

Numerische Untersuchungen zur  
Normenoptimierung mit besonderer  
Berücksichtigung von  
Lastkombinationsregeln

**T 1210**

T 1210

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

## Schlußbericht

NUMERISCHE UNTERSUCHUNGEN ZUR NORMENOPTIMIERUNG

mit besonderer Berücksichtigung von Lastkombinationsregeln

B. Fießler

gefördert vom Institut für Bautechnik, Berlin, Az.: IV/1-5-143/77  
und der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Sonderforschungsbe-  
reich 96, Teilprojekt A 5.

Leiter des Forschungsvorhabens:

Prof. Dr.-Ing. Herbert Kupfer

Dr.-Ing. Rüdiger Rackwitz

November 1983

# INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1 Einleitung	1
2 Bemessungswerte einzelner Lasten	4
2.1 Vorbemerkung	4
2.2 Einzelne Lasten und ihre stochastischen Eigenschaften	4
2.3 Bemessungswerte	5
3 Bemessungswerte von Lastkombinationen	7
3.1 Definition und Vorkommen einer Lastkombination	7
3.2 Bemessungswert einer Lastkombination	12
3.3 Definition und Anwendung der Kombinationsfläche	15
3.4 Bestimmung allgemeiner Kombinationsflächen	20
3.5 Eigenschaften einer Kombinationsfläche (unter dem Kriterium $P(X > B_x) < P_{\bar{u}}$ )	22
3.5.1 Vorbemerkung zum Bemessungskriterium	
3.5.2 Randtangenten der Kombinationskurve	
3.5.3 Kombinationskurven von günstig und ungünstig wirkenden Lastkombinationen	
3.5.4 Einflüsse der Kombinationskurven auf die Abminderungen	
3.6 Stochastische Übertragungsfaktoren	32
3.6.1 Ursprung und Natur der stochastischen Übertragungsfaktoren	
3.6.2 Zum Einfluß stochastischer Übertragungsfaktoren auf die Kombinationsfläche	
4 Kombinationsregeln	38
4.1 Stellung der Kombinationsregeln im Bemessungsablauf; Anforderungen	38
4.2 Abbildung einer Kombinationsregel als Regelfläche im Raum der Übertragungsfaktoren	42
4.3 Untersuchung bekannter Kombinationsregeln	45
4.3.1 CAF-Regel	
4.3.2 Vorschlag von Turkstra/Madsen	
4.3.3 LRF-Regel	
4.3.4 DIN 1050	
4.4 Empfehlung	53
4.5 Kombinationsregel für mehrfache Kombinationen	56
4.6 Anwendungsbeispiel	62
4.7 Kombinationsregel für die Kombination von vielen gleichartigen Lasten ("Hochhauslasten")	67
5 Zusammenfassung	75

Anhänge:

	<u>Seite</u>
A    Literatur	79
B    Analytische Bestimmung der Kombinationsfläche bei normalverteilten, zeitinvarianten Lasten	81
C    Steigung der Randtangente an die Kombinations- kurve im Punkte ( $c_1 = 0$ , $c_2 = 1$ )	85
D    Gegenseitige Beeinflussung mehrerer Abminde- rungsfaktoren, die scheinbar nur auf je eine Last bezogen sind	93
E    Gegenüberstellung von Bemessungswerten ermittelt mit Wichtungsfaktoren nach Pottharst bzw. nach Abschnitt 4.7	95

## 1 Einführung

Zur Festlegung von Lasten für die Bemessung von Tragwerken dienen die einschlägigen bautechnischen Vorschriften, in Deutschland vor allem die DIN 1055 sowie weitere Normen wie die DIN 1072 für die Lastannahmen auf Straßen- und Wegbrücken. In den Vorschriften sind die Bemessungswerte der Lasten und Merkmale wie z.B. die Art ihrer Einwirkung (ständig oder nicht ständig, vorwiegend ruhend oder nicht vorwiegend ruhend) festgelegt. Zwar sind die Eigenschaften der Lasten selten deterministisch, sondern meist zufällig, doch mit der Festlegung der an sich zufälligen Eigenschaften und ausreichend ungünstiger Bemessungswerte soll eine einfache und sichere Bemessung ermöglicht werden.

Bauwerke werden in aller Regel nicht von einer einzigen Last allein, sondern von mehreren Lasten wie Eigengewicht, Verkehrslasten, Windlast usw. zugleich beansprucht. Zur Ermittlung einer Beanspruchung für die Bemessung sind sie in geeigneter Weise zu kombinieren. Bemessungswerte solcher Lastkombinationen werden vielfach durch bloßes Summieren von Bemessungswerten der einzelnen Lastanteile ermittelt. Demgegenüber käme man zu anderen Bemessungswerten für die Lastkombinationen, wenn man diese Werte unter Berücksichtigung der zufälligen Eigenschaften nach den gleichen Prinzipien ermittelte, wie die der einzelnen Lasten, weil z.B. das Zusammentreffen zweier oder mehrerer Spitzenwerte sehr viel weniger wahrscheinlich ist als das Auftreten eines einzelnen Spitzenwertes.

Um verbesserte Bemessungswerte für Lastkombinationen zu finden, sind Lastkombinationsregeln das einer Vorschrift gemäße Mittel.

Bisher bieten die Vorschriften nur wenige, auf spezielle Anwendungen beschränkte Kombinationsregeln. Hier ist die Regel zur Kombination von Geschoßlasten nach DIN 1055, Bl. 3, Abschn. 9 zu nennen. Auch die im Stahlbau nach DIN 1050 geübte Unterteilung in Lastfälle H und HZ wird heute als Kombinationsregel

verstanden, obwohl sie ursprünglich als "Prämie" für sorgfältige Bemessung gedacht war [10]. Neuere Kombinationsregeln gibt es für die Kombination der Lasten Wind und Schnee nach DIN 1055, Bl. 4, Abschn. 3 bzw. DIN 1055, Teil 5, Abschn. 5. Zur Herleitung der zuletzt genannten Regel wurden jüngste Erkenntnisse der Zuverlässigkeitstheorie benutzt. Diese Theorie wird auch herangezogen zur Entwicklung von Kombinationsregeln, die derzeit auf nationaler und internationaler Ebene diskutiert werden, wie etwa die Regel der deutschen Rahmenrichtlinie [19], um nur ein Beispiel zu nennen.

Eines der wesentlichen Merkmale der heutigen Zuverlässigkeitstheorie ist ihr Eingehen auf die Tatsache, daß Funktionen von zufälligen Variablen wiederum Zufallsvariablen sind. Solche Verhältnisse liegen regelmäßig in Bemessungsgleichungen vor, die als Funktionen von zufälligen Variablen wie Baustofffestigkeiten, Lasten, geometrischen Größen usw. aufzufassen sind. Ein Beispiel für eine derartige Funktion ist die Summe von inneren und äußeren Momenten, die von verschiedenen Zufallsvariablen abhängen können. Die Kenntnis der zufälligen Eigenschaften der Funktion ist eine der Voraussetzungen zur Beurteilung der Bauwerkszuverlässigkeit. Man will daher mit Hilfe der Zuverlässigkeitstheorie diese Eigenschaften in Erfahrung bringen und ihre Auswirkungen verfolgen.

Auch eine Lastkombination ist eine Funktion von zufälligen Variablen. Sie fand in den letzten Jahren starkes Interesse, wie Madsen's Übersicht über viele der diesbezüglichen Arbeiten belegt [8]. In ihnen wurden zahlreiche Kombinationsverfahren entwickelt, die insbesondere der Zeitveränderlichkeit von Lasten Rechnung tragen.

Die derzeit in den Normenentwürfen am weitesten verbreitete Kombinationsregel wurde aus einem dieser Kombinationsverfahren heraus entwickelt, nämlich aus der Turkstra-Regel [13]. Sie ist auf die Zeitveränderlichkeit der Lasten abgestellt, indem

sie Fraktilwerte aus Extremwertverteilung und "Augenblickswertverteilungen" zueinander ins Verhältnis setzt. Damit erhält die Zeitveränderlichkeit eine Schlüsselrolle gegenüber allen anderen Einflüssen, denen der sonstigen zufälligen Eigenschaften und denen des Zuverlässigkeitsanspruches. Wie weit andere Einflüsse zur Geltung kommen, hängt von der Zeitveränderlichkeit ab. Ohne Zeitveränderlichkeit können sie überhaupt nicht zur Geltung kommen, denn dann sind die beiden erwähnten Fraktilwerte gleich, ihr Verhältnis also Eins. Stochastische Abhängigkeit zwischen den Lasten kann sich in dieser Regel überhaupt nicht geltend machen, obwohl gerade diese - man denke an eine stark ausgeprägte Abhängigkeit zwischen den zu kombinierenden Lasten - das Ergebnis sogar zur ungünstigen Seite verschieben kann.

Die Absicht dieser Arbeit ist es, einfachere, praxisgerechte Kombinationsregeln, in denen alle wichtigen Einflüsse zur Geltung kommen, herzuleiten.



## 2 Bemessungswerte einzelner Lasten

### 2.1 Vorbemerkung

Dieser Abschnitt schafft mit der Betrachtung einzelner Lasten den Ausgangspunkt für die nachfolgende Betrachtung der Lastkombinationen. Die hierzu aufgeführten Einzelheiten über Eigenschaften und Bemessungswerte einzelner Lasten stellen nur ein grobes, unvollständiges Gerüst dar. Für eine umfassendere Darstellung wird auf die Literatur verwiesen. Hier bieten Ellingwood/Galambos/McGregor/Cornell [ 4 ] eine ausführliche Darstellung neuesten Standes einschließlich weiterführender Literaturhinweise. In diesem bekannten Rahmen bewegt sich die folgende Darstellung. Hiervon weicht nur die rein formale Darstellung des Bemessungswertes nach Gl.(2.1) ab.

### 2.2 Einzelne Lasten und ihre stochastischen Eigenschaften

Nach DIN 1080 Teil 1, Abschn. 3.4., ist eine Last eine von außen auf ein Tragwerk einwirkende Kraft, soweit sie keine Reaktionskraft ist. Im weiteren soll zur Vereinfachung auch eine auf eine Bezugsgröße bezogene Kraft, die sonst die genannten Eigenschaften besitzt, einfach als Last bezeichnet werden, da sie in der Anwendung mit einem Wert in der Dimension der Bezugsgröße multipliziert wird und so zu einer wirklichen Last wird.

Verschiedene Lasten, die am selben Tragwerk angreifen und nach Ursache und Herkunft nicht vollständig voneinander abhängig sind, sollen als verschiedene einzelne Lasten gelten. Mit anderen Worten: Als einzelne Last soll eine Last gelten, die nicht in Auftreten und Höhe gleichzeitig mit irgendeiner anderen, auf das gleiche Tragwerk einwirkenden Last mittels einer deterministischen Funktion verknüpft ist; dies verlangt jedoch nicht, daß verschiedene einzelne Lasten stochastisch unabhängig sein müssen. Ein Beispiel für deterministisch verknüpfte Lasten sind die hydrostatischen Drücke auf verschiedene Teile des gleichen Flüssigkeitsbehälters. Die "einzelne Last" ist von der "Einzellast" zu unterscheiden, unter der üblicherweise eine in einem Punkt konzentriert angreifende Last verstanden wird.

Die Lasten sind in der Regel stochastischer Natur. Nichtstochastische Lasten können als Grenzfälle von stochastischen Lasten verstanden werden. Die stochastischen Lasten werden allgemeingültig und umfassend durch stochastische Prozesse beschrieben; deren Beschreibungsmittel können etwa Augenblicks- verteilung und Autokorrelationsfunktion sein. Indes gelingt es selten, das reale Verhalten von Lasten durch stochastische Prozesse richtig zu erfassen, sei es, weil die Daten nicht im ausreichenden Umfang verfügbar sind, sei es, weil die realen Prozesse mathematisch nicht formuliert und behandelt werden können. Daher muß den Lasten im allgemeinen ein Modell ihres stochastischen Prozesses zugewiesen werden, das die vorgenannten Schwierigkeiten vermeidet und zugleich den Erfordernissen des jeweiligen Einsatzbereiches gerecht wird.

### 2.3 Bemessungswerte

Ein Bemessungswert ist nach allgemeinem Verständnis ein Wert einer Variablen, der bei der Bemessung für die Variable in die mathematische Funktion des mechanischen Modells eingesetzt wird. Die mathematische Funktion beschreibt das mechanische Modell einer vorliegenden Bemessungssituation derart, daß der sich nach Einsetzen von Bemessungswerten ergebende Funktionswert aussagt, ob das Bemessungsziel erreicht wird. Bemessungsziel ist es, die Anforderungen zu erfüllen, welche an das Tragwerk hinsichtlich Sicherheit und Wirtschaftlichkeit gestellt werden.

Die Bemessungswerte sollen so gebildet werden, daß sie in allen möglichen Bemessungssituationen zur richtigen Aussage führen. Sie werden deshalb grundsätzlich vom Bemessungsziel und von den stochastischen Eigenschaften der Variablen bestimmt; sie können weiter beeinflußt werden durch nähere Kenntnis der Bemessungssituationen (z.B. durch deren Klassifizierung) oder durch Beachtung der Systemeigenschaften des Tragwerkes.

Die Gesamtheit der vorhandenen Einflüsse auf den Bemessungswert soll in dieser Arbeit in die stochastischen Eigenschaften der jeweiligen einzelnen Variablen und in die sonstigen Einflüsse unterteilt werden. Die sonstigen Einflüsse münden in das Bemessungskriterium, das die zur Bemessungswertbestimmung erforderlichen Verfahrensweisen liefert. Die Unterteilung - die zunächst willkürlich erscheinen mag - wird sich später bei der Betrachtung der Lastkombinationen in Abschnitt 3 als nützlich erweisen. Einstweilen erlaubt sie, den Bemessungswert durch folgendes Funktional auszudrücken:

$$B_x = B(X; Kr) \quad (2.1)$$

d.h. der Bemessungswert  $B_x$  der Zufallsvariablen  $X$  ist ein Funktional der stochastischen Eigenschaften von  $X$  und des Bemessungskriteriums  $Kr$ .

Ein Beispiel soll eine praktische Ausformung von Gl.(2.1) zeigen:

Im Bemessungskriterium sei festgelegt, daß der Bemessungswert mit Wahrscheinlichkeit  $P$  nicht überschritten werde. Die Variable  $X$  besitze die Verteilung  $F(\cdot)$ . Dies führt zu:

$$F(B_x) = 1 - P$$

oder

$$B_x = F^{-1}(1 - P)$$

### 3 Bemessungswerte von Lastkombinationen

#### 3.1 Definition und Vorkommen einer Lastkombination

Unter Lastkombination wird im folgenden eine Summe verstanden, deren Glieder aus zufälligen, multiplikativ mit Übertragungsfaktoren verknüpften Lasten bestehen. Bezeichnet man die Summe mit  $Y$ , die Lasten mit  $X_i$  und die Übertragungsfaktoren mit  $c_i$ , läßt sich schreiben

$$Y = \sum c_i X_i \quad (3.1)$$

Die Großschreibung von  $Y$  und  $X_i$  soll besagen, daß es sich um Zufallsvariable handelt.  $Y$  ist deshalb eine Zufallsvariable, weil es eine Funktion der zufälligen Lasten  $X_i$  ist. Die Übertragungsfaktoren  $c_i$  werden zunächst als deterministische Variablen angenommen und daher klein geschrieben. Später im Abschnitt 3.6 werden auch sie als zufällige Variablen betrachtet.

Die Lasten sind als einzelne Lasten für sich bereits in Abschnitt 2 vorgestellt worden; ihre stochastischen Eigenschaften werden hier als bekannt vorausgesetzt und sind in der Norm in geeigneter Weise festgeschrieben. Als weitere Beschreibungsmerkmale treten jetzt noch die stochastischen Abhängigkeiten der einzelnen Lasten untereinander hinzu. Die stochastischen Eigenschaften der Lastkombination gehen ausschließlich und eindeutig aus denen der an der Kombination beteiligten einzelnen Lasten (und evtl. Übertragungsfaktoren) und aus ihrer stochastischen Abhängigkeitsstruktur hervor.

Die Lastkombination soll Lasten verschiedenen Ursprungs enthalten. Andernfalls würde ihre Behandlung im weiteren zwar auch zum richtigen Ergebnis führen, jedoch unnützen Aufwand kosten, da eine einfache Addition ihrer Bemessungswerte schon das gewünschte Ergebnis ist. Beispielsweise sind Stockwerkslasten im allgemeinen verschiedenen Ursprungs, auch wenn sie gleicher Art oder sogar stochastisch abhängig sind. Gleichen Ursprungs sind etwa die Glieder einer Summe von Lastwirkungen, die der

Wind über verschiedene Angriffsflächen hervorruft. Der verschiedene Ursprung zweier Lasten findet seinen wahrscheinlichkeitstheoretischen Ausdruck darin, daß sie nicht vollständig stochastisch abhängig sind.

Die Festlegung auf die Summe ist eine Einschränkung; nur gleichsinnig wirkende Lasten werden behandelt. Die Behandlung von gegensinnig wirkenden Lasten folgt den üblichen Regeln für beanspruchende und widerstehende Größen.

Dagegen darf die Lastkombination als ganzes sowohl günstig als auch ungünstig wirken. Eine Last(-kombination) gilt in einer Bemessungssituation als ungünstig wirkend, wenn die Bemessung nach einem zu hohen Bemessungswert konservative Ergebnisse liefert; andernfalls ist die Last(-kombination) günstig wirkend. Die Eigenschaft "günstig/ungünstig wirkend" ergibt sich also aus dem Zusammenspiel von Last(-kombination) und Bemessungssituation.

Obwohl viele der weiteren Überlegungen und Beispiele nur für ungünstig wirkende Lastkombinationen durchgeführt werden, gelten sie entsprechend nach geeigneten, meist unschwierigen Umkehrungen auch für günstig wirkende Kombinationen. Beispielsweise sind die in Abschnitt 4 hergeleiteten Kombinationsfaktoren bei ungünstig wirkenden Kombinationen in der Regel "Abminderungsfaktoren" mit Werten kleiner Eins, während sie bei günstig wirkenden Kombinationen in der Regel zu "Erhöhungsfaktoren" mit Werten größer Eins werden.

In der vorliegenden Definition ist die Lastkombination etwas allgemeiner gefaßt als häufig in der Literatur anzutreffen (siehe etwa Larrabee [7]). Sie ist nicht auf zeitveränderliche Lasten beschränkt, sondern bezieht zeitunveränderliche Lasten und als Grenzfall sogar deterministische Lasten mit ein. Bemerkenswert ist schließlich der manchmal uneinheitliche Wortgebrauch; einmal Lastkombination im Sinne eines Vorganges, das andere Mal im Sinne eines Zustandes. Hier soll der Begriff im letzteren Sinne benutzt werden.

Die Lastkombinationen treten in Bemessungsgleichungen auf. Hierbei müssen das mechanische Modell des Tragwerks und das Lastbild vorausgesetzt sein.

Das Lastbild zeigt Größen, Richtungen und Eintragungsorte der einwirkenden Lasten. In der vorliegenden Arbeit werden Richtungen und Eintragungsorte als fest angenommen; lediglich die Lasthöhen werden als zufällig betrachtet. Natürlich ist bei zufälligen Richtungen oder Eintragungsorten der Lasten, wie z.B. auf Brücken, auch die Wahl dieser Merkmale des Lastbildes ein zuverlässigkeitstheoretisches Problem. Diesbezügliche Untersuchungen finden sich etwa in [6]. Indes entspricht die Ermittlung der Lastkombination nach Vorgabe des Lastbildes hinsichtlich Richtungen und Eintragungsorten dem bisherigen Vorgehen, wobei unter Umständen der gesamte Vorgang mit jeweils veränderten Lastbildern wiederholt wird. Daher sind die im folgenden gewonnenen Ergebnisse zur Lastkombination bereits ohne zuverlässigkeitstheoretische Behandlung aller zufälligen Eigenschaften eines Lastbildes im Rahmen des bisherigen Vorgehens anwendbar.

Erscheinungsformen der Lastkombination und ihr Zusammenhang mit Lastbild und mechanischem Modell sollen an drei Beispielen erläutert werden. Zunächst ein Stabwerk mit einer Reihe von Lasten nach Bild 3.1

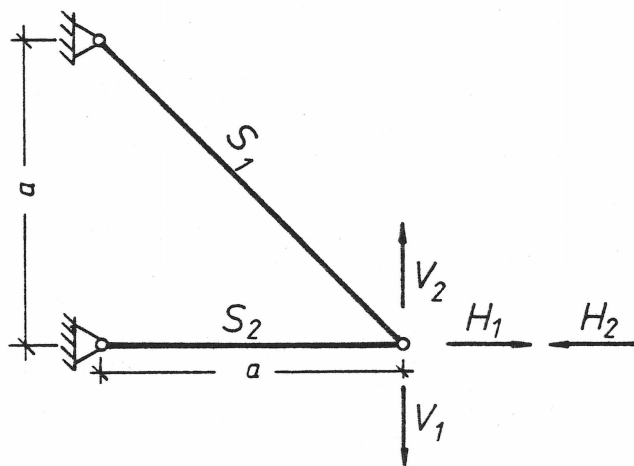


Bild 3.1: Stabwerk

Die Stabkräfte sind hier

$$S_1 = \sqrt{2} \cdot V_1 - \sqrt{2} V_2$$

und

$$S_2 = - V_1 + V_2 + H_1 - H_2$$

Hier liegt in der Bemessungsgleichung für Stab 1 keine Lastkombination vor, weil die Lastwirkungen von  $V_1$  und  $V_2$  gegenseitig sind. Dagegen treten in derjenigen von Stab 2 zwei Kombinationen gleichzeitig auf, nämlich

$$Y_1 = V_1 + H_2$$

und

$$Y_2 = V_2 + H_1$$

Welche der beiden nun als günstig und welche als ungünstig anzusehen ist, hängt davon ab, ob der Stab  $S_2$  auf Zug oder auf Druck bemessen wird. Oft müssen beide Nachweise geführt werden, vor allem wenn Zug- und Druckfestigkeit von  $S_2$  unterschiedlich sind.

Das zweite Beispiel sei der Rahmen mit dem Lastbild nach Bild 3.2

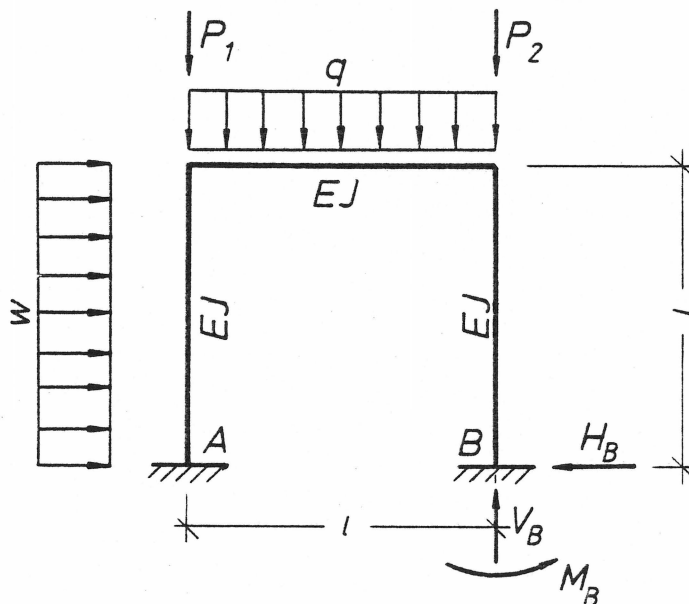


Bild 3.2: Eingespannter Rahmen

Zu untersuchen sind die Schnittgrößen  $M_B$ ,  $V_B$  und  $H_B$  im Einspannpunkt B. Dies sind, wenn das Superpositionsprinzip gilt und Verformungen nicht berücksichtigt werden:

$$M_B = \frac{1^2}{36} q + \frac{31 \cdot 1^2}{252} w$$

$$V_B = \frac{1}{2} q + P_2 + \frac{1}{7} w$$

$$H_B = \frac{1}{12} q + \frac{5 \cdot 1}{24} w$$

Hier treten in  $M_B$  und  $H_B$  jeweils eine zweifache, in  $V_B$  eine dreifache Lastkombination auf. Die Größen  $q$ ,  $w$  und  $P_2$  sind die Lasten, die nicht dimensionsgleich sein müssen. Die Größen  $\frac{1}{2}$ ,  $1$  und  $\frac{1}{7}$  sind die Übertragungsfaktoren in der Bemessungsgleichung für  $V_B$ ; auch sie müssen nicht dimensionsgleich sein, können u.U. dimensionslos sein. Erst die Produkte von Übertragungsfaktoren und Lasten müssen innerhalb einer Kombination selbstverständlich dimensionsgleich sein. (Die Lasten  $q$  und  $w$  wurden nicht entsprechend ihrer Eigenschaft als Zufallsvariable mit Großbuchstaben bezeichnet, sondern mit Kleinbuchstaben gemäß der üblichen Bezeichnungsweise für bezogene Lasten.)

Das dritte Beispiel ist die Stütze nach Bild 3.3.

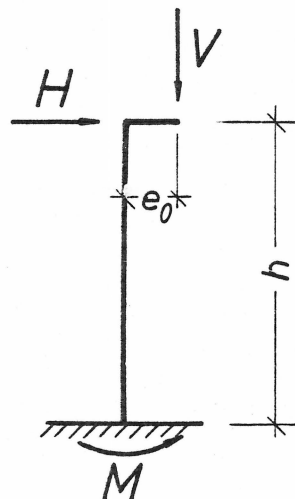


Bild 3.3: Eingespannte Stütze

Die untersuchte Lastwirkung sei das Einspannmoment. Ohne Berücksichtigung der Verformung gilt:



$$M = h \cdot H + e_0 \cdot V ,$$

während mit Berücksichtigung der Verformung gilt:

$$M = h \cdot H + E \cdot V$$

mit

$$E = E(h, H, e_0, V, EJ) .$$

In beiden Formeln tritt eine Lastkombination auf. In der ersten ist der Übertragungsfaktor  $e_0$  deterministisch, in der zweiten ist der Übertragungsfaktor  $E$  eine Funktion von  $h, H, e_0, V$  und der Biegesteifigkeit  $EJ$  und somit selbst eine Zufallsgröße. Wie bereits erwähnt, werden stochastische Übertragungsfaktoren im Abschnitt 3.6 behandelt.

Betrachtet man nun die Funktion  $E = E(.)$  näher, so ist oftmals festzustellen, daß in ihr wiederum ein Ausdruck der Form

$$a \cdot H + b \cdot V$$

auftritt. Auch dies ist eine Lastkombination im definierten Sinne.

Die Lastkombination muß also nicht identisch sein mit einer Lastwirkung. Weiterhin können, wie gezeigt, in einer Bemessungsgleichung mehrere Lastkombinationen auftreten, und zwar sowohl aneinandergereiht wie im ersten Beispiel, als auch ineinander geschachtelt wie im dritten Beispiel.

### 3.2 Bemessungswert einer Lastkombination

Wie in Abschnitt 3.1 ausgedrückt wurde, ist die Lastkombination ebenso wie die einzelne Last eine Zufallsvariable mit eindeutig bestimmten stochastischen Eigenschaften. Diese Feststellung genügt für das Ziel dieser Arbeit. (Für die Arbeit ist insbesondere die oft sehr schwierige Frage der praktischen Bestimmung der Eigenschaften ohne Belang.)

Lastkombination und einzelne Last sind demnach nur nach ihrer Entstehung unterscheidbar, nicht aber nach ihrer Eigenschaft als

stochastische Variable. Der Bemessungswert einer Lastkombination muß folglich auf die gleiche Weise bestimmt werden wie der einer einzelnen Last.

Damit können die Darlegungen von Abschnitt 2 vollständig hierher übernommen werden. Insbesondere kann der Bemessungswert  $B_Y$  der Lastkombination Y nach Art der Gl. (2.1) formuliert werden mit:

$$B_Y = B(Y; Kr) \quad (3.2)$$

$$= B(\sum c_i X_i; Kr) \quad (3.3)$$

Untersuchenswert ist das Problem der Lastkombination und seiner Bemessungswertbestimmung deshalb, weil im allgemeinen die Ungleichung gilt:

$$B_Y \neq \sum c_i B_{X_i} \quad (3.4)$$

Hierzu ein Beispiel, in dem ein wohlbekannter Sachverhalt in dieser Formulierung dargestellt wird.

Gegeben seien zwei normalverteilte, unabhängige und zeitinvariante Lasten  $X_1$  und  $X_2$  mit  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Als Kriterium wird gewählt, daß die Überschreitenswahrscheinlichkeit des Bemessungswertes kleiner sei als  $P_{\ddot{u}}$ . Es gilt somit

$$\Phi\left(\frac{B_{X_i} - m_i}{\sigma_i}\right) = 1 - P_{\ddot{u}} \quad i = 1, 2$$

oder

$$B_{X_i} = m_i + \Phi^{-1}(1 - P_{\ddot{u}}) \cdot \sigma_i \quad (3.5)$$

Hierin sind  $\Phi(\cdot)$  das Normalverteilungsintegral und  $\Phi^{-1}(\cdot)$  seine Inverse.

Für die Summe  $Y = X_1 + X_2$  mit  $m_Y = m_1 + m_2$  und  $\sigma_Y = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$  gilt entsprechend:

$$B_Y = m_Y + \phi^{-1}(1-P_{\ddot{u}}) \sigma_Y \quad (3.6)$$

Da  $\sigma_Y < \sigma_1 + \sigma_2$  ist, ist, falls auch  $\phi^{-1}(1-P_{\ddot{u}}) > 0$ ,

$$B_Y < B_{x_1} + B_{x_2}$$

womit Ungleichung (3.4) bestätigt ist.

Gleichheit zwischen  $\sum c_i B_{x_i}$  und  $B_Y$  tritt immer dann ein, wenn die Elemente des Lastvektors  $\underline{X}$  zu deterministischen Größen "entarten", so daß ohnehin nur feste Zahlen zu summieren sind, oder wenn die Elemente von  $\underline{X}$  vollständig abhängig voneinander sind, d.h. wenn ein beliebiges  $X_j$  durch eine Funktion eines beliebigen  $X_k$  ausgedrückt werden kann, so daß  $Y$  durch eine der Lastgrößen allein repräsentiert werden kann.

Die üblicherweise zu erwartende Ungleichheit führt zur Frage, ob  $B_Y$  größer oder kleiner  $\sum c_i B_{x_i}$  ist. Bei der Kombination ungünstig wirkender Lasten wird häufig

$$B_Y < \sum c_i B_{x_i} \quad (3.7)$$

erwartet aus der Anschauung heraus, daß  $B_{x_i}$  einen selten überschrittenen Wert vertritt und das Zusammentreffen mehrerer solcher Werte äußerst unwahrscheinlich ist. Diese Aussage der Gleichung (3.7) kann nicht allgemeingültig getroffen werden. Als Gegenbeispiel diene folgende Überlegung:

Der Bemessungswert darf nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}}$  überschritten werden. Zwei Lasten  $X_1$  und  $X_2$  seien identisch verteilt mit Werten größer Null und unabhängig. Damit ergibt sich aus  $P(X_i > B_x) = P_{\ddot{u}}$  der Bemessungswert  $B_x$ . Der Wahrscheinlichkeitsinhalt  $P_{\ddot{u}}$  sei bei den Lasten  $X_i$  überwiegend im Bereich  $X_i > 2 \cdot B_x$  enthalten. Durch Zusammenzählen der Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse, bei denen  $X_1 + X_2$  größer  $2 B_x$  ist, nämlich  $(X_1 < B_x \cap X_2 > 2 B_x)$ ,  $(X_1 > 2 B_x \cap X_2 < B_x)$  und  $(X_1 > 2 B_x \cap X_2 > 2 B_x)$ , erhält man die Wahrscheinlichkeit  $P(X > 2 B_x) = (1-P_{\ddot{u}}) P_{\ddot{u}} + P_{\ddot{u}}(1-P_{\ddot{u}}) + P_{\ddot{u}}^2$ , die damit größer ist als die zugelassene Wahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}}$ .

Die Gl.(3.7) läßt sich offenbar nur von Lasten einhalten, deren gemeinsame Verteilungen gewisse, vom verwendeten Bemessungskriterium beeinflusste Anforderungen erfüllen. Gilt das oben verwendete Kriterium mit vernünftigen Werten für  $P_{\ddot{u}}$ , so gehören normalverteilte Lasten dazu, wie obiges Beispiel zeigt. Weiterhin kann dann gezeigt werden, daß auch rechteck-, gamma- oder gumbelverteilte Lasten dazugehören.

Diese nicht nur im Zusammenhang mit Lastkombinationen wichtige Frage wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt, da die weiteren Überlegungen die Gültigkeit von Gl.(3.7) nicht voraussetzen. Eine Ausnahme wird in Abschnitt 4.7 gemacht.

### 3.3 Definition und Anwendung der Kombinationsfläche

Vor Einführung der Kombinationsfläche ist noch eine Ergänzung zum Funktional Gl.(3.2) ff. zu machen. Es soll vorausgesetzt werden, daß das Funktional in X homogen ist, d.h.:

$$a B(X;Kr) = B(aX;Kr) \quad (3.8)$$

worin a ein beliebiger reeller Faktor und X eine Zufallsvariable ist. Nach Gl.(3.8) ist der a-fache Bemessungswert der Größe X gleich dem Bemessungswert der Größe a · X. Bei manchen empirischen Formeln, die dimensionsabhängig sind, ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Beispielsweise könnte der Bemessungswert der Betonzugfestigkeit nach DIN 1045, Abschn. 17.6.3 so interpretiert werden, als ob er aus einem Funktional mit der Größe  $\beta_{WN}$  zu ermitteln wäre (wobei die Größe  $\beta_{WN}$  nicht einmal zufällig sein muß):

$$\beta_{WZ} = \sqrt[3]{\beta_{WN}^2}$$

Hierin ist aber  $a \sqrt[3]{\beta_{WN}^2} \neq \sqrt[3]{(a\beta_{WN})^2}$ , womit Gl.(3.8) nicht erfüllt ist.

Nun wird die Kombinationsfläche definiert:

Eine Kombinationsfläche ist im Raum der Übertragungsfaktoren  $c_i$  definiert und wegen der Beschränkung auf gleichsinnig wirkende Lasten nur dort, wo alle  $c_i$  gleiches Vorzeichen aufweisen. (Es ist sogar ausreichend, nur positive  $c_i$  zu betrachten.) Sie ist der geometrische Ort aller Punkte  $\underline{c}$ , für die gilt:

$$B\left(\sum c_i \frac{X_i}{B_{X_i}} ; Kr\right) = 1 \quad (3.9)$$

Die Fläche nach Gl.(3.9) enthält alle Achsenpunkte ( $c_i = 1$ , alle  $c_j = 0$  mit  $j \neq i$ ; für alle  $i$ ), denn dann wird Gl.(3.9) zu:

$$B\left(\frac{X_i}{B_{X_i}} ; Kr\right) = 1$$

und mit Gl.(3.8) zu:

$$\frac{1}{B_{X_i}} B(X_i ; Kr) = 1$$

worin  $B(X_i ; Kr)$  nach Gl.(2.2) gleich  $B_{X_i}$  ist.

Die Kombinationsfläche ist gemäß Gl(3.9) abhängig von den Übertragungsfaktoren  $c_i$ , den stochastischen Eigenschaften der einzelnen Lasten  $X_i$  und dem gewählten Kriterium  $Kr$ , das seinerseits von anderen Einflüssen abhängig ist - je nach Art von  $Kr$  etwa von Zuverlässigkeitsanforderungen oder von den stochastischen Eigenschaften sonstiger Basisvariabler. Die Bemessungswerte  $B_{X_i}$  werden nach Gl.(2.1) bestimmt und sind daher von den gleichen eben genannten Einflüssen abhängig. In der zweidimensionalen  $c$ -Ebene ergeben sich selbstverständlich Kombinationskurven statt -flächen; die Kurven können auch als Durchschnitte von Flächen durch Koordinatenebenen aufgefaßt werden.

Zur Demonstration soll nun die Gleichung der Kombinationskurve für das Beispiel aus Abschnitt 3.2 aufgestellt werden:

Vorweg werden die Variationskoeffizienten  $V_i = \sigma_i/m_i$  ( $m_i \neq 0$ ) und das "Sicherheitsniveau"  $k = \Phi^{-1}(1-P_f)$  eingeführt. Damit kann Gl.(3.5) umgeschrieben werden zu:

$$B_{X_i} = m_i (1 + k V_i) \quad (3.10)$$

Für die Parameter  $m_z$  und  $\sigma_z$  der normalverteilten, nach Art der Gl.(3.9) gebildeten Lastkombination

$$z = c_1 \frac{X_1}{B_{X_1}} + c_2 \frac{X_2}{B_{X_2}} \quad (3.11)$$

gelten

$$m_z = c_1 \frac{m_1}{B_{X_1}} + c_2 \frac{m_2}{B_{X_2}} = \frac{c_1}{1+kV_1} + \frac{c_2}{1+kV_2} \quad (3.12)$$

und

$$\sigma_z^2 = \frac{c_1^2 V_1^2}{(1+kV_1)^2} + \frac{c_2^2 V_2^2}{(1+kV_2)^2} \quad (3.13)$$

Gl.(3.9) bestimmt nun

$$B_z = m_z + k\sigma_z = 1 \quad (3.14)$$

oder, Gl.(3.12) und (3.13) eingesetzt,

$$\frac{c_1}{1+kV_1} + \frac{c_2}{1+kV_2} + k \sqrt{\frac{c_1^2 V_1^2}{(1+kV_1)^2} + \frac{c_2^2 V_2^2}{(1+kV_2)^2}} = 1 \quad (3.15)$$

Die Gl.(3.15) ist die Gleichung der Kombinationskurve des gegebenen Beispiels in der  $c_1$ - $c_2$ -Ebene. Sie besitzt außer den Variablen  $c_1$  und  $c_2$  die Parameter Sicherheitsniveau  $k$  und Variationskoeffizienten  $V_1$  und  $V_2$ . So ist ersichtlich, daß die vorliegenden stochastischen Eigenschaften der beiden Lasten und das gewählte Kriterium gemeinsam sowohl analytische Gestalt als auch Parameter der Gl.(3.15) bestimmen. Es ist leicht zu verifizieren, daß für  $c_1 = 0$   $c_2$  zu Eins und für  $c_2 = 0$   $c_1$  zu Eins werden.

Einige Überlegungen zur allgemeinen Bestimmung einer Kombinationsfläche werden später in Abschnitt 3.4 angestellt.

Kombinationsflächen lassen sich zur Ermittlung des exakten Bemessungswertes einer Lastkombination anwenden. Vorauszusetzen

sind die Kenntnis der Kombinationsfläche und der Bemessungswerte  $B_{X_i}$  der einzelnen Lasten  $X_i$ . Gesucht wird der Bemessungswert  $B_z$  der Lastkombination

$$z = \sum d_i X_i \quad (3.16)$$

$B_z$  kann mit Gl.(2.2) allgemein formuliert werden

$$B_z = B(z ; Kr) = B(\sum d_i X_i ; Kr) \quad (3.17)$$

Wegen Gl.(3.8) kann Gl.(3.17) auch geschrieben werden als

$$1 = B(\sum d_i \frac{X_i}{B_z} ; Kr) \quad (3.18)$$

Dieser Ausdruck ist formal der Definitionsgleichung (3.9) der Kombinationsfläche gleich. Da in beiden Gleichungen gleiche  $X_i$  und gleiches  $Kr$  enthalten sind, sind die beiden Gleichungen identisch, wenn gilt

$$\frac{d_i}{B_z} = \frac{c_i}{B_{X_i}} \quad \text{für alle } i \quad (3.19)$$

Sind die Gleichungen (3.19) für alle  $i$  erfüllt, hat die Lastkombination  $\sum d_i \frac{X_i}{B_z}$  den gleichen Bemessungswert wie  $\sum c_i \frac{X_i}{B_{X_i}}$ , also Eins, und demnach die Lastkombination  $z = \sum d_i X_i$  den Bemessungswert  $B_z$ . In den  $n$  Gleichungen nach (3.19) sind  $n+1$  Unbekannte enthalten, nämlich  $n$  Übertragungsfaktoren  $c_i$  und der Bemessungswert  $B_z$ . Über diesen Wert  $B_z$  lassen sich alle  $n$  Gleichungen (3.19) paarweise einander gleichsetzen, woraus man die Verhältnisse  $c_i/c_j$  erhält:

$$\frac{c_i}{c_j} = \frac{d_i B_{X_i}}{d_j B_{X_j}} \quad (3.20)$$

Dadurch wird bereits ein Strahl im  $c$ -Raum festgelegt, der vom Ursprung ausgeht, und auf den der gesuchte Punkt  $\underline{c}$  liegen muß. Die aus der Definition folgende Bedingung, daß  $\underline{c}$  auf der Kombinationsfläche liegt, liefert die fehlende Beziehung. Der Punkt  $\underline{c}$  ist somit der Durchstoßpunkt des gefundenen Strahles nach Gl.(3.20) durch die Kombinationsfläche. Der gesuchte Bemessungswert  $B_z$  ist schließlich:

$$B_z = \frac{d_i}{c_i} B_{X_i} \quad (\text{für beliebiges } i) \quad (3.21)$$

Die Anwendung soll noch am Beispiel der Kombinationsfläche Gl.(3.15) demonstriert werden.

Zunächst sind den Parametern Werte zuzuweisen, damit die Kurve konkretisiert werden kann. Es seien  $V_1 = 0,1$ ,  $V_2 = 0,2$  sowie  $k = 5$  ( $\hat{=} P_f = 2,87 \cdot 10^{-7}$ ). Damit sind nach Gl.(3.10) die Bemessungswerte  $B_{X_1} = 1,5 \cdot m_1$  und  $B_{X_2} = 2 \cdot m_2$  festgelegt. Einsetzen der Parameterwerte in Gl.(3.15) erbringt:

$$\frac{c_1}{1,5} + \frac{c_2}{2} + 5 \sqrt{\frac{0,01 c_1^2}{2,25} + \frac{0,04 c_2^2}{4}} = 1$$

weiter

$$4 c_1 + 3 c_2 + \sqrt{4c_1^2 + 9c_2^2} = 6 \quad (3.22)$$

und nach Quadrieren

$$c_1^2 + 2c_1c_2 - 4c_1 - 3c_2 + 3 = 0 \quad (3.23)$$

Gl(3.22) ist die Gleichung der Kombinationsfläche. Gl.

(3.23) ist eine quadratische Form; ihre Invarianten zeigen, daß es sich um eine Hyperbel handelt. Bild 3.4 zeigt die Kurve Gl.(3.22).

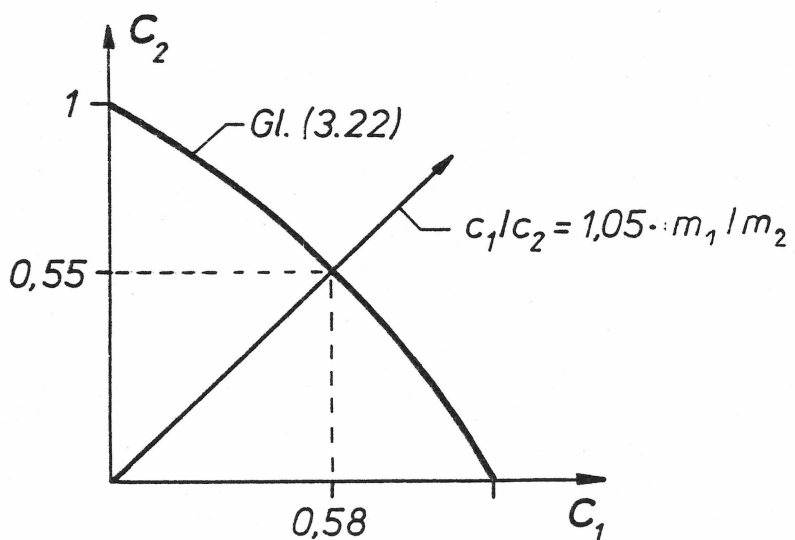


Bild 3.4: Kombinationskurve nach Gl.(3.22)



Nun sei der Bemessungswert der Lastkombination

$$z = 7 X_1 + 5 X_2 \quad (3.24)$$

zu bestimmen. Aus Gl.(3.20) folgt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{7 \cdot 1,5 m_1}{5 \cdot 2 m_2} = 1,05 \frac{m_1}{m_2} \quad (3.25)$$

Im konkreten Fall ist auch das Verhältnis  $m_1/m_2$  bekannt, beispielsweise  $m_1/m_2 = 1$ , woraus  $c_1/c_2 = 1,05$  folgt. Der Strahl, für den dieses Verhältnis zwischen  $c_1$  und  $c_2$  gilt, ist in Bild 3.4 eingezeichnet und schneidet die Kurve im Punkt ( $c_1 = 0,58$ ,  $c_2 = 0,55$ ). Hieraus folgt gemäß Gl.(3.21) endlich der Bemessungswert  $B_z$  mit

$$B_z = \frac{7 \cdot 1,5 m_1}{0,58} = \frac{5 \cdot 2 m_2}{0,55} = 18,18 m_1 \quad (3.26)$$

Als Summe der Bemessungswerte der einzelnen Lasten würde sich ergeben:

$$B_{X_1} + B_{X_2} = 7 \cdot 1,5 m_1 + 5 \cdot 2 m_1 = 20,5 m_1 \quad (3.27)$$

### 3.4 Bestimmung allgemeiner Kombinationsflächen

Eine Kombinationsfläche ist allgemeingültig durch das Funktional Gl.(3.9) definiert. Diese Form genügt indessen nicht zur praktischen Anwendung. Hierzu ist die Kombinationsfläche konkret darzustellen; entweder in Form einer analytischen Funktion oder ersatzweise mittels einer ausreichend großen Anzahl von Flächenpunkten.

Anzustreben ist die Darstellung der Kombinationsfläche mit Hilfe einer analytischen Funktion. Dies gelang etwa im Beispiel des Abschnittes 3.3 mit den Gleichungen (3.15) (mit den Parametern  $V_1, V_2$  und  $k$ ) bzw. (3.22) (mit für die Parameter eingesetzten Werten). Der Anhang B entwickelt die diesem Beispiel übergeordnete Funktion der Kombinationsfläche für ein stochastisches Modell mit beliebig vielen, normalverteilten,

abhängigen und zeitinvarianten Lasten unter Verwendung des gleichen Kriteriums wie im Beispiel, also  $P(\sum c_i X_i / B_{X_i} > 1) < P_{\bar{u}}$ . Die Entwicklung nutzt die Tatsache aus, daß die auftretenden Faltungsintegrale zur Faltung der einzelnen Lasten im vorliegenden Fall einfache analytische Lösungen besitzen.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die formale Gestalt der Funktion von den stochastischen Modellen aller beteiligten Basisvariablen und vom verwendeten Kriterium abhängt. In den meisten Anwendungsfällen sind die stochastischen Lasten nicht normalverteilt, oft auch nicht "zeitinvariant".

In der Folge muß auch die Funktion der Kombinationsfläche eine neue Form annehmen. Ohne besonderen Nachweis soll hier festgestellt werden, daß diese Form in der Regel nicht mehr analytisch handhabbar ist, weil die darin auftretenden Faltungsintegrale bei nicht normalverteilten oder zeitvarianten Lasten nicht analytisch gelöst werden können.

Zu solchen Faltungen steht jedoch eine große Zahl von numerischen Methoden zur Verfügung. Madsen [8] beschreibt einige Methoden für Gauß'sche Prozesse und Erneuerungsprozesse mit beliebiger Impulsform. Wen [16] behandelt die Kombination abhängiger Lasten und Breitung/Rackwitz [3] wenden die Methoden der Laplace-Transformation zur Kombination von rechteckigen Impulsprozessen an.

Allen numerischen Methoden ist gemeinsam, daß die Überschreitungswahrscheinlichkeit  $P$  eines bestimmten Fraktilwertes der Lastkombination iterativ ermittelt werden kann. In Abstimmung darauf kann ein Punkt der Kombinationsfläche auf iterative Weise wie folgt gewonnen werden: Man hält das Verhältnis der  $c_i$  untereinander konstant, etwa durch  $c_i = c^* \cdot c'_i$  mit festen Werten  $c'_i$  und dem variablen Faktor  $c^*$ . Jeder Punkt  $\underline{c}$  liegt damit auf einem gleichen, vom Ursprung ausgehenden Strahl. Die Lastkombination der Definitongleichung (3.9) kann dann geschrieben werden als  $Y = c^* \sum c'_i X_i / B_{X_i}$ . Nun ist der variable Wert

$c^*$  iterativ so zu bestimmen, daß  $Y$  den Bemessungswert 1 erhält. Der Punkt der Kombinationsfläche ist dann  $c^* \cdot \underline{c}'$ . Für einen neuen Punkt verändert man das Verhältnis der  $c_i$  miteinander, also der Richtung des Strahles, auf dem der Durchstoßpunkt durch die Kombinationsfläche gesucht werden soll. In dieser Weise gewinnt man schließlich die Kombinationsfläche punktweise.

Bei Anwendung des oben genannten Kriteriums ( $P(\sum c_i X_i / B_{X_i} > 1) < P_{\ddot{u}}$ ) können die im nächsten Abschnitt untersuchten Randtangente als Konstruktionshilfe herangezogen werden.

### 3.5. Eigenschaften der Kombinationsfläche

(unter dem Kriterium:  $P(X > B_x) < P_{\ddot{u}}$ )

#### 3.5.1 Vorbemerkung zum Bemessungskriterium

In der bisherigen Entwicklung der Kombinationsfläche war - abgesehen vom parallel geführten Beispiel - ein sehr allgemein gehaltenes Kriterium zu erfüllen. Es war in keiner Weise beschrieben oder sonst irgendwie präzisiert worden.

Damit sollte verdeutlicht werden, daß die Definition der Kombinationsfläche nichts mit Art und Eigenschaften des anzuwendenden Kriteriums zu tun hat, daß vielmehr die Definition für jedes beliebige Kriterium gilt.

Anders verhält es sich mit der Gestalt der Kombinationsfläche. Die Gestalt wird - außer durch die stochastischen Eigenschaften der Lasten - selbstverständlich durch Art des Kriteriums und durch die darin verwendeten Parameterwerte geprägt. Demnach muß das zu verwendende Kriterium näher bestimmt sein als bisher, wenn Aussagen über die Gestalt einer Kombinationsfläche getroffen werden sollen.

Deshalb wird jetzt das Kriterium eingeführt, daß bei ungünstig wirkenden Lasten die Überschreitungswahrscheinlichkeit des Bemessungswertes kleiner sei als ein festgelegter Wert  $P$  (und entsprechend bei günstig wirkenden Lasten die Unterschreitungswahrscheinlichkeit). Der Wert  $P$  soll nicht mit den Eigenschaften der Lastkombination variieren. (er mag aber beispielsweise von Anwendungsbereichen (z.B. Bruchsicherheitsnachweise, ...

Gebrauchssicherheitsnachweise), von Baustoffen oder von Bauarten abhängen.)

Natürlich wird jedes andere, und man muß wohl sagen, kompliziertere Kriterium die Kombinationsfläche anders prägen. Aus zwei Überlegungen heraus darf aber erwartet werden, daß andere Kriterien die folgenden Ergebnisse nicht stark verändern und schon gar nicht ins Gegenteil verkehren würden. Zum ersten wird die Gestalt der Kombinationsfläche nicht allein durch das Kriterium geprägt, sondern auch durch die stochastischen Eigenschaften der Lasten; der Einfluß des Kriteriums bleibt also begrenzt. Zweitens verfolgen alle Kriterien letztlich das gleiche Ziel, verschieden sind nur die Wege der Verwirklichung.

Es sei noch besonders hervorgehoben, daß die in Abschnitt 4 entwickelten Lastkombinationsregeln nicht durch die Art des hier gewählten Kriteriums berührt werden.

### 3.5.2 Randtangenten der Kombinationskurve

Die Diskussion der Eigenschaften soll nur an der Kombinationskurve durchgeführt werden. Da jede Kombinationskurve als Durchschnitt einer Kombinationsfläche mit der jeweiligen Koordinatenebene im Raum der Übertragungsfaktoren verstanden werden kann, gelten die Ergebnisse der Diskussion auch für die entsprechenden Schnitte der Kombinationsfläche.

Nachdem Abschnitt 3.5.1 ein bestimmtes Kriterium festgelegt hat, können die Steigungen der zwei Randtangente n der Kombinationskurve berechnet werden. Die Randtangente n berühren die Kombinationskurve in den Punkten  $(c_1 = 1, c_2 = 0)$  und  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$  und sind in Bild 3.5 eingetragen.

Im Anhang C werden die Formeln für verschiedene Fälle abgeleitet. Hier seien nur die Ergebnisse aufgezählt:

- 1) Die zeitinvarianten Lasten  $X_1$  und  $X_2$  besitzen eine beliebige gemeinsame Dichtefunktion. Dann lautet die Formel für die Steigung der Randtangente (vergleiche Bild 3.5):

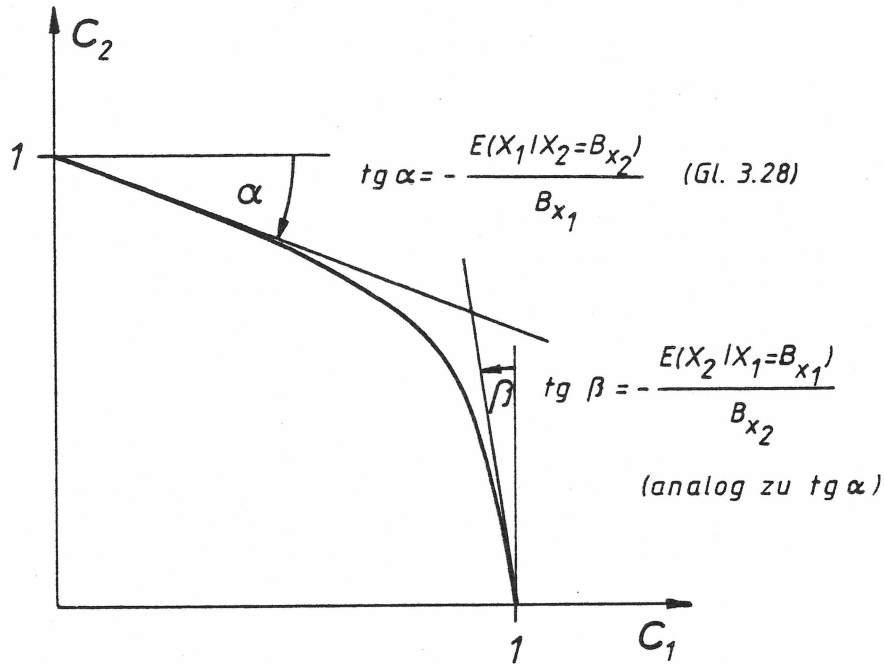


Bild 3.5 Randtangente an eine Kombinationskurve

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{E(X_1 | X_2 = B_{X_2})}{B_{X_1}} \quad (3.28)$$

Gl. (3.28) enthält den bedingten Erwartungswert von  $X_1$  unter der Bedingung  $X_2 = B_{X_2}$ . Sind  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig, vereinfacht sich Gl. (3.28) zu:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{E(X_1)}{B_{X_1}} \quad (3.29)$$

- 2) Die Lasten  $X_1$  und  $X_2$  sind zeitvariant. Ihr Zeitverhalten wird durch zufällige Folgen beschrieben, deren aufeinanderfolgende Realisationen unabhängig voneinander sind. Bekannt sind die Amplitudenverteilungen der einzelnen Realisationen (= "Augenblicksverteilungen") und die Werte  $r_i$  der Zahl der Realisationen.

a)  $r_1 = r_2$

$X_1$  und  $X_2$  können eine gemeinsame Dichtefunktion besitzen, also abhängig sein. Nach Anhang C gilt formal Gl. (3.28), doch ist zu beachten, daß es sich jetzt um den Erwartungswert der Augenblicksverteilung handelt. Dieser muß beispielsweise bei ungünstig wirkenden Lasten und festgehaltenem Bemessungswert  $B_{X_i}$  desto weiter absinken, je höher die Wiederholungszahl  $r_i$  steigt.

b)  $r_1 \neq r_2$

$X_1$  und  $X_2$  müssen jetzt unabhängig sein.

aa)  $r_1 < r_2$

Abgesehen von der verlangten Unabhängigkeit gilt das zu Punkt 2a Gesagte.

bb)  $r_1 > r_2$

Nach Anhang C gilt

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{E_{r_1/r_2}(X_1)}{B_{X_1}} \quad (3.30)$$

Der Erwartungswert  $E_{r_1/r_2}$  bezieht sich auf die Extremwertverteilung der  $r_1/r_2$  Realisationen von  $X_1$ , die in der Zeitspanne anfallen, in der  $X_2$  konstant bleibt..

Bemerkenswert ist in allen Fällen, daß die Steigung der Randtangente im Punkt ( $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$ ), der ja der Lastkombination  $Y = 0 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 = X_2$  entspricht, primär von  $X_1$  abhängt. Sekundär kann die Steigung auch von  $X_2$  abhängen, wenn  $X_2$  den Erwartungswert von  $X_1$  bedingt wie in Gl.(3.28), oder wenn die Wiederholungszahl von  $X_2$  die maßgebliche Extremwertverteilung von  $X_1$  beeinflusst (Fall 2.b.bb).

### 3.5.3 Kombinationskurven von günstig und ungünstig wirkenden Lastkombinationen

In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit einer Kombinationskurve davon untersucht werden, ob die Lastkombination günstig oder ungünstig wirkt. Als Hilfsmittel stehen die Randtangente nach Abschnitt 3.5.2 zur Verfügung. Die Steigung einer Randtangente ist nach den Gln.(3.28) bis (3.30) durch das Verhältnis des (bedingten) Erwartungswertes einer einzelnen Last zu ihrem Bemessungswert bestimmt. Es genügt hier, die Stellung des (bedingten) Erwartungswertes zum Bemessungswert zu untersuchen, d.h., ob der erstere größer oder kleiner als der letztere ist, und infolgedessen  $\operatorname{tg} \alpha$  nach den Gln.(3.28) bis (3.30) kleiner oder größer als -1 ist.

Nach der Festlegung von Abschnitt 3.5.1 repräsentiert der Bemessungswert einer einzelnen Last  $X_i$  einen Fraktilwert aus der Verteilung dieser einzelnen Last. Zur Festlegung des Fraktilwertes sind etwa Anwendungsbereich oder Sicherheitsbedürfnisse maßgebend.

In den üblichen baupraktischen Anwendungsfällen kann unterstellt werden, daß der Bemessungswert  $B_{X_i}$  einer einzelnen Last einer Quantile nahe Null oder nahe Eins zugeordnet ist, je nachdem, ob die Last günstig oder ungünstig wirkt. Weiterhin wird für die in Frage kommenden Lastverteilungen angenommen, daß der Erwartungswert  $E(X_i)$  zu einer Quantile im mittleren Bereich (etwa zwischen  $p=0,1$  und  $p=0,9$ ) gehört und damit zwischen den möglichen Bemessungswerten für günstig wirkende Lasten einerseits und für ungünstig wirkende Lasten andererseits liegt. In anderen Worten: Es darf erwartet werden, daß Bemessungswerte von ungünstig wirkenden Lasten größer sind als ihre Erwartungswerte; umgekehrtes gilt für günstig wirkende Lasten. Demnach steht der Bemessungswert einer günstig wirkenden Last unterhalb, der einer ungünstig wirkenden Last oberhalb des Erwartungswertes.

Nun ist zu untersuchen, ob der bedingte Erwartungswert  $E(X_i | X_j = B_{X_j})$ , wie er in Gl. (3.28) auftritt, ebenso zum Bemessungswert steht wie der zugehörige Erwartungswert  $E(X_i)$ . Hierzu wird der Grad der Abhängigkeit zwischen  $X_i$  und  $X_j$  betrachtet. Er kann zwischen voller positiver und voller negativer Abhängigkeit variieren. Volle Abhängigkeit bedeutet, daß der Wert von  $X_i$  aus dem von  $X_j$  berechenbar ist. Positive Abhängigkeit bedeutet, daß der Wert von  $X_i$  mit dem von  $X_j$  wächst, bei negativer Abhängigkeit entwickeln sich die gekoppelten Werte gegenläufig. Im Falle voller positiver Abhängigkeit nimmt  $X_i$  genau einen festen Wert  $X_i^*$  an, wenn  $X_j = B_{X_j}$  wird. Wegen der vollen positiven Abhängigkeit gilt nun:

$$P(X_i < X_i^*) = P \quad (3.31)$$

weil zuvor entsprechend dem verwendeten Kriterium für  $X_j$  gilt

$$P(X_j < B_{X_j}) = P \quad (3.32)$$

Da für  $X_i$  das gleiche Kriterium anzuwenden ist, ist  $X_i^* = B_{X_i}$  und damit  $E(X_i | X_j = B_{X_j}) = B_{X_i}$ . Mit abnehmendem Grad der Abhängigkeit wandert der bedingte Erwartungswert vom Bemessungswert weg in Richtung des Erwartungswertes  $E(X_i)$ , erreicht diesen gerade - wie bekannt - bei völliger Unabhängigkeit und wandert bei negativer Abhängigkeit noch über diesen hinaus. Damit können folgende Ungleichungen formuliert werden:

Günstig wirkende Lasten

$$B_{X_i} < E(X_i | X_j = B_{X_j}) \quad (3.33a)$$

Ungünstig wirkende Lasten

$$B_{X_i} > E(X_i | X_j = B_{X_j}) \quad (3.33b)$$

Mit diesen Voraussetzungen können in der  $c_1$ - $c_2$ -Ebene Bereiche für Kombinationskurven günstig und ungünstig wirkender Kombinationen abgegrenzt werden. Entsprechend der Stellung der (bedingten) Erwartungswerte zu den Bemessungswerten kann für die Steigung der Randtangente nach den Gln. (3.28) bis (3.30) geschrieben werden:

$$\operatorname{tg} \alpha \begin{cases} > -1 & \text{ungünstig wirkende Kombination} \\ < -1 & \text{günstig wirkende Kombination} \end{cases}$$

Charakteristisch für die Wölbung der Kombinationskurve ist bei günstig wirkenden Kombinationen die Wölbung zum Ursprung hin, im anderen Falle die Wölbung vom Ursprung weg.

Bild 3.6 zeigt die beiden unterschiedlich schraffierten Bereiche für Kombinationskurven von günstig bzw. ungünstig wirkenden Kombinationen. Die Bereiche sind durch die Gerade  $g \equiv 1 - c_1 - c_2 = 0$  voneinander getrennt, deren Randtangente den Wert  $\operatorname{tg} \alpha = -1$  besitzt. Es ist in jedem Bereich je ein willkürlich gewähltes Beispiel einer Kombinationskurve eingezeichnet.



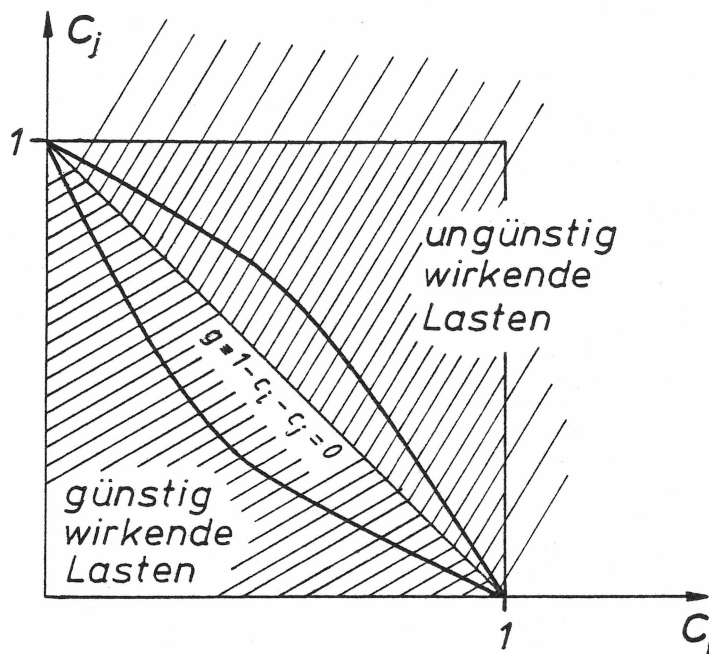


Bild 3.6: Bereiche für Kombinationskurven günstig bzw. ungünstig wirkender Lasten

Wenn Bemessungswerte und (bedingte) Erwartungswerte gleiches Vorzeichen besitzen (das trifft immer zu, wenn die Lasten etwa aus physikalischen Gründen nur Werte größer Null annehmen), muß die Kombinationskurve von ungünstig wirkenden Kombinationen sogar im dichter schraffierten Bereich des Bildes 3.6 liegen.

#### 3.5.4 Einfluß der Kombinationskurven auf die Abminderungen

Die folgenden Betrachtungen sind nur auf ungünstig wirkende Lastkombinationen abgestellt. Sie können aber leicht auf günstig wirkende übertragen werden, wobei der folgende Begriff der Abminderung sinngemäß durch Erhöhung zu ersetzen ist.

Gegenstand des Interesses ist die Abminderung des Rechenwertes  $\sum d_i B_{X_i}$  mit den exakten Bemessungswerten  $B_{X_i}$  der einzelnen Lasten  $X_i$  auf den exakten Bemessungswert  $B_Z$  der Lastkombination  $Z = \sum d_i X_i$ .  $B_Z$  bestimmt sich nach Gl.(3.21). Da die  $d_i$  und  $B_{X_i}$  feststehen, hängt  $B_Z$  nur von  $c_i$  ab und wird nach Gl.(3.21) desto kleiner, je größer  $c_i$  wird. Die Verhältnisse  $c_i/c_j$  sind durch Gl.(3.20) bestimmt und unabhängig von der Kombinationsfläche; sie legen einen vom Ursprung ausgehenden Strahl fest.

Für den tatsächlichen Wert von  $c_i$  ist daher entscheidend, wie weit "außen" der Strahl die Kombinationsfläche durchstößt.  $c_i$  wird desto größer, je "bauchiger" die Kombinationsfläche ist. Auf die "Bauchigkeit" kann wiederum aus den Steigungen der Randtangente geschlossen werden. Es sind also kleine Abminderungen der Tangente mit  $\tan \alpha$  gegen  $-1$ , größere Abminderungen der Tangente mit wachsenden Werten für  $\tan \alpha$  ( $\tan \alpha > -1$ ) zugeordnet.

Es sei nun untersucht, wodurch die Steigung einer Randtangente beeinflusst wird. Nach den Gln. (3.28) bis (3.30) ist ihr Tangens das Verhältnis von (bedingtem) Erwartungswert zu Bemessungswert. Es empfiehlt sich, einen von beiden, etwa den Bemessungswert, festzuhalten. Dann nämlich wird je nach Änderung einflußnehmender Eigenschaften auch eine Änderung des Erwartungswertes erforderlich, um zum gleichen Bemessungswert zu gelangen. Einflußnehmende Eigenschaften sind nach Abschnitt 3.5.1 die stochastischen Eigenschaften der Lasten und das angewendete Kriterium.

## 1. Stochastische Eigenschaften der Lasten

### a) Verteilungsgesetze einschließlich ihrer Parameter

Selbstverständlich ziehen Änderungen der Verteilungsgesetze auch Änderungen der Erwartungswerte nach sich, doch können hierzu keine allgemeinen Aussagen getroffen werden. Dagegen lassen sich die Auswirkungen von Änderungen in den Parametern bei gleichbleibendem Verteilungsgesetz beschreiben. Das wichtigste Beispiel hierzu ist der Variationskoeffizient; wenn er kleiner wird, wächst der Erwartungswert zum Bemessungswert hin, bis deren Verhältnis schließlich für den Variationskoeffizienten Null zu Eins wird. Ein weiteres Beispiel sei die untere Grenze des Definitionsbereiches einer Last. Wenn sie zum Bemessungswert anwächst, wächst notwendigerweise auch der zugehörige Erwartungswert bis zum Bemessungswert (gleichzeitig wird die Standardabweichung zu Null).

b) Prozeßeigenschaften von zeitinvarianten Lasten

Die Formel für den Tangens konnte in Abschnitt 3.5.2 nur für zufällige Folgen abgeleitet werden. Ihr ist zu entnehmen, daß der Erwartungswert der Augenblicksvertei- lung sinkt, wenn die Wiederholungszahl und damit die Änderungs- häufigkeit steigt. Für Folgen mit hohen Änderungshäufig- keiten werden also die Kurven bauchiger und die möglichen Abminderungen stärker. Allgemeiner steht offensichtlich zu erwarten, daß bei Prozessen mit zunehmender Änderungs- häufigkeit (diskrete Prozesse) bzw. Änderungsgeschwindig- keit (stetige Prozesse) die Abminderungsmöglichkeiten wachsen. Eine Bekräftigung dieser Erwartung mit Hilfe von Formeln kann hier jedoch nicht erfolgen.

c) Kreuzkorrelation

Es ist schon in Abschnitt 3.5.3 ausgeführt worden, daß bei positiver Korrelation gilt:

$$E(X_i) \leq E(X_i | X_j = B_{X_j}) \leq B_{X_i} \quad (3.34)$$

Die linke Grenze gilt für den Fall völliger Unabhängigkeit zwischen  $X_i$  und  $X_j$ , die rechte Grenze für den Fall völliger Abhängigkeit. Die Kombinationskurve wird daher mit zunehmen- der Abhängigkeit flacher. Bild 3.7 zeigt zwei Fälle spezieller Abhängigkeit. Zunächst die Gerade  $c_i + c_j = 1$  als Kombinationskurve zweier völlig abhängiger Lasten. Sodann die Geraden  $c_i = 1$  und  $c_j = 1$  als Kombinationskurve zweier Lasten, deren gemeinsames Auftreten ausgeschlossen ist.

Gl. (3.28) wird hier zu

$$\text{tg } \alpha = - \frac{E(X_i | X_j = B_{X_j})}{B_{X_i}} = 0$$

2. Sicherheitsniveau im verwendeten Kriterium

Mit wachsendem Sicherheitsniveau wächst auch der Abstand zwischen (bedingtem) Erwartungswert und Bemessungswert. Dem- entsprechend wird die Abminderung mit wachsendem Sicherheits- niveau stärker.

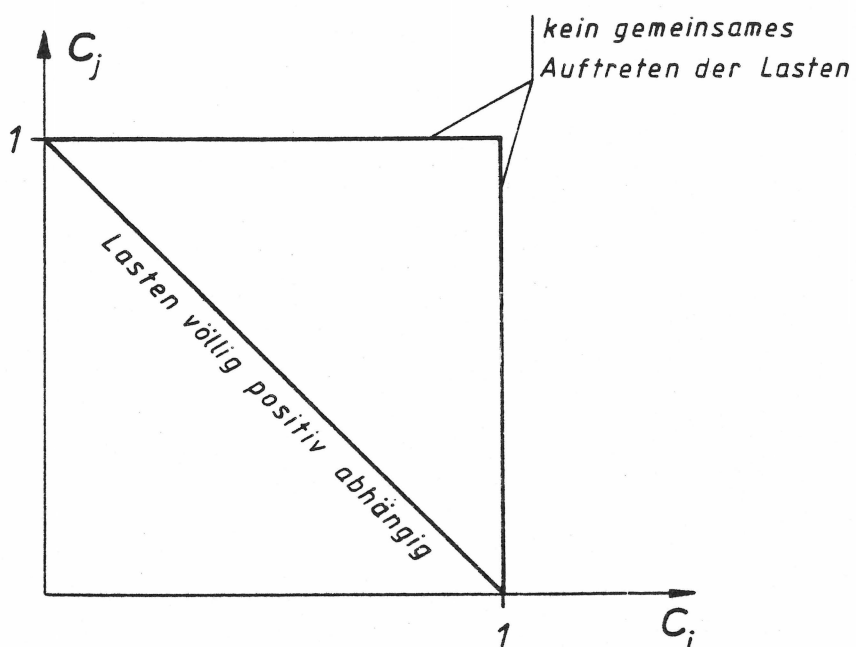


Bild 3.7: Kombinationskurven für zwei spezielle Fälle der stochastischen Abhängigkeit zwischen den Lasten

Die Tabelle 3.1 faßt die wichtigsten Abhängigkeiten zusammen. Dabei bedeutet ein Pluszeichen, daß die Abminderung mit der Zunahme bzw. Verstärkung der in der jeweiligen Zeile genannten Eigenschaft ebenfalls zunimmt.

Einfluß der Zunahme bzw. Verstärkung von	auf den Abminderungsgrad
Variationskoeffizient	+
Änderungshäufigkeit/ -geschwindigkeit des Prozesses	+
Kreuzkorrelation	-
Sicherheitsanforderung	+

Tabelle 3.1: Abhängigkeiten des Grades der Abminderung

### 3.6. Stochastische Übertragungsfaktoren

#### 3.6.1 Ursprung und Natur der stochastischen Übertragungsfaktoren

Alle bisherigen Überlegungen dieser Arbeit sind von einer deterministischen Natur der Übertragungsfaktoren ausgegangen. Praktische Beispiele jedoch zeigen, daß diese Natur eher die Ausnahme als die Regel ist. Man betrachte etwa die drei Beispiele des Abschnittes 3.1. Im ersten, gewiß etwas zu einfachen Beispiel ist die Annahme deterministischer Übertragungsfaktoren noch gerechtfertigt, soweit diese nicht von irgendwelchen zufälligen Größen in der Geometrie abhängen. Im zweiten Beispiel findet man zunächst eine Abhängigkeit der Übertragungsfaktoren von der (zum Teil quadrierten) Länge  $L$ . Wenn diese stochastisch ist, sind damit auch die Übertragungsfaktoren stochastisch. Im Falle örtlich unterschiedlicher Biegesteifigkeiten  $EJ$  in Stielen und Riegel werden die Übertragungsfaktoren auch von deren Verhalten abhängig und folglich stochastisch, wenn letzteres stochastisch ist. Im dritten Beispiel - mit Berücksichtigung der Verformung - ist der Übertragungsfaktor  $E$  eine Funktion von zumeist stochastischen Basisvariablen, die verschiedenen Bereichen zuzurechnen sind, wie Geometrie, Materialeigenschaften und Lasten.

Die stochastischen Eigenschaften der Übertragungsfaktoren leiten sich mittels funktionaler Zusammenhänge aus denen der Basisvariablen ab. Bereits die wenigen Beispiele zuvor lassen ahnen, daß die Zusammenhänge äußerst vielfältige Formen besitzen und oft sehr kompliziert sind. Es erscheint daher aussichtslos, eine auch nur annähernd zutreffende Beschreibung der stochastischen Eigenschaften der Übertragungsfaktoren zu versuchen.

Dagegen lassen sich einige qualitative Aussagen über die stochastischen Abhängigkeiten der Übertragungsfaktoren untereinander und zu den Lasten treffen.

Allgemeingültig läßt sich ein Übertragungsfaktor  $\ddot{U}_i$  \*) folgendermaßen angeben:

$$\ddot{U}_i = f(\underline{T}, \underline{X}) \quad (3.33)$$

Hierin ist  $\ddot{U}_i$  eine Funktion der stochastischen Vektoren  $\underline{T}$  und  $\underline{X}$ . In  $\underline{X}$  sind alle am betrachteten Tragwerk angreifenden Lasten im Sinne des Abschnittes 3.1 zusammengefaßt, während  $\underline{T}$  alle übrigen Basisvariablen enthält, die nicht Lasten sind (etwa Geometrie und Materialeigenschaften) und die im betrachteten Bauwerk auftreten. Die in  $\underline{T}$  und  $\underline{X}$  vorkommenden Basisvariablen können untereinander stochastisch abhängig sein, auch wenn sie nicht dem gleichen Vektor  $\underline{T}$  oder  $\underline{X}$  angehören. Die Vektoren  $\underline{T}$  und  $\underline{X}$  gelten für alle im gleichen Tragwerk betrachteten Übertragungsfaktoren. Verschiedene Übertragungsfaktoren müssen jedoch nicht von den gleichen Elementen der Vektoren  $\underline{T}$  und  $\underline{X}$  funktional abhängig sein. So können zum Beispiel  $\ddot{U}_i$  von  $T_k$  und  $\ddot{U}_j$  von  $T_1$ , nicht aber  $\ddot{U}_i$  von  $T_1$  und  $\ddot{U}_j$  von  $T_k$  funktional abhängig sein. Dies ergibt sich im Einzelfall aus den konkreten Formen der Gl.(3.33).

Sind nun  $\ddot{U}_i$  und  $\ddot{U}_j$  wenigstens von einem gleichen Element der Vektoren  $\underline{T}$  oder  $\underline{X}$  funktional abhängig wie in Gl.(3.34) beschrieben,

$$\ddot{U}_i = f_i(\dots, T_k, \dots) \quad (3.34a)$$

$$\ddot{U}_j = f_j(\dots, T_k, \dots) \quad (3.34b)$$

so ist eine stochastische Abhängigkeit zwischen  $\ddot{U}_i$  und  $\ddot{U}_j$  gegeben. Diese stochastische Abhängigkeit wird zur völligen Abhängigkeit, wenn  $\ddot{U}_i$  und  $\ddot{U}_j$  ausschließlich von den gleichen Elementen in  $\underline{T}$  und  $\underline{X}$  abhängen.

---

\*) Nachdem zuvor zur Bezeichnung deterministischer Übertragungsfaktoren der Kleinbuchstabe c gewählt wurde, läge es nun im Sinne des Abschn. 3.1 nahe, zur Bezeichnung stochastischer Übertragungsfaktoren den Großbuchstaben C zu benutzen. Der besseren Unterscheidbarkeit wegen wird hier jedoch der Großbuchstabe  $\ddot{U}$  benutzt.

Die zweite Quelle stochastischer Abhängigkeit zwischen  $\ddot{U}_i$  und  $\ddot{U}_j$  ist die funktionale Abhängigkeit von jeweils verschiedenen Elementen der Vektoren  $\underline{T}$  und/oder  $\underline{X}$ , die jedoch ihrerseits bereits stochastisch abhängig sind, wenn also etwa gilt

$$\ddot{U}_i = f_i(\dots, T_k, \dots) \quad (3.35a)$$

$$\ddot{U}_j = f_j(\dots, T_1, \dots) \quad (3.35b)$$

sowie  $T_k$  und  $T_1$  stochastisch abhängig

Aus diesen Zusammenhängen geht hervor, daß die Übertragungsfaktoren sehr häufig als gegenseitig stochastisch abhängig anzutreffen sind; sie sind ja nur dann unabhängig, wenn weder die Faktoren von den gleichen Elementen der Vektoren  $\underline{T}$  oder  $\underline{X}$  funktional noch die die Faktoren bestimmende Elemente der beiden Vektoren stochastisch abhängig sind.

Ob dagegen mit stochastischen Abhängigkeiten zwischen Übertragungsfaktoren und Lasten zu rechnen ist, hängt in erster Linie vom vorliegenden mechanischen Modell ab.

Bei Bemessungen nach Theorie 1. Ordnung, also ohne Berücksichtigung der Verformungen, gilt - gleichgültig, ob das Tragwerk statisch bestimmt oder unbestimmt ist - allgemein

$$\ddot{U}_i = f(\underline{T}) \quad (3.36)$$

d.h. keine funktionale Abhängigkeit von  $\underline{X}$ . Wenn dazu auch  $\underline{X}$  und  $\underline{T}$  stochastisch unabhängig sind - eine häufig vernünftige Annahme -, so besteht keine stochastische Abhängigkeit zwischen  $\ddot{U}_i$  und  $\underline{X}$ .

In allen anderen Fällen (z.B. Theorie 2. Ordnung, Stabilitätsprobleme, Traglastberechnungen) bestimmt sich  $\ddot{U}_i$  nicht nach Gl. (3.36), sondern nach Gl. (3.33), weshalb dann grundsätzlich mit stochastischer Abhängigkeit zwischen  $\ddot{U}_i$  und  $\underline{X}$  gerechnet werden muß.

### 3.6.2 Zum Einfluß stochastischer Übertragungsfaktoren auf die Kombinationsfläche

Statt der Kombination  $Y = \sum c_i X_i$  nach Gl.(3.1) liegt nun die Kombination

$$Y = \sum \ddot{U}_i X_i \quad (3.37)$$

vor.  $\ddot{U}_i$  kann umgeformt werden zu

$$\ddot{U}_i = c_i \hat{U}_i, \quad (3.38)$$

d.h.  $\ddot{U}_i$  und  $\hat{U}_i$  besitzen grundsätzlich die gleichen stochastischen Eigenschaften und sind nur verschieden skaliert. Zieht man noch  $\hat{U}_i$  und  $X_i$  zusammen zu

$$V_i = \hat{U}_i \cdot X_i, \quad (3.39)$$

geht Gl.(3.37) über in

$$Y = \sum c_i V_i \quad (3.40)$$

Die dieser Kombination zugehörige Kombinationsfläche hat analog zu Gl.(3.9) die Form

$$1 = B(\sum c_i \frac{V_i}{B_{V_i}} \cdot Kr) \quad (3.41)$$

Es ist anzumerken, daß in der praktischen Bemessung statt des strengen Bemessungswertes  $B_{V_i}$  das Produkt  $B_{\hat{U}_i} \cdot B_{X_i}$  anzutreffen sein wird. Die Festlegung von  $B_{\hat{U}_i}$  durch die Norm muß so erfolgen, daß das Produkt, gleich ob bei einzelnen Lasten oder in Lastkombinationen, das geforderte Bemessungskriterium erfüllt. In der Regel ist

$$B_{V_i} < B_{\hat{U}_i} \cdot B_{X_i} \quad (3.42)$$

zu erwarten; es ist jedoch nicht geraten, solche Sicherheitsreserven im Zusammenhang mit der Lastkombination auszuschöpfen, weil sie nicht aus diesem Zusammenhang entstehen.



Von den beiden Kombinationsflächen Gl.(3.9) bzw. Gl.(3.41) ist diejenige zur praktischen Anwendung, insbesondere zur Aufstellung von Lastkombinationsregeln, heranzuziehen, die auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse gewährleistet. Im Falle der hier betrachteten ungünstig wirkenden Lasten ist es die Fläche, die vom Ursprung aus gesehen innerhalb der anderen liegt. Natürlich sind auch gegenseitige Durchschneidungen der beiden Flächen nicht auszuschließen, so daß beide bereichsweise gelten können.

Die Unterschiede der beiden Flächen resultieren aus den unterschiedlichen stochastischen Eigenschaften der Variablen  $X_i$  und  $V_i = \hat{U}_i \cdot X_i$ ; die Variable  $X_i$  ist bekannt, dagegen die Variable  $\hat{U}_i$  und demzufolge auch  $V_i$  weitgehend unbekannt. Die Eigenschaften sind nach Abschn. 3.5.4 im einzelnen Verteilungen und Zeitverhalten der Variablen sowie die Abhängigkeiten zwischen  $X_i$  und  $X_j$  bzw.  $V_i$  und  $V_j$ . Im selben Abschnitt wurde auch abgeschätzt, wie sich Veränderungen in diesen Eigenschaften auf die Kombinationsfläche auswirken (siehe Tabelle 3.1).

Die Verteilung von  $V_i$  besitzt gegenüber der der Last  $X_i$  meist eine größere Streuung; beispielsweise gilt für den Variationskoeffizienten der Größe  $V = X \cdot U$ , falls  $X$  und  $\hat{U}$  unabhängig sind (siehe etwa Benjamin/Cornell, Abschn. 2.4.3 [ 1 ])

$$\left(\frac{\sigma_V}{m_V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_X}{m_X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\hat{U}}}{m_{\hat{U}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{m_X}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{\hat{U}}}{m_{\hat{U}}}\right)^2 \quad (3.43)$$

der damit auf jeden Fall nicht kleiner ist als der Variationskoeffizient von  $X$ . Die angesetzte Unabhängigkeit zwischen  $X$  und  $\hat{U}$  ist nach Abschn. 3.6.1 bei Bemessungen nach Theorie 1. Ordnung die Regel. Die größere Streuung von  $V_i$  läßt nach Tabelle 3.1 erwarten, daß die Fläche nach Gl.(3.41) außerhalb der nach Gl.(3.9) liegt.

Am Zeitverhalten der Variablen  $V_i$  kann sich dem der Last  $X_i$  gegenüber nur etwas ändern, wenn  $\hat{U}_i$  von anderen zeitveränderlichen Größen als  $X_i$  abhängig ist. In diesem Falle unterliegt

die Variable  $V_i$  stärkerer Zeitveränderlichkeit als  $X_i$ , weshalb nach Tabelle 3.1 die gleiche Wirkung auf die Kombinationsfläche zu erwarten ist wie bei den Streuungen.

Die stochastische Abhängigkeit zwischen  $V_i$  und  $V_j$  ist eine Funktion vor allem der Abhängigkeiten zwischen den Lasten  $X_i$ ,  $X_j$  und den Übertragungsfaktoren  $\ddot{U}_i$  und  $\ddot{U}_j$ . Wie stark die einzelnen Abhängigkeiten die zwischen  $V_i$  und  $V_j$  zu prägen vermögen, hängt von den Verteilungen der Lasten und Übertragungsfaktoren ab. So spielt etwa eine Abhängigkeit zwischen den Übertragungsfaktoren kaum eine Rolle, wenn ihre Streuungen gegenüber denen der Lasten verschwinden. Somit kann die Abhängigkeit zwischen  $V_i$  und  $V_j$  sowohl stärker als auch schwächer sein als die zwischen den Lasten, jeweils mit der nach Tabelle 3.1 folgenden Wirkung auf die Kombinationsfläche.

Die vorstehenden Betrachtungen liefern nicht mehr als Anhaltspunkte dafür, wie sich stochastische Übertragungsfaktoren auf die Kombinationsfläche auswirken. Es wird aber immerhin deutlich, daß stochastische Eigenschaften von Übertragungsfaktoren bei der Aufstellung von Kombinationsflächen nicht außer acht gelassen werden dürfen. Es bleibt zu klären, inwieweit Flächen mit deterministischen Übertragungsfaktoren als auf der sicheren Seite liegend angenommen werden dürfen. Soweit diese Annahme nicht statthaft ist, müssen bei der Aufstellung von Kombinationsflächen stochastische Übertragungsfaktoren in geeigneter Weise Berücksichtigung finden. Dies erfordert umfangreiche Untersuchungen, die über den Umfang dieser Arbeit hinausgehen. Diese Arbeit wendet sich jetzt der Frage zu, wie aus Kombinationsflächen Kombinationsregeln abgeleitet werden können.

#### 4 Kombinationsregeln

##### 4.1 Stellung der Kombinationsregeln im Bemessungsablauf; Anforderungen

Die Ermittlung von Bemessungswerten wird für die Praxis durch eine Vorschrift geregelt. Die Vorschrift soll sicherstellen, daß das Ziel der Bemessung, nämlich die Zweckerfüllung des Bauwerkes, gemessen an der daraus abzuleitenden Zuverlässigkeit, erreicht wird. Die Vorschrift kann hierzu zwei Wege beschreiten. Der eine Weg führt zur Anwendung möglichst genauer Verfahren, wie es im Falle der Lastkombination etwa die Anwendung der in Abschn. 3.4 erwähnten Kombinationsverfahren wäre. Freilich ist ein solcher Weg meist zu umständlich und lohnt deshalb den Aufwand nur in Ausnahmefällen. Der andere Weg ist die Anwendung von Regeln, im Falle der Lastkombination also von Kombinationsregeln, die im Rahmen der Vorschrift bereitstehen. Dieser Abschnitt soll sich mit diesem letzteren Weg befassen, der meistens beschritten wird und auch eher der Unterstützung durch die Vorschrift selbst bedarf.

Die Kombinationsregel ist Teil eines Gesamtregelwerkes, in dem alle Schritte geregelt sind, die zum Einsetzen eines Zahlenwertes in eine Bemessungsgleichung führen. Die Stellung der Kombinationsregel innerhalb des Bemessungsablaufes ergibt sich aus der Notwendigkeit, für die alternativen Fälle "einzelne Last" und "Lastkombination" keine zwei verschiedene, unvereinbare Verfahren vorzusehen. Folgendes Vorgehen gewährleistet diese Eigenschaft:

Im ersten Schritt werden für alle Lasten, auch wenn sie einer Lastkombination angehören, die Bemessungswerte gemäß der Regel für einzelne Lasten bestimmt.

Im zweiten Schritt werden die Bemessungswerte aller Lasten, die zur Kombination gehören, gemäß der Kombinationsregel zum Bemessungswert der Kombination zusammengefaßt. Zur Vereinbarkeit der beiden genannten Fälle muß die Regel den Bemessungswert einer Last unverändert weitergeben, wenn die übrigen Lasten verschwinden.

Aus dem zweiten Schritt resultiert der Bemessungswert der Lastkombination; mit diesem wird im weiteren verfahren wie mit dem einer einzelnen Last. Alle nach dem zweiten Schritt folgenden Operationen am Bemessungswert, beispielsweise Multiplikation mit Teilsicherheitsbeiwerten, dürfen nicht mehr von den stochastischen Eigenschaften der beteiligten Lasten abhängig gemacht werden; diesbezügliche Operationen sind auf die beiden ersten Schritte zu beschränken.

Der Unterschied zwischen beiden Fällen liegt also im zweiten Schritt, der im Fall "Lastkombination" zusätzlich auszuführen ist. Dieser Schritt führt die Behandlung der "Lastkombination" auf die einer "einzelnen Last" zurück.

Die Kombinationsregel besteht aus Rechenvorschrift und Kombinationsparametern. Die Rechenvorschrift gibt die Formeln, in die die Bemessungswerte der einzelnen Lasten und die Kombinationsparameter einzusetzen sind. Bild 4.1 zeigt schematisch das Zusammenwirken der einzelnen Komponenten zur Findung des Bemessungswertes einer Kombination.

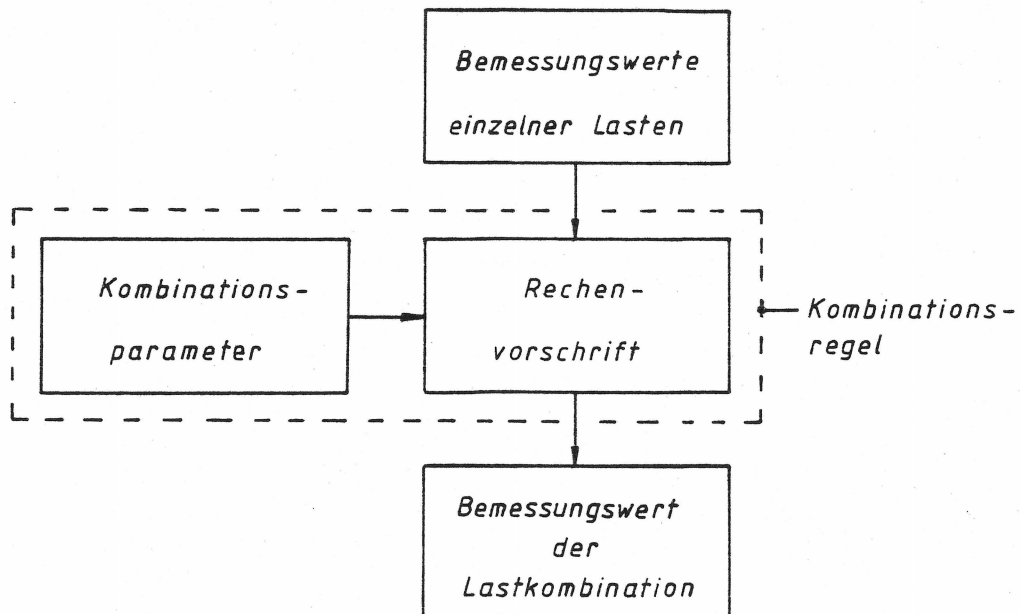


Bild 4.1: Entstehung des Bemessungswertes einer Lastkombination

Da sich Rechenvorschrift und Kombinationsparameter offensichtlich gegenseitig bedingen, erscheint es gerechtfertigt, sie einheitlich als Kombinationsregel zu verstehen.

An eine Kombinationsregel sollen vier Forderungen gestellt werden:

1. Einfachheit
2. Auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse
3. Genauigkeit
4. Kompatibilität mit der Behandlung einzelner Lasten

Einfachheit ist erwünscht, um den zusätzlichen Aufwand, den die Anwendung einer Kombinationsregel verursacht, in Grenzen zu halten. Einfachheit soll auch helfen, Fehler in der Anwendung zu verhüten.

Die zweite Forderung ist strikt zu erfüllen. Abweichungen vom exakten Bemessungswert dürfen nur zur sicheren Seite hin erfolgen. Die Definition der sicheren Seite ist im Bemessungskriterium impliziert.

Nach der dritten Forderung soll der aus der Regel resultierende Bemessungswert dem exakten Bemessungswert möglichst nahe kommen. Wegen der unabdingbaren zweiten Forderung kann dies nur von der sicheren Seite her geschehen. Es leuchtet ein, daß eine Steigerung der Genauigkeit mit zunehmendem Aufwand und einem Verlust an Einfachheit verbunden ist. Deshalb konkurrieren die Forderungen Einfachheit und Genauigkeit miteinander.

Die vierte Forderung wurde bereits oben anlässlich der Stellung der Kombinationsregel aufgestellt. Es sei hier vorweggenommen, daß alle in dieser Arbeit besprochenen Regeln diese Forderung erfüllen; dies ist in jedem Fall leicht nachprüfbar. Diese Forderung wird deshalb nicht weiter diskutiert werden.

Die Frage, ob eine vorliegende Kombinationsregel die zweite Forderung erfüllt, läßt sich klar mit Ja oder Nein beantworten.

Anders bei der ersten und dritten Forderung. Hier erfordert die Beantwortung der entsprechenden Frage einen feineren Maßstab. In diesen Maßstab gehen die Bewertung der Ziele Einfachheit und Genauigkeit sowie die Beurteilung ihrer Verwirklichung ein. Bewertung und Beurteilung hängen von der Situation des Anwenders ab und sind daher subjektiv. Die Situation ist beispielsweise durch den Anwendungsbereich oder durch die verfügbaren Arbeitsmittel (Rechner) gekennzeichnet.

Wegen der Komplexität von Bewertung und Beurteilung wird in dieser Arbeit kein Versuch unternommen, einen Maßstab zu finden. Es erscheint nämlich ausreichend, die Regel hinsichtlich Genauigkeit und Einfachheit an den zwei möglichen Grenzfällen zu orientieren. Den einen Grenzfall bildet die Arbeit mit höchstmöglicher Genauigkeit unter Verzicht auf Einfachheit. Der andere Grenzfall ist der völlige Fortfall der Regel. Es ist anzunehmen, daß sowohl bei der Bemessung von Sonderbauwerken als auch bei der Bemessung mit Hilfe von Rechnern künftig in steigendem Maße sehr genaue Verfahren angewendet werden, der erste Grenzfall also eintritt. Es ist dies als ein möglicher Weg schon zu Beginn dieses Abschnittes genannt worden und bedarf keiner Unterstützung durch die Regel. Diese sollte sich deshalb vielmehr am anderen Grenzfall orientieren, natürlich ohne ihn zu erreichen. Es wird sich zeigen, daß die später untersuchten Formen einer Kombinationsregel kaum weiter vereinfacht werden können, ohne zum Fortfall der Regel selbst zu führen. Dennoch erscheint die erzielbare Genauigkeit befriedigend. Für höhere Ansprüche steht der eben genannte Weg offen.

#### 4.2 Abbildung einer Kombinationsregel als Regelfläche im Raum der Übertragungsfaktoren

Jede Kombinationsregel muß hinsichtlich der in Abschnitt 4.1 aufgestellten Forderungen überprüfbar sein. Insbesondere müssen ihre Ergebnisse mit den als bekannt vorauszusetzenden exakten Ergebnissen vergleichbar sein. Es bietet sich daher an, Regelergebnisse und exakte Ergebnisse in gleicher Weise darzustellen. Zur Darstellung der exakten Ergebnisse wurde in Abschn. 3 die Kombinationsfläche entwickelt. Sie existiert im Raum der Übertragungsfaktoren. Ziel ist es nun, die Regelergebnisse ebenfalls im Raum der Übertragungsfaktoren darzustellen. Die hierbei entstehende, mit der Kombinationsfläche vergleichbare Fläche soll hier Regelfläche bzw. im zweidimensionalen Raum (bei zweifacher Kombination) Regelkurve genannt werden.

Für die Lastkombination  $Z = \sum d_i X_i$  folgt aus der Kombinationsfläche zusammen mit den Gln. (3.19) und (3.20) der exakte Bemessungswert  $B_z$ . Hingegen ergibt sich für die selbe Lastkombination aus einer durch die Regel vorgeschriebenen Funktion  $r$  des Vektors  $(d_i B_{x_i})$  der Bemessungswert  $B_z'$

$$B_z' = r((d_i B_{x_i})) \quad (4.1)$$

Gl. (3.19) stellt einen Zusammenhang zwischen  $B_z$  und  $c_i$  als Koordinate eines Punktes der Kombinationsfläche her; analog erhält man zu gegebenem  $B_z'$  die Koordinate  $c_i'$  eines Punktes der Regelfläche aus

$$c_i' = \frac{d_i B_{x_i}}{B_z'} \quad (4.2)$$

Damit läßt sich die Regelfläche punktweise ermitteln.

Am folgenden Beispiel wird die Ermittlung einer Regelkurve aus der Kombinationsregel vorgeführt. Die Regel laute:

$$B_z' = \max\{\psi_1 d_1 B_{X_1} + d_2 B_{X_2}; d_1 B_{X_1} + \psi_2 d_2 B_{X_2}\} \quad (4.3)$$

Dies entspricht der bekannten CEB-Regel [18], auf die in Abschn. 4.3 noch näher eingegangen wird. Die Faktoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind Parameter der CEB-Regel und werden von dieser vorgeschrieben. Die Regel enthält die zwei Funktionen:

$$r_1 \equiv \psi_1 d_1 B_{X_1} + d_2 B_{X_2} \quad (4.4a)$$

$$r_2 \equiv d_1 B_{X_1} + \psi_2 d_2 B_{X_2}, \quad (4.4b)$$

deren Maßgeblichkeit durch die  $\max\{\dots\}$ -Vorschrift geregelt ist.

Für die erste Funktion folgt gemäß Gl.(4.1) in Verbindung mit Gl.(4.4a)

$$B_z' = \psi_1 d_1 B_{X_1} + d_2 B_{X_2} \quad (4.5)$$

oder

$$1 = \psi_1 \frac{d_1 B_{X_1}}{B_z'} + \frac{d_2 B_{X_2}}{B_z'} \quad (4.6)$$

und zusammen mit Gl.(4.2)

$$1 = \psi_1 c_1' + c_2' \quad (4.7a)$$

sodann in entsprechender Weise für  $r_2$

$$1 = c_1' + \psi_2 c_2' \quad (4.7b)$$

Bild 4.2 zeigt die beiden Funktionen (4.7a) und (4.7b) im Raum der Übertragungsfaktoren  $c_i = c_i'$ . Die Funktion der Regelkurve lautet schließlich

$$1 = \max\{\psi_1 c_1' + c_2'; c_1' + \psi_2 c_2'\} \quad (4.8)$$



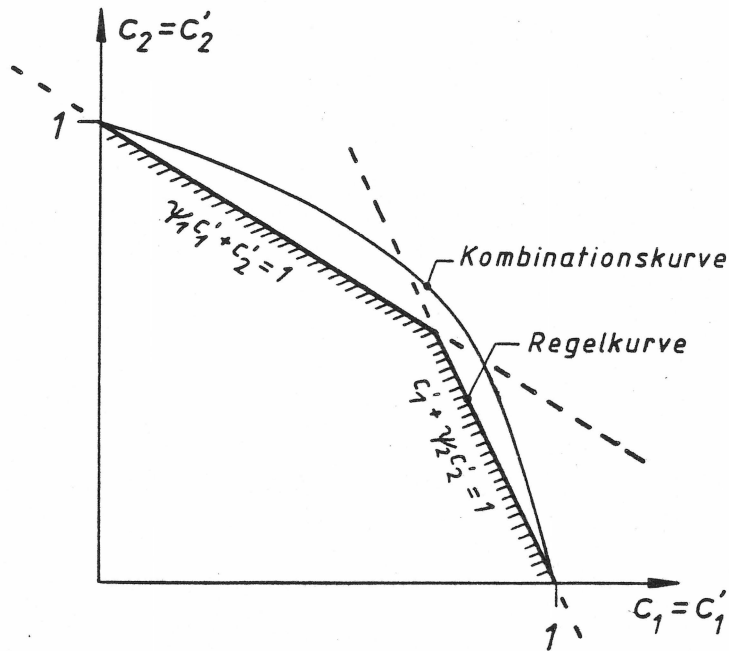


Bild 4.2: Regelkurve im Raum der Übertragungsfaktoren

Die dadurch maßgeblichen Bereiche sind im Bild schraffiert. Die Regelkurve ist einer willkürlich gewählten Kombinationskurve gegenübergestellt.

Damit ein Bemessungswert  $B_z'$  auf der sicheren Seite liegt, muß im Falle ungünstig wirkender Lasten

$$B_z' \geq B_z \quad (4.9a)$$

und im Falle günstig wirkender Lasten

$$B_z' \leq B_z \quad (4.9b)$$

erfüllt sein. Damit ergibt sich aus den Gln.(3.19) bzw. (4.2) im ersten Fall

$$c_i' \leq c_i \quad (4.10a)$$

und im zweiten Fall

$$c_i' \geq c_i \quad (4.10b)$$

Bei ungünstig wirkenden Lasten muß demnach die Regelfläche vom Ursprung aus gesehen innerhalb der Kombinationsfläche liegen. Umgekehrtes gilt für die günstig wirkenden Lasten.

### 4.3 Untersuchung bekannter Kombinationsregeln

Mit der im vorigen Abschnitt entwickelten Darstellungsweise sollen einige Lastkombinationsregeln untersucht werden, die derzeit Anwendung finden oder in der Diskussion stehen. Die Untersuchung ist auf zweifache Kombinationen beschränkt, denn an solchen können bereits wesentliche Eigenschaften aufgezeigt werden. Die Untersuchung wird lediglich für die später empfohlene Kombinationsregel auf mehrfache Kombinationen ausgedehnt (siehe Abschn. 4.5). Die der Untersuchung dienende Lastkombination lautet also

$$Z = d_1 X_1 + d_2 X_2 \quad (4.11)$$

#### 4.3.1 CAF-Regel

Die in neueren Norm-Entwürfen am häufigsten anzutreffende Regel ist die CAF-Regel (Companion Action Factor). Die Bezeichnung wird in der neueren Literatur von Wen [15] und Turkstra/Madsen [14] verwendet. Die Wurzel der Regel ist in der Turkstra-Regel [13] zu suchen. Prinzip der Regel ist, zum Bemessungswert der einen Last den mit dem "Companion Action"-Faktor multiplizierten Bemessungswert der anderen Last zu addieren. Auf diesem Gedanken basieren die Regeln des CEB-Entwurfes [18], des Entwurfes der deutschen Rahmenrichtlinie, der amerikanischen Entwürfe ANS A58 [4] sowie des skandinavischen NKB [21]. Die Ausprägungen in den einzelnen Regeln mögen voneinander abweichen, doch läßt sich eine allen gemeinsame Grundform angeben mit

$$B_z' = \max\{\psi_1 d_1 B_{X_1} + d_2 B_{X_2}; d_1 B_{X_1} + \psi_2 d_2 B_{X_2}\} \quad (4.12)$$

Die Faktoren  $\psi_i$  sind von den Lasten abhängig, mit deren Bemessungswerten sie verknüpft werden. Die Darstellung dieser Regel im Raum der Übertragungsfaktoren wurde bereits in Abschn. 4.2 gefunden und in Bild 4.2 wiedergegeben. Es ergab sich die folgende Regelkurve:

$$1 = \max\{\psi_1 c_1 + c_2; c_1 + \psi_2 c_2\} \quad (4.13)$$

Bemerkenswert ist die Abhängigkeit der Steigungen der beiden Teilgeraden von jeweils nur einem der Faktoren  $\psi_1$  bzw.  $\psi_2$ , die nach den derzeitigen Vorstellungen allein von  $X_1$  bzw.  $X_2$ , nicht aber von den sonst an der Kombination beteiligten Lasten abhängig sind. Die Steigung zum Beispiel der Geraden  $r_1$  beträgt

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \psi_1 \quad (4.14)$$

Die Gerade  $r_1$  läuft durch den Punkt ( $c_1 = 0, c_2 = 1$ ), durch den auch die Kombinationskurve läuft. Zum Vergleich beträgt deren Steigung im gleichen Punkt im Falle unabhängiger zeitinvarianter Lasten nach Gl.(3.28)

$$\frac{dc_2}{dc_1} = \operatorname{tg} \alpha = - \frac{E(X_1)}{B_{X_1}}$$

Dies erinnert insofern an die Steigung der Geraden  $r_1$ , als beide Steigungen nur von der Last  $X_1$  abhängig sind. Hierzu sind zwei Anmerkungen zu machen.

Zum ersten ist der genannte Fall unabhängiger, zeitinvarianter Lasten gewiß nur ein Sonderfall; in der Regel ist die Randsteigung der Kombinationskurve von beiden beteiligten Lasten abhängig (vgl. Gln.(3.28) bis (3.30); auch im Fall unabhängiger, aber zeitvarianter Lasten).

Zum zweiten sind die beiden Randtangente nach den Gln.(3.28) bis (3.30) Einhüllende der Kombinationskurve; sie liegen damit im unsicheren Bereich, der nach Abschn. 4.2 vom Ursprung aus gesehen außerhalb der Kombinationskurve liegt. Die Regelkurve aber muß im sicheren Bereich und daher innerhalb der Kombinationskurve liegen. Der Schnittpunkt ihrer Teilgeraden  $r_1$  und  $r_2$  darf gerade auf der Kombinationskurve liegen (siehe Bild 4.3). Sofern dieser Schnittpunkt darauf liegt, aber nicht unvernünftigerweise auf eine der Koordinatenachsen fällt, ist er selbst im Falle unabhängiger, zeitinvarianter Lasten wie die Kombinationskurve von beiden Lasten abhängig.

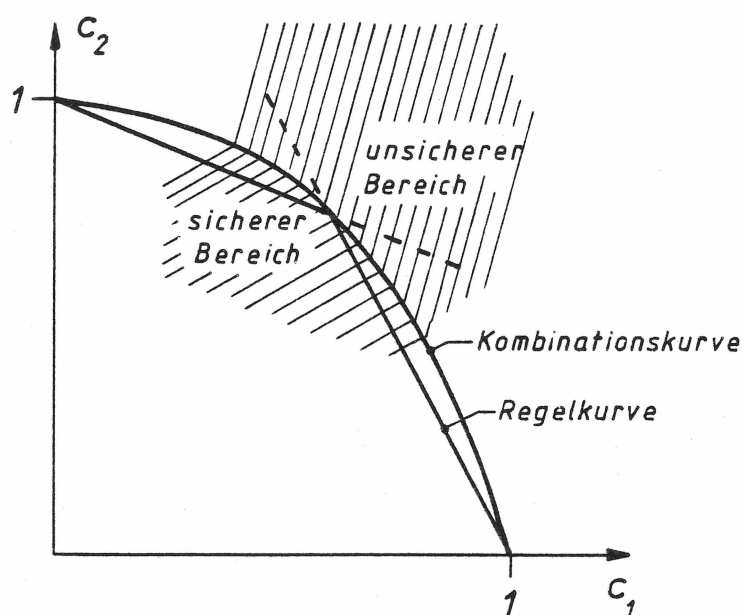


Bild 4.3: Lage einer Regelkurve zur Kombinationskurve

Diese Anmerkungen beleuchten die Unzulänglichkeit einer Regel, die mit solchen  $\psi$ -Faktoren arbeitet, aus der Sicht einer Darstellung im Raum der Übertragungsfaktoren. Hier läßt sich anschaulich zeigen, wie die Faktoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  gegenseitig und von der Kombinationskurve abhängen. Wären nur zwei Lasten zu berücksichtigen, könnten die Faktoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  nach irgendeinem Maßstab optimal gewählt werden. In diesem Falle wären die Faktoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  jeder von beiden Lasten abhängig, nur ohne daß es in den Bezeichnungen der Faktoren zum Ausdruck käme. Doch die Norm beinhaltet eine sehr große Zahl von Lasten. Obwohl immer nur wenige dieser Lasten in eine Kombination eingehen, müssen deren Faktoren in allen möglichen Kombinationen Ergebnisse auf der sicheren Seite gewährleisten. Anhang D zeigt, daß dann die "schlechtesten" Faktoren auf alle Kombinationen durchschlagen würden.

Die hier aufgezeigten Schwächen unterstützen Bedenken, die schon seit längerem in Norm-Diskussionen geäußert wurde. Es wurde bemängelt, daß es - anschaulich ausgedrückt - etwa für den Faktor  $\psi_s$  zur Schneelast nicht gleichgültig sein könne,

ob die Schneelast etwa mit einer Windlast oder einer Last infolge Sonneneinstrahlung zu kombinieren sei. Bisher fanden derlei Bedenken in den Regel-Entwürfen keinen Niederschlag.

Im Zusammenhang mit dieser Regel ist an einen weiteren Kritikpunkt zu erinnern. Empfehlungen in den genannten Normen zufolge ist ein Faktor  $\psi_i$  das Verhältnis von Werten gleicher Fraktile aus "Augenblicksvertei- lung" und Extremwertvertei- lung der Last  $X_i$ . Diesem Gedanken liegt die schon erwähnte Turkstra-Regel [13] zugrunde, wonach das maßgebliche Maximum einer Lastkombination mit einem der Fälle zusammentrifft, in denen eine der beteiligten Lasten ihr Maximum erreicht. Bereits Bosshard [2] hat darauf hingewiesen, daß ein solcher Faktor stets auf der unsicheren Seite liegende Ergebnisse zeitigt. Der Faktor ignoriert nämlich, daß das maßgebliche Maximum auch dann eintreten kann, wenn keine der beteiligten Lasten ihr Maximum erreicht. Die genannten Normen halten denn- noch an diesem Verfahren fest. Die Ursache hierfür ist wohl darin zu suchen, daß der Faktor  $\psi_i$  allein aus den Eigenschaf- ten der Last  $X_i$  bestimmt werden soll. Erst ein Abgehen von diesem Grundsatz ermöglicht korrektere Kombinationsfaktoren. Dieser Schritt wird im folgenden Abschnitt getan.

#### 4.3.2 Vorschlag von Turkstra/Madsen

Turkstra und Madsen verwenden in einer neueren Arbeit [14] die Gl.(4.12) in abgewandelter Form

$$B_z = \max\{\psi_{12}d_1B_{X_1} + d_2B_{X_2}; d_1B_{X_1} + \psi_{21}d_2B_{X_2}\} \quad (4.15)$$

Die entsprechende Regelkurve hat die Form

$$1 = \max\{\psi_{12}c_1 + c_2; c_1 + \psi_{21}c_2\} \quad (4.16)$$

Der Unterschied zu Gln.(4.12) und (4.13) liegt in den  $\psi$ -Fak- toren, die nunmehr nicht allein von der Last abhängen, der sie zugeordnet sind, sondern auch von der anderen Last, die

an der Kombination beteiligt ist. Turkstra/Madsen lassen die Möglichkeit

$$\psi_{ij} \neq \psi_{ji} \quad (4.17)$$

zu.

Die in Abschn. 4.3.1 zur CAF-Regel aufgezählten Unzulänglichkeiten lassen sich jetzt vermeiden, da jeder denkbaren Kombination individuelle  $\psi_{ij}$ -Faktoren zugeordnet werden können. Damit verbunden freilich wächst die Zahl der Faktoren im Vergleich zur CAF-Regel mit dem Quadrat.

Zur Ermittlung der  $\psi_{ij}$ -Faktoren untersuchen Turkstra/Madsen eine Anzahl von Kombinationen, die immer aus gleichen Lasten, aber zu unterschiedlichen Anteilen bestehen. Sie stellen die zugehörigen Faktoren  $\psi_{ij}$  derart ein, daß sich das Über- bzw. Unterschreiten einer gewünschten Zuverlässigkeit innerhalb einer gewissen Bandbreite hält.

Die später in Abschn. 4.4 gegebene Empfehlung wird auf diesen Vorschlag zurückgreifen.

#### 4.3.3 LRF-Regel

Die LRF-Regel (Load Reduction Faktor) findet Anwendung in der kanadischen Norm [20] und in der ACI-Norm [17]. Der Name wurde hier von Wen [15] übernommen. Sie lautet:

$$B_z' = \max \{ d_1 B_{X_1}; d_2 B_{X_2}; \psi(d_1 B_{X_1} + d_2 B_{X_2}) \} \quad (4.18)$$

Bild 4.4 zeigt ihre Abbildung im Raum der Übertragungsfaktoren mit den Funktionen der Regelkurven

$$r_1 \equiv c_1 = 1 \quad (4.19a)$$

$$r_2 \equiv \psi(c_1 + c_2) \quad (4.19b)$$

$$r_3 \equiv c_2 = 1 \quad (4.19c)$$

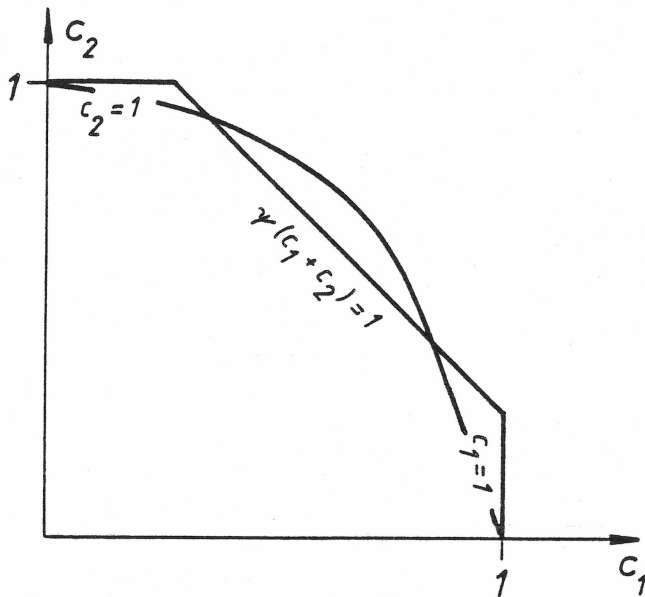


Bild 4.4 LRF-Regel

Die Geraden  $r_1$  und  $r_3$  sind unveränderlich und schneiden die Koordinatenachsen senkrecht in den Punkten  $(c_1 = 1, c_2 = 0)$  und  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$ . Die Gerade  $r_2$  ist nur in ihrer Richtung festgelegt und schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $(1/\psi, 0)$  und  $(0, 1/\psi)$ ; sie ist durch Variation des  $\psi$ -Faktors parallel verschieblich.

Es kann hier dahingestellt bleiben, wovon der Faktor  $\psi$  abhängt, denn ein entscheidender Einwand gegen diese Regel ergibt sich aus einer anderen Eigenart. In Bild 4.4 ist eine willkürliche Kombinationskurve eingezeichnet. Sie weist Randtangenten mit Werten auf, wie sie nach den Überlegungen des Abschnittes 3.5 als wirklichkeitsnah anzusehen sind, nämlich mit den Werten

$$- 1 \leq \frac{dc_2}{dc_1} \leq 0$$

im Punkt  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$  und entsprechend

$$- 1 \leq \frac{dc_1}{dc_2} \leq 0$$

in Punkt  $(c_1 = 1, c_2 = 0)$ . Es zeigt sich, daß die Regelkurve zumindest in den achsennahen Bereichen außerhalb der Kombi-

nationskurve und damit im unsicheren Bereich liegt. Dies ist höchstens mit einem Wert  $\psi = 1$  vermeidbar, womit aber der Zweck der Regel verfehlt wäre.

#### 4.3.4 DIN 1050

Die deutsche Stahlbaunorm DIN 1050 unterscheidet zwischen Hauptlasten und Zusatzlasten, sowie die Lastfälle H nur mit Hauptlasten und HZ auch mit Zusatzlasten. Für die Lastfälle gelten unterschiedliche zulässige Spannungen  $\sigma_H$  und  $\sigma_{HZ}$ .

Die Wirkung der Vorschrift DIN 1050, Abschn. 4.1 soll am Beispiel einer Zugkraftbemessung erläutert werden, bei der der Einfachheit halber kein Eigengewicht berücksichtigt wird. Der notwendige Querschnitt  $F_{HZ}$  eines durch die Kombination  $HZ = d_H H + d_Z Z$  mit reiner Normalkraft auf Zug belasteten Stabes ergibt sich aus

$$F_{HZ} = \begin{cases} \max \left\{ \frac{d_H B_H}{\sigma_H}; \frac{d_H B_H + d_Z B_Z}{\sigma_{HZ}} \right\} & d_H \neq 0 & (4.20a) \\ \frac{d_Z B_Z}{\sigma_H} & d_H = 0 & (4.20b) \end{cases}$$

Der erste Term in der Klammer der Gl.(4.20a) resultiert aus dem Lastfall H, der zweite aus dem Lastfall HZ. Die Gl.(4.20b) ergibt sich nach Abschnitt 4.12 Satz 2 bei fehlender Hauptlast. Division der Gleichungen durch  $F_{HZ}$  führt in den Nennern zu den Bemessungswerten  $B_{HZ} = \sigma_H F_{HZ}$ ; der zweite Term von Gl. (4.20a) ist dazu durch  $\sigma_H$  zu erweitern. Damit gewinnt man wie gewohnt die Gleichungen der Regelkurve im Raum der Übertragungsfaktoren

$$1 = \begin{cases} \max \left\{ c_H; \frac{\sigma_H}{\sigma_{HZ}} (c_H + c_Z) \right\} & c_H \neq 0 & (4.21a) \\ c_Z & c_H = 0 & (4.21b) \end{cases}$$



Der Bezug  $B_{HZ}' = \sigma_H F_{HZ}$  statt des möglichen Bezuges  $B_{HZ}' = \sigma_{HZ} \cdot F_{HZ}$  ergab sich aus der vernünftigen Annahme, daß bei alleiniger Last H gelten muß

$$B_{HZ}' = d_h B_H \quad (4.22)$$

Die Regelung für eine alleinige Zusatzlast Z stützt diese Annahme.

Bild 4.5 zeigt die Regelkurve, wobei die Gerade  $\frac{\sigma_H}{\sigma_{HZ}}(c_H + c_Z)$  die Achsen in den Punkten  $(\frac{\sigma_{HZ}}{\sigma_H}, 0)$  bzw.  $(0, \frac{\sigma_{HZ}}{\sigma_H})$  schneidet. Der zuletzt genannte Punkt ist jedoch nicht mehr Bestandteil der Regelkurve, denn für  $c_H = 0$  gilt der singuläre Punkt  $(0, 1)$ . Anhand der beispielhaft eingezeichneten Kombinationskurve kann ersehen werden, daß gegen diese Regel der gleiche entscheidende Einwand vorzubringen ist wie gegen die LRF-Regel (siehe Abschnitt 4.3.3).

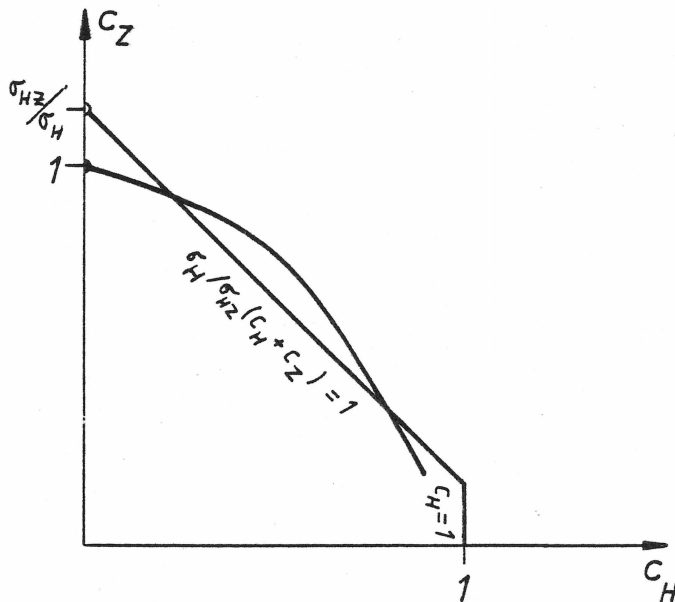


Bild 4.5: DIN 1050

#### 4.4 Empfehlung

Drei der vier in Abschnitt 4.3 besprochenen Regeln werden abgelehnt: Die CAF-Regel wegen ihrer  $\psi$ -Faktoren, die jeweils nur von einer einzigen Last abhängig sind, die LRF-Regel und die Regel DIN 1050 wegen der unvermeidlichen Bereiche mit Ergebnissen auf der unsicheren Seite. Übrig bleibt demnach der Vorschlag nach Turkstra und Madsen. Er sollte jedoch in zwei Punkten modifiziert werden.

Zunächst wird empfohlen, entgegen Turkstra/Madsen nur

$$\psi_{ij} = \psi_{ji} \quad (4.23)$$

zuzulassen. Geometrisch bedeutet dies, daß sich die Teilgeraden der Regelkurve

$$1 = \max\{\psi_{ij}c_i + c_j; c_i + \psi_{ij}c_j\} \quad (4.24)$$

im Punkt

$$c^* = c_i = c_j = 1/(1 + \psi_{ij}) \quad (4.25)$$

schneiden. Die Regelung mit Gl.(4.23) weist gegenüber derjenigen mit Gl.(4.17) zwei Vorteile, aber auch einen Nachteil auf.

Nachteilig ist, daß sich die Regelkurve Gl.(4.24) an eine bezüglich der Geraden  $c_i = c_j$  asymmetrische Kombinationskurve schlechter anpassen läßt als die Regelkurve Gl.(4.16) mit  $\psi_{ij} \neq \psi_{ji}$ . Asymmetrische Kombinationskurven haben ihre Ursache in ungleichen stochastischen Eigenschaften der kombinierten Lasten.

Vorteilhaft dagegen ist, daß sich bei  $\psi_{ij} = \psi_{ji}$  die Zahl der nötigen Faktoren beinahe auf die Hälfte verringert. Darüber hinaus vereinfacht sich die Zuordnung zwischen  $\psi$ -Faktor und Last. Zuvor mußten ja zu einer zweifachen Kombination nicht

nur zwei Faktoren behalten werden, sondern auch deren richtige Zuordnung zu den Lasten. Jetzt ist nur ein  $\psi$ -Faktor zu merken, der für beide Lasten gilt.

Den zweiten Vorteil erfährt man bei der Ermittlung des maßgeblichen Bemessungswertes einer zweifachen Kombination nach Gl.(4.15). Bei unterschiedlichen Faktoren müssen häufig beide in Gl.(4.15) enthaltenen Terme berechnet und anschließend miteinander verglichen werden. Bei gleichen Faktoren genügt es, den Faktor der kleineren der beiden Größen  $d_i B_{X_i}$  oder  $d_j B_{X_j}$  zuzuordnen und nur diesen Term zu berechnen, um sofort den Bemessungswert zu erhalten. Die Berechnung des zweiten Termes und der anschließende Vergleich entfallen. Formal geht nun Gl.(4.15) über in

$$B_z' = \max \{ d_1 B_{X_1}; d_2 B_{X_2} \} + \psi_{12} \min \{ d_1 B_{X_1}; d_2 B_{X_2} \} \quad (4.26)$$

Die zweite Modifikation betrifft die Ermittlung der  $\psi$ -Faktoren hinsichtlich Leitgedanken und angewandter Methode.

In der Arbeit von Turkstra/Madsen gilt für die Bemessungswerte einzelner Lasten das Kriterium, daß sie nur mit einer bestimmten Höchstwahrscheinlichkeit überschritten werden dürfen. Anders im Falle einer Lastkombination. Hier nehmen Turkstra/Madsen innerhalb gewisser Grenzen Abweichungen von dem für einzelne Lasten streng angewandten Kriterium hin. Das bedeutet, die Bemessungswerte einzelner Lasten und von Lastkombinationen werden nach unterschiedlichen Bemessungskriterien bestimmt. Eine derartige Unterscheidung ist nicht gerechtfertigt. Für beide, einzelne Last und Lastkombination, muß das gleiche Bemessungskriterium gelten, wie schon in Abschnitt 3.2 gefordert wurde.

Zur Bestimmung der  $\psi$ -Faktoren bieten sich die Kombinationskurven an. Es ist dann sichergestellt, daß für einzelne La-

sten und alle Lastkombinationen ein einheitliches Bemessungskriterium gilt.

In Gl.(4.25) wurde bereits der Schnittpunkt der beiden Teilgeraden der Regelkurve gefunden. Auflösung nach  $\psi_{ij}$  ergibt

$$\psi_{ij} = \frac{1-c^*}{c^*} \quad (4.27)$$

Die Teilgeraden müssen so gewählt werden, daß ihre maßgeblichen Bereiche vollständig innerhalb des sicheren Bereiches liegen.

Wenn die Kombinationskurve bezüglich des Ursprunges konvex ist, darf der Punkt  $c^*$  auf der Kombinationskurve liegen. Für die Konvexität sprechen Randtangenten mit  $-1 \leq \operatorname{tg} \alpha$  (siehe etwa Bild 3.5). Doch selbst mit diesen Voraussetzungen kann die Konvexität noch nicht allgemein bewiesen werden. Lediglich im Sonderfall zeitinvarianter, normalverteilter Lasten, für den sich nach Anhang B die Kombinationskurven als quadratische Formen in  $\underline{c}$  darstellen, liegt unter den genannten Voraussetzungen immer Konvexität vor, denn quadratische Formen haben keine Wendepunkte. Bei konvexen Kombinationskurven bestimmt sich der  $\psi$ -Faktor folgendermaßen: Wegen  $c_i = c_j = c^*$  kann Gl.(3.9) umgeformt werden zu

$$1 = c^* B\left(\frac{X_i}{B_{X_i}} + \frac{X_j}{B_{X_j}}; Kr\right) \quad (4.28)$$

In Verbindung mit Gl.(4.27) folgt daraus

$$\psi_{ij} = B\left(\frac{X_i}{B_{X_i}} + \frac{X_j}{B_{X_j}}; Kr\right) - 1 \quad (4.29)$$

Bei einer Kombinationskurve, über deren Konvexität vorab nichts bekannt ist, muß zur Bestimmung des  $\psi$ -Faktors, die vollständige Kurve ermittelt werden. In diese sind sodann die Teilgeraden einzupassen. Mit dem Schnittpunkt der Teilgeraden läßt sich der  $\psi$ -Faktor nach Gl.(4.27) berechnen.

Zur groben Abschätzung können die Steigungen der Randtangente an die Kombinationskurven herangezogen werden. Es muß gelten

$$\psi \geq \max \{ -\operatorname{tg} \alpha, -\operatorname{tg} \beta \} \quad (4.29)$$

mit  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\operatorname{tg} \beta$  im Sinne des Bildes 3.5. Für einige Arten von Lastkombinationen wurden im Abschnitt 3.5.2 Formeln für die Steigungen der Randtangente angegeben.

#### 4.5 Kombinationsregel für mehrfache Kombinationen

Die in Abschnitt 4.4 für zweifache Kombinationen empfohlene Regel ist nun für die Anwendung auf mehrfache Kombinationen auszuweiten. In mehrfachen Kombinationen sind beliebig viele Lasten miteinander kombiniert; die zweifache Kombination ist ein Sonderfall einer mehrfachen Kombination.

Die mehrfachen Kombinationen können nach Gleichartigkeit oder Verschiedenartigkeit der kombinierten Lasten eingeteilt werden. Kombinationen gleichartiger Lasten liegen beispielsweise im Hochbau in der Kombination der Lasten aus einzelnen Stockwerken vor. Die Zahl der gleichartigen Lasten kann entsprechend der Zahl der Stockwerke sehr hoch werden. Es verspricht Vorteile, solche Lasten, wenn sie in großer Zahl auftreten, unter Ausnutzung ihrer Gleichartigkeit gesondert zu behandeln. Dieser Frage wird sich Abschnitt 4.7 widmen.

Die hier untersuchten Kombinationen enthalten beliebige verschiedenartige Lasten. Es kann unterstellt werden, daß solche Kombinationen meist nur wenige verschiedenartige Lasten enthalten. Wirklichkeitsnahes Beispiel ist ein üblicher Hochbau, in dem man außer Eigengewicht etwa drei oder vier verschiedenartige Lasten antrifft, nämlich Wind, Schnee sowie ein oder zwei Verkehrslasten. Aus dieser Beobachtung leitet sich ab, wie die Kombinationsregel für mehrfache Kombinationen beschaffen sein soll: Sie soll gerade die Kombinationen weniger Lasten gut lösen und hierbei selbstverständlich an die Regel für

zweifache Kombinationen anschließen. Andererseits kann eine Verschlechterung bei zunehmender Zahl verschiedenartiger Lasten in Kauf genommen werden.

Wie zuvor die Kombinationskurve der Untersuchung der zweifachen Kombination, so dient jetzt die Kombinationsfläche der Untersuchung der mehrfachen Kombination. Bild 4.6 stellt eine mögliche Fläche im dreidimensionalen  $c$ -Raum mittels einiger Höhenlinien  $c_3 = \text{const}$  mit  $0 \leq \text{const} < 1$  dar. Die Kombinationskurven zeigen sich als Durchschnitte der Fläche durch die drei Koordinatenebenen  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  und  $c_3 = 0$ .

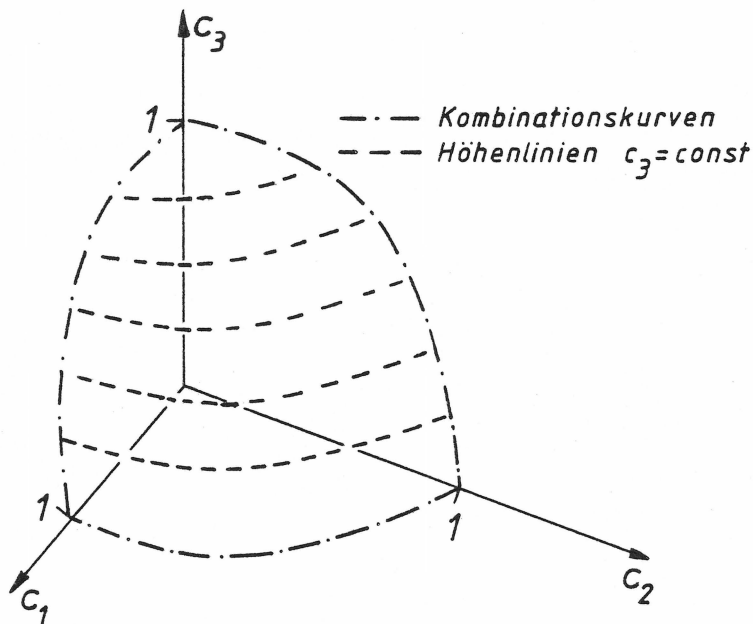


Bild 4.6: Kombinationsfläche im  $R_3$

Der Schritt von der Kurve zur Fläche ist ebenso für die Regel zu tun, so daß aus der Regelkurve eine Regelfläche wird. Der fällige Vergleich findet zwischen Kombinations- und Regelfläche statt. Die Abbildung der Regelfläche im  $c$ -Raum wird auf die gleiche Weise erzielt wie die der Regelkurve (siehe Abschnitt 4.2).

Die hier gegebene Regelempfehlung folgt der CAF-Regel, selbstverständlich in der modifizierten Fassung nach Turkstra/Madsen (siehe Abschnitt 4.3) unter Berücksichtigung der in Abschnitt 4.4 gegebenen Empfehlungen. Danach ermittelt man den Bemessungswert  $B_z'$  der Lastkombination  $Z = \sum d_i X_i$  aus

$$B_z' = \max_{\text{alle } i} \{ d_i B_{X_i} + \sum_{\text{alle } j \neq i} \psi_{ij} d_j B_{X_j} \} \quad (4.30)$$

Die dazugehörige Regelfläche ist durch ein System von Ebenengleichungen beschrieben, das in Matrixform lautet:

$$\underline{\psi} \cdot \underline{c} = \underline{1} \quad (4.31)$$

Hierin ist  $\underline{\psi}$  das Koeffizientenschema der  $\psi$ -Faktoren; es ist symmetrisch, weil gemäß Abschnitt 4.4  $\psi_{ij} = \psi_{ji}$  gilt, und es ist in der Diagonale mit Werten  $\psi_{ii} = 1$  besetzt. Die Diagonalfaktoren können als Kombinationsfaktoren zur Kombination einer Last mit sich selbst interpretiert werden; sie dürfen jedoch nicht als Faktoren für die Kombination einer Last mit ihresgleichen mißverstanden werden. Bild 4.7 zeigt die drei Ebenen einer dreifachen Kombination anhand ihrer Schnittkurven miteinander und ihrer Durchschnitte durch die Koordinatenebenen. Die letzteren Durchschnitte sind nichts anderes als die Regelkurven der zweifachen Kombinationen. Die infolge der max-Vorschrift maßgeblichen Ebenenbereiche sind dick umrandet. Den Koordinatenvektor  $\underline{c}_s$  des gemeinsamen Schnittpunktes S aller Ebenen erhält man als Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems

$$\underline{\psi} \cdot \underline{c}_s = \underline{1} \quad (4.32)$$

Bemessungen nach Gl.(4.30) liegen immer auf der sicheren Seite, wenn die Regelfläche vollständig innerhalb der Kombinationsfläche liegt. In den Koordinatenebenen ist dies erfüllt, wenn die Regelkurven für die zweifachen Kombinationen korrekt ermittelt wurden. Nachzuweisen bleibt der übrige Bereich mit dem besonders exponierten Punkt S.

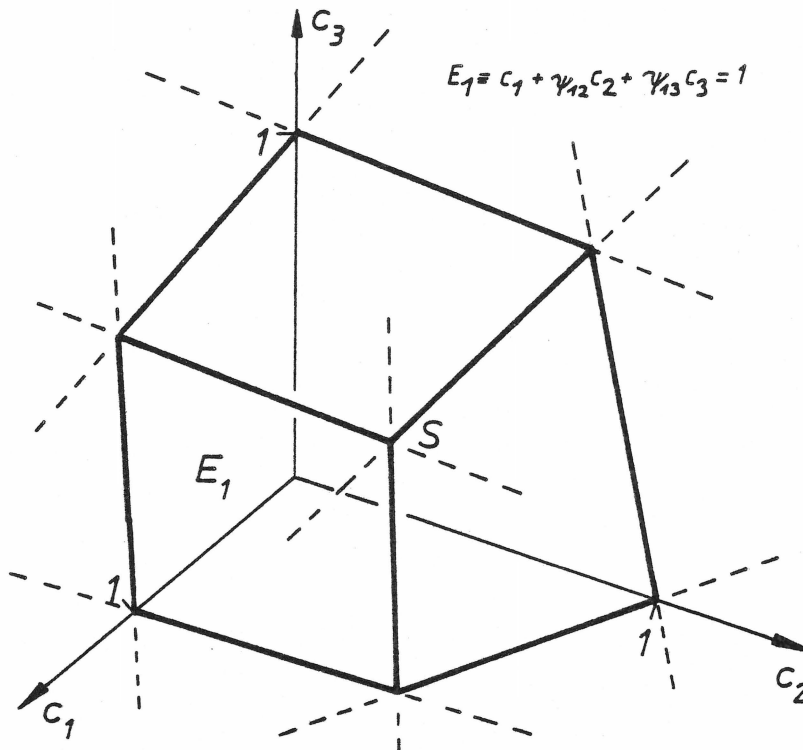


Bild 4.7: Regelfläche: maßgebliche Bereiche der drei Teilebenen

Die umfassendste Formulierung der soeben geometrisch ausgedrückten Forderung lautet:

Zu allen zweifachen Kombinationen aus den vorhandenen Lasten werden die Faktoren  $\psi_{ij}$  derart bestimmt, daß für alle  $d_i$  und  $d_j$

$$B(d_i X_i + d_j X_j ; Kr) \leq \max\{d_i B_{X_i} + \psi_{ij} d_j B_{X_j} ; \psi_{ij} d_i B_{X_i} + d_j B_{X_j}\} \quad (4.33)$$

erfüllt ist. Die linke Seite von Gl.(4.33) ist ein Bemessungswert im Sinne von Gl.(3.3). Damit der Bemessungswert jeder beliebigen n-fachen Kombination ( $n \leq$  Zahl der vorhandenen Lasten), der nach Gl.(4.30) ermittelt wird, stets auf der sicheren Seite liegt, muß für alle  $d_i, d_j$



$$B(\sum d_i X_i; Kr) \leq \max_{\text{alle } i} \{d_i B_{X_i} + \sum_{j \neq i} \psi_{ij} d_j B_{X_j}\} \quad (4.34)$$

erfüllt sein. Die linke Seite ist wiederum ein Bemessungswert nach Gl. (3.3). Die Summierungen erstrecken sich auf alle in der n-fachen Kombination enthaltenen Lasten.

Die Einschränkung auf das wohl gebräuchlichste Bemessungskriterium, nämlich das in Abschnitt 3.5.1 beschriebene Kriterium (Wahrscheinlichkeit P einer Überschreitung des Bemessungswertes  $\leq P_{\ddot{u}}$ ), führt unter sonst gleichen Bedingungen die Gln. (4.33) und (4.34) über in

$$P(d_i X_i + d_j X_j \geq \max\{d_i B_{X_i} + \psi_{ij} d_j B_{X_j}; \psi_{ij} d_i B_{X_i} + d_j B_{X_j}\}) \leq P_{\ddot{u}} \quad (4.35)$$

für Gl. (4.33) sowie

$$P(\sum d_i X_i \geq \max_{\text{alle } i} \{d_i B_{X_i} + \sum_{j \neq i} \psi_{ij} d_j B_{X_j}\}) \leq P_{\ddot{u}} \quad (4.36)$$

für Gl. (4.34).

Ein allgemeingültiger Nachweis von Ungl. (4.34) oder auch nur von Ungl. (4.36) ist nicht möglich. Ein einfaches Beispiel belegt diese Aussage:

Gegeben sind drei (0,1) normalverteilte, unabhängige Lasten  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ , für die nach dem eben genannten Kriterium zu bemessen ist. Mit  $k = \Phi^{-1}(1-P_{\ddot{u}})$  ergeben sich die Bemessungswerte der einzelnen Lasten zu

$$B_{X_i} = k,$$

der Bemessungswert der Kombination  $Y = X_1 + X_2$  zu

$$B_Y = k \sqrt{2}$$

und derjenige der Kombination  $Z = X_1 + X_2 + X_3$  zu

$$B_Z = k \sqrt{3}$$

Aus der Bedingung  $B_Y = B_Y'$  wird  $\psi$  abgeleitet, also

$$k \sqrt{2} = k + \psi k$$

woraus

$$\psi = \sqrt{2} - 1$$

Die Beziehung zwischen  $B_Z$  und  $B_Z'$  wird durch die folgende Ungleichung beschrieben

$$k \sqrt{3} \neq k + \psi k + \psi k = k \cdot (2\sqrt{2} - 1)$$

Danach ist Gl.(4.34) erfüllt, wenn  $k$  größer Null ist, wenn also die zulässige Überschreitenswahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}}$  kleiner 0,5 ist. Gl.(4.34) ist dagegen nicht erfüllt, wenn  $k$  kleiner Null ist!

Es können demnach nur bedingte Nachweise geführt werden. Die Einschränkungen können alle Merkmale treffen, die zur praktischen Beschreibung der Gln.(4.33) und (4.34) notwendig sind. Es sind dies das Bemessungskriterium, Verteilungen und Zeitverhalten der Lasten, ihre Abhängigkeiten und ihre Zahl. Der Nachweis etwa im obigen Beispiel gilt für eine bestimmte Art von Bemessungskriterium, ein bestimmtes Lastmodell- und selbst jetzt nur für Überschreitenswahrscheinlichkeiten  $P_{\ddot{u}} \leq 0,5$  (freilich ist diese letzte Einschränkung kaum von praktischer Bedeutung, da bei ungünstig wirkenden Lasten Zielwahrscheinlichkeiten mit Werten deutlich kleiner 0,5 zu erwarten sind).

Die theoretische Klärung der mit dem Nachweis verbundenen Fragen erfordert umfangreiche, systematische Untersuchungen. Indes reicht es für das hier verfolgte Ziel, nämlich die Absicherung der benutzten  $\psi$ -Faktoren, die Nachweise lediglich für die konkreten Lasten und die dafür hergeleiteten  $\psi$ -Faktoren zu erbringen. Dies geschieht am einfachsten durch Nachrechnungen verschiedener Kombinationen in geeigneten Zusammensetzungen, zu denen vor allem auch diejenige zählt, die dem Punkt S nach Gl.(4.32) entspricht.

#### 4.6 Anwendungsbeispiel

Die Anwendung der in den Abschnitten 4.4 und 4.5 empfohlenen Regel soll an einem Beispiel mit vier Lasten illustriert werden. Hierzu seien die folgenden Lastarten gegeben:

1. SL (Sustained Live Load)  
Verkehrslast mit seltenen Änderungen  
Beispiel: Last aus Möblierung mit Änderung  
etwa bei Mieterwechsel
2. TL (Transient Live Load)  
Verkehrslast mit häufigen Änderungen  
Beispiel: Fußgänger- und Fahrzeugverkehr
3. W Windlast
4. S Schneelast

Sämtliche Lasten werden als voneinander unabhängig angenommen. Ihr Zeitverhalten wird durch zufällige Folgen beschrieben, deren aufeinanderfolgende Realisationen gleichlang dauern und voneinander unabhängig sind (siehe dazu auch Bild C.2 im Anhang C). Die weiterhin erforderlichen Daten zur vollständigen Beschreibung des Lastenmodells (Verteilungstypen, Variationskoeffizienten, Auftretenswahrscheinlichkeiten und Wiederholungszahlen) sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt. Dabei mag man sich das Niveau  $\beta = 2$  dem Gebrauchssicherheitsnachweis und das Niveau  $\beta = 4$  dem Bruchsicherheitsnachweis zugeordnet vorstellen.

Last	Verteilungstyp	V	$P_a$	r	E/B ( $\beta=2$ )	E/B ( $\beta=4$ )
SL	Gamma	0,5	1	10	0,33	0,20
TL	Gamma	0,7	$5 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^4$	0,16	0,10
W	Gamma	0,7	1	$7 \cdot 10^4$	0,11	0,08
S	Gumbel	0,25	1	50	0,42	0,27

V = Variationskoeffizient

$P_a$  = Auftretenswahrscheinlichkeit = Wahrscheinlichkeit, mit der bei jeder neuen Realisation ein Wert aus der vorliegenden Verteilung realisiert wird (mit Gegenwahrscheinlichkeit  $1-P_a$  wird der Wert 0 realisiert)

r = Wiederholungszahl = Zahl der Realisationen innerhalb der betrachteten Zeitdauer

E/B( $\beta=b$ ) = Verhältnis zwischen Erwartungswert der "Augenblicksvertei- lung" und Bemessungswert beim angegebenen Sicherheitsniveau  $\beta = b$

Tabelle 4.1: Daten des Lastenmodells

Es soll wieder nach dem Kriterium bemessen werden, daß die Wahrscheinlichkeit P einer Überschreitung des Bemessungswertes nicht größer als eine vorgeschriebene Wahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}}$  ist. Es werden zwei verschiedene Zuverlässigkeitsniveaus angezielt, wie sie in Verbindung mit verschiedenen Nachweisen, etwa Gebrauchssicherheitsnachweis und Bruchsicherheitsnachweis, vorgeschrieben sein können. Das eine Niveau ist durch den Wert  $\beta = 2$  quantifiziert, dem über die Beziehung  $P_{\ddot{u}} = \Phi(-\beta)$  ein  $P_{\ddot{u}} = 2,28 \cdot 10^{-2}$  zugeordnet ist, das zweite Niveau durch den Wert  $\beta = 4$ , somit  $P_{\ddot{u}} = 3,17 \cdot 10^{-5}$ . ( $\Phi(.)$  ist das Normalverteilungsintegral.) Tabelle 4.1 zeigt für die beiden Zuverlässigkeitsniveaus die Verhältnisse zwischen den Erwartungswerten der "Augenblicksvertei- lungen" und den Bemessungswerten, die sich nach dem vorgeschriebenen Bemessungskriterium ergeben.

Die Berechnungen der Kombinationskurven für alle Lastpaare und die Nachweise der sicheren Seite bei mehrfachen Kombinationen wurden mit dem Programmsystem FORM [ 5 ] durchgeführt, worin die Kombinationen zufälliger Folgen nach [12] behandelt werden.

Bild 4.8 zeigt die Kombinationskurve, die für die Lasten SL und S und für das Zuverlässigkeitsniveau  $\beta = 4$  ermittelt wurde. Die Steigungen der Randtangenten ergaben sich nach Abschnitt 3.5.2 zu

$$\left. \frac{dc_S}{dc_{SL}} \right|_{c_{SL}=0, c_S=1} = - \frac{E(SL)}{B_{SL}} = - 0,2$$

und

$$\left. \frac{dc_{SL}}{dc_S} \right|_{c_{SL}=1, c_S=0} = - \frac{E_{r_S}/r_{SL}(S)}{B_S} = - 0,39$$

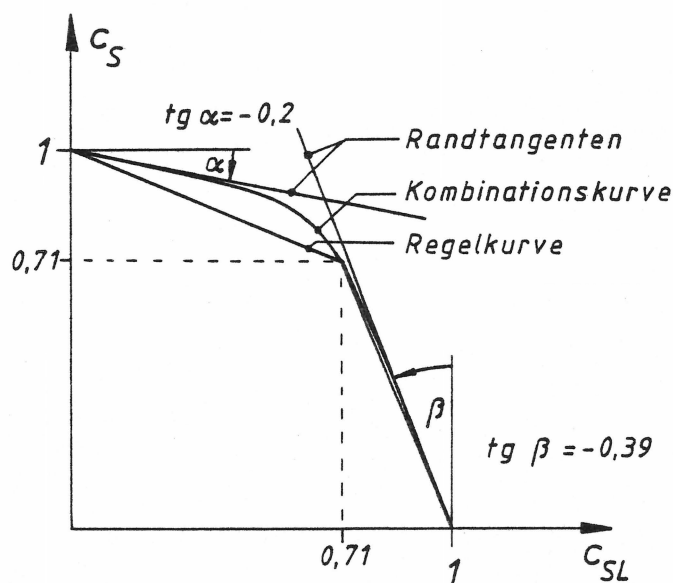


Bild 4.8: Kombinationskurve der Lasten SL und S

Der erste Wert ist auch direkt aus Tabelle 4.1 ablesbar. Die eingepaßte Regelkurve berührt die Kombinationskurve im Punkt  $c_{SL} = c_S = 0,71$  und liegt vom Ursprung aus gesehen vollständig innerhalb der Kombinationskurve und daher nach Abschnitt 4.2 im sicheren Bereich. Nach Gl. (4.27) ergibt sich daraus

$$\psi_{SL,S} = \psi_{S,SL} = 0,41.$$

Die Tabellen 4.2 und 4.3 geben alle ermittelten  $\psi$ -Faktoren für die Zuverlässigkeitsniveaus  $\beta = 2$  und  $\beta = 4$  wieder. Hierin sind auch Faktoren  $\psi_{SL,SL}$  angegeben. Es handelt sich dabei

	SL	TL	W	S
SL	0,48			
TL	0,55			
W	0,68	0,14		
S	0,59	0,48	0,60	

Tabelle 4.2:  $\psi$ -Faktoren für  
Zuverlässigkeitsniveau  
 $\beta = 2$

	SL	TL	W	S
SL	0,35			
TL	0,38			
W	0,51	0,11		
S	0,41	0,33	0,44	

Tabelle 4.3:  $\psi$ -Faktoren für Zuver-  
lässigkeitsniveau  $\beta = 4$

um Faktoren für die Kombination der Last SL nicht mit sich selbst, sondern mit ihresgleichen. Insofern ist der Unterschied zur Koeffizientenmatrix  $\underline{\psi}$  in Gl.(4.31) zu beachten. Ob der oft sehr kleinen Werte der  $\psi$ -Faktoren wird daran erinnert, daß in diesem Berechnungsbeispiel für sämtliche Lasten Unabhängigkeit unterstellt worden war; wirklichkeitsnähere Annahmen über diesen Punkt würden, wie schon in Abschnitt 3.5.4 gezeigt, die Kombinationskurven flacher ziehen und damit die Werte der  $\psi$ -Faktoren wachsen lassen.

Es wurde für verschiedene Punkte der Regelfläche nachgerechnet, daß sie im sicheren Bereich liegen. Ein solcher, besonders exponierter Punkt ist der Schnittpunkt aller Teilebenen nach Gl.(4.32). Dieses Gleichungssystem liefert bei Einsetzen der  $\psi$ -Faktoren zum Zuverlässigkeitsniveau  $\beta = 4$  folgenden Koordinatenvektor des Schnittpunktes S

$$\begin{pmatrix} c_{SL} \\ c_{TL} \\ c_W \\ c_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,262 \\ 0,702 \\ 0,615 \\ 0,389 \end{pmatrix}$$

Im entsprechenden Bemessungsfall stehen die Terme  $d_i B_{X_i}$  der Lastkombination im Verhältnis dieser Koordinaten zueinander. Für ihn ergibt sich bei Bemessung nach Gl. (4.30) die Wahrscheinlichkeit  $P_{\ddot{u}}$ , mit der der Bemessungswert überschritten wird, zu  $P_{\ddot{u}} = 5,7 \cdot 10^{-6}$ , also eine bei weitem kleinere als die geforderte von  $P_{\ddot{u}} = 3,17 \cdot 10^{-5}$ .

Jetzt soll noch die Anwendung der Kombinationsregel demonstriert werden. Die Bemessung soll das Zuverlässigkeitsniveau  $\beta = 4$  erreichen; die dementsprechenden  $\psi$ -Faktoren sind in Tabelle 4.3 enthalten.

Zunächst die Kombination  $Z = SL + TL$ ; die Bemessungswerte der beiden einzelnen Lasten haben sich zu  $B_{SL} = 20$  und  $B_{TL} = 10$  ergeben. Nach Gl. (4.30) folgt für den Bemessungswert  $B_Z'$  der Kombination

$$\begin{aligned} B_Z' &= \max\{B_{SL} ; B_{TL}\} + \psi_{SL,TL} \cdot \min\{B_{SL} ; B_{TL}\} \\ &= 20 \qquad \qquad \qquad + 0,38 \cdot 10 \\ &= 23,80 \end{aligned}$$

Diese Kombination wird jetzt durch die Last W mit  $B_W = 5$  zur dreifachen Kombination erweitert.  $B_Z'$  wird nun zu

$$\begin{aligned} B_Z' &= \max \left\{ \begin{array}{lll} SL + & SL, TL & TL + \\ \psi_{SL, TL} \cdot SL + & & TL + \psi_{TL, W} \\ \psi_{SL, W} & SL + \psi_{TL, W} & ZL + \end{array} \begin{array}{l} W \\ W \\ W \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 20 + 0,38 \cdot 10 + 0,51 \cdot 5 \\ 0,38 \cdot 20 + \quad \quad 10 + 0,11 \cdot 5 \\ 0,51 \cdot 20 + 0,11 \cdot 10 + \quad \quad 5 \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} 26,35 \\ 18,15 \\ 16,30 \end{array} \right\} = 26,35 \end{aligned}$$

Verglichen mit der unabgeminderten Summe der einzelnen Bemessungswerte ( $SL + TL + W = 35$ ) ergibt sich hier bereits eine sehr lohnende Abminderung.

Eine Änderung des Wertes  $SL$  auf 8 hat für  $B_z'$  zur Folge

$$B_z' = \max \left\{ \begin{array}{l} \cdot 8 + 0,38 \cdot 10 + 0,51 \cdot 5 \\ 0,38 \cdot 8 + \quad \quad 10 + 0,11 \cdot 5 \\ 0,51 \cdot 8 + 0,11 \cdot 10 + \quad \quad 5 \end{array} \right\}$$
$$B_z' = \max \left\{ \begin{array}{l} 14,35 \\ 13,59 \\ 10,18 \end{array} \right\} = 14,35$$

Dies illustriert, daß es in der maßgeblichen Kombination nicht immer der Maximalwert der einzelnen Bemessungswerte ist (in diesem Beispiel  $TL = 10$ ), der unabgemindert anzusetzen ist.

#### 4.7 Kombinationsregel für die Kombination von vielen gleichartigen Lasten ("Hochhauslasten")

Wie in Abschnitt 4.5 angekündigt, betrachtet dieser Abschnitt die Kombination vieler gleichartiger Lasten, die im Hochbau mit der Kombination von Stockwerklasten typisch ist. Die oft sehr große Zahl der Lasten in einer solchen Kombination einerseits und die Gleichartigkeit der Lasten andererseits legen nahe, für solche Kombinationen eine besondere Regel aufzustellen. Die zugehörige Regelfläche soll die Kombinationsfläche besser approximieren als die nach Abschnitt 4.5. Die Gleichartigkeit der Lasten liefert den Ansatzpunkt für mögliche Verbesserungen.

Der Gewinn, der sich aus einer gesonderten Regel ziehen läßt, kann abgeschätzt werden, wenn man die Zahl der Lasten gegen unendlich wachsen läßt und dabei den Bemessungswert nach Abschnitt 4.5 mit dem diesem Grenzfall zugeordneten Grenzwert vergleicht.



Für die Kombination  $Z = \sum d_i X_i$  mit zeitinvarianten, unabhängigen Lasten  $X_i$  ergibt sich nach dem Gesetz der großen Zahlen (siehe z.B. Papoulis, Abschnitt 8.5 [ 9 ]) folgender Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_Z = \sum_{i=1}^n d_i \cdot E(X_i) \quad (4.37)$$

Sind die Lasten zeitvariant, gibt es für jeden Zeitpunkt einen Grenzwert nach Gl.(4.37) mit den Erwartungswerten der zu diesem Zeitpunkt gültigen "Augenblicksverteilungen". Sind alle Prozesse stationär, so bleibt ein solcher Grenzwert über die ganze Zeit konstant. Hervorzuheben ist noch, daß die abgeleiteten Grenzwerte unabhängig vom verwendeten Bemessungskriterium sind.

Demgegenüber ergibt sich nach Abschnitt 4.5 gemäß Gl.(4.30) der infolge der max-Vorschrift maßgebliche Bemessungswert zu

$$B_Z' = d_i B_{X_i} + \sum_{j \neq i} \psi_{ij} d_j B_{X_j}$$

der etwa so groß ist wie die folgende rechte Seite

$$B_Z' \approx \sum_{\text{alle } j} \psi_{ij} d_j B_{X_j}$$

oder nach Erweiterung der Summenglieder mit  $E(X_j)$

$$B_Z' \approx \sum_{\text{alle } j} \psi_{ij} \cdot \frac{B_{X_j}}{E(X_j)} \cdot d_j \cdot E(X_j) \quad (4.38)$$

Die Werte  $B_Z$  nach Gl.(4.37) und  $B_Z'$  nach Gl.(4.38) unterscheiden sich durch die Multiplikatoren

$$\psi_{ij} \cdot \frac{B_{X_j}}{E(X_j)}$$

in jedem einzelnen Summenglied der Gl.(4.38). Sie sind bei Voraussetzung gleichartiger Lasten in allen Summengliedern gleich. Der mögliche Gewinn läßt sich nun daran abschätzen, um wieviel diese Multiplikatoren größer Eins sind.

Im Beispiel des Abschnittes 4.6 etwa galten für die Last SL beim Zuverlässigkeitsniveau  $\beta = 4$  nach Tabelle 4.1 ein Verhältnis  $E/B = 0,2$  sowie für die Kombination dieser Last mit ihresgleichen nach Tabelle 4.3 ein Faktor  $\psi_{SL,SL} = 0,35$ . Hiermit wird der Multiplikator zu 1,75.

Die Regel kann aus der Kombinationsfläche abgeleitet werden. Diese zeichnet sich wegen der Gleichartigkeit der Lasten durch eine Symmetrie dergestalt aus, daß zu jedem ihrer Punkte  $(\dots, c_i = a, c_j = b, \dots)$  jeder durch beliebige Koordinatenvertauschung, z.B.  $(\dots, c_i = b, \dots, c_j = a, \dots)$  gewonnene Punkt ebenfalls auf der Kombinationsfläche liegt. Deshalb genügt es, die vorliegenden gleichartigen Lasten in die Reihenfolge  $d_1 B_{X_1} \geq d_2 B_{X_2} \geq \dots \geq d_n B_{X_n}$  zu bringen und die Betrachtung auf den Bereich  $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n$  einzuschränken. Im  $R_2$  ist dies beispielsweise der Bereich zwischen der  $c_1$ -Achse und der Geraden  $c_1 = c_2$ , im  $R_3$  (hierzu Bild 4.9) der innere Bereich der durch die drei Geraden ( $c_1$ -Achse, Gerade  $c_1 = c_2$  in der Ebene  $c_3 = 0$  und Äquisektrix  $c_1 = c_2 = c_3$ ) beschriebenen Pyramide mit der Spitze im Ursprung.

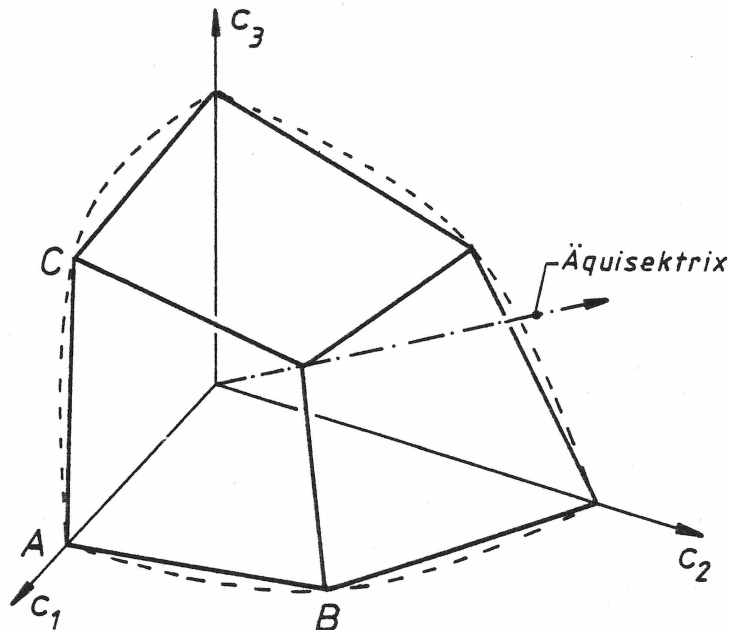


Bild 4.9: Regelflächen nach Abschn. 4.5

Die folgende Überlegung läßt sich nur im  $R_3$  anschaulich verfolgen. Die im betrachteten Bereich maßgebliche Teilfläche der Regelfläche nach Abschnitt 4.5 ist durch die Punkte A, B und C festgelegt, die in Bild 4.9 eingezeichnet sind. Zwei dieser Punkte, nämlich A und B, liegen auf Kanten der Pyramide, während der dritte, C, außerhalb liegt. Eine neue Regelfläche, die innerhalb der Pyramide die Kombinationsfläche besser approximiert, soll zwei Bedingungen einhalten. Erstens soll sie wieder eine Ebene bilden, damit die Bemessung in den Termen  $d_i B_{X_i}$  linear bleibt. Zweitens soll sie in der Bemessung bei verschwindendem dritten Term  $d_3 B_{X_3}$  nahtlos zur Bemessung für zweifache Kombinationen führen, also die alte Regelfläche in der Geraden A-B schneiden. Deshalb entsteht die neue Regelfläche als Ebene, die gegenüber der bisherigen um die Achse A-B verschwenkt ist. Sie muß nicht bis zum Punkt C hin auf der sicheren Seite liegen, sondern nur innerhalb der Pyramide. Man kommt damit zur Ebenengleichung

$$c_1 + \psi_{\text{art}}^{(2)} c_2 + \psi_{\text{art}}^{(3)} c_3 = 1 \quad (4.39)$$

Die veränderte Indizierung soll diese Faktoren zur Kombination gleichartiger Lasten von den Faktoren zur zweifachen Kombination beliebiger Lasten nach Abschnitt 4.4 abheben. Der Kopfzeiger (i) besagt, daß es sich um den Kombinationsfaktor zur i-ten Last handelt. Der einfache Fußzeiger art beschreibt zu welcher Lastart der Faktor gehört.  $\psi_{\text{art}}^{(2)}$  ist identisch mit dem  $\psi_{i,j}$  nach Abschnitt (4.4), der für die zweifache Kombination zweier gleichartiger Lasten gilt.  $\psi_{\text{art}}^{(3)}$  ist so zu bestimmen, daß die Fläche Gl.(4.39) im Bereich der Pyramide auf der sicheren Seite liegt.

Die Verallgemeinerung auf den  $R_n$  erfolgt sukzessive von  $n=3$  auf  $n=4$  usw. und erbringt die Ebenengleichung

$$\sum_{i=1}^n \psi_{\text{art}}^{(i)} c_i = 1 \quad \text{mit} \quad \psi_{\text{art}}^{(1)} = 1 \quad (4.40)$$

Wenn die Kombinationsfläche konvex bezüglich des Ursprungs ist, darf die Ebene die Äquisektrix in deren Durchstoßpunkt  $c^*$  durch die Kombinationsfläche schneiden. Hier gilt entsprechend Gl.(3.9)

$$1 = c^* B \left( \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{B_{X_k}} ; Kr \right) \quad (4.41)$$

und wiederum sukzessive für steigende  $n$  erhält man durch Einsetzen von Gl.(4.41) in Gl.(4.40) und Auflösen nach  $\psi$  den Ausdruck für  $\psi_{\text{art}}^{(i)}$  mit

$$\psi_{\text{art}}^{(i)} = B \left( \sum_{k=1}^i \frac{X_k}{B_{X_k}} ; Kr \right) - B \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{X_k}{B_{X_k}} ; Kr \right) \quad (4.42)$$

Gl.(4.42) weist eine bemerkenswerte Analogie zu den von Pott-harst [11] gefundenen Wichtungsfaktoren  $\alpha_{R_i}$  bzw.  $\alpha_{S_i}$  auf, die auch in den Entwurf zur deutschen Rahmenrichtlinie (Abschnitt 6.1 [19]) Eingang gefunden haben. Anhang E geht auf diese Zusammenhänge näher ein.

Das umgekehrte Vorgehen des Abschnittes 4.2 führt von der Gl. (4.40) der Regelfläche zur Kombinationsregel für gleichartige Lasten: Der Bemessungswert  $B_z'$  der Kombination  $\sum d_i X_i$  von  $n$  gleichartigen Lasten  $X_i$  ist

$$B_z' = \sum_{i=1}^n \psi_{\text{art}}^{(i)} d_i B_{X_i} \quad (4.43)$$

worin die Terme  $d_i B_{X_i}$  in abnehmender Reihenfolge ( $d_i B_{X_i} \geq d_{i+1} B_{X_{i+1}}$ ) stehen und die  $\psi$ -Faktoren im Zusammenhang der Gln.(4.39) bis (4.40) erklärt sind.

Hinsichtlich des Anwendungsbereiches ist diese Regel mit derjenigen nach DIN 1055 Teil 3, Abschnitt 9 ("Abminderung der Verkehrslasten") vergleichbar. Die Lastterme müssen hier wie dort in absteigender Reihenfolge geordnet sein. Die dort verwendeten Abzüge sind in Anwendungs- und Wirkungsweise den hier verwendeten Kombinationsfaktoren äquivalent. Die Abzüge

können daher durch Kombinationsfaktoren wiedergegeben werden. Bild 4.10 zeigt die aus DIN 1055 folgenden Kombinationsfaktoren  $\psi^{(i)}$  zur  $i$ -ten Last für die zwei dort vorgesehenen Gruppen von Geschößlasten. Das Bild kann dem Inhalt nach dem Bild 4.11 des nachfolgenden Beispiels gegenübergestellt werden.

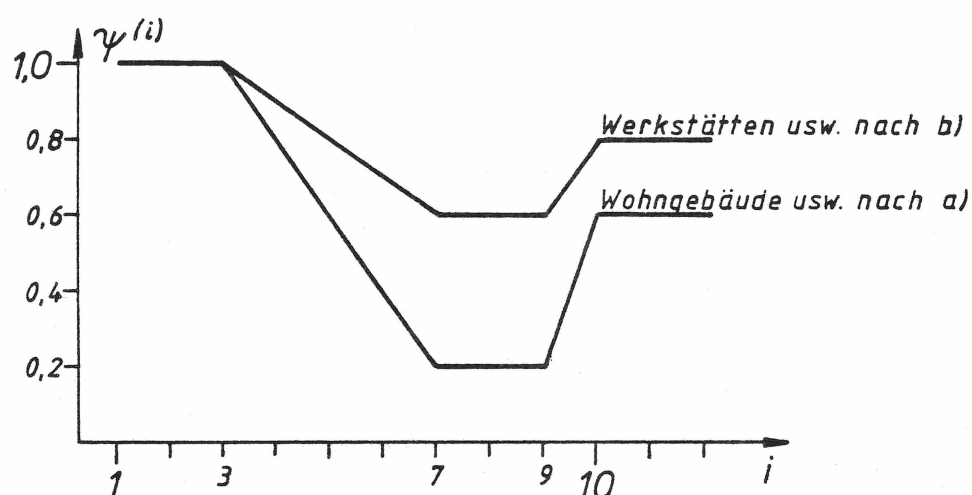


Bild 4.10: Abminderungsfaktoren nach DIN 1055, Teil 3, Abschn. 9

Die mit Gl.(4.43) geregelte Kombination enthält nur gleichartige Lasten. In der Praxis werden daneben fast immer zusätzliche verschiedenartige Lasten auftreten, beispielsweise im Hochbau neben den gleichartigen Stockwerklasten die verschiedenartigen Lasten Wind und Schnee. Auf solche Kombinationen ist problemlos die Regel Gl.(4.30) anzuwenden, wobei jedoch die mit der Regel Gl.(4.43) nutzbaren Vorteile ungenutzt bleiben und gleichzeitig bei hohen Lastenzahlen hoher Aufwand in Kauf zu nehmen ist.

Als Weg, die Vorteile der Regel Gl.(4.43) dennoch zu nutzen und den Aufwand deutlich zu senken, wird vorgeschlagen: Die Lasten werden in Gruppen zusammengefaßt, die bis auf eine jeweils nur gleichartige Lasten enthalten. Für jede Gruppe getrennt werde der Bemessungswert  $B_{z_i}$  ermittelt; nach Gl.(4.43), wenn sie nur gleichartige Lasten enthält, sonst nach Gl.(4.30). Die Summe der Bemessungswerte der einzelnen Gruppen liefere den Bemessungswert  $B_z$  der gesamten Lastkombination.

Damit der so ermittelte Bemessungswert  $B_z'$  auf der sicheren Seite liegt, muß gelten

$$B_z \leq B_z' = \sum B_{z_i}' \quad (4.44)$$

Nach dem obigen Vorgehen ist für jede Gruppe

$$B_{z_i} \leq B_{z_i}' \quad (4.45)$$

sichergestellt. Gl.(4.44) ist somit erfüllt, wenn

$$B_z \leq \sum B_{z_i} \quad (4.46)$$

erfüllt ist; dies ist die in Abschnitt 3.2 bereits angetroffene Gl.(3.7).

Ein Beweis von Gl.(4.46) ist hier nicht möglich. Doch spricht es für die Gültigkeit von Gl.(4.46), wenn schon sämtliche  $\psi$ -Faktoren zu allen möglichen zweifachen Kombinationen der in Gl.(4.44) vertretenen Lasten nicht größer als Eins sind, also tatsächlich "Abminderungsfaktoren" sind. Diese Zuversicht wird bestärkt dadurch, daß die Verteilung der die Gruppen repräsentierenden Variablen  $Z_i$  - verglichen mit der Verteilung der darin enthaltenen Lasten - gemäß dem zentralen Grenzwertsatz gegen eine Normalverteilung strebt. Für diese Verteilung aber läßt sich Gl.(4.46) zumindest für das Bemessungskriterium nach Abschnitt 3.5.1 beweisen.

Abschließend ein Beispiel, in dem die Last SL aus dem Beispiel des Abschn. 4.6 aufgegriffen wird. Für diese Last gilt beim Sicherheitsniveau  $\beta = 4$ , wie bereits aus Abschn. 4.6 folgt,

$$\psi_{SL,SL} = \psi_{SL}^{(2)} = 0,35$$

Weiterhin wurden mit den gleichen Methoden wie in Abschn. 4.6 abgeleitet:

$$\psi_{SL}^{(3)} = 0,24$$

$$\psi_{SL}^{(4)} = 0,21$$

Grenzwert von  $\psi_{SL}^{(n)}$  für  $n \rightarrow \infty$  ist, wie schon im Zuge der Gl. (4.37) bis (4.38) erwähnt, der Quotient  $E(SL)/B_{SL}$ , also nach Tabelle 4.1

$$\psi_{SL}^{(\infty)} = 0,20$$

Bild 4.11 zeigt den Verlauf der Kombinationsfaktoren  $\psi_{SL}^{(i)}$  in Abhängigkeit von  $i$ .

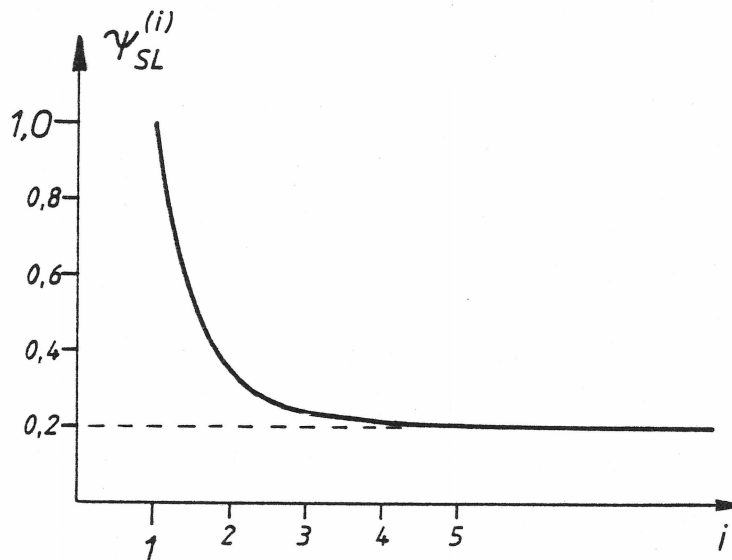


Bild 4.11: Kombinationsfaktoren  $\psi_{SL}^{(i)}$

## 5 Zusammenfassung

Gegenstand des Forschungsvorhabens ist die zuverlässigkeitstheoretische Herleitung von Lastkombinationsregeln für die praktische Bemessung. Hierzu werden zunächst die Bemessungswerte von einzelnen Lasten und Lastkombinationen erörtert, sodann werden Lastkombinationsregeln hinsichtlich ihrer Fähigkeit, solche Bemessungswerte zu liefern, untersucht und weiterentwickelt.

Vor Erörterung der Bemessungswerte sind einzelne Lasten und Lastkombinationen zu definieren. Einzelne Lasten sind Kräfte, die von außen auf ein Tragwerk einwirken und keine Reaktionskräfte sind (DIN 1080). Lastkombinationen sind Summen, deren Glieder aus multiplikativ mit Übertragungsfaktoren verknüpften einzelnen Lasten bestehen. Ein Übertragungsfaktor bestimmt den Beitrag der zugehörigen einzelnen Last zur betreffenden Lastkombination. Er kann vom Ort der Lasteintragung, von der Tragwerksgeometrie, vom statischen System, von den Materialkennwerten usw. abhängen. Die Übertragungsfaktoren werden zunächst als deterministisch angenommen. Die Lastkombinationen selbst dagegen sind als Funktion der zufälligen einzelnen Lasten ebenfalls zufällige Variablen. Ihre zufälligen Eigenschaften folgen eindeutig aus denen der einzelnen Lasten und aus deren stochastischer Abhängigkeitsstruktur.

Die Bemessungswerte von zufälligen Variablen hängen von deren zufälligen Eigenschaften und einem Bemessungskriterium ab. Bei der Ermittlung des Bemessungswertes spielt es keine Rolle, ob die zufällige Variable eine einzelne Last oder eine Lastkombination ist.

Das Bemessungskriterium gilt für diese Arbeit als von außen vorgegeben. Es könnte zum Beispiel in der Anweisung bestehen, daß der Bemessungswert nur mit vorgeschriebener Wahrscheinlichkeit überschritten werden darf. Die Ergebnisse dieser Arbeit



sind qualitativ unabhängig von der Art des Kriteriums; nur in Abschn. 3.5, in dem quantitative Aussagen getroffen werden, muß das Kriterium konkreter gefaßt werden.

Als Hilfsmittel zur Ermittlung von Bemessungswerten für Lastkombinationen wird die Kombinationsfläche eingeführt. Sie ist im Raum der Übertragungsfaktoren definiert, dessen Dimension gleich der Zahl der in Betracht gezogenen einzelnen Lasten ist. Jeder Punkt dieses Raumes vertritt eine Lastkombination in einer Zusammensetzung, die durch die Werte der Übertragungsfaktoren festgelegt ist. Eine Kombinationsfläche ist der geometrische Ort aller Punkte, deren entsprechende Lastkombinationen gleichen Bemessungswert haben. Eine einzige Kombinationsfläche genügt zur Bestimmung der Bemessungswerte aller Kombinationen, die sich aus den betrachteten Lasten zusammensetzen. Kombinationsflächen zu unterschiedlichen Lasten werden durch eine geeignete Skalierung leicht vergleichbar. Zur Untersuchung der Eigenschaften der Kombinationsflächen muß die Art des Bemessungskriteriums konkretisiert werden. Für das in dieser Arbeit benutzte Kriterium ergeben sich sehr einfache, exakte Ausdrücke für die Steigungen der Randtangente an die Kombinationskurven, die die Durchschnitte der Kombinationsflächen mit den Koordinatenebenen sind. Mit ihrer Hilfe können die Einflüsse des Zuverlässigkeitsniveaus und der zufälligen Eigenschaften der einzelnen Lasten auf die Gestalt der Kombinationsfläche abgeschätzt werden.

Entgegen der obigen Annahme sind die Übertragungsfaktoren in aller Regel als stochastisch anzusehen, denn sie sind meist eine Funktion von zufälligen Variablen. Infolgedessen üben auch sie Einfluß auf die Gestalt der Kombinationsfläche aus. Die wegen der Vielfalt von möglichen Funktionen unzureichende Kenntnis ihrer stochastischen Eigenschaften erlaubt jedoch nur vorsichtige Aussagen über ihren Einfluß. Dieser sollte daher Objekt weiterer ausführlicherer Untersuchungen sein, zumal

derartige Verknüpfungen sicher über den Rahmen der Lastkombination hinaus von Bedeutung sind.

In der praktischen Bemessung liefert eine Lastkombinationsregel den Bemessungswert einer Lastkombination. Mit diesem wird in der weiteren Bemessung nicht anders verfahren als mit dem einer einzelnen Last. Damit ist die Einordnung der Regel in den Bemessungsablauf festgelegt. Von einer Kombinationsregel sind Einfachheit, konservative Ergebnisse, Genauigkeit und Verträglichkeit mit der Behandlung einzelner Lasten zu fordern.

Eine Kombinationsregel kann als Regelfläche in den Raum der Übertragungsfaktoren abgebildet werden. Die Erfüllung der oben gestellten Forderungen läßt sich nach der Approximation der Kombinationsfläche durch die Regelfläche beurteilen.

Mehrere bekannte Kombinationsregeln werden diskutiert, wobei einige prinzipielle Schwächen aufgezeigt werden. Eine dieser Regeln wird aufgegriffen und in modifizierter Form empfohlen. Die Gewinnung ihrer Parameter kann mit Hilfe der Kombinationsflächen erfolgen.

Die nur für zweifache Kombinationen hergeleitete Regel kann zur Anwendung auf mehrfache Kombinationen verallgemeinert werden. Dazu ist die Gültigkeit der für zweifache Kombinationen hergeleiteten Parameter nachzuweisen. Allgemein kann dieser Nachweis durch Parameterstudien über Kombinationen aus den verschiedenen Lasten geführt werden.

Ein Sonderfall der mehrfachen Kombination ist die von vielen gleichartigen Lasten, wie sie im Hochbau mit den Stockwerkslasten typisch ist. Wegen der hohen Zahl der Lasten wird unter Ausnutzung der Gleichartigkeit eine besondere Regel aufgestellt, deren Regelfläche die Kombinationsfläche besser als die Regelfläche der allgemeinen Regel für mehrfache Kombinationen approximiert.



Anhang A: Literatur

- [1] Benjamin J.R., Cornell C.A., "Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers", Mac Graw-Hill Book Co., New York, 1970
- [2] Bosshard, W., "On Stochastic Load Combination", Technical Report No. 20, J.A. Blume Earthquake Engineering Center, Stanford University, June 1975
- [3] Breitung K., Rackwitz R., "Überschreitungsrate für Lastprozesse mit rechteckförmigen Impulsen", Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für konstruktiven Ingenieurbau, TU München, Heft 42, 1979
- [4] Ellingwood B., Galambos T.V., Mac Gregor J.G., Cornell C.A., "Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58", National Bureau of Standards Special Publication 577, Washington, 1980
- [5] Fießler, B., "Das Programmsystem FORM zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit von Komponenten von Trag-systemen", Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für konstruktiven Ingenieurbau, TU München, Heft 43, 1979
- [6] Geidner Th., "Zur Anwendung der Spektralmethode auf Lasten und Beanspruchungen bei Straßen- und Eisenbahnbrücken", Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für konstruktiven Ingenieurbau, TU München, Heft 37, 1979
- [7] Larrabee R.D., "Approximate Stochastic Analysis of Combined Loading", Research Report R78-28, Dept. of Civil Engineering, MIT, 1978
- [8] Madsen H.O., "Load Models and Load Combinations", Report No. R113, Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Lyngby, Februar 1979
- [9] Papoulis A., "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mc Graw Hill Kogakuska, Ltd., 1965
- [10] Petersen Chr., "Überlegungen zur Einführung des neuen Sicherheitskonzeptes im Stahlbau", Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau, TU München, Heft 5, 1974
- [11] Pottharst R., "Zur Wahl eines einheitlichen Sicherheitskonzeptes für den konstruktiven Ingenieurbau", Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, Heft 22, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, Düsseldorf, München, 1977

- [12] Rackwitz R., Fießler B., "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences", Vol 9, pp. 489 - 494, Computers & Structures, Pergamon Press Ltd, 1978
- [13] Turkstra C.J., "Theorie of Structural Design Decisions", Solid Mechanics Study No 2, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1970
- [14] Turkstra C.J., Madsen H.O., "Load Combinations in Codified Structural Design", Journal of the Structural Division, ST12, ASCE, December 1980
- [15] Wen Y.-K., "Reliability Analysis Under the Combination of Stochastic Loads", Presented at the International Specialty Conference on the Probabilistic Safety of Structures, Paris, September 1980
- [16] Wen Y.-K., "Stochastic Dependencies in Load Combination", Presented at the 3rd International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR 81), Trondheim, 1981
- [17] American Concrete Institute, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete" (ACI 318-77), 1977
- [18] Comité Euro-International du Béton (CEB), "Common Unified Rules for Different Types of Construction and Material", Bulletin d'Information No. 124E, Paris, 1978
- [19] NA Bau, Ausschuss "Sicherheit von Bauwerken", "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen", Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 1981
- [20] National Research Council of Canada, "National Building Code of Canada", Ottawa, 1977
- [21] Nordic Committee on Building Regulations, "Recommendation for Loading and Safety Regulations for Structural Design", NKB-Report 36, 1978

Anhang B: Analytische Bestimmung der Kombinationsfläche bei normalverteilten zeitinvarianten Lasten

Es gilt das Kriterium, daß die Lastkombination  $X = \underline{c}^T \cdot \underline{X}$  den Bemessungswert  $B^*$  in jedem Punkt  $\underline{c}$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $P$  überschreiten soll.

Die Lasten, zusammengefaßt in Vektor  $\underline{X}$ , sind normalverteilt und zeitinvariant. Sie besitzen den Erwartungswertvektor  $\underline{m}$  und die Kovarianzenmatrix  $\underline{\Sigma}$ .

Gesucht ist die Kombinationsfläche im  $c$ -Raum, für die gilt:

$$P\left(\underline{c}^T \left(\frac{X_i}{B_{X_i}}\right) > 1\right) = P \quad (\text{B.1})$$

wobei  $B_{X_i}$  so bestimmt ist, daß gilt:

$$P(X_i > B_{X_i}) = P \quad (\text{B.2})$$

d.h. alle Punkte ( $c_i = 1, c_j = 0$  | alle  $j \neq i$ ) liegen auf der Kombinationsfläche.

Da die Lasten normalverteilt und zeitinvariant sind, kann die Forderung der Gl.(B.2) folgendermaßen formuliert werden:

$$\Phi\left(\frac{B_{X_i} - m_i}{\sigma_i}\right) = 1 - P$$

und mit  $k = \Phi^{-1}(1 - P)$  ( $\Phi(\cdot)$ : Normalverteilungsintegral)

$$B_{X_i} = m_i + k \cdot \sigma_i \quad (\text{B.3})$$

und dann für alle Lasten gemeinsam in Matrizenform:

$$\underline{D}(B_{X_i}) = \underline{D}(m_i) + k \underline{D}(\sigma_i) \quad (\text{B.4})$$

worin  $\underline{D}(\cdot)$  Diagonalmatrizen der jeweils eingeklammerten Werte sind. Mit  $\underline{D}(\sigma_i) = \underline{D}(m_i) \cdot \underline{D}(V_i) = \underline{D}(V_i) \cdot \underline{D}(m_i)$  ( $V_i$  = Variationskoeffizient  $\sigma_i/m_i$  der Last  $X_i$  ( $m_i \neq 0$ )) läßt sich Gl.(B.4) umformen zu:

$$\underline{\underline{D}}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) = (\underline{\underline{I}} + k \cdot D(V_i))^{-1} \quad (\text{B.5})$$

worin  $\underline{\underline{I}}$  die Einheitsmatrix ist.

Die Lastkombination in Gl.(B.1)

$$Y = \underline{c}^T \left( \frac{X_i}{B_{X_i}} \right) \quad (\text{B.6})$$

ist ebenfalls normalverteilt und hat die Parameter

$$\begin{aligned} m_Y &= \underline{c}^T \cdot \left( \frac{m_i}{B_{X_i}} \right) \\ &= \underline{c}^T \underline{\underline{D}}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \cdot \underline{1} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

und

$$\sigma_Y^2 = \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{D}}\left(\frac{1}{B_{X_i}}\right) \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{D}}\left(\frac{1}{B_{X_i}}\right) \cdot \underline{c} \quad (\text{B.8})$$

mit  $\underline{1} = (1, 1, \dots, 1)$ .

Nach Gl.(B.1) muß gelten:

$$1 = m_Y + k \cdot \sigma_Y \quad (\text{B.9})$$

woraus durch Quadrieren mit Einsetzen der Gln.(B.7) und (B.8) der Ausdruck Q folgt:

$$\begin{aligned} Q &\equiv \underline{c}^T \left[ k^2 \underline{\underline{D}}\left(\frac{1}{B_{X_i}}\right) \underline{\underline{\Sigma}} \underline{\underline{D}}\left(\frac{1}{B_{X_i}}\right) - \underline{\underline{D}}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \underline{1} \underline{1}^T \underline{\underline{D}}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \right] \underline{c} \\ &+ 2 \underline{c}^T \underline{\underline{D}}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \underline{1} - 1 = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Mit Berücksichtigung von:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \underline{\underline{D}}(\sigma_i) \underline{\underline{R}} \underline{\underline{D}}(\sigma_i) \\ &= \underline{\underline{D}}(m_i) \underline{\underline{D}}(V_i) \underline{\underline{R}} \underline{\underline{D}}(V_i) \underline{\underline{D}}(m_i) \quad (m_i \neq 0) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

mit  $\underline{\underline{R}}$  als Matrix der Korrelationsziffern wird Gl.(B.10) zu:

$$Q \equiv \underline{c}^T \underline{D}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) [k^2 \underline{D}(V_i) \underline{R} \underline{D}(V_i) - \underline{1} \underline{1}^T] \underline{D}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{D}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right) \underline{1} - 1 = 0 \quad (\text{B.12})$$

$\underline{D}\left(\frac{m_i}{B_{X_i}}\right)$  läßt sich mit Gl.(B.5) ersetzen, so daß man schließlich erhält:

$$Q \equiv \underline{c}^T \cdot \underline{A} \cdot \underline{c} + 2 \underline{c}^T \cdot \underline{b} - 1 = 0 \quad (\text{B.13})$$

mit

$$\underline{A} = \underline{B}^{-1} \cdot [k^2 \underline{D}(V_i) \underline{R} \underline{D}(V_i) - \underline{1} \underline{1}^T] \underline{B}^{-1} \quad (\text{B.14})$$

$$\underline{b} = \underline{B}^{-1} \cdot \underline{1} \quad (\text{B.15})$$

und

$$\underline{B} = (\underline{I} + k \cdot \underline{D}(V_i)) \quad (\text{B.16})$$

Gl.(B.13) stellt eine quadratische Form in  $c$  dar. Wie die Koeffizientenschemata in den Gln.(B.14) bis (B.16) zeigen, werden die Parameter der quadratischen Form durch die Variationskoeffizienten  $V_i$ , durch die in der Matrix  $R$  ausgedrückte Abhängigkeitsstruktur und durch das Sicherheitsniveau  $k$  bestimmt.





Anhang C: Steigung der Randtangente an die Kombinationskurve  
im Punkt  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$

Es gilt das in Abschnitt 3.5.1 festgelegte Kriterium. Für die einzelnen, zunächst noch zeitinvarianten Lasten  $X_i$  ( $i = 1, 2$ ) mit der Dichtefunktion  $f_{X_i}$  kann dann geschrieben werden:

$$P_{\text{Soll}} = P(X_i < B_{X_i}) = \int_{-\infty}^{B_{X_i}} f_{X_i}(t) dt \quad (\text{C.1})$$

woraus sich der Bemessungswert  $B_{X_i}$  für die Last  $X_i$  ergibt.

Die beiden Lasten  $X_1$  und  $X_2$  besitzen die gemeinsame Dichte  $f(x_1, x_2)$ , wovon  $f_{X_1}$  und  $f_{X_2}$  die Randdichten sind. Die Lastkombination

$$Y = c_1 \frac{X_1}{B_{X_1}} + c_2 \frac{X_2}{B_{X_2}} \quad (\text{C.2})$$

hat die Dichte (siehe z.B. Papoulis [ 9 ]):

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1, \frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2 / B_{X_2}})}{c_2 / B_{X_2}} dx_1 \quad (\text{C.3})$$

Nach dem gegebenen Kriterium in Verbindung mit der Definition der Kombinationsfläche gilt auch

$$P_{\text{Soll}} = \int_{-\infty}^1 f_Y(t) dt \quad (\text{C.4})$$

oder

$$F \equiv \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \frac{t - c_1 \frac{x_1}{B_{X_1}}}{c_2 / B_{X_2}}) dx_1 dt - \frac{c_2}{B_{X_2}} P_{\text{Soll}} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Mit Gl.(C.5) ist die Gleichung der Kombinationskurve gegeben. Gesucht ist nun:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \frac{\partial F / \partial c_1}{\partial F / \partial c_2} = - \frac{F_1}{F_2} \quad (\text{C.6})$$

mit

$$F_1 = - \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1 B_{X_2}}{B_{X_1} c_2} \frac{\partial f(x_1, \frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2 / B_{X_2}})}{\partial (\frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2 / B_{X_2}})} dx_1 dt \quad (C.7)$$

und

$$F_2 = - \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2} \cdot B_{X_2} \frac{\partial f(x_1, \frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2 / B_{X_2}})}{\partial (\frac{t - c_1 x_1 / B_{X_1}}{c_2 / B_{X_2}})} dx_1 dt - \frac{P_{Soll}}{B_{X_2}} \quad (C.8)$$

Für den gesuchten Spezialfall ( $c_1 = 0, c_2 = 1$ ) wird (C.7) zu:

$$F_1 = - \frac{B_{X_2}}{B_{X_1}} \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \frac{\partial f(x_1, B_{X_2} t)}{\partial (B_{X_2} t)} dx_1 dt \quad (C.9)$$

$$= - \frac{1}{B_{X_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^1 \frac{\partial f(x_1, B_{X_2} t)}{\partial (B_{X_2} t)} B_{X_2} dt dx_1 \quad (C.10)$$

$$= - \frac{1}{B_{X_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \int_{-\infty}^{B_{X_2}} \frac{\partial f(x_1, B_{X_2} t)}{\partial (B_{X_2} t)} d(B_{X_2} t) dx_1 \quad (C.11)$$

$$= - \frac{1}{B_{X_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1, B_{X_2}) dx_1 \quad (C.12)$$

$f(x_1, B_{X_2})$  ist die bedingte Dichtefunktion von  $X_1$  unter der Bedingung  $X_2 = B_{X_2}$ . Gl. (C.12) kann erweitert werden:

$$F_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, B_{X_2}) dx_1 \frac{1}{B_{X_1}} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f(x_1, B_{X_2}) dx_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, B_{X_2}) dx_2} \quad (C.13)$$

Der Quotient in Gl. (C.13) stellt den bedingten Erwartungswert von  $X_1$  unter der Bedingung  $X_2 = B_{X_2}$  dar. Damit wird schließlich  $F_1$  zu:

$$F_1 = - \frac{E(X_1 | X_2 = B_{X_2})}{B_{X_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, B_{X_2}) dx_1 \quad (C.14)$$

Für  $F_2$  nach Gl. (C.8) gilt an der gegebenen Stelle ( $c_1 = 0, c_2 = 1$ ):

$$F_2 = - B_{X_2} \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \frac{\partial f(x_1, tB_{X_2})}{\partial (t B_{X_2})} dx_1 dt - \frac{P_{Soll}}{B_{X_2}} \quad (C.15)$$

$$= - \frac{1}{B_{X_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{B_{X_2}} t B_{X_2} \frac{\partial f(x_1, tB_{X_2})}{\partial (t B_{X_2})} d(tB_{X_2}) \right\} dx_1 - \frac{P_{Soll}}{B_{X_2}} \quad (C.16)$$

$$= - \frac{1}{B_{X_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ tB_{X_2} f(x_1, tB_{X_2}) \right]_{tB_{X_2} = -\infty}^{tB_{X_2} = B_{X_2}} - \int_{-\infty}^{B_{X_2}} f(x_1, tB_{X_2}) d(tB_{X_2}) \right\} dx_1 - \frac{P_{Soll}}{B_{X_2}}$$

$$= - \frac{1}{B_{X_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{X_2} f(x_1, B_{X_2}) dx_1 + \frac{1}{B_{X_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^1 f(x_1, u) du dx_1 - \frac{P_{Soll}}{B_{X_2}} \quad (C.18)$$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, B_{X_2}) dx_1 \quad (C.19)$$

Damit wird die gesuchte Steigung nach Gl.(C.6) in Verbindung mit den Gln.(C.14) und C.19) zu:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \frac{E(X_1 | X_2 = B_{X_2})}{B_{X_1}} \quad (C.20)$$

Dieser ziemlich einfache Ausdruck vereinfacht sich weiter, wenn  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \frac{E(X_1)}{B_{X_1}} \quad (C.21)$$

Bild C.1 zeigt die Tangente mit der Steigung  $\tan \alpha = dc_2/dc_1$  in der  $c_1$ - $c_2$ -Ebene

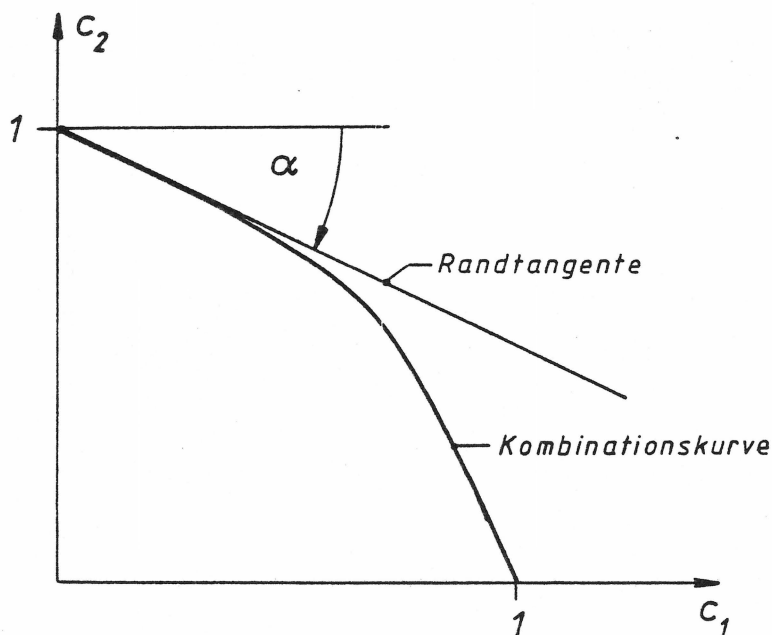


Bild C.1: Randtangente an die Kombinationskurve

Jetzt soll die Ableitung auch für zeitvariante Lasten ermittelt werden, und zwar für solche, deren Prozesse durch unabhängige Folgen mit bekannten Amplitudenverteilungen und Wiederholungszahlen zu beschreiben sind (siehe Bild C.2).

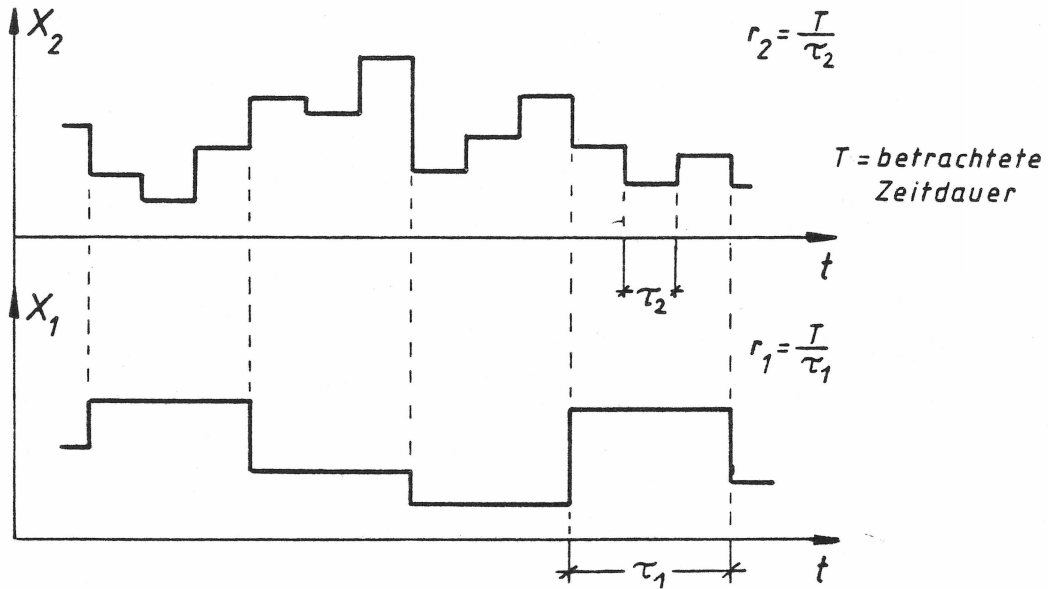


Bild C.2: Zwei Lasten als zufällige Folgen modelliert

Zunächst der Fall, daß beide Wiederholungszahlen gleich sind, also  $r_1 = r_2 = r$ . Dann gelten statt der Gl.(C.1):

$$P_{\text{Soll}} = [P(X_i < B_{X_i})]^r = \left[ \int_{-\infty}^{B_{X_i}} f_{X_i}(t) dt \right]^r \quad (\text{C.22})$$

oder

$$(P_{\text{soll}})^{1/r} = P(X_i < B_{X_i}) = \int_{-\infty}^{B_{X_i}} f_{X_i}(t) dt \quad (\text{C.23})$$

Der weitere Gang der Rechnung läuft wie zuvor ab, so daß man als Ergebnis wiederum Gl.(C.20) erhält. Jedoch ist jetzt zu beachten, daß es der Erwartungswert der Augenblicksvertei- lung ist, da den Gln.(C.22) und (C.23) die Dichtefunktion der Augenblicksvertei- lungen zugrunde liegen. Er wird bei festgehaltenem Bemessungswert desto kleiner, je höher die Wiederholungszahl wird. Man könnte die Lösung für die zeitinvarianten Lasten als Spezialfall der eben beschriebenen allgemeinen Lösung ver- stehen mit der speziellen Wiederholungszahl  $r = 1$ .

Weiterhin sind die Fälle unterschiedlicher Wiederholungszahlen zu untersuchen. Ab hier muß die einschränkende Voraussetzung getroffen werden, daß die beiden Lasten  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind.

Zuerst der Fall  $r_1 > r_2$ . Es sollen hier bedeuten  $f_{X_1}^*$  und  $F_{X_1}^*$  die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion der auf  $r_1/r_2$  Realisationen bezogenen Extremwertverteilung von  $X_1$ .

$$F_{X_1}^* = F_{X_1}, \text{ extrem über } r_1/r_2 = (F_{X_1})^{r_1/r_2} \quad (\text{C.24})$$

$$f_{X_1}^* = r_1/r_2 (r_1/r_2)^{-1} F_{X_1} f_{X_1} \quad (\text{C.25})$$

Statt Gl. (C.5) in Verbindung mit Gl. (C.23) ist nun zu schreiben:

$$F \equiv \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}^*(x_1) f_{X_2} \left( \frac{t - c_1 \frac{x_1}{B_{X_1}}}{c_2/B_{X_2}} \right) dx_1 dt - \frac{c_2}{B_{X_2}} \cdot P^{1/r_2} = 0 \quad (\text{C.26})$$

Die Ableitungen sind wie zuvor zu bilden, so daß schließlich folgt:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \frac{E_{r_1/r_2}(X_1)}{B_{X_1}} \quad (\text{C.27})$$

Hier ist  $E_{r_1/r_2}(X_1)$  der Erwartungswert der Extremwertverteilung nach Gl. (C.24), also der Erwartungswert des Maximums von  $X_1$  in dem Zeitraum, in dem  $X_2$  konstant bleibt.

Zuletzt der Fall  $r_1 < r_2$ . Mit den vorigen Bezeichnungen ist statt Gl. (C.26) hier zu schreiben

$$F \equiv \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_{X_2} \left( \frac{t - c_1 \frac{x_1}{B_{X_1}}}{c_2/B_{X_2}} \right) dx_1 dt - \frac{c_2}{B_{X_2}} \cdot P^{1/r_1} \quad (\text{C.28})$$

Die weitere Rechnung verläuft wie gewohnt, und man erhält das Ergebnis:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = - \frac{E(X_1)}{B_{X_1}} \quad (C.29)$$

worin  $E(X_1)$  der Erwartungswert der Augenblicksvertei lung von  $X_1$  ist, wie schon nach Gln.(C.22) bis C.23). Diese Lösung stimmt überein mit derjenigen des Falles unabhängiger Lasten mit  $r_1 = r_2$ . Das bedeutet, die Randtangente im Punkt  $(c_1 = 0, c_2 = 1)$  ist nur dann von der Wiederholungszahl  $r_2$  abhängig, wenn  $r_2$  kleiner als  $r_1$  ist, wenn die Folge von  $X_2$  "langsamer" als die von  $X_1$  ist.





Anhang D: Gegenseitige Beeinflussung mehrerer  $\psi$ -Faktoren,  
die scheinbar nur auf je eine Last bezogen sind

Gegeben seien die drei zufälligen Lasten  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ , deren Bemessungswerte  $B_{X_1}$ ,  $B_{X_2}$  und  $B_{X_3}$  sowie die Regel zur Bestimmung des Bemessungswertes einer zweifachen Kombination, die lautet:

$$B'_Z = \max \{ d_i B_{X_i} + \psi_j d_j B_{X_j} ; \psi_i d_i B_{X_i} + d_j B_{X_j} \} \quad (D.1)$$

mit  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$  und  $i \neq j$ . Die Faktoren  $\psi_i$  beim Bemessungswert  $B_{X_i}$  der Last  $X_i$  berücksichtigen nicht, mit welcher Last  $X_j$  kombiniert wird.

Man betrachte zunächst die Kombination von  $X_1$  und  $X_2$ . Wenn der Faktor  $\psi_1$  willkürlich festgelegt wird, wird dadurch bei sinnvoller Anpassung der Regelkurve an die Kombinationskurve auch  $\psi_2$  bestimmt, etwa so, daß der Schnittpunkt der Geraden  $g_1 \equiv \psi_1 c_1 + c_2 = 1$  und  $g_2 \equiv c_1 + \psi_2 \cdot c_2 = 1$  auf der Kombinationskurve der Lasten  $X_1$  und  $X_2$  liegt.

Die gleiche Überlegung kann für die Kombination von  $X_1$  und  $X_3$  angestellt werden. Da in  $\psi_1$  die Zusammensetzung der Kombination nicht berücksichtigt wird, darf es nach der einmal willkürlich getroffenen Wahl nicht mehr verändert werden.  $\psi_3$  ist damit in gleicher Weise festgelegt wie  $\psi_2$ .

Mit der Festlegung von  $\psi_2$  und  $\psi_3$  durch die Wahl von  $\psi_1$  ist natürlich nach Abschnitt 4.2 auch das Bild der Regel im Raum der Übertragungsfaktoren  $c_2$  und  $c_3$  bestimmt. Dort liegt aber bereits die Kombinationskurve der Lasten  $X_2$  und  $X_3$  fest, auf die die Regel mit den Werten  $\psi_2$  und  $\psi_3$  überhaupt keine Rücksicht nimmt. Sowohl Überbemessung als auch Unterbemessung sind als Folge möglich, je nachdem, wie die Regel zur Kombinationskurve liegt.

Überbemessung ist aus wirtschaftlichen Gründen unerwünscht, Unterbemessung dagegen strikt verboten. Liegt Unterbemessung vor, muß zumindest einer der beiden Faktoren  $\psi_2$  oder  $\psi_3$  so

modifiziert werden, daß die Unterbemessung verschwindet. Die Modifizierung eines dieser Faktoren hat in der entsprechenden Kombination mit der Last  $X_1$  wachsende Überbemessung zur unerwünschten Folge. Ein drastisches Beispiel liefern drei Lasten, deren eine,  $X_1$ , unabhängig ist, während  $X_2$  und  $X_3$  völlig voneinander abhängig sind. Einer der beiden Faktoren  $\psi_2$  oder  $\psi_3$  muß gleich Eins sein, um in der Kombination  $X_2$  mit  $X_3$  Unterbemessung zu vermeiden. Der Faktor mit dem Wert Eins beherrscht auch die Kombination der zugeordneten Last mit der Last  $X_1$ , deren Bemessungswert nach Gl.(D.1) gebildet wird. Der Wert von  $\psi_1$  ( $< 1!$ ) ist dann völlig gleichgültig. Solchermaßen schlagen die vom wirtschaftlichen Standpunkt aus "schlechten" Faktoren auf alle Kombinationen durch, in denen sie mitwirken.

Anhang E: Gegenüberstellung von Bemessungswerten ermittelt mit Wichtungsfaktoren nach Pottharst bzw. nach Abschnitt 4.7

Pottharst [11] hat für eine Gruppe von gleichsinnig wirkenden Basisvariablen  $X_i$  Wichtungsfaktoren  $\alpha_{Si}$  ( $\partial g/\partial x_i < 0$ ) und  $\alpha_{Ri}$  ( $\partial g/\partial x_i > 0$ ) zur Bestimmung der Bemessungswerte  $X_i^*$  dieser Basisvariablen abgeleitet. ( $\partial g/\partial x_i$  ist die partielle Ableitung der vorliegenden Grenzzustandsfunktion  $g$  nach der Basisvariablen  $X_i$ ). Die Ableitung ist an folgende Voraussetzungen geknüpft:

1. Alle Basisvariablen  $X_i$  sind normalverteilt  
unabhängig und  
zeitinvariant
2. Die Basisvariablen sind linear kombiniert
3. Es gilt das Bemessungskriterium, daß ein Bemessungswert mit Wahrscheinlichkeiten

$P \geq P_f$  im Falle  $\partial g/\partial x_i > 0$  nicht unterschritten

bzw.

$P \leq 1 - P_f$  im Falle  $\partial g/\partial x_i < 0$  nicht überschritten

werden darf.  $P_f = \Phi(-\beta)$  ist dabei ein vorgeschriebener Wert.

Die Betrachtung kann im folgenden auf ungünstig wirkende Basisvariablen mit ihren Faktoren  $\alpha_{Si}$  beschränkt werden.

Die Bemessungswerte  $X_i^*$  solcher Basisvariablen bestimmen sich nach Pottharst und in der Folge auch gemäß dem Entwurf zur deutschen Rahmenrichtlinie [19] aus

$$X_i^* = \mu_i + \alpha_{Si} \cdot \tilde{\alpha}_s \cdot \beta \cdot \sigma_i \quad (E.1)$$

Der Wert  $\tilde{\alpha}_s$  ist von allen Basisvariablen und ihrer Verknüpfung in der Grenzzustandsfunktion abhängig.  $\tilde{\alpha}_s \cdot \beta$  drückt ein zu  $\beta$

unterschiedliches Sicherheitsniveau aus, das nicht für das Gesamtproblem, sondern nur für die Gruppe der ungünstig wirkenden Lasten anzuzielen ist. Dies soll hier nicht weiter interessieren, und deshalb wird  $\tilde{\alpha}_s \cdot \beta$  zu  $\tilde{\beta}$  zusammengezogen. Gl.(E.1) wird so zu

$$X_i^* = m_i + \alpha_{si} \cdot \tilde{\beta} \cdot \sigma_i \quad (\text{E.2})$$

Pottharst zeigt, daß der Bemessungswert

$$B_\Sigma = \Sigma \partial g / \partial x_i \cdot X_i^* \quad (\text{E.3})$$

auf der sicheren Seite liegt, wenn die Basisvariablen nach den Beträgen ihrer "Streuungseinflüsse"  $\partial g / \partial x_i \cdot \sigma_i$  in nicht aufsteigender Reihenfolge geordnet sind und für  $\alpha_{si}$

$$\alpha_{si} = \sqrt{i} - \sqrt{i-1} \quad (\text{E.4})$$

gesetzt wird.

Es soll nun gezeigt werden, daß diese Art der Bemessungswertbestimmung mit derjenigen gemäß Gl.(4.43) zur Kombination gleichartiger Lasten in Verbindung mit den  $\psi$ -Faktoren aus Gl.(4.42) inhaltlich übereinstimmt.

Mittels linearer Skalentransformationen

$$X_i = a_{1i} \hat{X}_i + a_{2i} \quad (\text{E.5})$$

läßt sich durch geeignete Wahl der Faktoren  $a_{1i}$  und  $a_{2i}$  erreichen, daß alle  $\hat{X}_i$  identisch  $(\hat{m}, \hat{\sigma})$ -normalverteilt sind. Es ergeben sich folgende Beziehungen

$$m_i = a_{1i} \hat{m} + a_{2i} \quad (\text{E.6})$$

$$\sigma_i = a_{1i} \hat{\sigma} \quad (\text{E.7})$$

$$\partial g / \partial x_i = \frac{1}{a_{1i}} \cdot \partial g / \partial \hat{x}_i \quad (\text{E.8})$$

und

$$B_{\Sigma} = \Sigma \frac{a_{2i}}{a_{1i}} \frac{\partial g}{\partial \hat{x}_i} + \Sigma \frac{\partial g}{\partial \hat{x}_i} (\hat{m} + \alpha_{si} \tilde{\beta} \hat{\sigma}) \quad (\text{E.9})$$

Man erkennt, daß nun der Bemessungswert aus dem ersten, nicht-zufälligen, konstanten Anteil sowie aus dem Bemessungswert der Kombination der gleichartigen Größen  $\hat{X}_i$  besteht. Weiterhin zeigt sich, daß die Reihenfolge nach den Streuungseinflüssen gleichgeblieben ist, da  $\sigma_i \cdot \partial g / \partial x_i = \hat{\sigma} \cdot \partial g / \partial \hat{x}_i$ .

Die Größen  $\hat{X}_i$  erfüllen also bereits die Voraussetzungen zur Bemessung als Kombination gleichartiger Lasten nach Gl.(4.43). Die erforderlichen  $\psi$ -Faktoren dürfen aus Gl.(4.42) gewonnen werden, da die Kombinationsfläche normalverteilter Lasten als quadratische Form konvex ist (siehe hierzu Anhang B).

Übereinstimmung beider Bemessungsregeln ist nachgewiesen, wenn bei beliebigen  $i$  der  $i$ -te Term der Summe aus Gl.(E.9)

$$\hat{X}_i^* = \hat{m} + (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) \tilde{\beta} \cdot \hat{\sigma} \quad (\text{E.10})$$

mit dem  $i$ -ten Term der Summe aus Gl.(4.43) übereinstimmt. Dieser ist

$$\psi_{\text{art}}^{(i)} \cdot B_{\hat{X}_i} \quad (\text{E.11})$$

mit

$$B_{\hat{X}_i} = \hat{m} + \tilde{\beta} \cdot \hat{\sigma} \quad (\text{E.12})$$

und

$$\begin{aligned} \psi_{\text{art}}^{(i)} &= \frac{i \hat{m} + \sqrt{i} \tilde{\beta} \hat{\sigma}}{\hat{m} + \tilde{\beta} \hat{\sigma}} - \frac{(i-1)\hat{m} + \sqrt{i-1} \tilde{\beta} \hat{\sigma}}{\hat{m} + \tilde{\beta} \hat{\sigma}} \\ &= \frac{\hat{m} + (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) \tilde{\beta} \hat{\sigma}}{\hat{m} + \tilde{\beta} \hat{\sigma}} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

womit die obige Behauptung bestätigt ist.

Die Übereinstimmung beider Bemessungsregeln beruht auf den eingangs aufgezählten Voraussetzungen. Mit diesen Voraussetzungen ist der enge Gültigkeitsbereich der Gl. (E.2) bis (E.4) umrissen. Demgegenüber ist die Bemessung nach Abschnitt 4.7 (Kombination gleichartiger Lasten) weit vielseitiger, denn hier können alle obengenannten Voraussetzungen außer der zweiten (Linearkombination) fallengelassen werden, solange die Größen nur gleichartig sind. Trifft auch dies nicht zu, so kann nach Abschnitt 4.5 (Kombination beliebiger Lasten) bemessen werden. Bemerkenswert ist die Diskrepanz, die sich mit zunehmender Allgemeinheit zwischen den beiden Bemessungsregeln auftut.