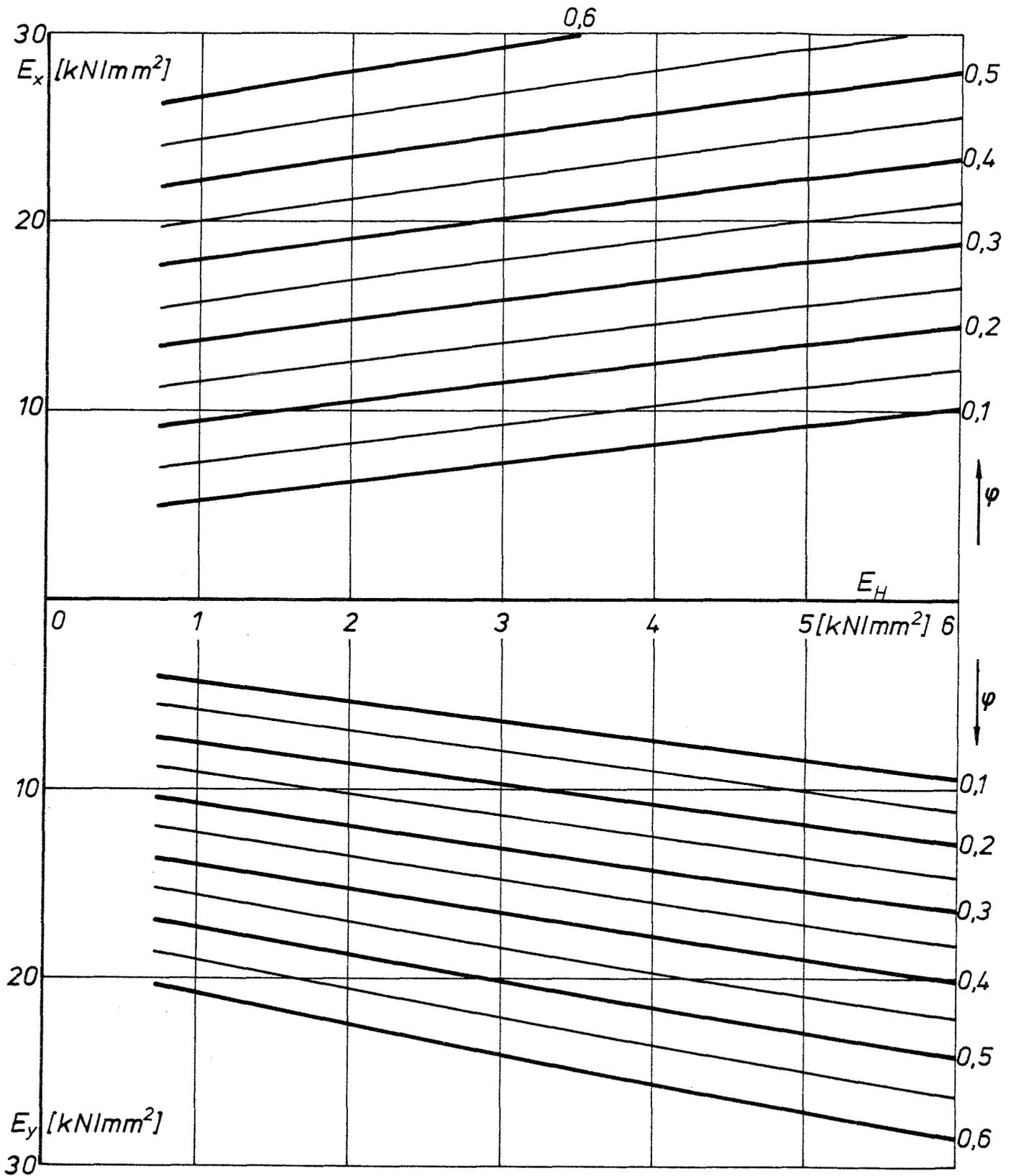


Bild 73: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(4 : 3)_s$ -Verbundes

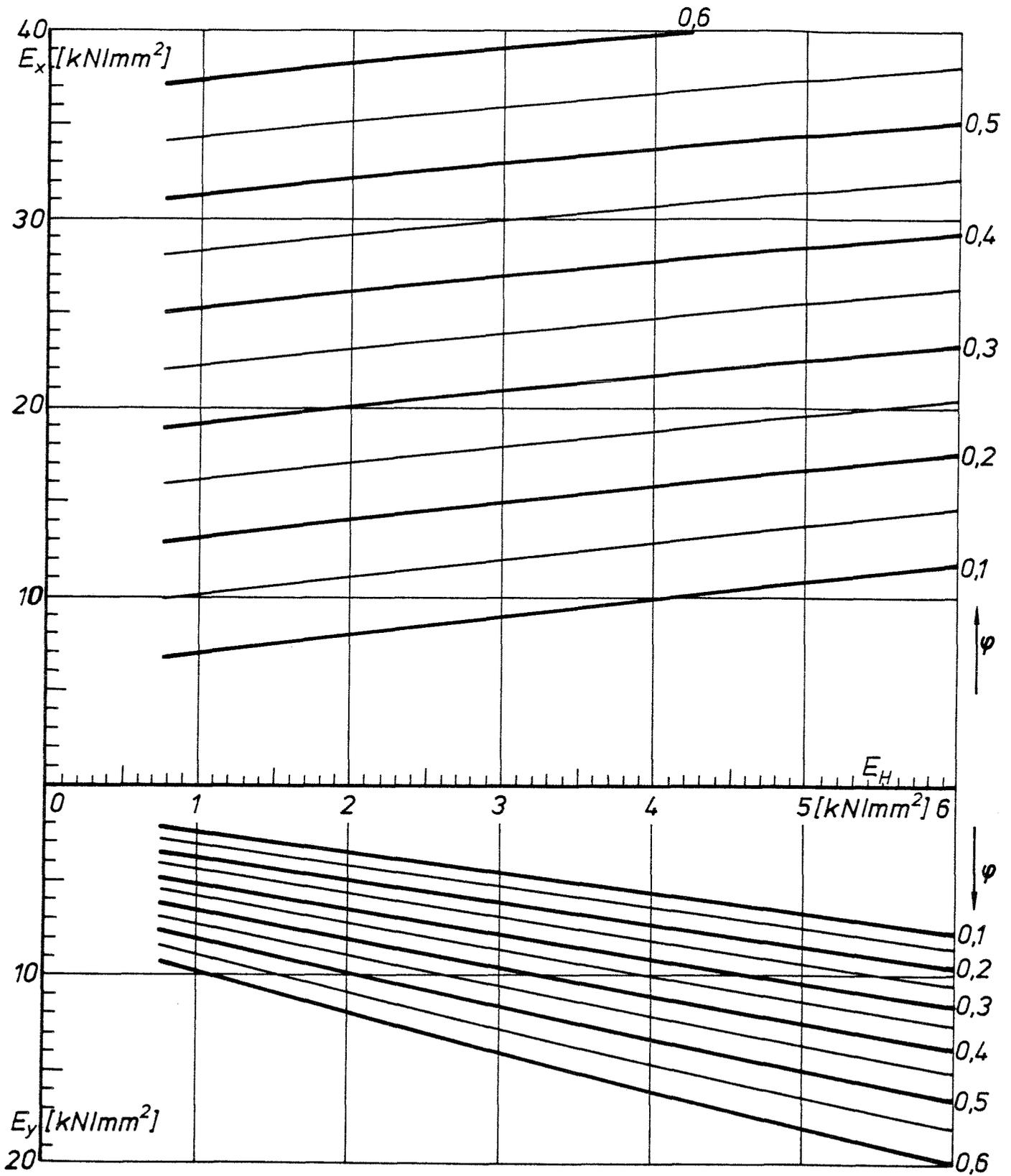


Bild 74: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines (5 : 1)<sub>s</sub>-Verbundes

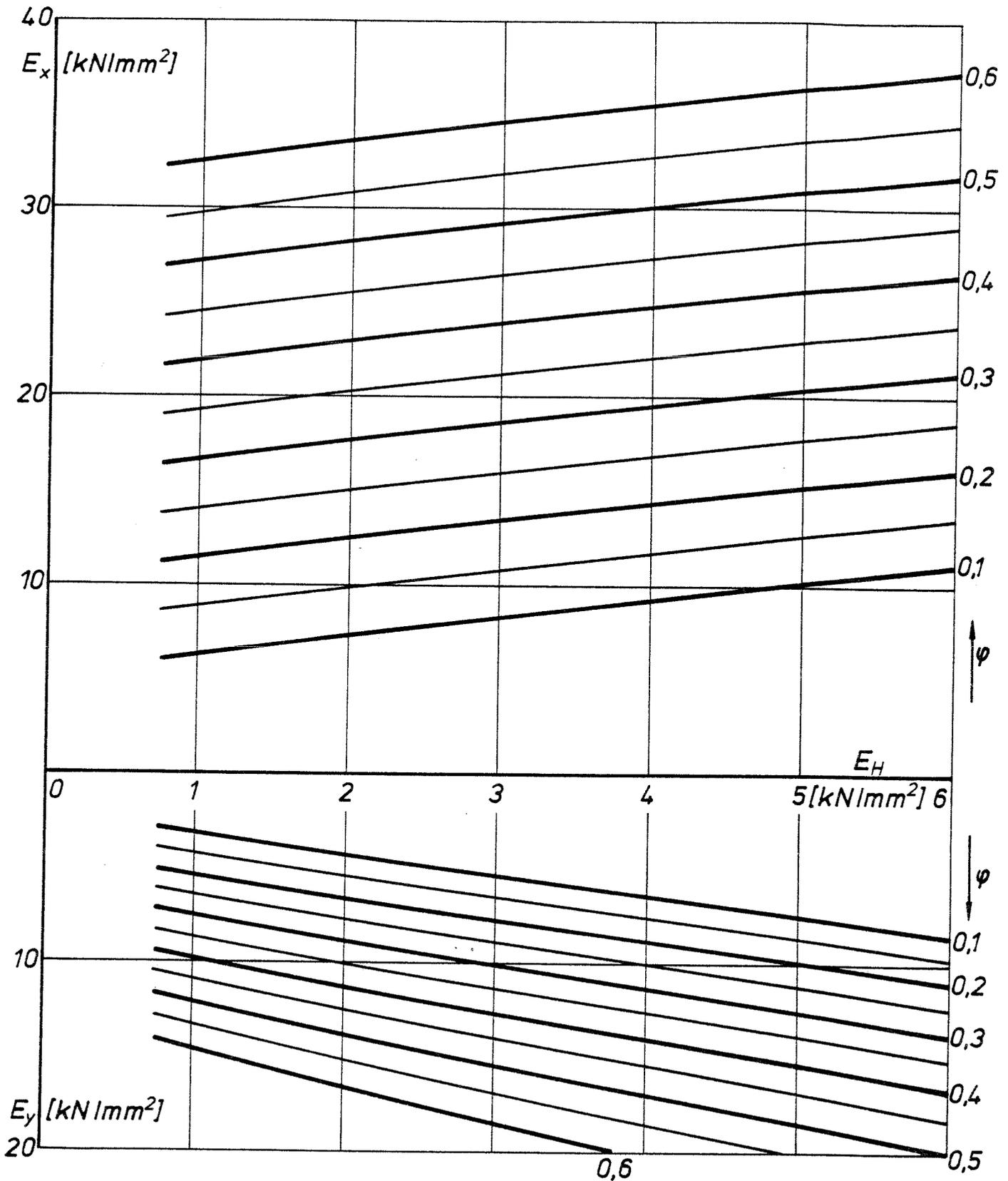


Bild 75: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(5 : 2)_s$ -Verbundes

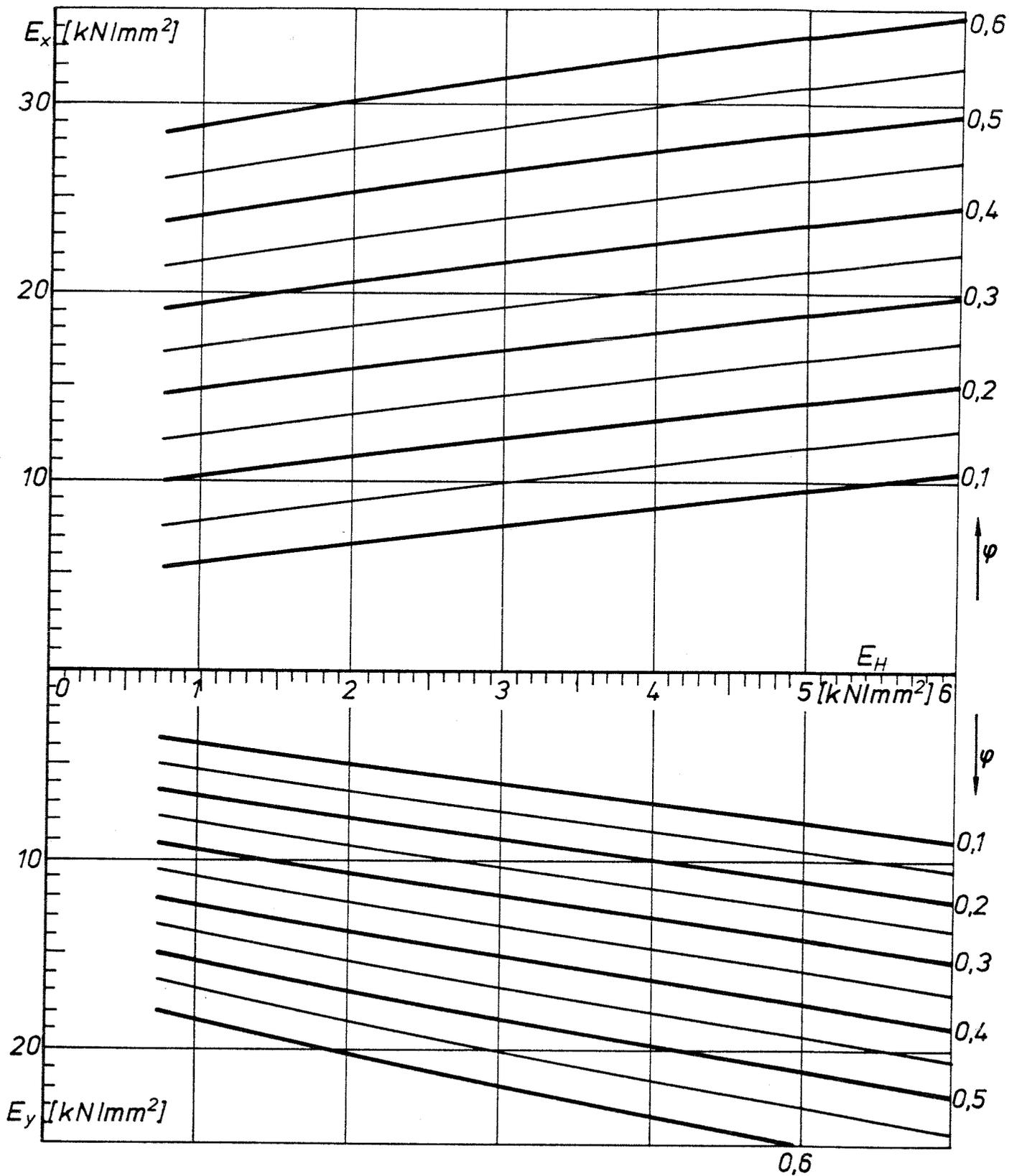


Bild 76: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(5 : 3)_s$ -Verbundes

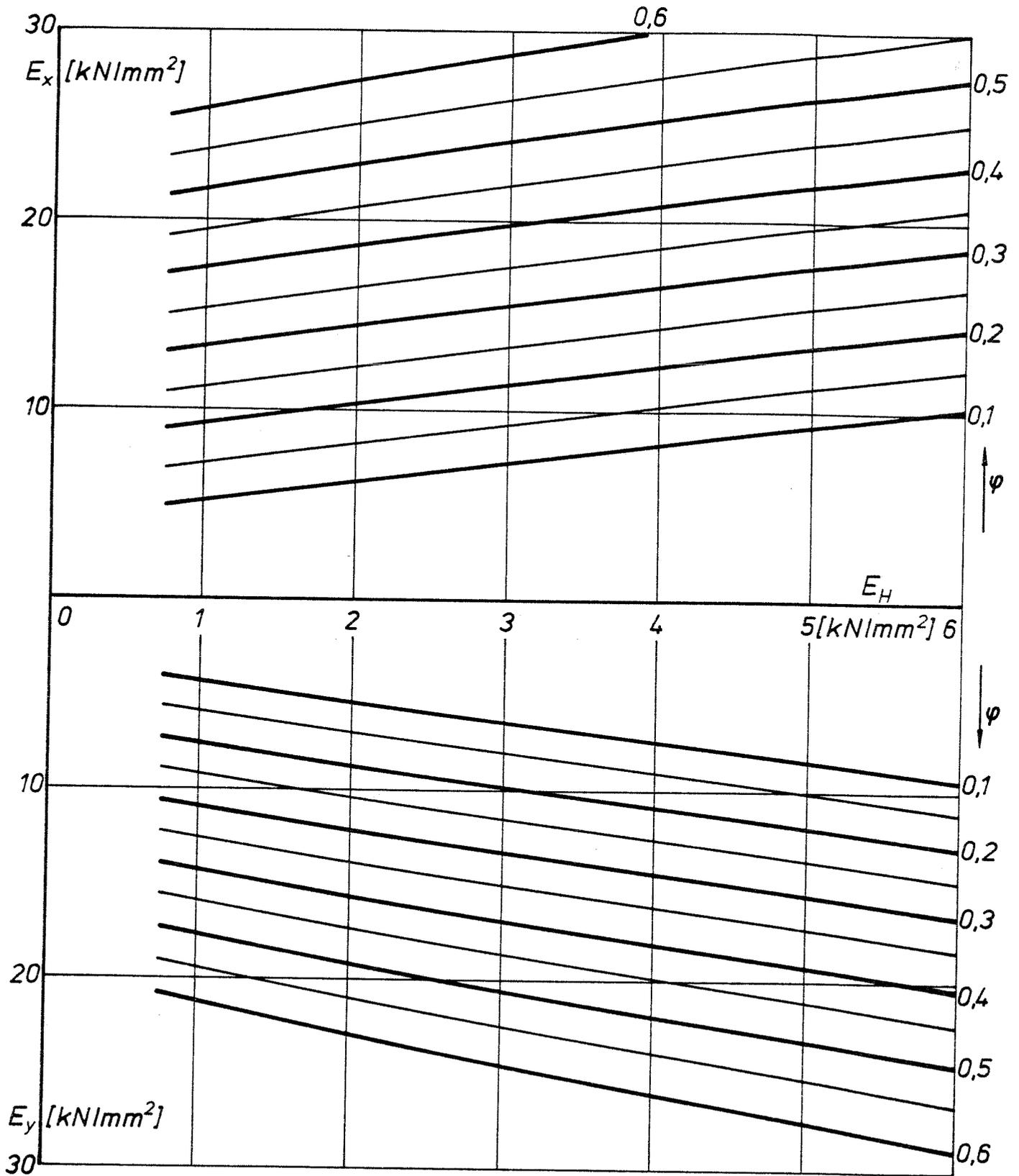


Bild 77: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines (5 : 4)<sub>s</sub>-Verbundes

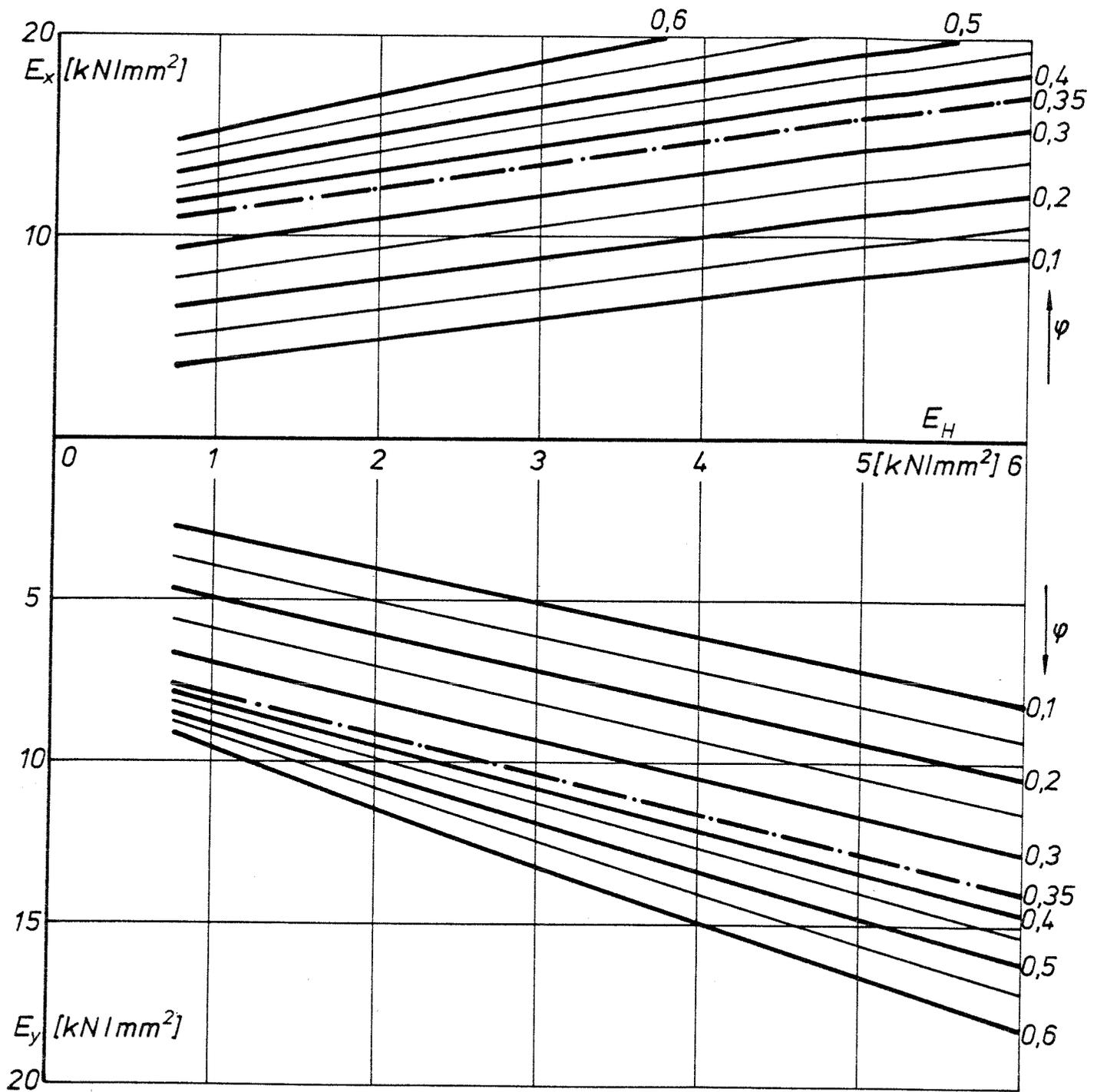


Bild 78: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(MOM \pm 45 M)_s$ -Verbundes

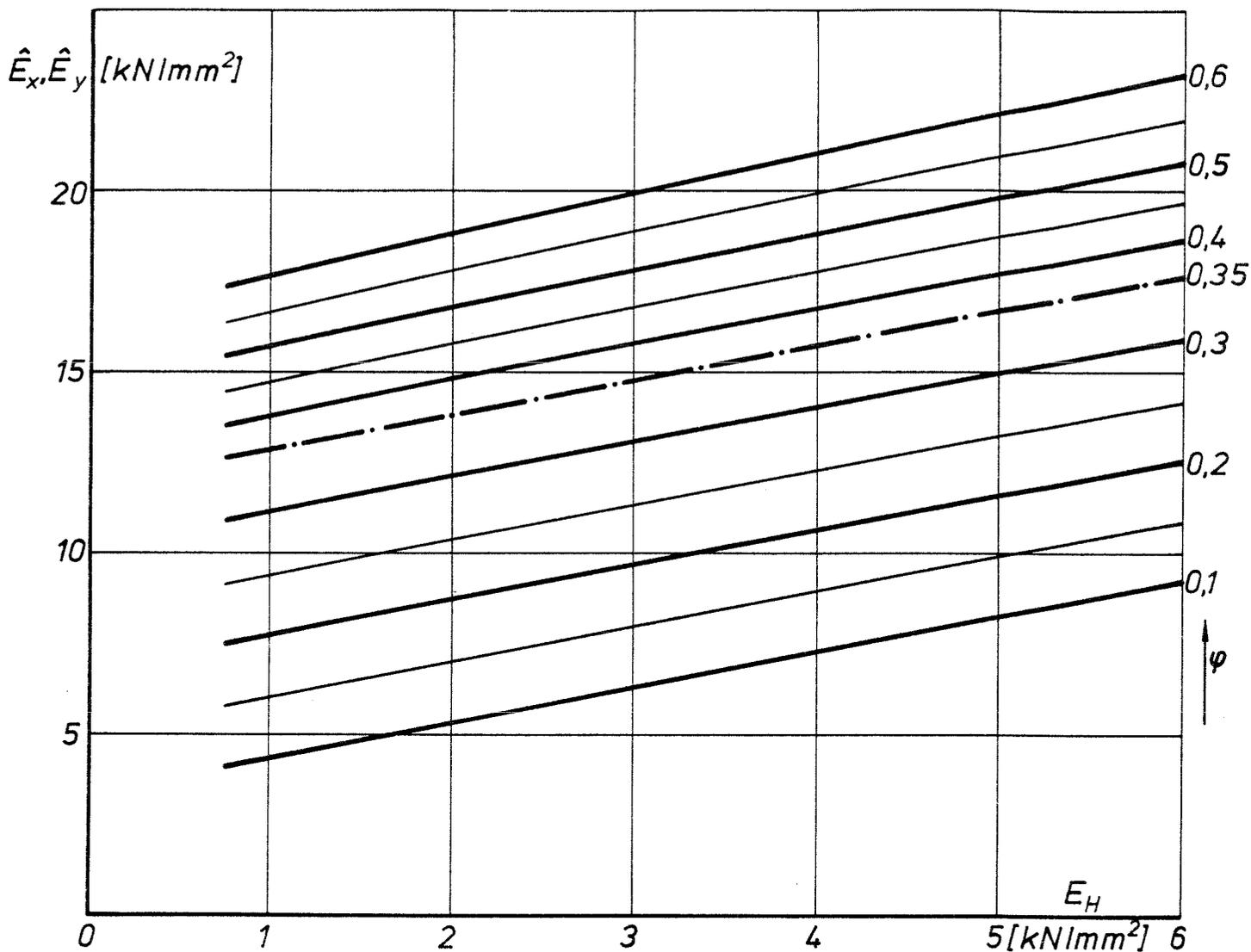


Bild 79: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines  $(MOM\ 90)_s$ -Verbundes

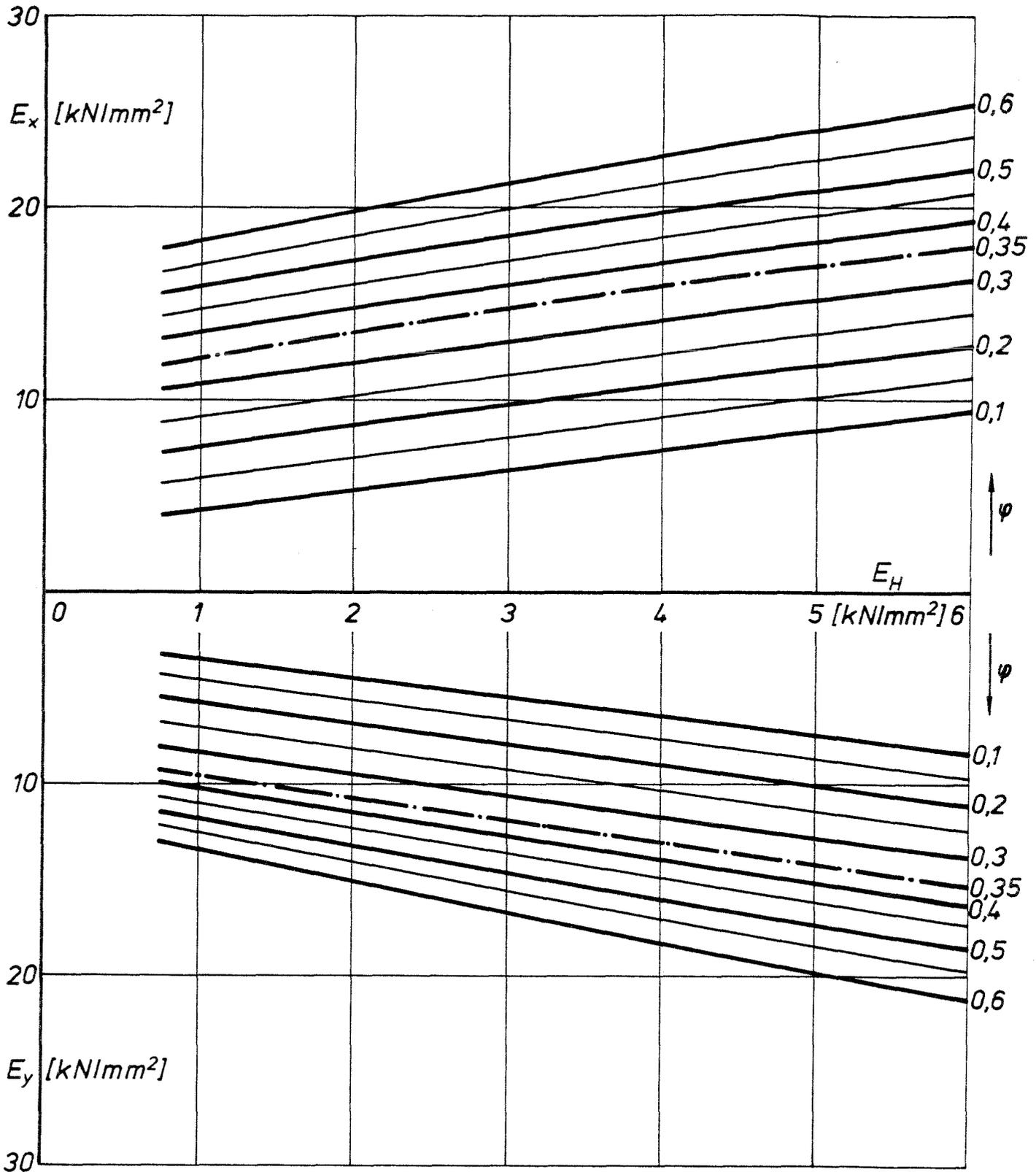


Bild 80: Nomogramm zur Ermittlung der Elastizitätsmoduln in x- und y-Richtung eines (MOOM  $\pm$  45 M 90)<sub>s</sub>-Verbundes

5.5. Nomogramme zur Abschätzung der Bruchfestigkeiten  
einiger charakteristischer GFK-Verbunde

In den folgenden Nomogrammen sind die Festigkeiten unterschiedlich aufgebauter UD- sowie Mischlamine in Abhängigkeit vom Glasvolumenanteil dargestellt. Dabei wird für die Festigkeit der UD-Schichten die Netztheorie zugrundegelegt. Die Festigkeiten der Mattenschichten richten sich nach dem Entwurf zur DIN-Norm 00.18820. Sie sind zur Abschätzung geeignet. Bei Glasgehalten  $\varphi_{UD} > 0,35$  wird der Glasgehalt der Mattenschichten bei Mischlaminaten konstant mit  $\varphi_M = 0,35$  angesetzt.

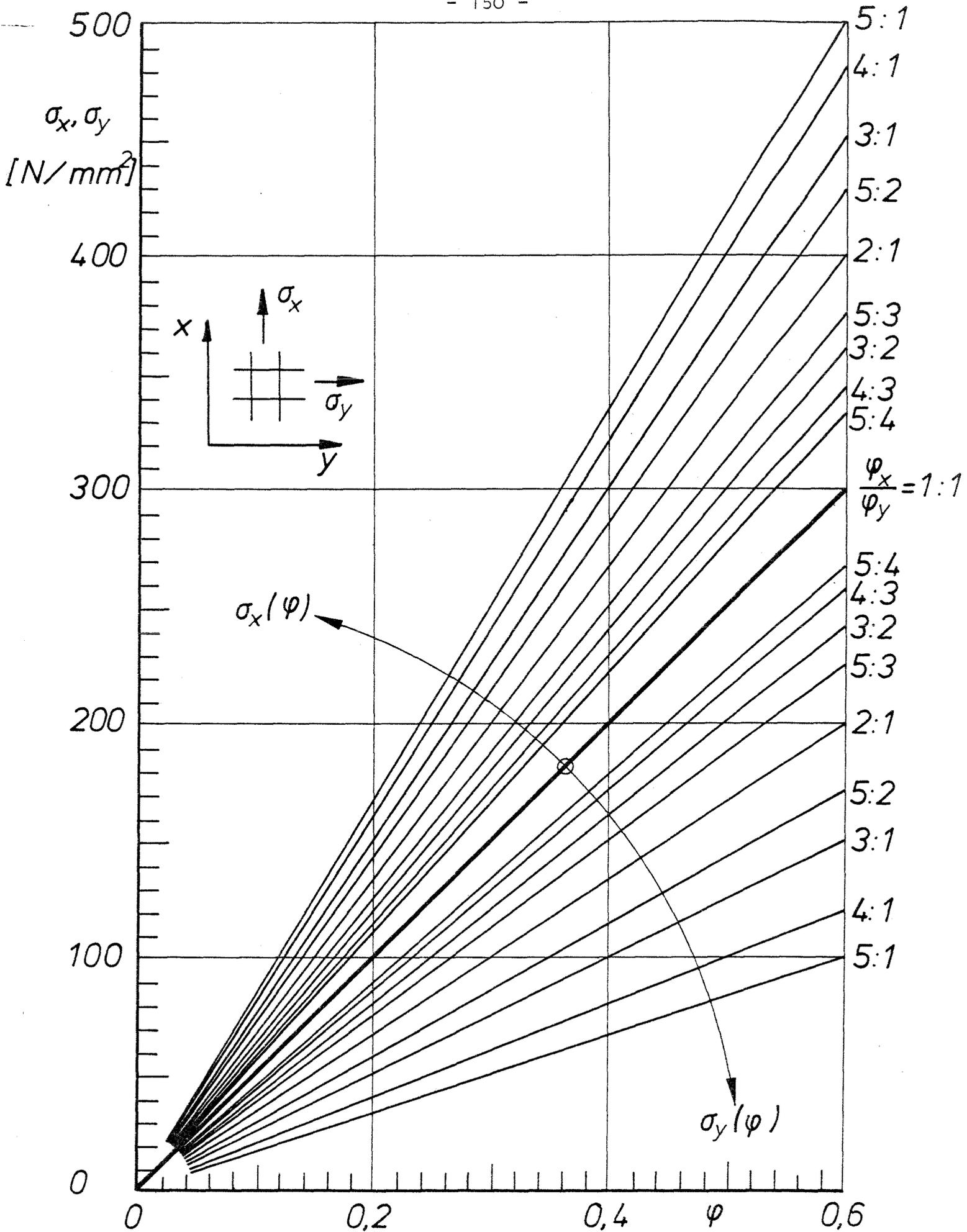


Bild 81: Nomogramm zur Ermittlung der Festigkeiten in x- und y-Richtung für verschiedene Verbunde

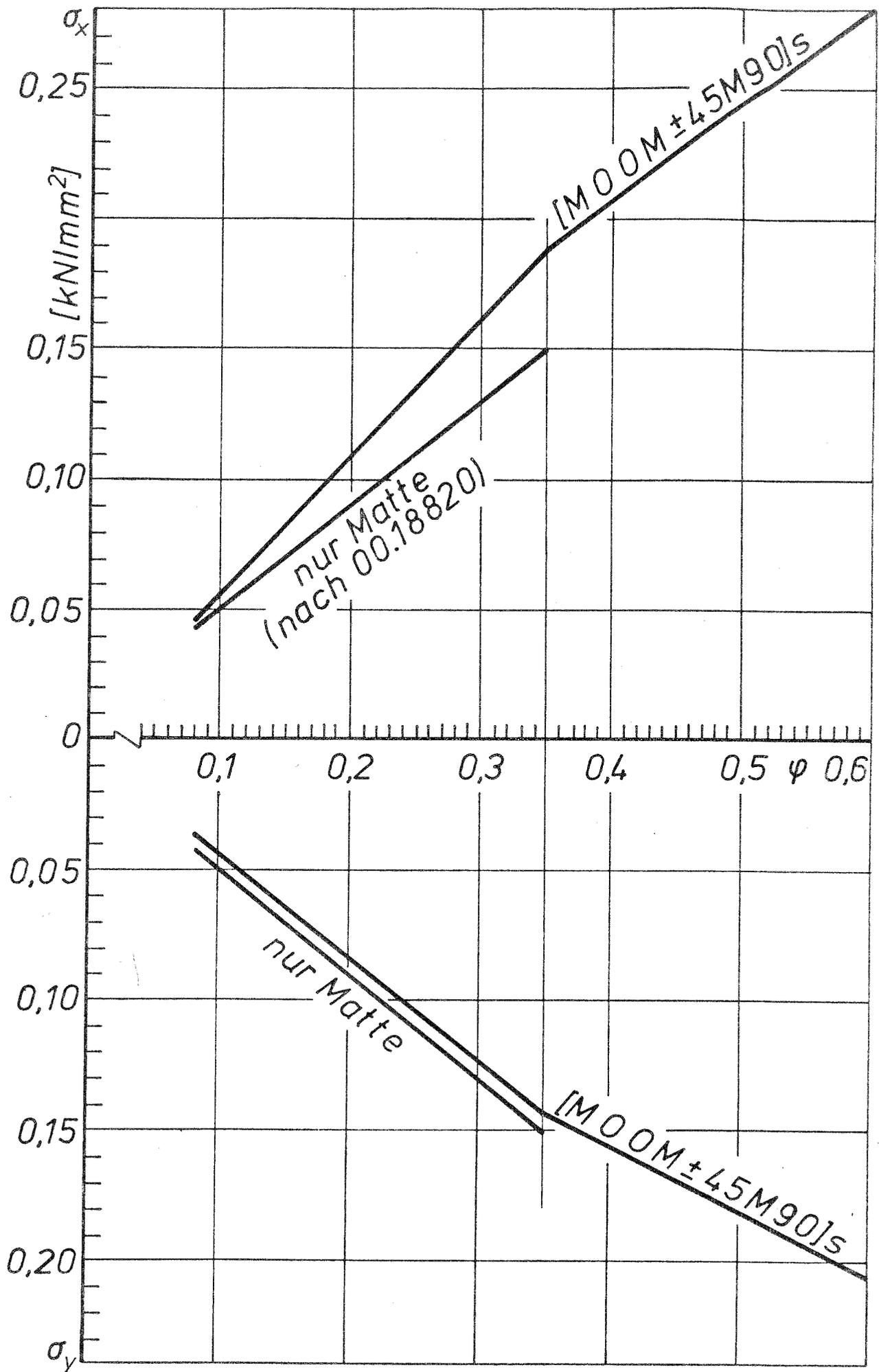


Bild 82: Nomogramm zur Ermittlung der Festigkeiten in x- und y-Richtung für Verstärkung mit reiner Matte und (MOOM ± 45 M 90)<sub>s</sub>

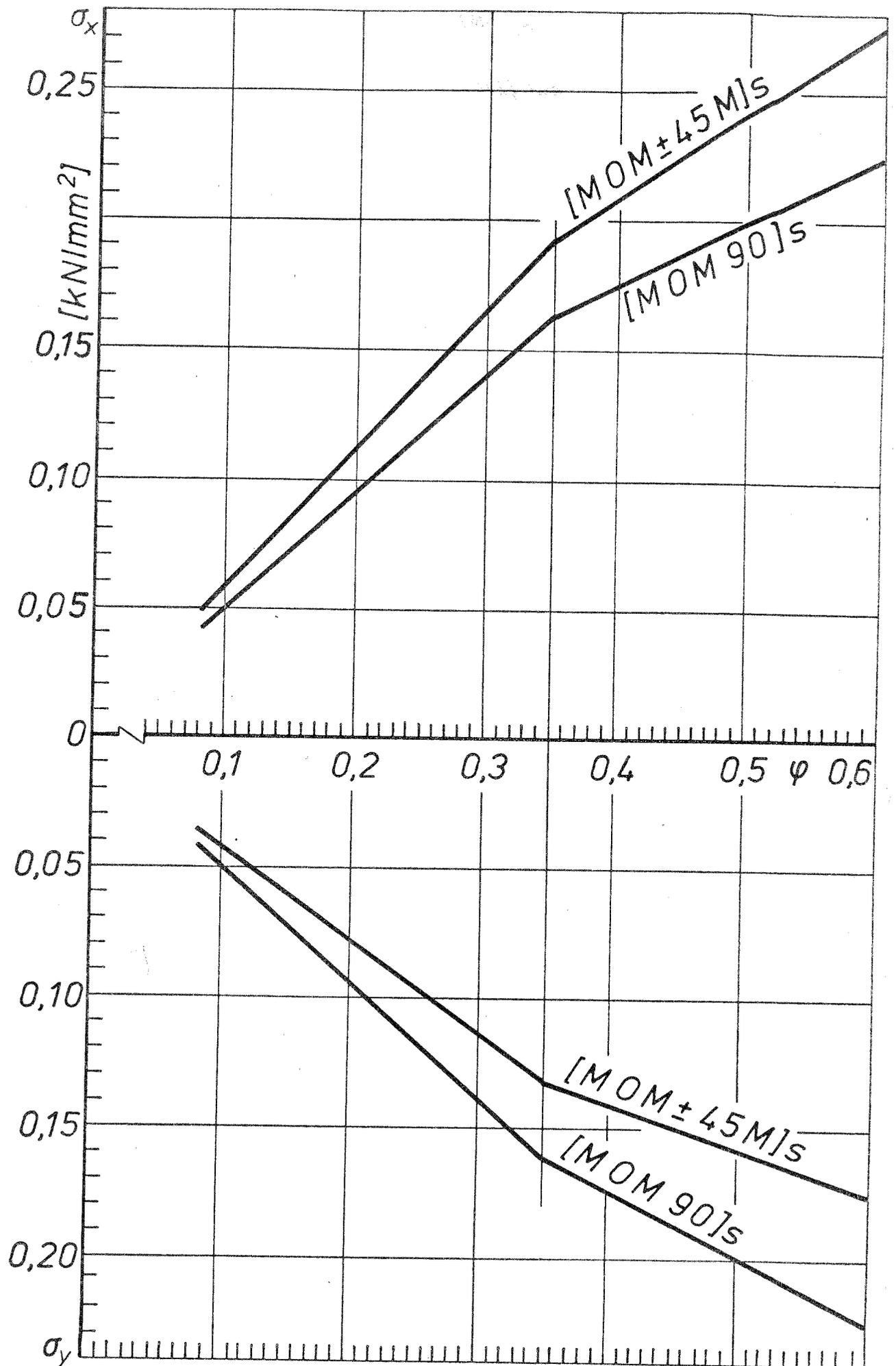


Bild 83: Nomogramm zur Ermittlung der Festigkeiten in x- und y-Richtungen mit  $(MOM 90)_s$  und  $(MOM \pm 45 M)_s$

## 5.6. Versagensmechanismus und Versagenshypothesen

### 5.6.1. Der Versagensmechanismus

Bei Verbundwerkstoffen wird oft schon weit unterhalb der Bruchgrenzen ein Teilversagen in Form von örtlicher Rißbildung beobachtet. Diese tritt besonders früh bei Beanspruchungen senkrecht zur Ausrichtung der Fasern auf. Folgende Gründe sind im wesentlichen maßgebend für das Auftreten der Risse:

- die Dehnungsvergrößerung der "weichen" Matrix in den Bereichen zwischen den steifen Fasern bei Beanspruchung senkrecht zum Faserverlauf
- die nicht optimale Haftung zwischen Faser und Matrix
- die Querkontraktionsbehinderung der Matrix
- die Kerbwirkung der eingelagerten Fasern auf die Matrix.

Alle vier genannten Gründe treten zusammen auf und können sich je nach Faser/Matrixkombination und nach Füllstoffanteil unterschiedlich stark auswirken.

Sinngemäß gelten diese Aussagen nicht nur für faserverstärkte Verbundstoffe; sie sind analog auch auf Füllstoffe in der Matrix übertragbar. Vermeiden läßt sich diese Rißbildung, die oft weit unterhalb der Bruchgrenze des Verbundes liegt, praktisch nur, wenn man nur entsprechend kleinere Beanspruchungen und damit Verformungen zuläßt. Man kann zudem versuchen, durch geeignete Wahl der Faserrichtungen zu den äußeren Lastrichtungen den Einfluß der Rißbildung auf das Bauteilverhalten so gering wie möglich zu halten. Wenn Risse zu erwarten sind, ist mit der Netztheorie zu dimensionieren. Können aber die äußeren Belastungen nicht allein mit Faserkräften ins Gleichgewicht gebracht werden, muß also das Harz wesentliche Belastungen übernehmen - dies sind vor allem Normalbeanspruchungen senkrecht und Schubbeanspruchungen parallel und senkrecht zur Faser -, so führt fortgeschrittene Rißbildung zum Versagen des Bauteils. In diesen Fällen ist also das Vermeiden der Rißbildung als Dimensionierungsziel anzustreben.

Die Gefährlichkeit der Ribbildung in Bezug auf das Tragverhalten, insbesondere auch bei Medienangriff, läßt sich dadurch vermindern, daß man versucht, die Risse möglichst klein zu halten. So wird z. B. vorgeschlagen, einen häufigen Wechsel in der Folge der Schichtrichtungen vorzunehmen, weil die jeweils um  $90^\circ$  gegenüber der gerissenen Schicht gedrehte Faserschicht als "Ribstopper" wirkt, bzw. man baut eigens "Ribstopperschichten" in Form einer Mattenlaminatschicht.

#### 5.6.2. Versagenshypothesen

Wie die vorstehenden Ausführungen gezeigt haben, ist das Elastizitätsverhalten von Verbundwerkstoffen auch in Abhängigkeit von Zeit und Temperatur mit ingenieurmäßiger Genauigkeitsforderung weitgehend rechnerisch abschätzbar.

Komplexer und auch wesentlich weniger erforscht stellt sich dagegen das Bruchverhalten dar, da hier neben der Zeit und Temperatur insbesondere auch nichtlineare Zusammenhänge zwischen Beanspruchung und Verformung zu berücksichtigen sind und darüber hinaus bei den Mehrstoffsystemen unterschiedliche Versagensmöglichkeiten in Form von Faserbruch, Matrixbruch oder Grenzflächenbruch wie deren Kombinationen gegeben sind.

Die Festigkeit mehrschichtiger Faserverbundwerkstoffe muß notwendigerweise auf das Festigkeitsverhalten der Einzelschichten zurückgeführt werden, da ihr Verhalten wesentlich einfacher zu erfassen ist, als das des gesamten Verbundes. Man versucht das Bruchverhalten der (orthotropen) Einzelschichten zu bestimmen und dann mit Hilfe analytischer Methoden diese Ergebnisse auf den Gesamtverbund zu übertragen.

Vor jeder Diskussion von Versagenskörpern oder Bruchkriterien muß man sich den grundsätzlichen Unterschied zwischen Versagenskörpern isotroper und nichtisotroper Werkstoffe im dreidimensionalen Spannungsraum vergegenwärtigen. Für einen isotropen Werkstoff läßt sich jeder beliebige zweiachsige Spannungszustand zurückführen auf zwei Hauptnormalspannungen, d. h. die Bruch-

kurve ist darstellbar als eine zweidimensionale Kombination mit den Hauptspannungen als Achsensystem (Mohr'scher Spannungskreis). Betrachtet man dagegen das Bruchverhalten einer orthotropen Schicht, so müssen die äußeren Spannungen zunächst auf die Hauptachsen dieser Schicht bezogen werden, so daß auch bei zweiachsigen Spannungszuständen am Laminat für die Einzelschicht durchaus ein Spannungstensor mit drei Komponenten entstehen kann. Das Bruchverhalten wird dann durch einen Körper mit den Bezugsachsen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\tau_{12}$  dreidimensional beschrieben. Es sind verschiedene Versagenshypothesen im Laufe der Zeit auf anisotrope GFK angewendet worden. Nach Ashton, Halpin und Petit hat folgendes Kriterium die größte Nutzenanwendung ergeben:

Hill-Kriterium, dem die Gestaltsänderungsenergiehypothese zugrunde liegt, in der Form

$$\left(\frac{\sigma_{//}}{\sigma_{//B}}\right)^2 - \frac{\sigma_{//} \sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp B}^2} + \left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1 \quad (96)$$

(Index B bedeutet Bruchkennwert der Einzelschicht)

Weitere Festigkeitshypothesen sind

a) von Goldenblattnopor

$$\frac{(\sigma_{\perp} - \sigma_z - \sigma_d)^2}{\sigma_z \cdot \sigma_d + \left(\frac{\sigma_z + \sigma_d}{2}\right)^2} + \frac{\sigma_{\perp}^2}{\sigma_s^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_z - \sigma_d}{4\sigma_z \sigma_d}\right)^2\right]} \leq 1 \quad (97)$$

$\sigma_z, \sigma_d, \sigma_s$ : Zug, Druck, Schubfestigkeit

b) das Kriterium für Faser-Bruch von Puck

$$\frac{\sigma_{//}}{\sigma_{//B}} = \pm 1 \quad (98)$$

c) das Kriterium für Zwischenfaserbruch (Puck)

$$\left(\frac{\sigma_{//}}{\sigma_{//B}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\perp B}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#B}}\right)^2 = 1 \quad (99)$$

d) das Festigkeitskriterium von Tsai

$$\left(\frac{\sigma_L}{F_L}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_L \sigma_T}{F_L^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{F_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{LT}}{F_{LT}}\right)^2 = 1 \quad (100)$$

e)

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sigma_T}{\sigma_L}\right) < \tan^{-1}\left(\frac{F_T}{F_L}\right)$$

und gleichzeitig:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sigma_{LT}}{\sigma_L}\right) < \tan^{-1}\left(\frac{F_{LT}}{F_L}\right)$$

(101)

Nahezu allen theoretischen Betrachtungen des Bruchverhaltens liegen die Gedanken einer schichtenweisen Bruchanalyse zugrunde, die aus folgenden Schritten besteht:

a) gedachte Zerlegung des Laminates in unidirektionale (orthotrope) Einzelschichten

b) Berechnung der Spannungen oder Verformungen aller Einzelschichten ( $\sigma_{//k}$ ,  $\sigma_{\perp k}$ ,  $\tau_{\#k}$  bzw.  $\varepsilon_{//k}$ ,  $\varepsilon_{\perp k}$ ,  $\gamma_{\#k}$ ) mit Hilfe

der Kontinuumstheorie

c) Vergleich der errechneten Spannungen oder Verformungen der Einzelschichten mit einem Versagenskriterium für die Einzelschichten

- d) Vernachlässigung der Steifigkeitsbeiträge gebrochener Schichten zur Verbundsteifigkeit und Berechnung der durch Lastumlagerung veränderten Beanspruchungen (Spannungen bzw. Verformungen) der Einzelschichten
- e) Wiederholung der Schritte b) bis d) bis zum rechnerischen Totalbruch des Laminates.

Ausgehend von der Hill'schen Bruchhypothese (Gl. 96) sind weitere und verfeinerte Bruchbedingungen erarbeitet worden, die z. B. zusätzlich das Dehnverhalten der Matrix berücksichtigen und unterschiedliche Bruchspannungen der Einzelschichten bei Zug- oder Druckbeanspruchung einführen. Puck und Schneider geben endgültig folgende Beanspruchungskombination als Bruchkriterium an:

$$\left( \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II_{HB}}} \right)^2 - \frac{\sigma_I^2}{\sigma_{I_{zB}} \sigma_{I_{dB}}} + \sigma_I \left( \frac{\sigma_{I_{zB}} \sigma_{I_{dB}}}{\sigma_{I_{zB}} \sigma_{I_{dB}}} \right) + \left( \frac{\tau_{\#}}{\tau_{\#_B}} \right)^2 = 1 \quad (102)$$

Diese Hypothese wurde in Experimenten an GFK mit einer EP-Harzmatrix weitgehend bestätigt.

Dennoch erscheint die Möglichkeit der Bruchspannungsberechnung noch außerordentlich problematisch, da bislang nur wenige Resultate für langzeitige Beanspruchungen oder in Abhängigkeit von der Beanspruchungstemperatur vorliegen. Unter diesen Gesichtspunkten sind zudem jeweils Änderungen des Bruchvorganges selbst (Faser/Matrix/Grenzfläche) zu erwarten, so daß in absehbarer Zeit auf Experimente bei der Beurteilung des Bruchverhaltens kaum verzichtet werden kann. Dies gilt insbesondere auch im Hinblick auf Fertigungsunregelmäßigkeiten, die sich im Bruchverhalten - vor allem auf  $\sigma_{I_B}$  und  $\tau_{\#_B}$  - erfahrungsgemäß erheblich deutlicher niederschlagen, als bei der Bestimmung der Elastizitätskenngrößen.

### 5.7. Dimensionierung gegen Rißbildung bei Kontinuumstheorie

Da die Kontinuumstheorie genaugenommen nur gilt, solange keine Rißbildung im Laminat auftritt, ist es einfacher, nicht gegen Bruch, sondern mit der Kontinuumstheorie gegen die Grenze ihres Gültigkeitsbereichs zu rechnen, da die Rißbildungsgrenzen sehr genau bekannt sind.

Es gilt für jede Schicht k

$$\epsilon_{//k} < 1 \%$$

$$\epsilon_{\perp k} < 0,1 \%$$

$$\epsilon_{Matte} < 0,5 \%$$

Sind jedoch die Dehnungen einzelner Schichten größer, so daß mit Rissen zu rechnen ist, muß mit der Netztheorie die Bruchfestigkeit überprüft werden.

## 5.8. Thermisches Ausdehnungsverhalten und thermische Spannungen

---

Bei Verbundwerkstoffen, deren Komponenten unterschiedliche Wärmeausdehnungskoeffizienten besitzen, entstehen bei Temperaturänderungen innere thermische Spannungen, die zudem bei ausgerichteten Einzelkomponenten noch richtungsabhängig sind. Sie überlagern sich den mechanischen Spannungen.

Da auch thermische Spannungen relaxieren - und zwar um so deutlicher, je höher die Umgebungstemperatur ist - sind sie besonders zu beachten bei häufigen Temperaturwechseln (vor allem in der Abkühlungsphase) und bei der ersten Abkühlung nach der Fertigung (da bei vernetzenden Harzen auf Grund der exothermen Reaktion meist eine gegenüber der Umgebung erhöhte Baustofftemperatur auftritt). Wie weit daraus resultierende Beanspruchungen im Verbundwerkstoff relaxieren können, ist z. Z. noch nicht genau bekannt. Man tut deshalb gut daran, sie bei der Dimensionierung näherungsweise so zu berücksichtigen, als könne eine Relaxation nicht stattfinden. Man gelangt dann vielleicht zu einer nicht ganz optimalen Auslegung, erspart sich aber die Probleme einer nicht erwarteten Rißbildung.

Die richtungsabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten einer unidirektionalen Schicht sind deutlich vom Glasgehalt abhängig. Für die Wärmeausdehnungskoeffizienten in Faserrichtung ( $\alpha_{//}$ ) und senkrecht zur Faserrichtung ( $\alpha_{\perp}$ ) werden in der Literatur verschiedene Beziehungen angegeben:

$$\alpha_{//} = \alpha_F + \frac{\alpha_M - \alpha_F}{[\varphi/(1 - \varphi)] E_F/E_M + 1} \quad (\text{Schneider}) \quad (103)$$

$$\alpha_{//} = \frac{\varphi E_G \alpha_G + (1 - \varphi) E_H \alpha_H}{\varphi E_G + (1 - \varphi) E_H} \quad (\text{Shiratori}) \quad (104)$$

$$\alpha_{\perp} = \alpha_M - (\alpha_M - \alpha_F) \cdot \left( \frac{2(\nu_M^2 - \nu_M - 1) 1,1\varphi}{1,1\varphi(2\nu_M^2 + \nu_M - 1) - (1 + \nu_M)} - \frac{\nu_M E_F/E_M}{E_F/E_M + (1 - 1,1\varphi)/1,1\varphi} \right)$$

(Schneider) (105)

$$\alpha_{\perp} = \varphi \cdot (1 + \nu_G) \alpha_G + (1 - \varphi) \cdot (1 + \nu_H) \alpha_H - \alpha_H \cdot [\nu_G \varphi + (1 - \varphi) \nu_M]$$

(Shiratori) (106)

Eine andere Literaturstelle gibt den Wärmeausdehnungskoeffizienten als Funktion des Verstärkungswinkels einer UD-Schicht an.

$$\alpha(\beta) = \alpha_{\parallel} \cos^2 \beta + \alpha_{\perp} \sin^2 \beta \quad (107)$$

(Ishikawa, Koyama, Kobayashi)

Eine analytische Herleitung des Wärmeausdehnungskoeffizienten für Mattenlaminare ist infolge der geometrischen Anordnung der Fasern außerordentlich kompliziert. Ausgehend von der Tatsache, daß der Traganteil der Fasern bei Mattenlaminaten in jeder beliebigen Richtung der Ebene gleich 1/2 ist, kann man wie bei der Berechnung des Elastizitätsmoduls die Mattenschicht sich aus zwei um 90° verdrehte UD-Schichten gleicher Dicke zusammengesetzt denken. Analog dem Elastizitätsmodul erhält man mit dieser Überlegung den Wärmeausdehnungskoeffizienten der Mattenschicht zu:

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{\parallel} + \alpha_{\perp}}{2} \quad (108)$$

Im für Mattenlaminare relevanten Glasvolumenanteilsbereich zwischen 0,1 und 0,35 kann man mit folgenden Näherungsformeln rechnen:

$$(1) \quad \alpha_m = \frac{\alpha_{\parallel} (1 + \varphi)}{0,6 + 0,5 \varphi} \quad (109)$$

$$(2) \quad \alpha_m = \frac{\alpha_{\parallel} (1 + \varphi)}{0,62} \quad (\text{Schneider}) \quad (110)$$

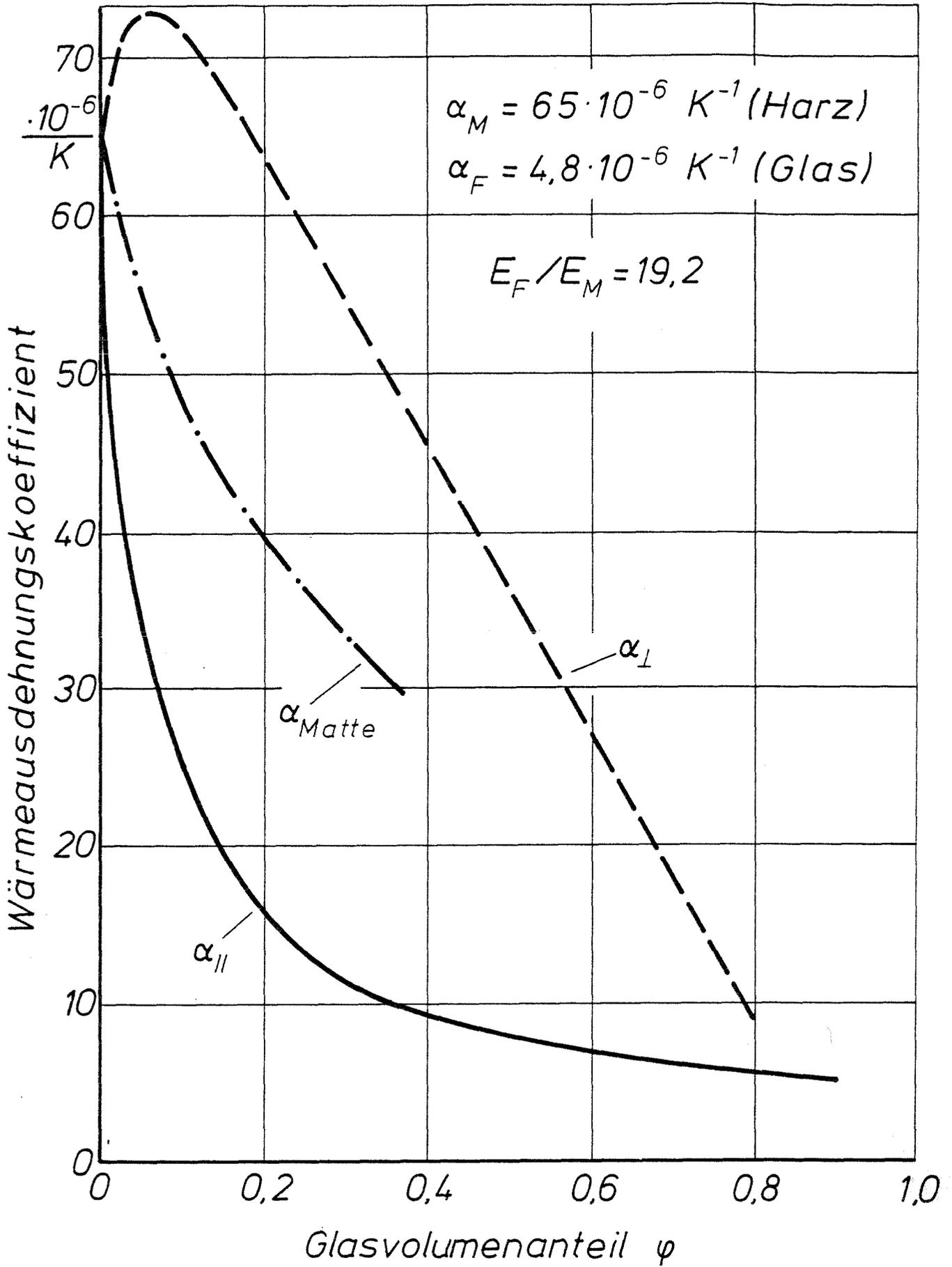
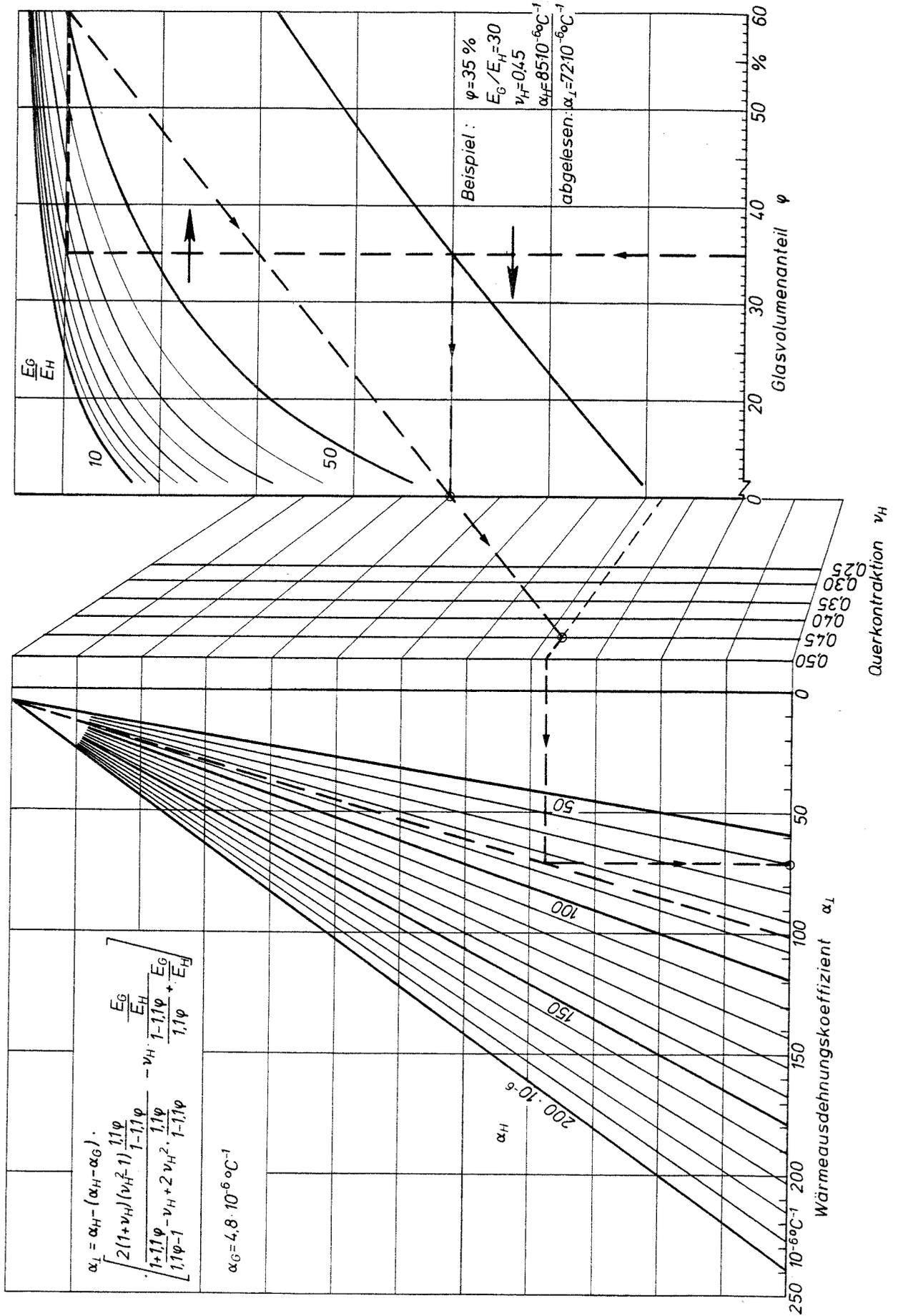


Bild 84: Wärmedehnungskoeffizienten von UD-Schichten und Mattenlaminaten



**Bild 85:** Nomogramm zur Ermittlung des Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_L$  von UD-Laminaten

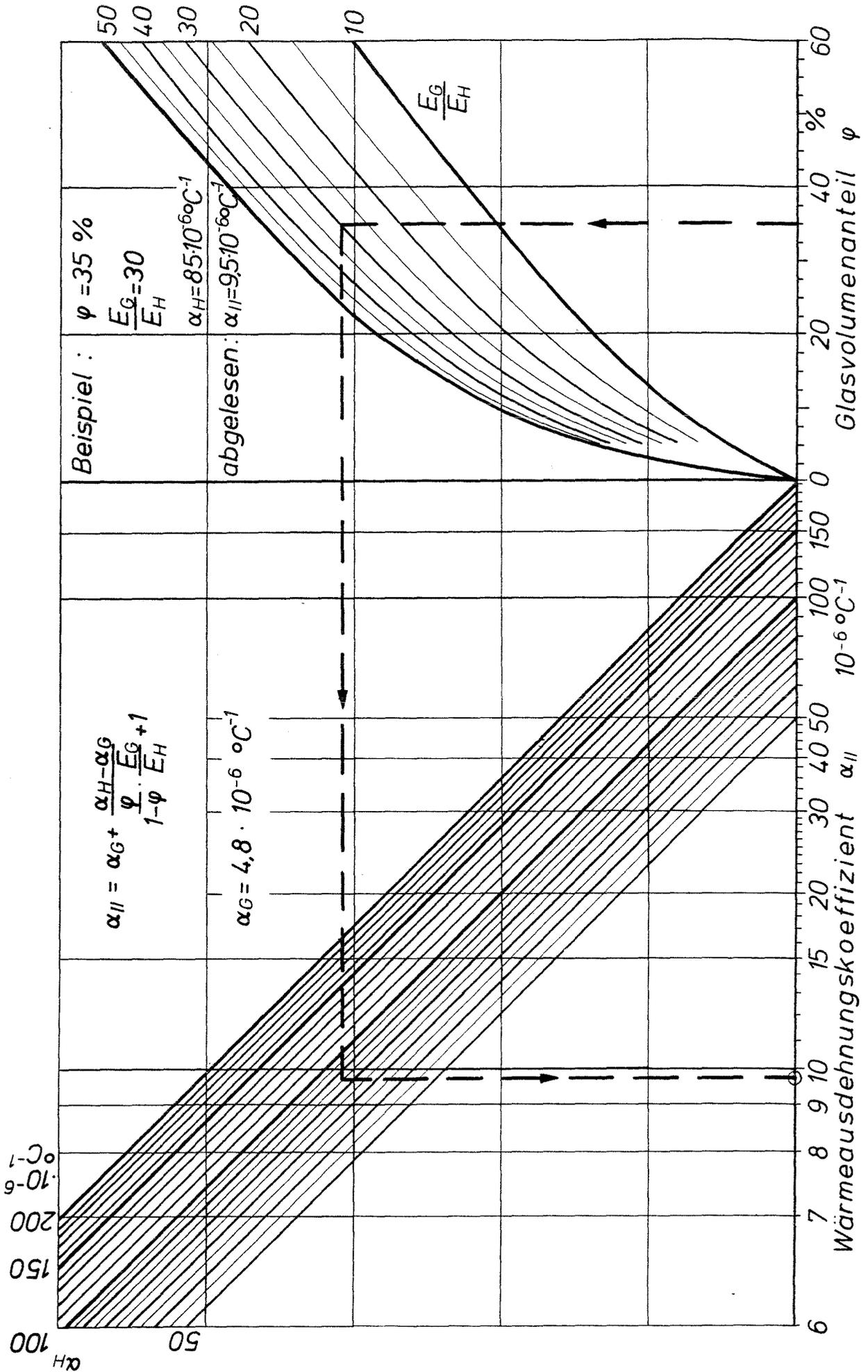
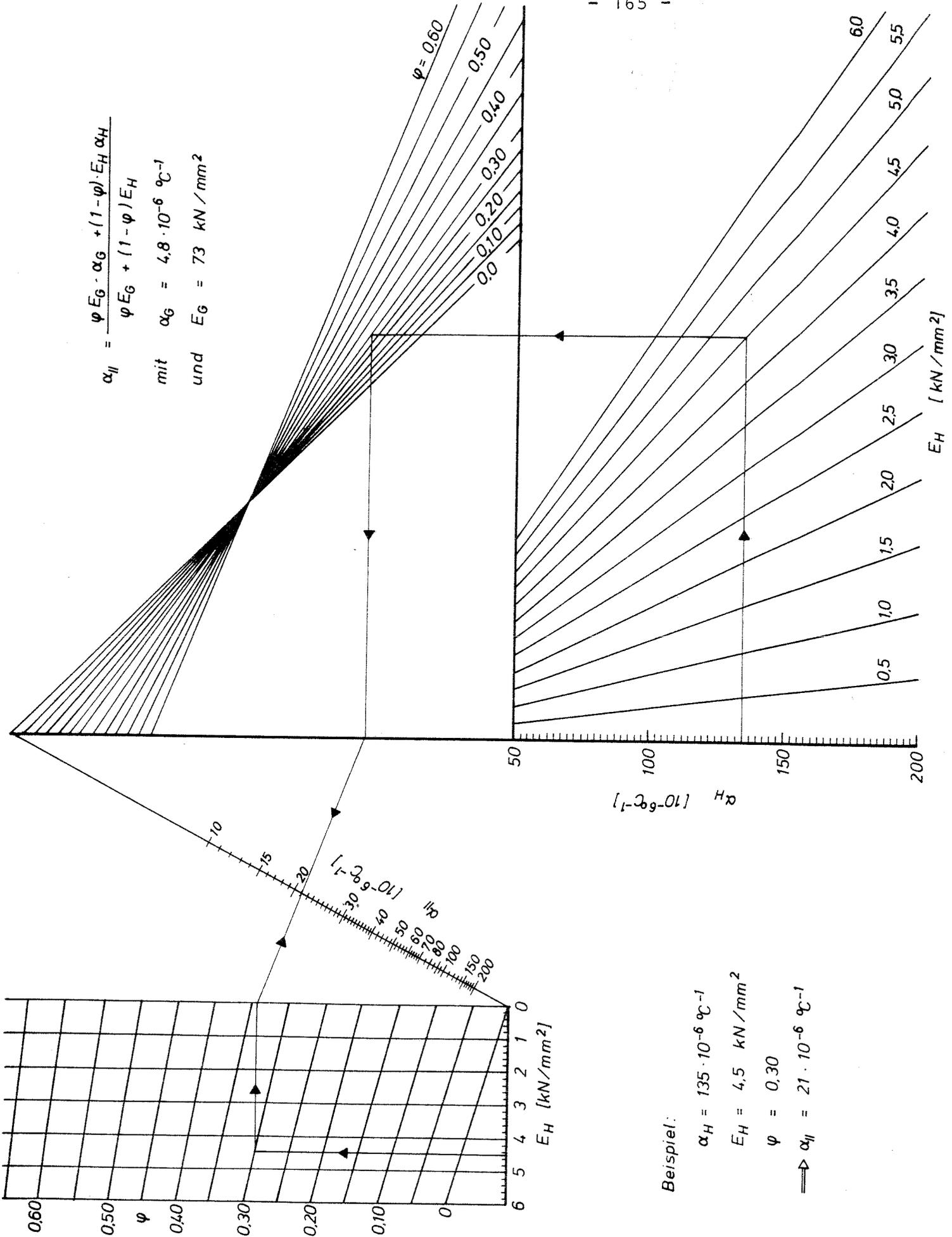


Bild 86: Nomogramm zur Ermittlung des Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{||}$  von UD-Laminaten

$$\alpha_{II} = \frac{\varphi E_G \cdot \alpha_G + (1-\varphi) E_H \alpha_H}{\varphi E_G + (1-\varphi) E_H}$$

mit  $\alpha_G = 4,8 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

und  $E_G = 73 \text{ kN/mm}^2$



Beispiel:

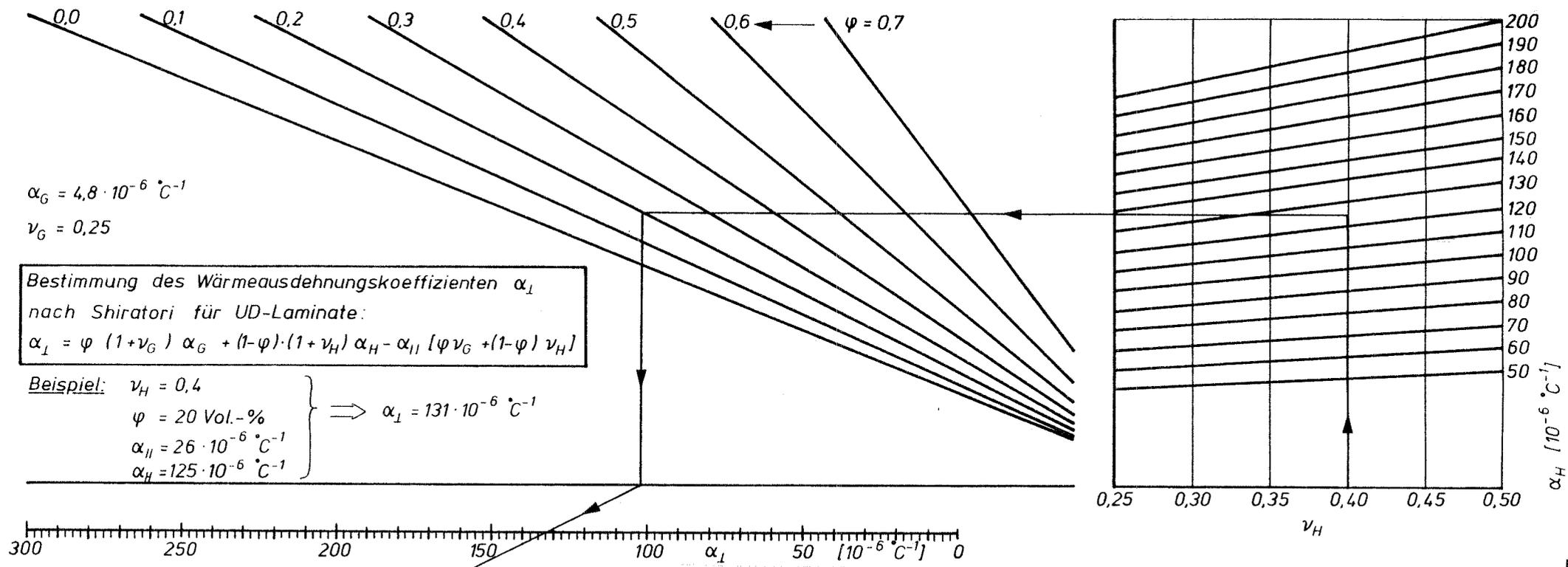
$$\alpha_H = 135 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$E_H = 4,5 \text{ kN/mm}^2$$

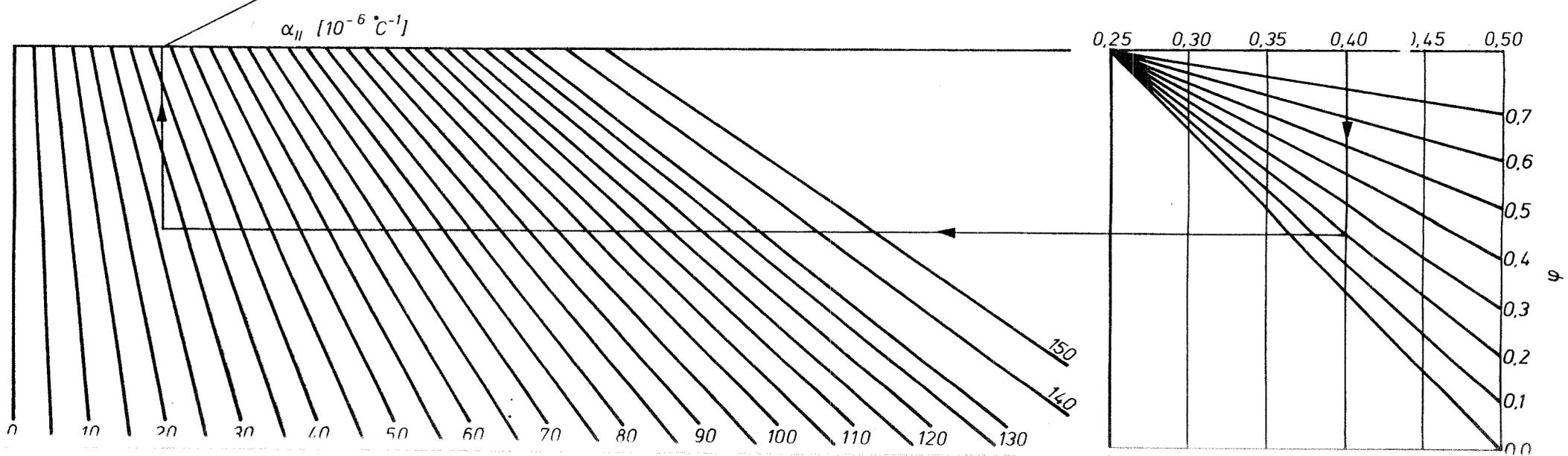
$$\psi = 0,30$$

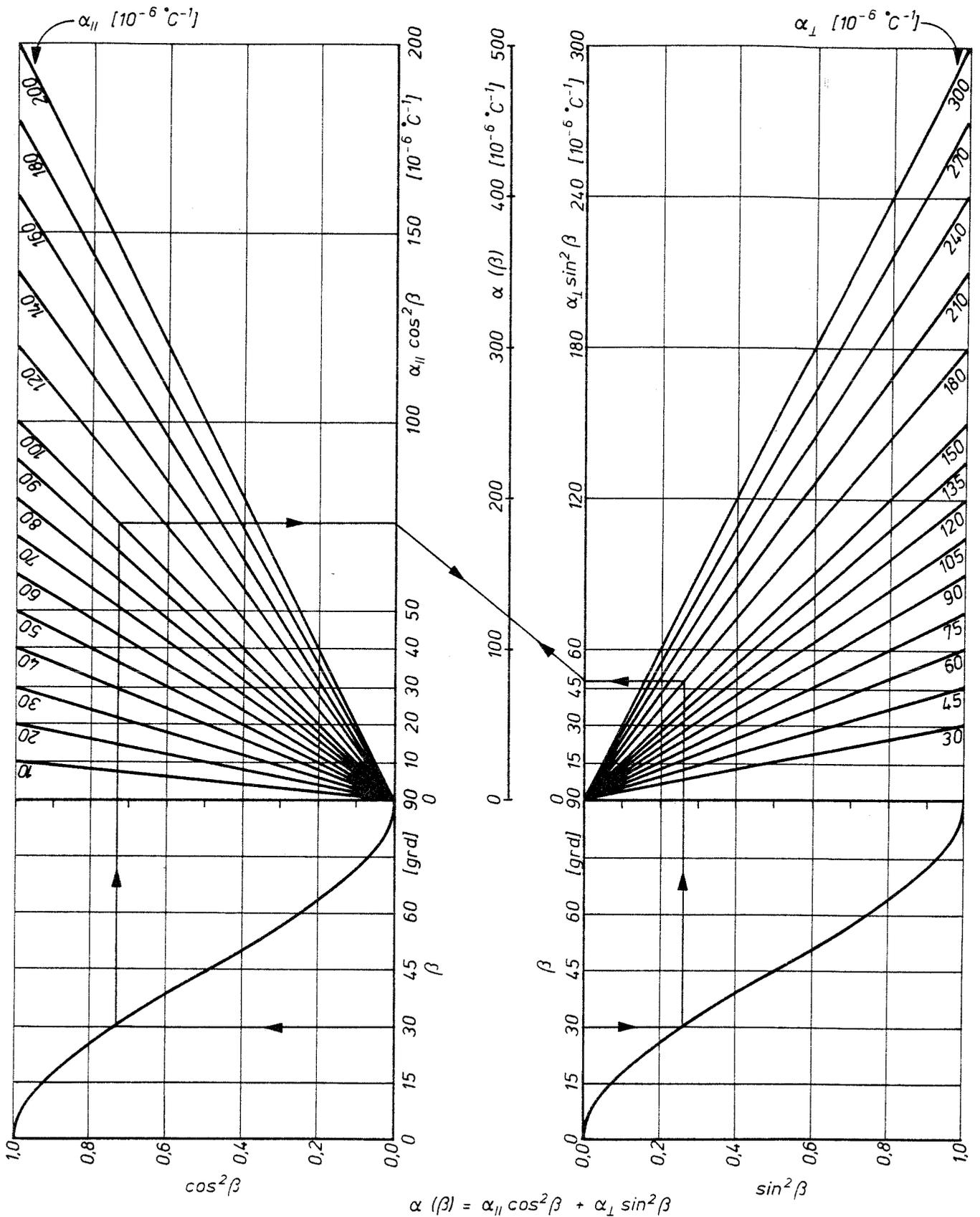
$$\Rightarrow \alpha_{II} = 21 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Bild 87: Nomogramm zur Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_{II}$  nach Shiratori für UD-Laminat



**Bild 88:** Nomogramm zur Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha_L$  nach Shiratori für UD-Laminat





Beispiel:  $\beta = 30^\circ$   
 $\alpha_{||} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$   
 $\alpha_{\perp} = 180 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

$\Rightarrow \alpha(\beta) = 122,5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

**Bild 89:** Bestimmung des winkelabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha(\beta)$  von UD-Laminaten nach Ishikawa Koyama, Kobayashi

nach Schneider:  $\alpha_M = 1/2 \cdot (\alpha_I + \alpha_{II})$

Beispiel:  $\left. \begin{array}{l} \alpha_{II} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \\ \alpha_I = 195 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_M = 137,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

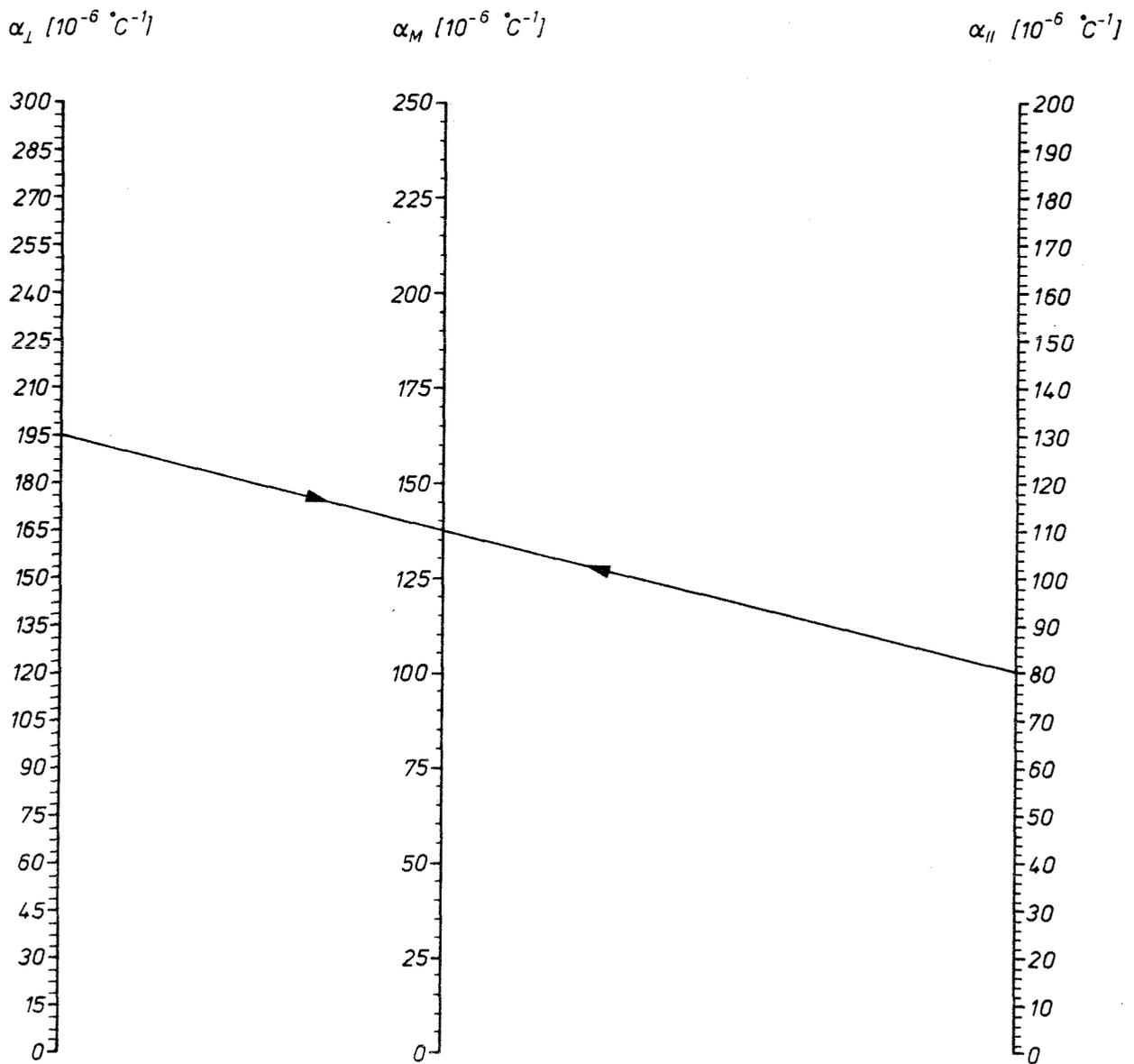


Bild 90: Leitertafel zur Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten von Mattenlaminaten nach Schneider

$$\alpha_M = \alpha_{II} \cdot (1 + \varphi) \cdot 0,62^{-1}$$

Bereich:  $\varphi = 0 \dots 50\%$

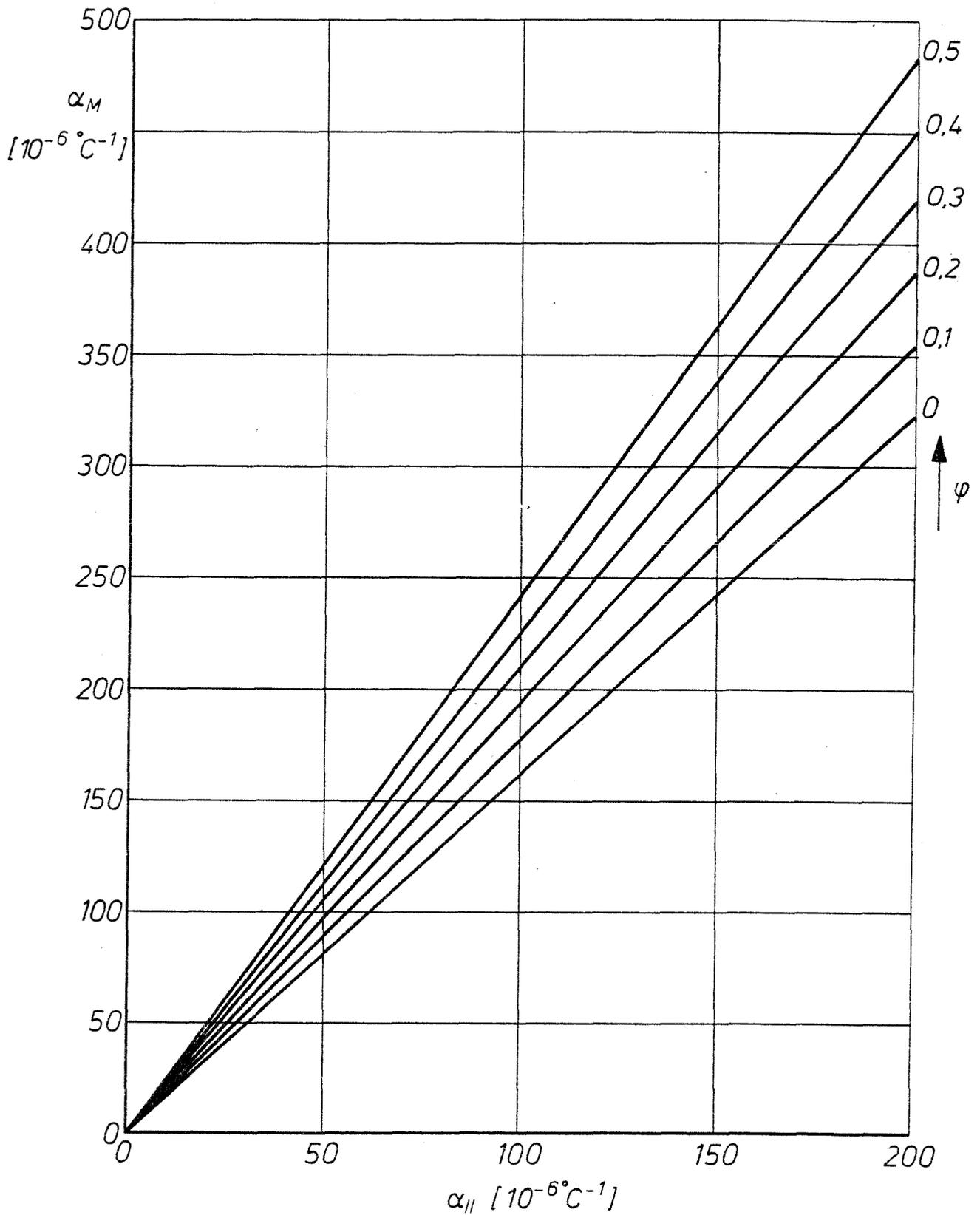


Bild 91: Wärmeausdehnungskoeffizient für Mattenlaminat nach Schneider

Der Wärmeausdehnungskoeffizient für Mattenlamine ist ebenfalls in den Bildern 90 und 91 angegeben.

Die Berechnung von Wärmespannungen aufgrund von Temperaturänderungen ähnelt der für die Berechnung mechanischer Spannungen.

Voraussetzungen:

- 1) nur gleichmäßige Temperaturänderungen im gesamten Querschnitt (also kein Temperaturgradient in Richtung der Laminatdicke),
- 2) symmetrische Lamine.

Zweckmäßig werden die Rechenschritte in folgender Reihenfolge ausgeführt:

- Berechnung der Wärmeausdehnungskoeffizienten (Grundkenngrößen) der Einzelschichten
- Transformation der Ausdehnungskoeffizienten der Einzelschichten in die Symmetrieachsen des Verbundes (schichtweise)
- Berechnung der auf die Symmetrierichtungen transformierten Steifigkeiten des Verbundes. (Aufgrund des "thermischen Schubes" entfallen auch bei orthotropen Laminaten unter Temperaturbeanspruchung nicht die Glieder mit Index 13 und 23 (vgl. Gleichung (59)), so daß innere thermische Normalspannungen neben Dehnungen auch Schiebungen bewirken.)
- Berechnung der rein thermisch bedingten Spannungen und Addition der thermischen zu den mechanischen Spannungen der Einzelschichten
- Ermittlung der Gesamtsteifigkeiten des Verbundes (Überlagerung wie bei mechanischen Spannungen)
- Ermittlung der Nachgiebigkeiten des Verbundes
- Ermittlung der Verzerrungen des Verbundes, wenn nur die thermischen Belastungen wirken würden
- Transformation der Verzerrungen aus thermischen Spannungen zurück in die Einzelschichten

- Berechnung derjenigen Verformungen, die in den Einzelschichten auf Grund von Temperaturänderungen mechanische Spannungen induzieren. (Mit den vorangegangenen Schritten wurde so gerechnet, als würde die gesamte Verzerrung des Verbundes durch die Wärmeausdehnungen fiktive thermische Spannungen bewirken. Für diese fiktiven Spannungen wurden Verzerrungen der Einzelschichten errechnet. Zu inneren Belastungen, die zusätzlich zu äußeren Spannungen wirken, tragen aber nur jene Anteile bei, die die einzelnen Schichten positiv oder negativ an der freien Ausdehnung hindern. Mit anderen Worten: nur jene Verformungen, die als Differenzen zwischen errechneten Verformungen und freien Ausdehnungen ermittelt werden, bewirken in jeder Schicht zusätzlich zur mechanischen Belastung innere Spannungen.)
- Ermittlung der Wärmespannungen in den Einzelschichten

Die Bedeutung thermischer Spannungen sollte man nicht unterschätzen. Sie können in einem Laminat gänzlich andere Vorzeichen haben, als bei einer rein mechanischen Belastung. Bruch- oder rißgefährdet sind auch hier vor allem jene Schichten mit Normalspannungen oder -verformungen senkrecht zum Faserverlauf.

Risse, die man unmittelbar nach der Fertigung oftmals in heißgehärteten Bauteilen vorfindet, sind zumeist durch die thermischen Spannungen beim Abkühlen bedingt.

Thermischen Spannungen muß man insbesondere deshalb große Bedeutung schenken, weil sie - anders als bei mechanischen Beanspruchungen - nicht durch eine Vergrößerung der Wandstärke reduziert werden können. Im Gegenteil, denn mit einer Vergrößerung der Wandstärke steigt wegen der geringen Wärmeleitfähigkeit der Kunststoffmatrix oftmals die durchschnittliche (im Querschnitt) Reaktionstemperatur, so daß anschließend bei Abkühlung auf die Umgebungstemperatur noch größere thermisch bedingte Spannungen entstehen. Neben geschickter Auswahl der Komponenten kann man diesen in Grenzen nur mit einer Änderung der Schichtwinkel begegnen.

5.9. Die Wärmeleitfähigkeit von Verbundwerkstoffen

Die Wärmeleitfähigkeit von Verbundwerkstoffen ist neben den Leitfähigkeiten von Matrix und Verstärkung und den Gewichts- bzw. Volumenanteilen der Verstärkung in hohem Maße abhängig von der Gestalt der Füllstoffe. In der Literatur werden für GFK verschiedene Beziehungen angegeben:

$$\frac{1}{\lambda_v} = [C(\lambda_H - \lambda_G)(\lambda_H - B(\lambda_H - \lambda_G))]^{-1/2} \ln \frac{[\lambda_H - B(\lambda_H - \lambda_G)]^{1/2} + 1/2 B[C(\lambda_H - \lambda_G)]^{1/2}}{[\lambda_H - B(\lambda_H - \lambda_G)]^{1/2} - 1/2 B[C(\lambda_H - \lambda_G)]^{1/2}} + (1 - B) / \lambda_H \quad (111)$$

mit  $B = \sqrt{3/2} \varphi$

$C = -4 \sqrt{2/3} \varphi$

nach Cheng-Vachon

für Kurzfaserverstärkung,

$$\lambda_v = \lambda_H \cdot \frac{\varphi^{2/3} + (1 - \varphi^{2/3}) \lambda_H / \lambda_G}{\varphi^{2/3} - \varphi + (1 + \varphi - \varphi^{2/3}) \cdot \lambda_H / \lambda_G}$$

nach Russell  
(112)

für Matten,

$$\lambda_v = \frac{1 + \xi \eta \varphi \cdot \lambda_H}{1 - \eta \varphi}$$

nach Halpin-Tsai  
(113)

mit  $\eta = \frac{\lambda_G / \lambda_H - 1}{\lambda_G / \lambda_H + \xi}$  ;  $\xi = 1$  für Fasern  
 $\xi = \sqrt{3} \log a/b$  für Blättchen (114)

für Gewebe, Rovings und Blättchen.

$$\frac{\lambda_V}{\lambda_H} = \frac{\varphi^{2/3} + (1 - \varphi^{2/3}) \lambda_H / \lambda_G}{\varphi^{2/3} \varphi + (1 + \varphi - \varphi^{2/3}) \lambda_H / \lambda_G}$$

$$0 \leq \lambda_H \leq 0,6 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$0,6 \leq \lambda_G \leq 1,0 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

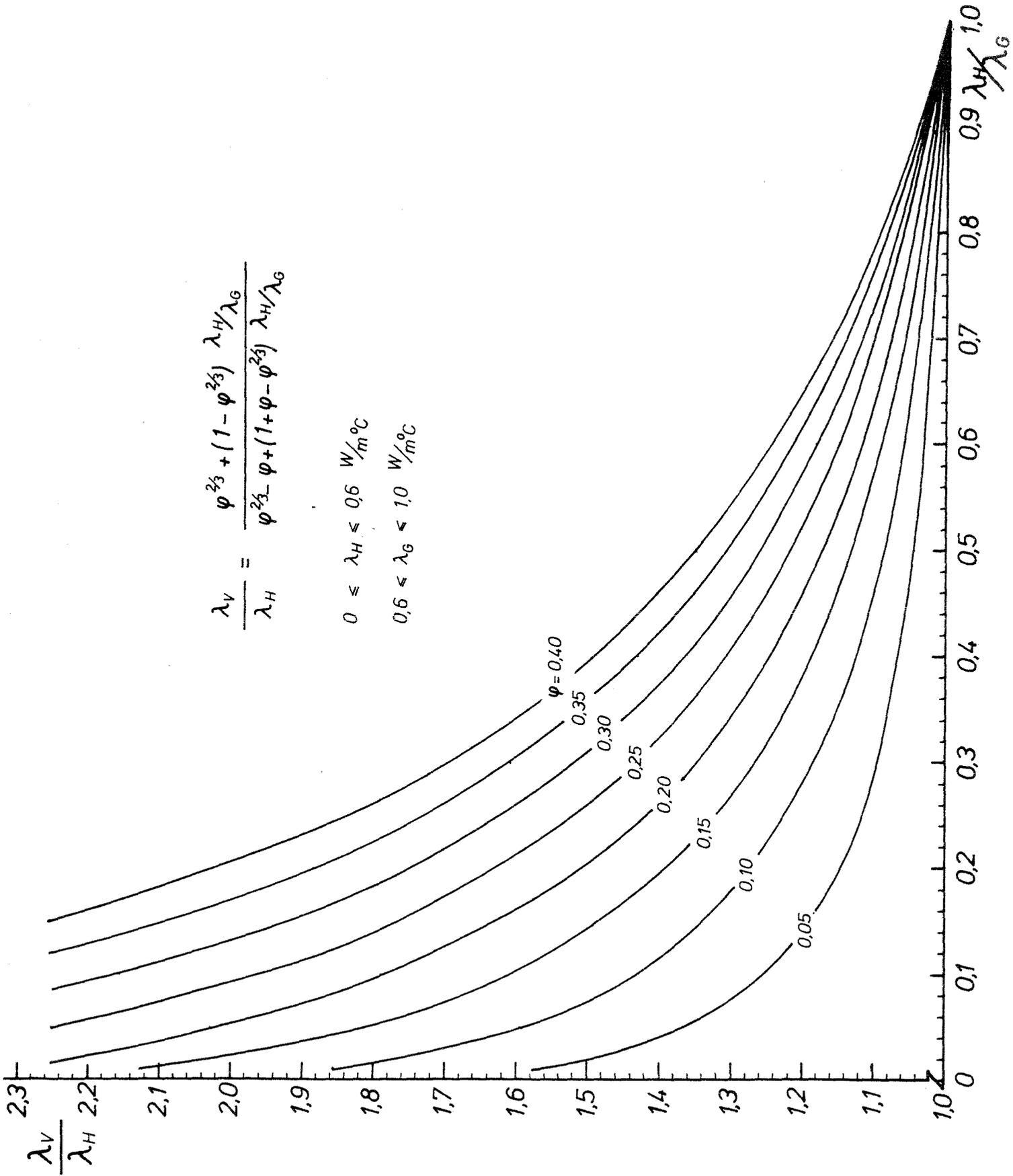


Bild 92: Nomogramm zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit von mattenverstärktem GFK aus den Wärmeleitfähigkeiten der reinen Komponenten

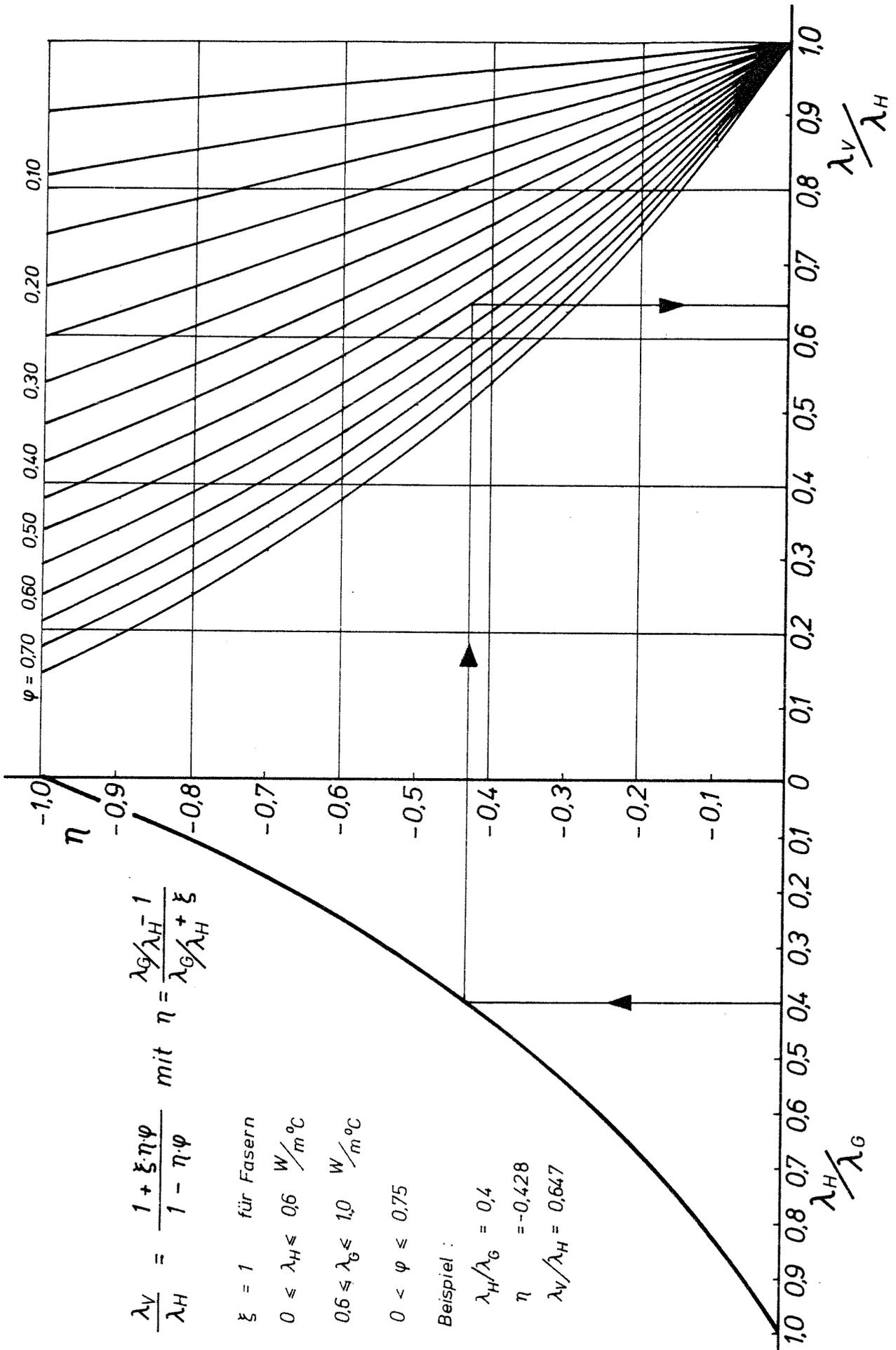


Bild 93: Nomogramm zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit gewebe- (bzw. roving-) verstärkter GFK

5.10. Stabilitätsrechnung für großflächige und schlanke Bauteile

(nach Taprogge)

Bei schlanken, stabförmigen sowie großflächigen Bauteilen dünner Wandstärke besteht bei Druckbeanspruchung in Stab- bzw. Flächenrichtung die Gefahr der Instabilität durch Knicken und Beulen. Bei den Kunststoffen ist diese Gefahr umso mehr gegeben, da zum einen der Elastizitätsmodul, der entscheidend die zulässigen Beanspruchungen beeinflusst, im Vergleich zu anderen Konstruktionswerkstoffen sehr niedrig liegt und zum anderen durch die langzeitige statische Beanspruchung infolge der Kriechverformungen noch zusätzlich verringert wird. Grundsätzlich sollten bei der Konstruktion von Kunststoffteilen daher hohe Schlankheitsgrade vermieden bzw. Verrippungen und Verstärkungen vorgesehen werden, wenn sich eine Druckbeanspruchung flächiger oder schlanker Teile nicht überhaupt vermeiden läßt. Auf jeden Fall ist die Knick- bzw. Beulgefahr sorgfältig zu überprüfen und die Konstruktion entsprechend auszulegen. Nach Untersuchungen von Gaube und Menges können zur Abschätzung der kritischen Beanspruchungen sehr einfache Beziehungen benutzt werden, die auf der von Euler gefundenen Knickformel beruhen und nach den Ergebnissen von Gaube und Menges auch für andere Werkstoffe Gültigkeit haben.

Die allgemeine Euler-Formel für einen zentrisch belasteten Druckstab lautet:

$$\alpha_k = \frac{P_k}{F} = \frac{\pi^2 E J}{s^2 F} \quad (115)$$

wobei

- $\alpha_k$  kritische Druckspannung, bei der Knicken eintritt
- $P_k$  kritische Drucklast, bei der Knicken eintritt
- $F$  Stabquerschnitt
- $E$  Elastizitätsmodul des Stabwerkstoffes

- $J$  minimales Flächenträgheitsmoment des Stabquerschnitts  
 $S$  wirksame Knicklänge

bedeuten.

Mit dem Trägheitsradius für  $J$

$$i = \sqrt{J/F}$$

und der Definition des Schlankheitsgrades

$$\lambda = s/i$$

können alle von Euler angegebenen verschiedenen Knickfälle mit unterschiedlichen Einspannungen und damit wirksamen Knicklängen durch die Beziehung

$$\alpha_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E \quad (116)$$

angegeben werden. Die als Euler-Hyperbel bekannte Funktion  $\sigma_k = f(\lambda)$  gilt nach Untersuchungen von Tetmajer bei Stählen bis zur Proportionalitätsgrenze und wird darüber hinaus durch die sog. Tetmajer-Gerade ersetzt, die bei niedrigen Schlankheitsgraden in die Fließgrenze des Stabes einläuft.

Die kritische Knick- bzw. Beulspannung kann mit genügender Genauigkeit rein aus den geometrischen Abmessungen über eine nur vom Schlankheitsgrad abhängige kritische Stauchung des Bauteils hergeleitet werden. Hierzu wurde die Euler-Formel

$$\alpha_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot E$$

zunächst formal umgewandelt in

$$\frac{\sigma_k}{E} = \epsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \quad (117)$$

Nach dieser Beziehung, die statt einer kritischen Druckspannung  $\sigma_k$  eine kritische Stauchung  $\varepsilon_k$  enthält, dürfte Knicken unabhängig vom Werkstoff und seinem Elastizitätsmodul nur dann eintreten, wenn eine bestimmte, nur von der Geometrie und den Einspannbedingungen abhängige, kritische Stauchung überschritten wird. Bei Kenntnis des jeweils gültigen Elastizitätsmoduls läßt sich leicht eine Berechnung der kritischen Spannung und damit eine Dimensionierung des Teils unter Berücksichtigung entsprechender Sicherheitsfaktoren vornehmen. Als Elastizitätsgröße findet dabei der für die vorliegende Beanspruchungszeit und -temperatur zutreffende Kurzzeitmodul oder Kriechmodul Verwendung. Die allgemeine Gültigkeit des oben definierten kritischen Stauchwertes, der sich als nahezu unabhängig von Belastungszeit und Temperatur erwiesen hat, ist vor allem deswegen so wertvoll für die Stabilitätsrechnung von Kunststoff-Bauteilen, weil bei Kunststoffen in der Regel wegen ihrer stark zeitabhängigen Verformungen ein Kriechknicken bzw. Kriechbeulen eintritt und die jeweils vorliegenden kritischen Spannungen nur umständlich zu ermitteln sind. Da im Bereich kleiner Verformungen jedoch auch bei Zeiteinfluß das Hooke'sche Gesetz Gültigkeit besitzt, kann obige Umrechnung bei Benutzung des Kriechmoduls  $E_c$  benutzt werden. In Bild 94 sind Ergebnisse aus Knickversuchen an GFK-Mattenlaminaten, Fichtenholz und PE hart zusammen mit der Euler-Linie eingetragen. Es zeigt sich, daß die experimentell und rechnerisch ermittelten kritischen Stauchwerte in sehr guter Näherung übereinstimmen. Der Übergang vom instabilen Versagen zum reinen Stauch-Schub-Bruch liegt in Höhe der Quetschgrenzenstauchung, die bei GFK-Mattenlaminaten bei ca. 2 bis 3 % liegt. Die für ein GFK-Mattenlaminat mit einem Glasgehalt von  $\varphi = 18\%$  sich ergebenden kritischen Stauchwerte sind mit den Übergangsbereichen und den mit dem E-Modul  $E_0 = 850 \text{ N/mm}^2$  bei Kurzzeitbeanspruchung zu errechnenden kritischen Spannungen in Bild 95 eingetragen. Auch hier ist die Übereinstimmung zwischen Meßwerten und errechneten Werten bemerkenswert gut.

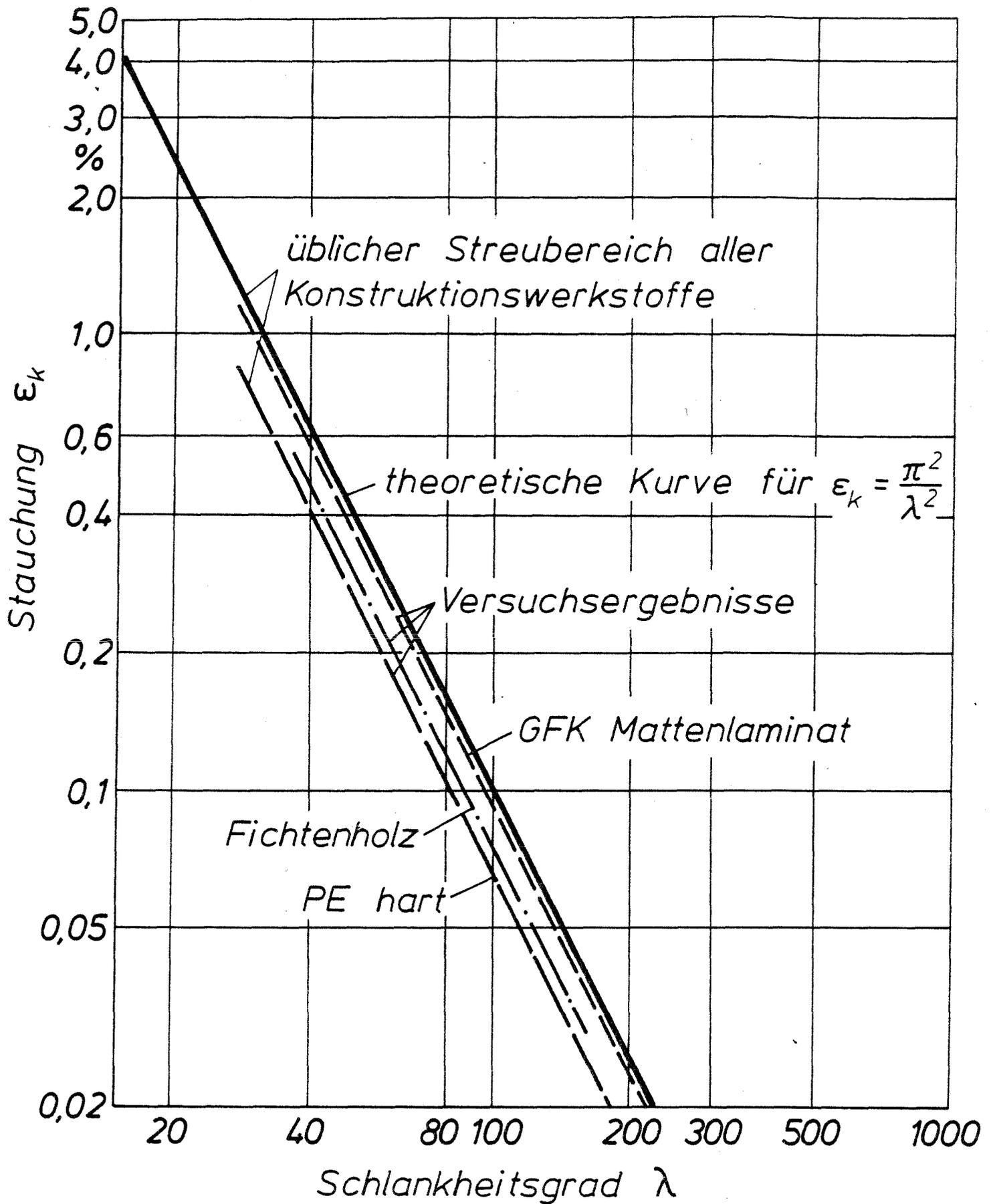


Bild 94: Kritische Stauchung als Funktion des Schlankheitsgrades beim Kriechen

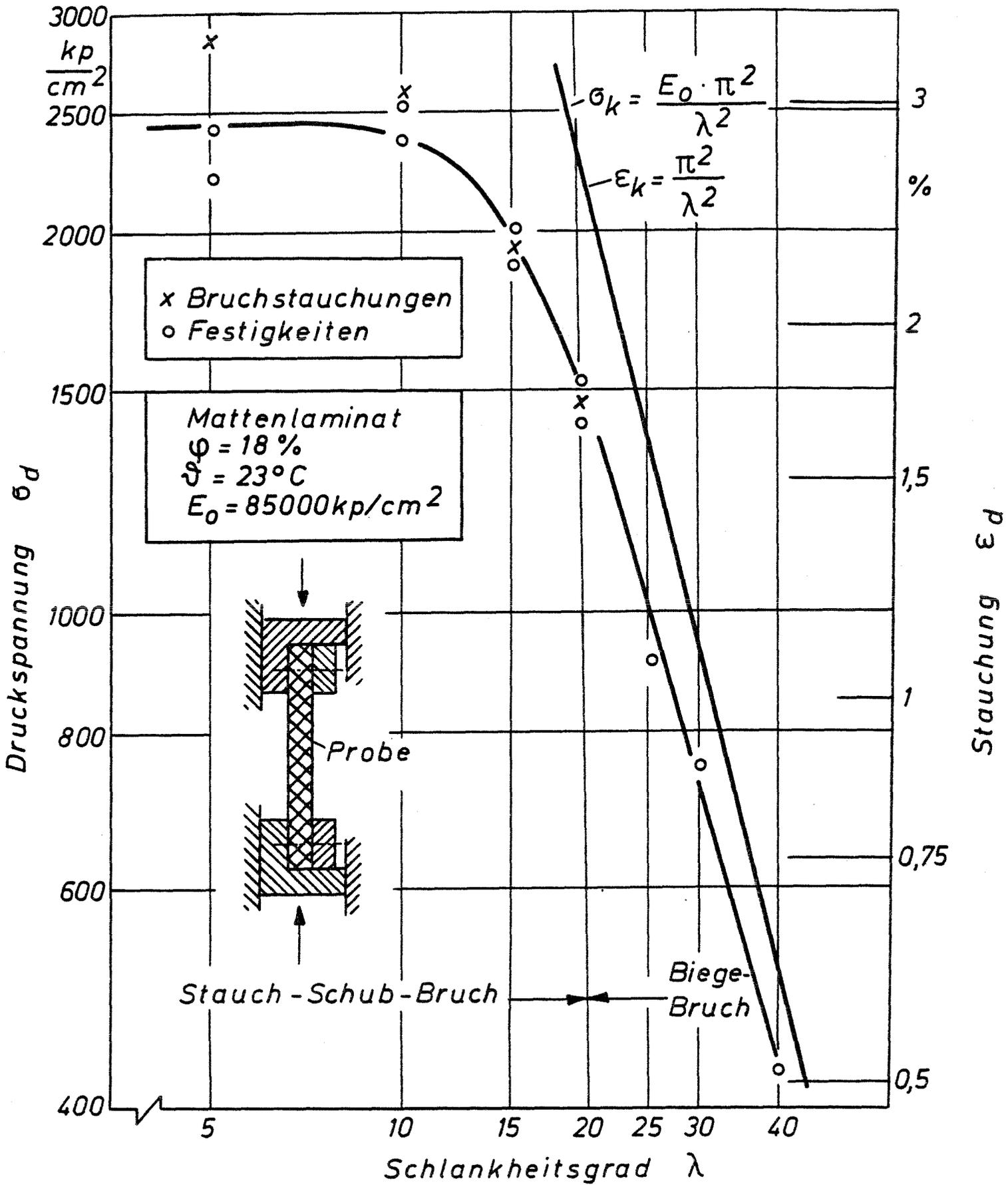


Bild 95: Druckspannungen bzw. -festigkeiten sowie Bruchstauchungen als Funktion des Schlankheitsgrades

Allgemein lassen sich in der Praxis bei Bauteilen wegen herstellungsbedingter Ungenauigkeiten keine idealen Geometrien, wie z. B. ideal gerade Stäbe oder ideal ebene Platten, verwirklichen. Zudem ist eine exakt zentrische Lasteinleitung nur in Einzelfällen realisierbar. Deshalb wurden von Menges und Franken Untersuchungen durchgeführt, um den Einfluß dieser Ungenauigkeiten auf das Stabilitätsverhalten der Stäbe zu bestimmen. Zum Nachweis für die Anwendbarkeit der Theorie der kritischen Stauchung wurden vorgekrümmte bzw. exzentrisch belastete Stäbe aus quasiisotropen Mattenlaminaten geprüft. Die Abb. 96 und 97 zeigen die Versuchsergebnisse im Vergleich zu den theoretischen Werten bei idealer Anordnung und unterschiedlichen Höhen der Vorverformung und Exzentrizitäten. Diese theoretischen Werte wurden aus der Biegelinie eines vorgekrümmten bzw. exzentrisch belasteten Stabes ermittelt. Es wird deutlich, daß auch für den Fall des nichtidealen Knickstabes eine kritische, zeitunabhängige Stauchung bestimmt werden kann.

Abweichend von der vorgestellten Betrachtung der Stabsachsendiformation wird von Roskothen/Menges die Randfaserdeformation zur Charakterisierung des Beanspruchungszustandes herangezogen. Dieser Dehnungswert ist sehr einfach meßbar.

Wie aus Abb. 98 deutlich wird, durchlaufen die Stauchungswerte der konvexen Seite des Stabes wegen der Überlagerung von Zugdeformationen bei steigender Durchbiegung einen Maximalwert. Diese maximale Randfaserstauchung wird als Bemessungsgrenze zur Ermittlung zulässiger Druckbelastungen herangezogen. Das Bauteil ist darüber hinaus zwar noch belastbar, die Gefahr des totalen Versagens durch Vergrößerung der Durchbiegung bzw. durch Änderung der Knick- oder Beulfigur nimmt jedoch zu. Es kann nämlich z. B. bei Beulfiguränderung, die u. U. mit großen örtlichen Deformationen verbunden ist, nicht ausgeschlossen werden, daß materialspezifische Schädigungsgrenzen überschritten werden.

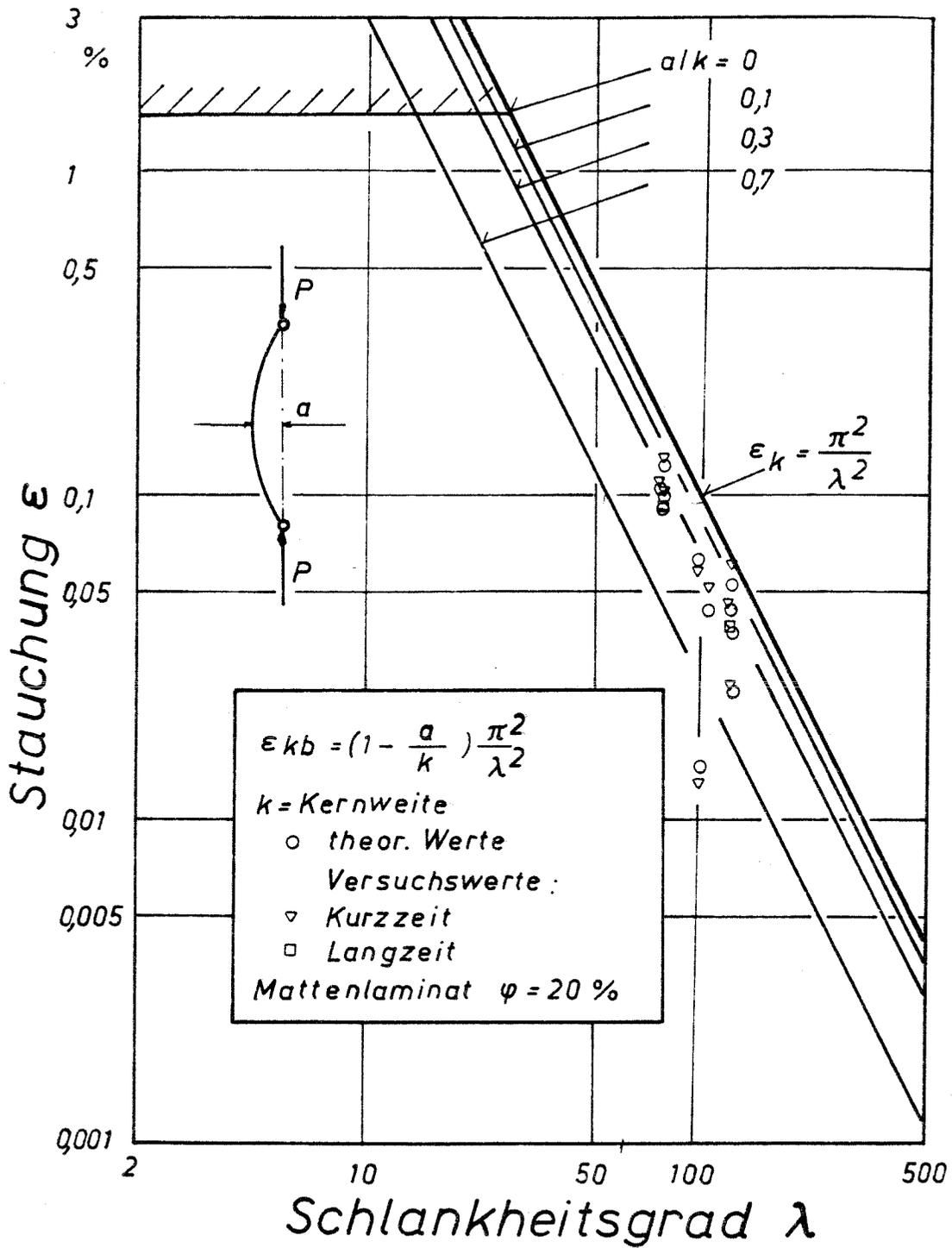


Bild 96: Kritische Stauchung bei vorgekrümmten Stäben (nach Menges und Franken)

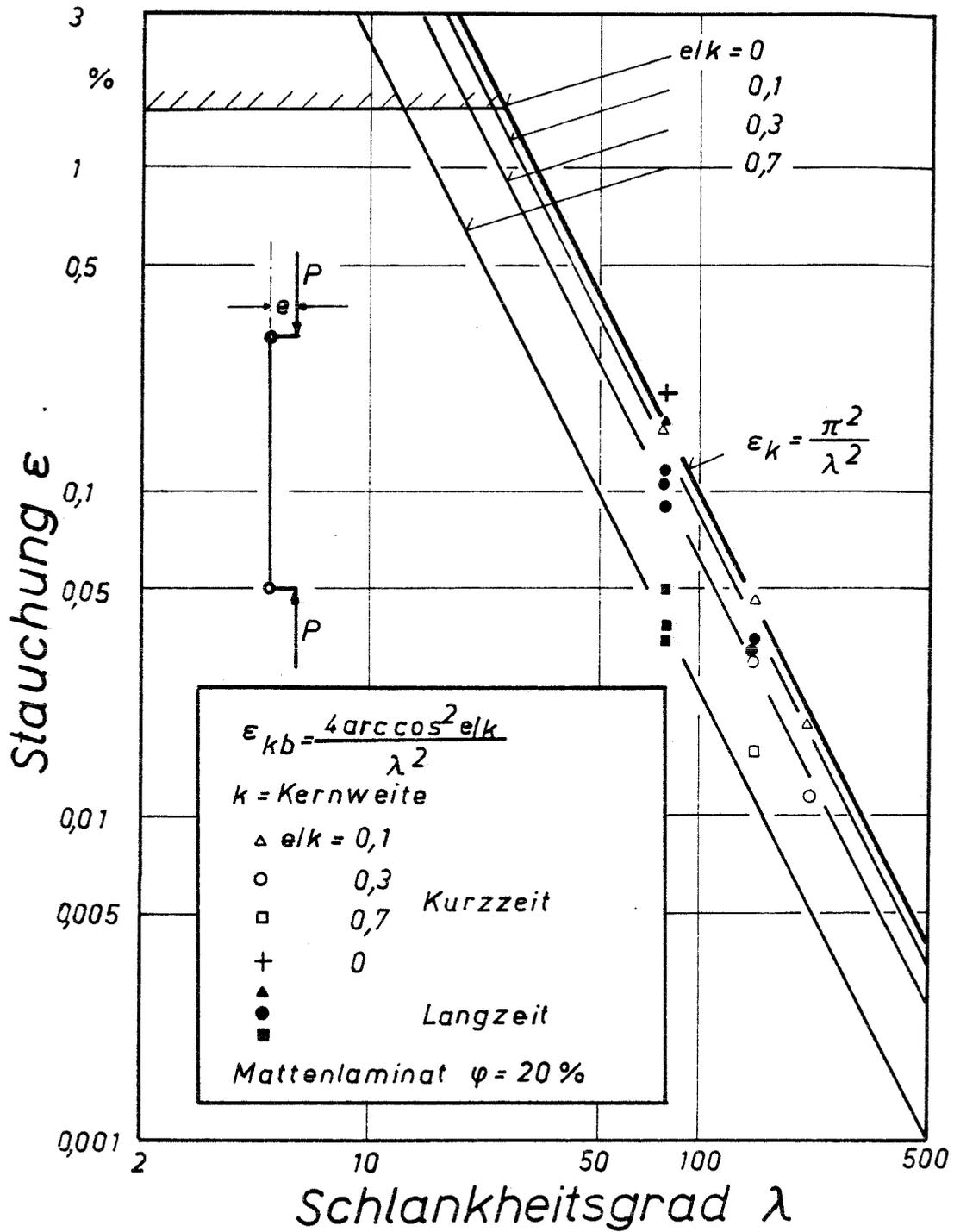
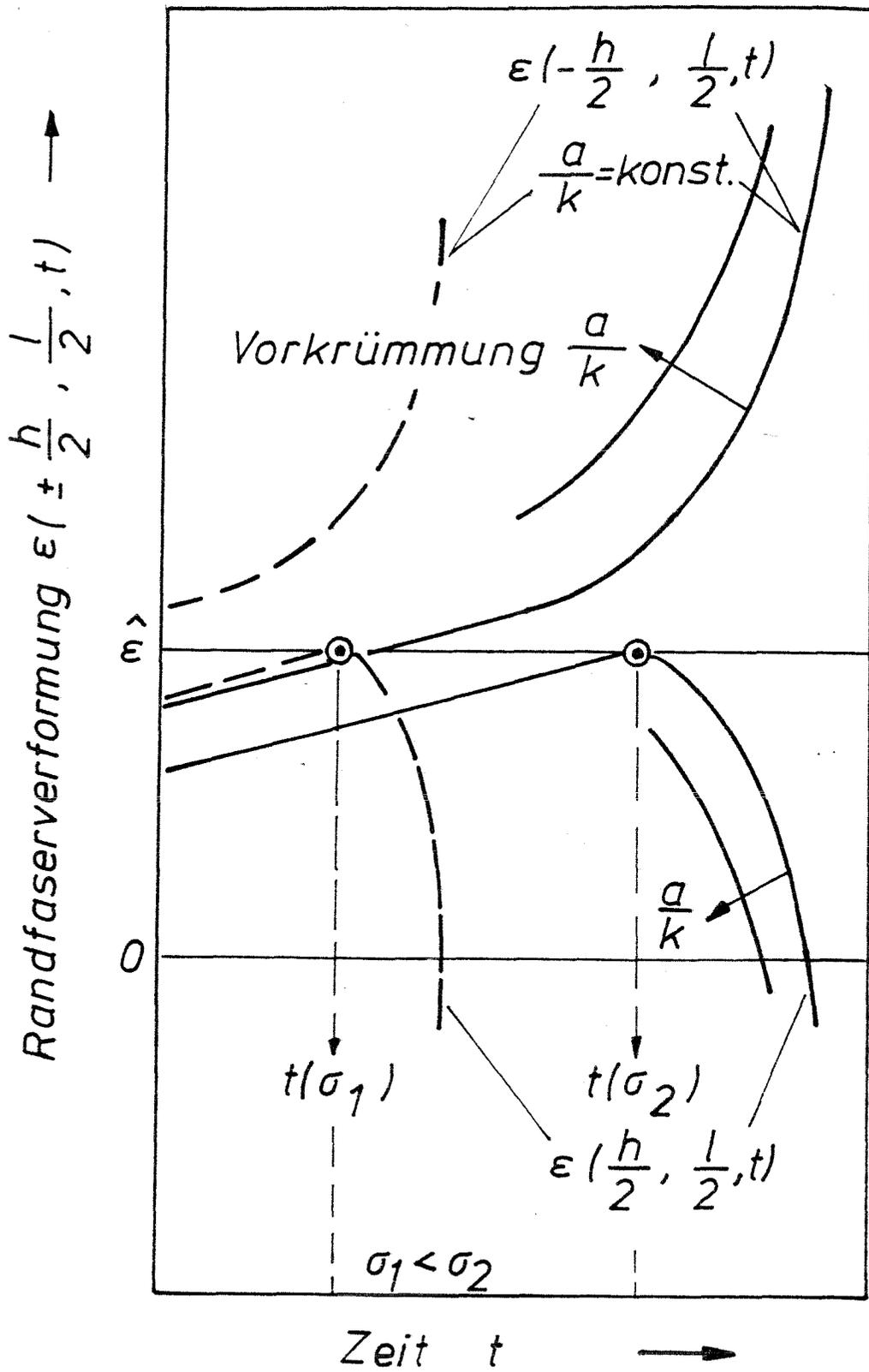


Bild 97: Kritische Stauchung bei exzentrisch belasteten Stäben (nach Menges und Franken)



konvexe Stabseite :  $+h/2$

Bild 98: Randfaserverformung bei vorgekrümmten Stäben

Wie bei schlanken Stäben läßt sich auch bei Behandlung von Beulproblemen von z. B. axial oder radial gedrückten Zylinderschalen, eingespannten Platten etc. mit Erfolg eine kritische Stauchung

$$\epsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda_v^2} \quad (118)$$

verwenden, wobei statt des normalen Schlankheitsgrades  $\lambda$  ein Vergleichsschlankheitsgrad  $\lambda_v$  definiert wird, der sich ähnlich wie bei Knickfällen aus der Geometrie und den Einspannbedingungen der Schalen und Platten errechnen läßt. Hierbei wird aus dem Vergleich der jeweiligen Beulformeln mit der Beziehung

$$\sigma_k = \frac{\pi^2}{\lambda_v^2} \cdot E \quad \text{der Wert für } \lambda_v \text{ berechnet und in die Gleichung}$$

$$\epsilon_k = \frac{\pi^2}{\lambda_v^2}$$

eingesetzt.

In Tabelle 3 sind für verschiedene gebräuchliche Schalen die in gleicher Weise ermittelten Vergleichsschlankheitsgrade  $\lambda_v$  angegeben.

Aus zahlreichen Versuchen mit verschiedenen Kunststoffen (Bild 99), läßt sich ersehen, daß die experimentell ermittelten Werte von den theoretischen Werten um maximal  $2/3 \epsilon_k \text{ th}$  abweichen, was jedoch bei der stets vorliegenden großen Streuung der Ergebnisse aus Beulversuchen zu erwarten ist. Die für die Festigkeitsrechnung und Dimensionierung benötigten kritischen Spannungswerte lassen sich wie bei den Knickfällen und den Kriechmoduln für die jeweilige Belastungszeit und Temperatur errechnen.

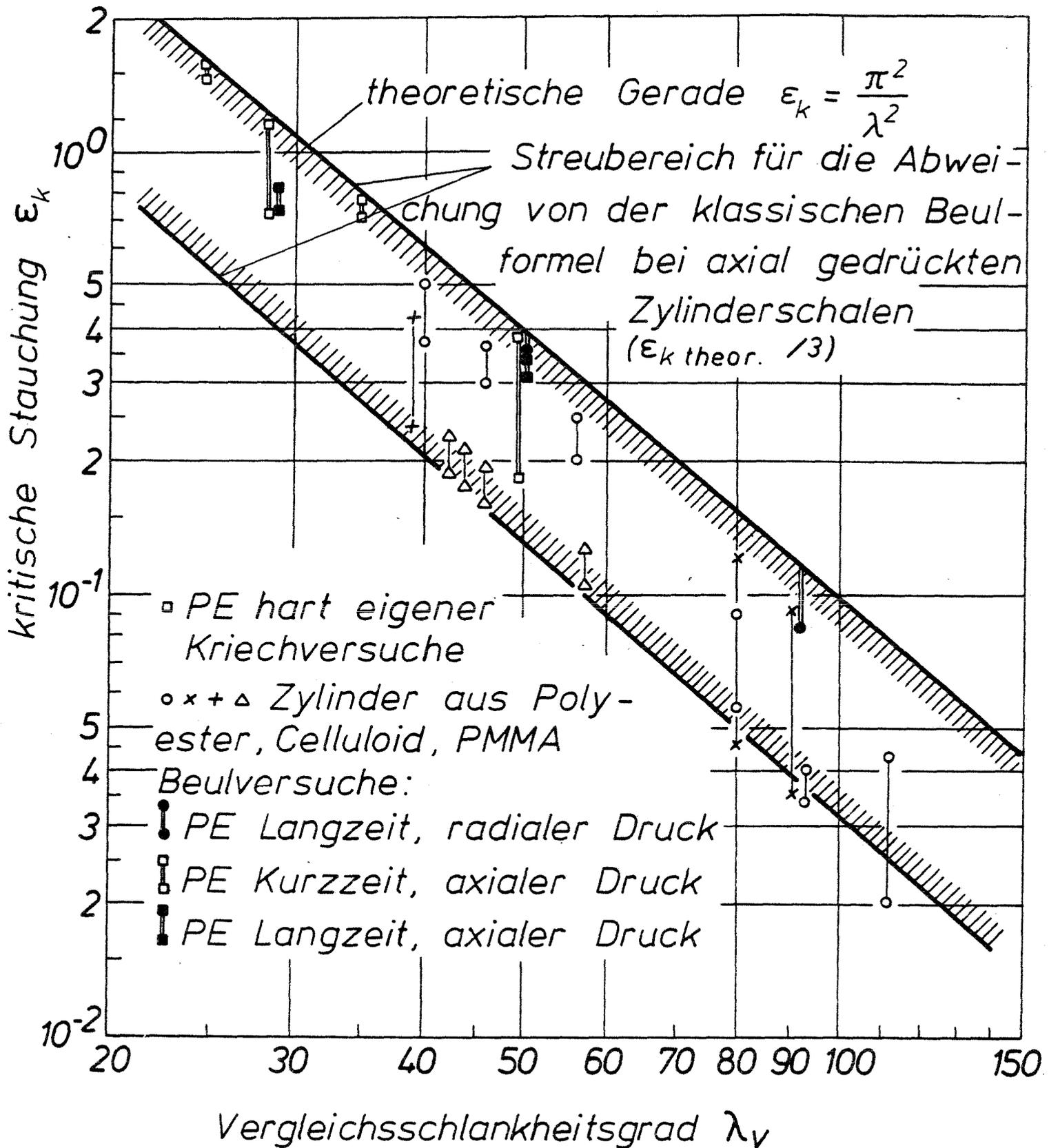


Bild 99: Kritische Stauchung als Funktion des Vergleichsschlankheitsgrades  $\lambda_v$  bei Stabilitätsproblemen von Kreiszyklindern aus verschiedenen Werkstoffen, Vergleich der theoretischen Eulerlinie mit experimentell ermittelten Werten

Tabelle 3:

Beulformeln und Vergleichsschlankheitsgrade für verschiedene Beulprobleme

Lastfall	Bild	klassische Beulformel	kritische Beulspannung	Vergleichsschlankheitsgrad	Autor
Beulen eines Kreiszylinders unter radialem Druck		$p_{kl} = \frac{E}{4(1-\mu^2)} \left(\frac{s}{r}\right)^3$	$\sigma_{kr} = \frac{E}{4(1-\mu^2)} \left(\frac{s}{r}\right)^2$	$\lambda_V = 2\pi \frac{r}{s} \sqrt{1-\mu^2}$	v. Mises
Beulen eines Kreiszylinders unter axialem Druck		—	$\sigma_{kr} = \frac{sE}{r \sqrt{3(1-\mu^2)}}$	$\lambda_V = \pi \sqrt{\frac{r}{s}} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}$	Bresse
Beulen eines Kreiszylinders mit Spanten unter radialem Druck		$p_{kl} = 0,92 E \frac{r}{l} \left(\frac{s}{r}\right)^{5/2}$	—	$\lambda_V = \frac{\pi}{0,92} \sqrt{\frac{l}{r}} \sqrt[4]{\left(\frac{r}{s}\right)^3}$	v. Windenburg
Beulen einer Kugelschale unter radialem Druck		$p_{kl} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \left(\frac{s}{r}\right)^2$	$\sigma_{kr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left(\frac{s}{r}\right)$	$\lambda_V = \pi \sqrt{\frac{r}{s}} \sqrt[4]{3(1-\mu^2)}$	Zoelly
Beulen kurzer Zylinderschalen unter radialem Druck		$p_{kl} = 0,92 E \frac{r}{l} \left(\frac{s}{r}\right)^{5/2}$	$\sigma_{kr} = 0,92 E \frac{r}{l} \sqrt{\left(\frac{s}{r}\right)^3}$	$\lambda_V = \frac{\pi}{0,92} \sqrt{\frac{l}{r}} \sqrt[4]{\left(\frac{r}{s}\right)^3}$	Ebner
Beulen von Kegelschalen unter axialem Druck		$p_{kl} = 0,8 \cdot 0,92 E \frac{p}{l} \left(\frac{s}{p}\right)^{5/2}$	$\sigma_{kr} = 0,8 \cdot 0,92 E \frac{s}{l} \sqrt{\left(\frac{s}{p}\right)^3}$	$\lambda_V = \frac{\pi}{0,8 \cdot 0,92} \sqrt{\frac{l}{s}} \sqrt[4]{\left(\frac{p}{s}\right)^3}$ $p = (r_1 + r_2) / 2 \cos \alpha$	Pflüger

Elastizitätsmodul:  $E$       Querkontraktionszahl:  $\mu$

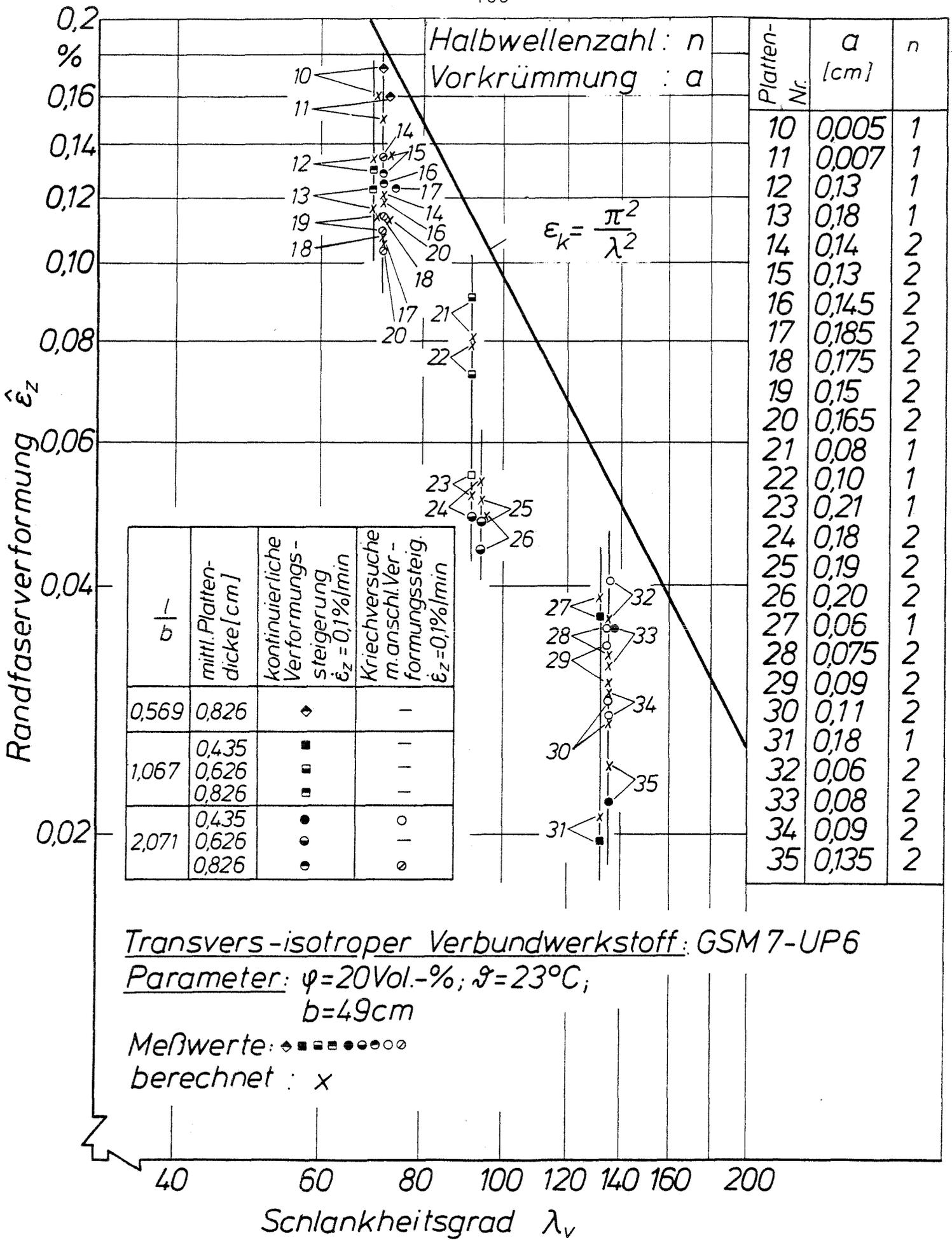
Für die praktische Konstruktionsrechnung ist der gezeigte einfache Zusammenhang auch deswegen von großer Bedeutung, weil vorliegende Ergebnisse aus Knick- und Beulfällen anderer Werkstoffe ohne weiteres für Kunststoffe umgerechnet werden können sowie mit Hilfe des Kriechmoduls aus Kurzzeitversuchen bei einer Temperatur auf das Verhalten bei langen Belastungszeiten und höheren Temperaturen geschlossen werden kann.

Man kann also aus den bekannten Beul- bzw. Knickformeln verschiedener Schalenkörper bzw. Stäbe den Schlankheitsgrad  $\lambda_v$  bzw.  $\lambda$  errechnen und aus Bild 99 oder 94 die kritische Stauchung  $\epsilon_k$  ermitteln. Mit der Gleichung

$$\sigma_k = \epsilon_k E_c \quad (119)$$

kann nun bei bekanntem Kriechmodul die kritische Knick- bzw. Beulspannung berechnet werden. Sind für den Werkstoff isochrone Spannungs-Dehnungslinien vorhanden, läßt sich die kritische Spannung  $\sigma_k$  direkt für das errechnete  $\epsilon_k$  aus dem Diagramm ablesen. Umgekehrt kann für eine bekannte Spannung  $\sigma_k$  und den errechneten Werten  $\epsilon_k$  die Zeit bis zum Versagen ebenfalls aus den Isochronen oder Zeit-Dehnlinien entnommen werden.

Roskothen untersuchte vorgekrümmte Platten aus quasiisotropen Mattenlaminaten. Wie im Falle des vorgekrümmten Stabes bestimmt er die Definition der konvexen Randfaser in Abhängigkeit von der aufgetragenen Streckenlast und der Vorkrümmung. Unter Einführung des Vergleichsschlankheitsgrades für dieses Problem konnte nachgewiesen werden, daß der Maximalwert der Stauchung zeit- und spannungsunabhängig ist. Abb. 100 vergleicht experimentelle mit berechneten Ergebnissen.



Transvers-isotroper Verbundwerkstoff: GSM 7-UP6

Parameter:  $\psi = 20 \text{ Vol.-%}$ ;  $T = 23^\circ\text{C}$ ;

$b = 49 \text{ cm}$

Meßwerte: ◆ ■ ▣ ● ○

berechnet: x

Bild 100: Randfaserverformung bei vorgekrümmten quasiisotropen Platten (nach Roskothen)

Mit dem hier beschriebenen Rechenverfahren ist es möglich, zumindest für isotrope und quasiisotrope Kunststoffe eine hinreichend genaue Ermittlung der kritischen Spannungswerte durch Einführung der kritischen Stauchungen durchzuführen, mit der in einfachster Weise die verschiedenen Einflußgrößen Belastungszeit, -temperatur und Schlankheitsgrad erfaßt werden können. Für zentrisch gedrückte Stäbe und verschiedene Schalenformen haben sich die benutzten Ansätze gut bewährt. Für anisotrope Werkstoffe gilt das Zuvorgesagte nicht.

### Nichtisotrope Werkstoffe

Die Rechnung der Theorie der kritischen Stauchung gestaltet sich in dem Fall problematisch, wenn mehrere voneinander unabhängige Werkstoffkennwerte in die Rechnung eingehen und in einer Relation zueinander stehen, daß sich ihre Zeit- und Temperaturabhängigkeit nicht eliminieren läßt. Für die Anwendung der Theorie ist es also erforderlich, die veränderlichen (viskoelastischen) Kenngrößen zusammenzufassen. Die Kennwertekombination entspricht einem Ersatzmodul.

Untersuchungen im IKV an orthotrop verstärkten, vorgekrümmten Platten haben ergeben, daß die auch in diesem Fall betrachtete Maximaldeformation der konvexen Randfaser im Gegensatz zu dem Verhalten bei isotropem Werkstoff mit zunehmender Belastungszeit abnimmt. Das heißt, daß der Maximalwert der Randfaserdeformation bei Platten mit gleicher Vorkrümmung unter verringerter Belastung zwar zu längeren Zeiten erreicht wird, jedoch auch die Randfaserdeformation in ihrer Maximalgröße abnimmt.

Zur Bestimmung des Deformationsverhaltens der vorgekrümmten Platten wird von Meffert, Derek und Menges ein Berechnungsverfahren vorgestellt.

In Abb. 101 sind die so berechneten Stauchungsmaxima einer Platte bestimmter Geometrie über der Belastungszeit aufgetragen. Als Parameter gehen die Spannung und die Vorkrümmung ein. Diese Darstellung ermöglicht bei vorgegebener Plattengeometrie und Belastung die zulässige Standzeit (hier  $10^5$  h) und die sich ergebende maximale Randfaserstauchung zu bestimmen.

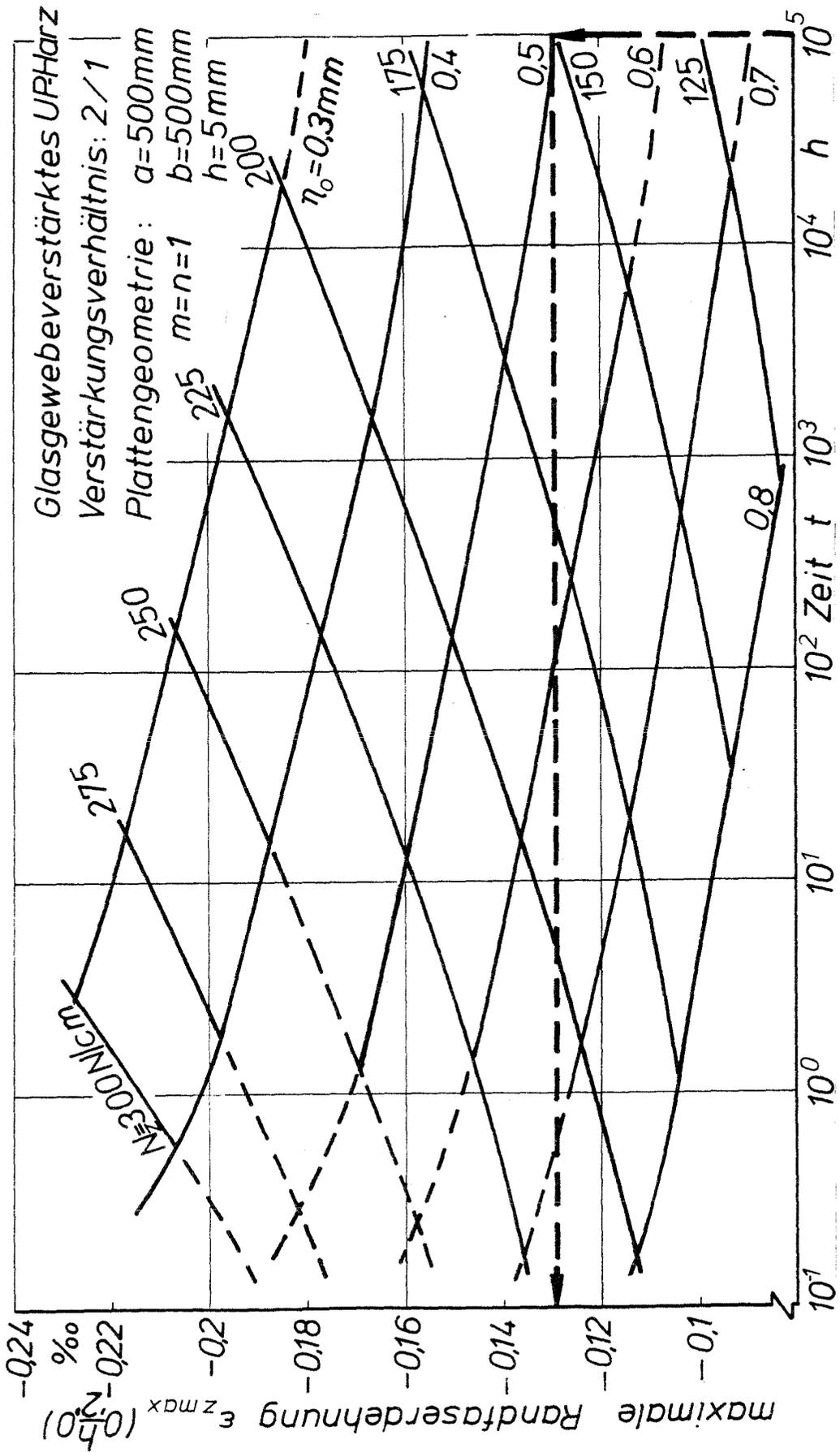
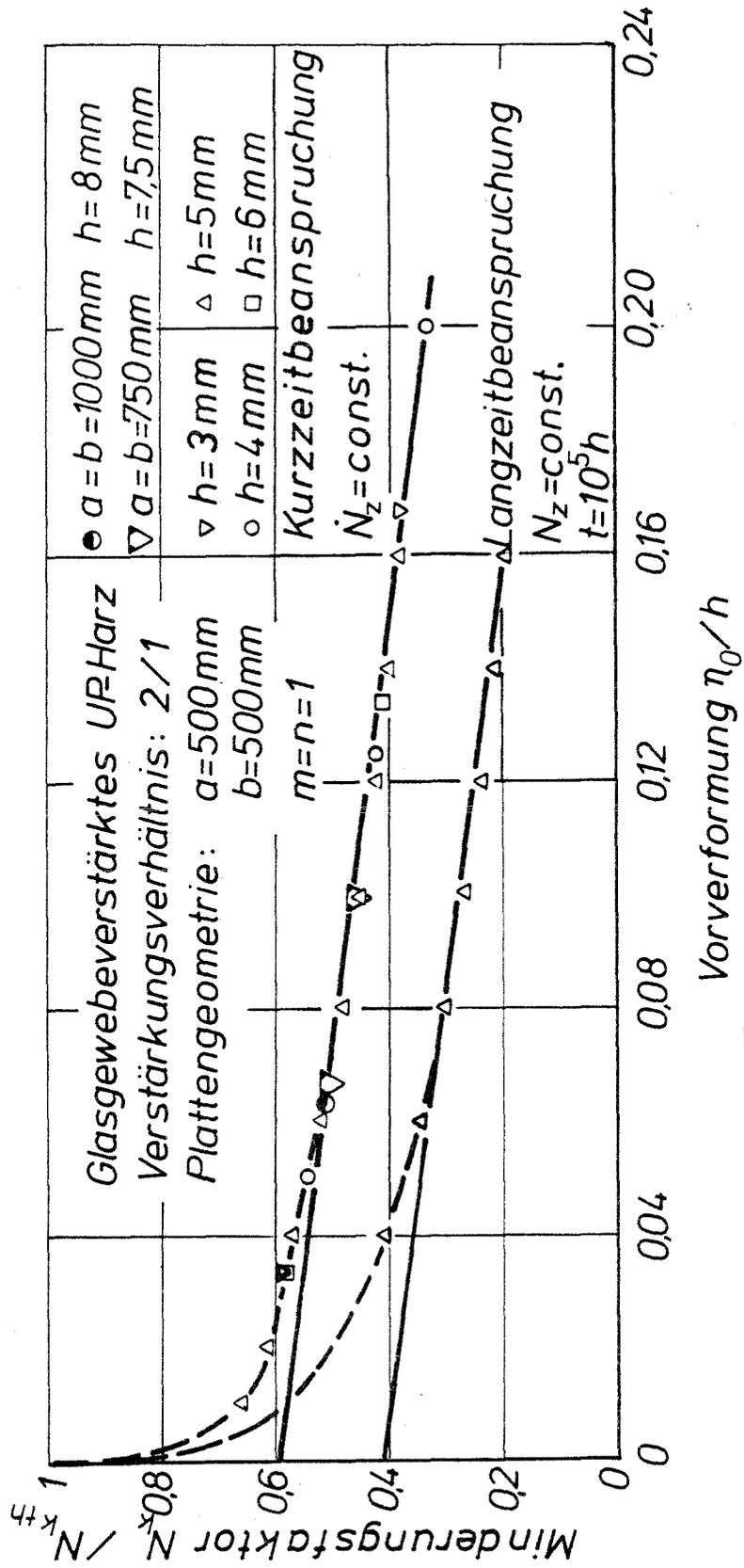


Bild 101: Maximale Randfaserdehnung  $\epsilon_z(0, h/2, 0)$   
 (berechnet nach Meffert, Derek, Menges)



**Bild 102:** Kritische Streckenlast als Funktion der Verformung (nach Meffert, Derek, Menges)

Abb.102 zeigt den relativen Abfall der kritischen Belastung vorgekrümmter Platten bezogen auf die kritische Belastung einer ideal ebenen Platte mit zunehmender Vorkrümmung  $\eta_0$ . Die Vorkrümmung ist jeweils auf die Plattendicke normiert. Es wird deutlich, daß Platten unterschiedlicher Geometrien bei gleichartiger Belastung einer Funktion folgen, die sich zumindest im Bereich höherer Vorkrümmungen ( $\eta_0/h \geq 0,04$ ) sehr gut durch eine Gerade abschätzen läßt. Die Ergebnisse zeigen, daß die Theorie der kritischen Stauchung bei vorgekrümmten orthotropen Platten von der analytischen Betrachtung her nicht gültig ist. Der Grund ist darin zu sehen, daß in die Berechnung des Stabilitätsverhaltens die richtungsabhängigen Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen sowie der Schubmodul jeweils mit unterschiedlichen Zeitabhängigkeiten eingehen. Der Abfall der Stauchung, die im o. g. Sinne als kritisch berechnet wird, ist zum Teil jedoch sehr gering, daß für eine ingenieurmäßige Betrachtung von orthotropen Laminaten eine grobe Abschätzung mit der Theorie der kritischen Stauchung möglich sein mag. In Abb. 103 werden für einige Beulprobleme reduzierte (gemittelte) Ersatzmoduln vorgeschlagen, die für eine abschätzende Betrachtung verwendet werden können.

## Mittelwerte für den Modul $M$ bei der Beulberechnung von anisotrop aufgebauten Zylinderschalen

Schale + Belastungsform	Wickelmuster	Anisotropieverhältnis + Harz	gemittelter Schalenmodul $M$	Quelle
	 $t_1 = t_2 = 1/2$	$0^\circ, 90^\circ$ weiches Harz $T > ET$	$\sqrt{\frac{2\hat{G}_{xy} \sqrt{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}}{1 - \sqrt{\hat{\nu}_{xy} \cdot \hat{\nu}_{yx}}}}$	A. Puck u. CH. Ruegg [13]
	 $t_1 = t_2 = 1/2$	$0^\circ, 90^\circ$ hartes Harz $T < ET$	$\sqrt{\frac{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}{1 - \hat{\nu}_{xy} \cdot \hat{\nu}_{yx}}}$	A. Puck u. CH. Ruegg [13]
	 $t_1 \neq t_2$	$0^\circ, 90^\circ$ hartes Harz	$\sqrt{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}$	C.S. Wang [14] V. Schulz [15] B. Schlehöfer [16]
	 $t_1 = t_2 = t_3 = 1/3$	$\pm 30^\circ, 90^\circ$ beliebiges Harz	$\sqrt{\frac{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}{1 - \hat{\nu}_{xy} \cdot \hat{\nu}_{yx}}}$	A. Puck u. CH. Ruegg [13]
	 $t_1 = t_2 = t_3 = 1/3$	$\pm 45^\circ, 90^\circ$	$\sqrt{\frac{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}{1 - \hat{\nu}_{xy} \cdot \hat{\nu}_{yx}}}$	A. Puck u. CH. Ruegg [13]
	 $t_1 \neq t_2$	$0^\circ, 90^\circ$	$\sqrt{\hat{E}_x \cdot \hat{E}_y}$	C.S. Wang [14]
	 $t_1 \neq t_2$	$0^\circ, 90^\circ$	$\left(\frac{E_B^U}{E_Z^U}\right) \frac{3/4 \cdot E_Z^U}{1 - 0,1 \left(\frac{E_Z^A}{E_Z^U}\right)} \cdot \sqrt{\frac{E_Z^A}{E_Z^U}}$	G. Nonhoff [7]

Axial: A    Biegung: B    Umfang: U    Zug: Z

Bild 103: Ersatzmodul für Beulprobleme bei anisotropen Zylinderschalen (nach Menges)

## 6. Literatur

Der Inhalt dieser Konstruktionshilfe stammt aus einer Vielzahl von verschiedenen Arbeiten zum Thema Verbundwerkstoffe. Es erschien zu aufwendig, eine Quellenangabe für jede Formel, Behauptung oder jedes Diagramm zu machen.

An dieser Stelle sollen jedoch in alphabetischer Reihenfolge die wichtigsten Literaturstellen aufgeführt werden, auf die sich diese Arbeit stützt.

- Brintrup, H. Beitrag zum zeitabhängigen Verformungsverhalten und zur Rißbildung orthotrop glasfaserverstärkter ungesättigter Polyesterharze unter ebener Normalbeanspruchung  
Dissertation D  
RWTH Aachen, 1975
- Carlowitz, B. Kunststofftabellen für Typen, Eigenschaften, Halbzeugabmessungen  
Verlag Fritz Schiffmann OHG,  
Bensberg-Frankenhorst
- Dürkop, P. Beuldruck für oberirdische Tanks  
Kunststoffe Bd. 61, 1971, H. 8,  
S. 567
- Förster, R.  
Kraft, G. Vergleich verschiedener Schalenformen dünnwandiger, fasergewickelter Rotationsschalen bei Dimensionierung auf Rißbildung  
Kunststoffe 62 (1972), H. 9
- Förster, R. Experimentelle Untersuchungen an optimal ausgelegten dreischichtigen Wickelrohren aus Glasfaser/Kunststoff unter Innendruck  
Kunststoffe 62 (1972), S. 881 ff.
- Förster, R. Grundlagen der Optimierung von Mehrschichtverbunden aus faserverstärkten Werkstoffen  
Kunststoffe 62 (1972), S. 57 ff.

- Förster, R.  
Knappe, W. Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Reißbildungsgrenze an zweischichtigen Wickelrohren aus Glasfaser/Kunststoff unter Innendruck  
Kunststoffe 61 (1971), S. 583 ff.
- Förster, R.  
Knappe, W. Spannungs- und Bruchanalyse an Glasfaser/Kunststoff-Wickelkörpern  
Kunststoffe 60 (1970), S. 1053
- Gaube, E.  
Menges, G. Knicken und Beulen von thermoplastischen Kunststoffen am Beispiel des Hartpolyäthylens  
Kunststoffe 58 (1968), S. 153 ff., S. 642 ff.
- Hollister, Thomas Fibre reinforced Materials  
Elsevier Publishing Co. Ltd., New York, 1966
- Jones, R. M. Mechanics of Composite Materials  
Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1975
- Menges, G.  
Brintrup, H. Kunststofftechnologie  
Vorlesung an der RWTH Aachen
- Menges, G.  
Thebing, U. Grundsatzprobleme der Faserverbundwerkstoffe mit Kunststoffen  
Unveröffentlichter Vortrag des IKV
- Menges, G.  
Thebing, U.  
Enderle, W. Konstruktionsfibel Teil I  
Eine Bemessungsgrundlage für isotrope und homogene Kunststoffe  
Abschlußbericht zu einem Forschungsvorhaben des FKM
- Menges, G.  
Franken, H. W. Einfluß von Bauteilungenauigkeiten auf das Stabilitätsverhalten  
Kunststoffe 62 (1972), S. 309 ff.



- Roskothen, H. J.                      Untersuchungen zur Dimensionierung  
von Bauteilen aus Kunststoffen  
Dissertation D 82, RWTH Aachen, 1974
- Schreyer, G.                            Konstruieren mit Kunststoffen  
Carl Hanser Verlag, München, 1972
- Schneider, E.                          Berechnung und Gestaltung hochbean-  
spruchbarer Bauteile aus GFK  
VDI-Z., 115, (1973) Nr. 5
- Schneider, W.                          Wärmeausdehnungskoeffizienten und  
Wärmspannungen von Glasfaser/Kunst-  
stoff-Verbunden aus unidirektionalen  
Schichten  
Kunststoffe 61 (1971), S. 273 ff.
- Stöckert, K.                            Kunststofflexikon  
Carl Hanser Verlag, München, 1958
- Taprogge, R.                            Konstruieren mit Kunststoffen  
VDI-Taschenbuch T21  
VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf
- Thebing, U.                             Beitrag zur Dimensionierung von GF-UP  
unter wechselnden Belastungen  
Dissertation D 82, RWTH Aachen, 1979