

Berechnung der Druckverhältnisse in
zylindrischen Silozellen mit
nichtlinearem Stoffgesetz für den
Füllzustand und beim
Entleerungsbeginn

T 1411

T 1411

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

T 1411: Berechnung der Druckverhältnisse in zylindrischen Silozellen mit nichtlinearem Stoffgesetz für den Füllzustand und beim Entleerungsbeginn

Berechnung der Druckverhältnisse in
zylindrischen Silozellen mit nicht-
linearem Stoffgesetz für den Füllzu-
stand und beim Entleerungsbeginn

Schlußbericht zum Vorhaben

"Berechnung von Silodrücken mit numerischen
Methoden - finite Elemente oder ähnliche Verfahren"

erstattet von

Dr.-Ing. H. Landahl

o. Prof. Dr.-Ing. J. Eibl

Dortmund

1983

Vorwort:

Die Untersuchungen, über deren Ergebnisse im folgenden berichtet wird, wurden im Rahmen des Forschungsvorhabens

"Berechnung von Silodrücken mit
numerischen Methoden - finite Elemente
oder ähnliche Verfahren"

durchgeführt. Sie wurden unter dem AZ: IV/1-5-128 vom

Institut für Bautechnik, Berlin

gefördert, dem hierfür besonderer Dank ausgesprochen sei.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	II
Bezeichnungen	VI
1. Überblick und Zielsetzung der Arbeit	1
2. Diskussion vorliegender Silotheorien	3
2.1 Überblick	3
2.2 Die Silotheorie von Janssen und weiterführende Arbeiten	4
2.3 Silotheorien unter Verwendung starrplastischer Stoffansätze	11
2.3.1 Starrplastische Stoffansätze für Silogüter	11
2.3.2 Anwendungen	16
3. Grundlagen einer neuen Silotheorie - Stoffgesetze	18
3.1 Neuere Erkenntnisse der Boden- und Schüttgutmechanik	18
3.1.1 Stoffgesetzliche Zusammenhänge	18
3.1.1.1 Experimentelle Erkenntnisse	18
3.1.1.2 Zustandsdiagramm für Schüttgüter	22
3.1.2 Wandreibungskoeffizienten	27
3.2 Stoffgesetze für sandartige Materialien	32
3.2.1 Überblick	32
3.2.2 Gegenüberstellung elasto-plastischer Stoffgesetze	33
3.3 Zusammenfassung, Problemstellung und Lösungsweg	51

4. Rechenalgorithmus	53
4.1 Berechnungsmodell	53
4.1.1 Annahmen und Voraussetzungen	53
4.1.2 Finite Element Formulierung	54
4.1.3 Nichtlineare Stoffbeziehung	61
4.1.3.1 Stoffgesetz von LADE	76
4.1.3.2 Inversion des Stoffgesetzes von LADE in Matrizenform	76
4.1.4 Lastaufbringung bei den Siloberechnungen	80
4.1.4.1 Simulation des Füllvorganges	80
4.1.4.2 Simulation des Entleerungsvor- ganges	83
4.1.5 Einfluß der Behälterwand	84
4.1.5.1 Wandreibung	84
4.1.5.2 Wandsteifigkeit	85
4.1.6 Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität und der Bruch- und Zugbedingung des Silogutes	87
4.1.7 Programmablauf	92
4.2 Numerische Überprüfung des Berechnungsmodells	95
4.2.1 Bodenmechanik	95
4.2.1.1 Entwässerte dreiaxiale Kom- pressionsversuche	97
4.2.1.2 Proportionale Belastungswege	100
4.2.2 Grundbau-Grundbruchberechnung eines schlaffen Kreisfundamentes	102
5. Darstellung und Diskussion der Siloberechnungen	107
5.1 Füllzustand	108
5.1.1 Voruntersuchung	108
5.1.2 Vergleich eigener numerischer Ergebnisse mit experimentell ermittelten Werten	113
5.1.3 Parameterstudie	118

5.1.3.1 Einfluß der Wandreibung	119
5.1.3.2 Einfluß der Wandsteifigkeit	131
5.1.3.3 Einfluß der Lagerungsdichte	132
5.1.3.4 Einfluß des Silodurchmessers	135
5.1.4 Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den Janssen-Formeln und mit DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe Nov. 1964	137
5.2 Beginn des Entleerens	146
6. Zusammenfassung und Ausblick	156
Literaturverzeichnis	160
Anhänge A-F	177

BezeichnungenAllgemeinübliche Vereinbarungen:

\underline{a} , {a}	Spaltenvektor
\underline{A} , [A]	Matrix
$\Delta()$	inkrementeller Zuwachs der Größe ()

Häufig verwendete Symbole:

$\underline{\sigma}$	Spannungen
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\underline{\epsilon}$	Verzerrungen
γ	Wichte
ρ	Dichte
φ	Scherwinkel
c	Kohäsion
e	Porenziffer
p_v	Vertikaldruck des Silogutes
p_h	Horizontaldruck des Silogutes
p_w	Wandreibungsdruck des Silogutes
δ	Wandreibungswinkel
$\tan \delta = \mu$	Wandreibungsdruckverhältnis p_w/p_h
λ	Horizontaldruckverhältnis p_h/p_v

Weitere Größen werden im Text erläutert

Vorzeichenregelung:

Spannungen : Druck: +, Zug: -
 Verformungen : Stauchung: +, Längung: -

1. Überblick und Zielsetzung der Arbeit

Die hohe Rate von schweren Bauschäden an Silokonstruktionen führt zu der Frage, ob bei diesen Bauwerken die für die Bemessung benötigten Lasten und Schnittgrößen zutreffend ermittelt werden.

Wie die in Abschnitt 2 durchgeführte Sichtung der vorliegenden Verfahren zur Bestimmung der Druckverhältnisse in Silozellen zeigt, gibt es derzeit keine in sich geschlossene Theorie, mit der man die tatsächliche Beanspruchung einer Silokonstruktion beliebiger Geometrie während des Füll- und Ausfließvorgangs widerspruchsfrei erfassen kann.

Da bislang für Schüttgüter keine wirklichkeitsnahen Stoffgesetze vorlagen, ging man bei der Ermittlung von Silodrücken lediglich von den Gleichgewichtsbedingungen und zusätzlichen vereinfachenden Annahmen aus.

Erst aufgrund der in jüngster Zeit gewonnenen Erkenntnisse auf den Gebieten der Boden- und Schüttgutmechanik, die in Abschnitt 3 dargelegt sind, konnten wirklichkeitsnahe Stoffgesetze für Schüttgüter entwickelt werden, so daß somit zur Lösung von Silodruckaufgaben der komplette Gleichungssatz aus Gleichgewichtsbedingungen, Kompatibilitätsbedingungen und konstitutiven Beziehungen zur Verfügung steht.

Auf der Grundlage dieses vollständigen Gleichungssatzes sollen in dieser Arbeit die Druckverhältnisse in Silozellen beim Füllen und während des Entleerungsbeginns mit Hilfe eines numerischen Verfahrens studiert werden.

Zu diesem Zweck wird ein auf der Finiten Element Methode basierendes Berechnungsmodell entwickelt und durch vergleichende Berechnungen konkreter Aufgabenstellungen aus der Bodenmechanik - dreidimensionale Scherversuche - und dem Grundbau - Grundbruchberechnung eines Kreisfundamentes - überprüft. Die Einzelheiten sind zusammen mit dem verwendeten Stoffgesetz in Abschnitt 4 dargelegt.

Im anschließenden Abschnitt 5 werden die mit diesem Berechnungsmodell gewonnenen Ergebnisse der Siloberechnung dargestellt und diskutiert. Dabei wird zwischen dem Füll- und Lagerungszustand und dem Entleerungsvorgang unterschieden.

Für den Füllzustand werden zunächst eigene numerische Ergebnisse mit experimentell ermittelten Werten verglichen. Eine Untersuchung über den Einfluß verschiedener Parameter auf die inneren Spannungsverhältnisse in Silozellen während des Füllzustandes ermöglicht sodann einen Vergleich mit der Janssen-Theorie und der Norm DIN 1055, Blatt 6, "Lasten in Silozellen", Ausgabe November 1964.

Anschließend werden die Änderungen der inneren Spannungsverhältnisse im Silogut und deren Auswirkungen auf die Wanddrücke beim Beginn des Entleerungsvorgangs aufgezeigt.

2. Diskussion vorliegender Silotheorien

2.1 Überblick

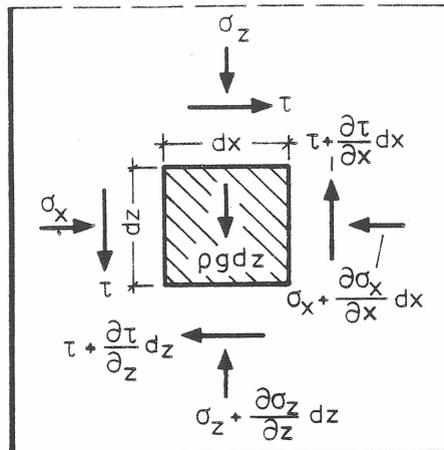
Das Spannungs- und Verformungsverhalten eines Kontinuums unter vorgegebenen Randbedingungen wird bekanntlich durch einen Gleichungssatz aus

- Gleichgewichtsbedingungen
- Kompatibilitätsbedingungen und
- konstitutiven Beziehungen

so beschrieben, daß die Anzahl der in diesen Gleichungen auftretenden Variablen der der Gleichungen entspricht.

Bedingt durch die Unkenntnis über wirklichkeitsnahe Stoffgesetze für Schüttgüter wird bei der Bestimmung von Druckverhältnissen in Silozellen in allen bisher bekannt gewordenen Lösungsansätzen lediglich von den beiden Gleichgewichtsbedingungen für das ebene Problem nach Bild 2.1 Gebrauch gemacht; auf das Verformungsverhalten des Silogutes wird somit nicht eingegangen.

Da die Gleichungen (2.1) zur eindeutigen Bestimmung der drei Spannungen σ_x , σ_z , τ nicht ausreichen - es gibt unendlich viele Möglichkeiten, diese Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen -, wurden weitere vereinfachende Annahmen hinzugezogen - vgl. Abschnitt 2.2 - bzw. die Bruchbedingung des Silogutes verwendet - vgl. Abschnitt 2.3 .

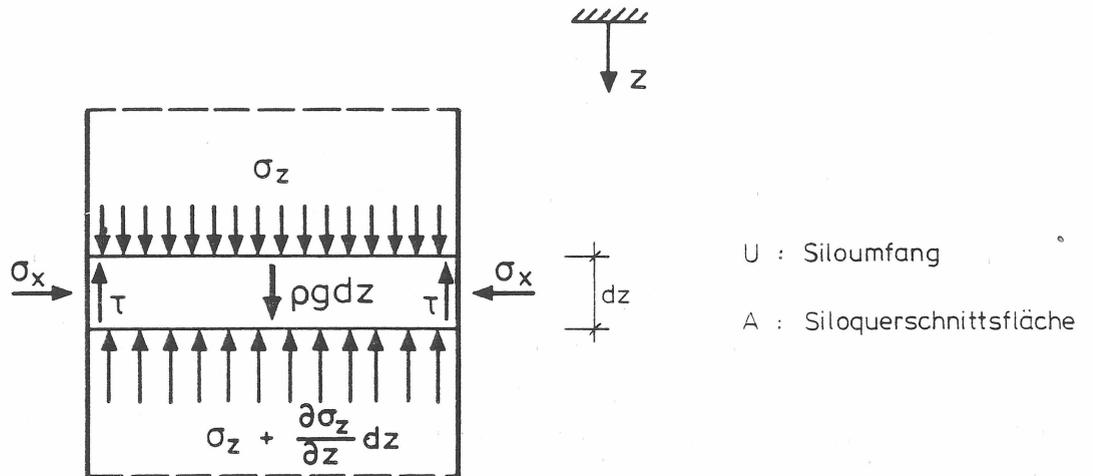


$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \rho g \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Bild 2.1: Gleichgewicht an einem ebenen Silogutelement

2.2 Die Silotheorie von Janssen [1] und weiterführende Arbeiten

Zur Ermittlung der Silodrücke im Füll- und Lagerungszustand geht Janssen [1] nicht von einem infinitesimal kleinen Element nach Bild 2.1 aus, sondern stellt die Gleichgewichtsbedingung für einen - in horizontaler Richtung - endlichen Abschnitt des gesamten Silos auf (Bild 2.2):



$$A \cdot \sigma_z + \rho g A dz - A \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) - \tau \cdot U \cdot dz = 0 \quad (2.2)$$

Bild 2.2: Gleichgewicht an einer endlichen Silogutscheibe

Mit den stark vereinfachenden Annahmen einer konstanten Vertikaldruckverteilung über den Siloquerschnitt und mit den Druckverhältnisswerten

$$\tan \delta = \frac{\tau}{\sigma_x} \quad (2.3)$$

und

$$\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \quad (2.4)$$

die über die Höhe des Silos als konstant betrachtet werden, ergeben sich die bekannten Janssen-Lösungen:

$$\sigma_z = \frac{\rho g A}{\tan \delta \cdot \lambda \cdot U} \left(1 - \exp^{-\frac{\tan \delta \cdot \lambda \cdot U \cdot z}{A}} \right) \quad (2.5a)$$

$$\sigma_x = \lambda \cdot \sigma_z \quad (2.5b)$$

$$\tau = \sigma_x \cdot \tan \delta \quad (2.5c)$$

mit den asymptotischen, durch einen Querstrich gekennzeichneten Grenzwerten für die Drücke in unendlicher Tiefe

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\rho \cdot g \cdot A}{\tan \delta \cdot \lambda \cdot U} \quad (2.5d)$$

$$\bar{\sigma}_x = \lambda \cdot \bar{\sigma}_z \quad (2.5e)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\sigma}_x \cdot \tan \delta \quad (2.5f)$$

Das Wandreibungsdrukverhältnis $\tan \delta$ ermittelte Janssen durch Scherversuche; den Wert λ berechnete er aus den von ihm experimentell gewonnenen Silodrücken.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß den Janssen-Formeln folgende Annahmen zugrunde liegen:

- 1) der Vertikaldruck σ_z ist über die Siloquerschnittsfläche konstant verteilt
- 2) der Horizontaldruck σ_x verläuft konstant über den Siloumfang
- 3) das Verhältnis λ von Horizontaldruck zu Vertikaldruck ist auf der ganzen Silohöhe konstant
- 4) die Reibungskraft wird an den Silowänden überall voll geweckt
- 5) die Dichte ρ ist konstant.

Diese fünf Annahmen gaben den Anstoß zu einer Vielzahl theoretischer Arbeiten, in denen bei grundsätzlich gleicher Vorgehensweise wie bei Janssen versucht wird, Aussagen über Druckverhältnisse in Silozellen zu gewinnen, ohne die o.a. vereinfachenden Voraussetzungen treffen zu müssen.

Beispielhaft sollen einige davon hier aufgeführt werden:

- Lvin [2] und Walker [3] berücksichtigen in ihren Herleitungen, daß der Vertikaldruck σ_z über den Siloquerschnitt nicht konstant ist.
- Die Dichte ρ wird von Yoshioka et. al. [4] nicht als konstante Größe, sondern als mit dem Vertikaldruck σ_z veränderlicher Wert angesehen.

- Takami/Oka [5] legen eine Herleitung für Silodrücke bei Berücksichtigung variabler Vertikaldrücke und variabler Dichte ρ vor.
- Um die Janssen-Formeln ohne experimentelle Bestimmung von λ auf alle Schüttgüter anwenden zu können, führt Koenen [6] für diesen Wert das (aktive) Rankine'sche Grenzspannungsverhältnis

$$\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 (45 - \varphi/2) \quad (2.6)$$

ein, wobei φ den inneren Reibungswinkel des jeweiligen Schüttgutes bezeichnet (Bild 2.3).

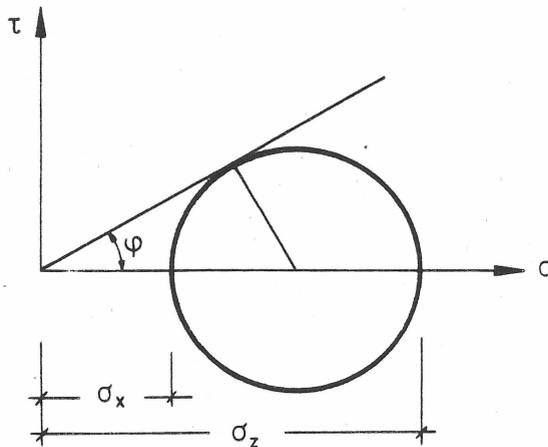


Bild 2.3: Rankine'sches Grenzspannungsverhältnis

Dabei sind σ_x und σ_z Hauptspannungen, was vorausgesetzt, daß der Wandreibungswinkel $\delta = 0$ ist, obwohl gleichzeitig eine Lastableitung in die Silowand über Schub angenommen wird. Eine Zusammenstellung der Arbeiten, die sich mit diesem Widerspruch befassen, findet sich bei Wenzel [7] und Motzkus [8].

Für den ebenen Spannungszustand fanden Ohde [9], Nanninga [10] und Jakobson [11] unter der Voraussetzung des aktiv-plastischen Gleichgewichts äquivalente Formulierungen für den Horizontaldruckbeiwert λ , der sich mit den geometrischen Beziehungen des Bildes 2.4 angeben läßt zu [7, 8]

$$\lambda = \frac{1 - \sin^2 \delta - \sqrt{(1 - \sin^2 \delta) (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta)}}{1 + \sin^2 \delta + \sqrt{(1 - \sin^2 \delta) (\sin^2 \varphi - \sin^2 \delta)}} \quad (2.7)$$

Für den Grenzfall $\delta = 0$ ergibt sich wieder das Rankine'sche Grenzspannungsverhältnis nach Gl.(2.6).

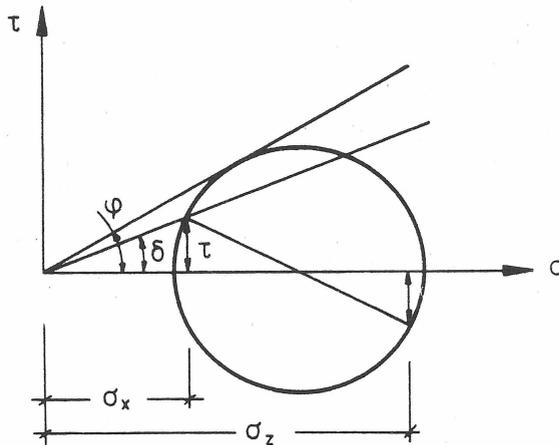


Bild 2.4: Spannungskreis für die Lösungen nach [9, 10, 11]

- Nach Cowin [12] werden mit den Janssen-Formeln infolge der Voraussetzung, daß die Reibungskräfte an den Silowänden überall voll geweckt werden, lediglich untere Grenzwerte der Druckbeanspruchungen errechnet. Die wirklichen Drücke können mithin weit größer als nach Janssen sein. Cowin/Sundaram [13] berücksichtigen zusätzlich den Einfluß der variablen Dichte ρ auf die Silodrücke.

Aufgrund der genannten Vereinfachungen im Ansatz sind die Janssen-Gleichungen für den Füll- und Lagerungszustand in ihrer Gültigkeit eingeschränkt. Bei geeigneter Variation der entsprechenden Parameter können mit ihnen aber erfahrungsgemäß die Drücke des Füll- und Lagerungszustandes für einfache Silokonstruktionen üblicher Abmessungen einigermaßen zutreffend beschrieben werden. Für komplizierte Konstruktionen (Exzentrizitäten des Auslaufs, Querschnittsverengungen, Entlastungsbalken etc.) gilt dies nur in begrenztem Maße.

Wiederholt ist versucht worden, die Janssen-Gleichungen durch entsprechende Modifizierungen der Parameter $\tan\delta$ und λ auf die Ermittlung von Entleerungsdrücken zu erweitern, z.B. Ohde [9], Nanninga [10], Pieper/Wenzel [14], Reimbert [15], Safarian [16], Walters [17,18]. Diese vereinfachende, zum Teil rein empirische Vorgehensweise ist unbefriedigend, da den Lösungen keine physikalische Bedeutung zukommt und sie demzufolge stark voneinander abweichen.

2.3 Silotheorien unter Verwendung starr-plastischer Stoffansätze

2.3.1 Starr-plastische Stoffansätze für Schüttgüter

Die klassische Boden- und Schüttgutmechanik verwendet zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Normalspannung σ und Schubspannung τ in einer Bruchfläche das lineare Gesetz der Festkörperreibung von Coulomb [19]:

$$\tau = c + \sigma \cdot \tan \varphi \quad , \quad (2.8)$$

wobei c die Kohäsion und φ den inneren Reibungswinkel bedeuten.

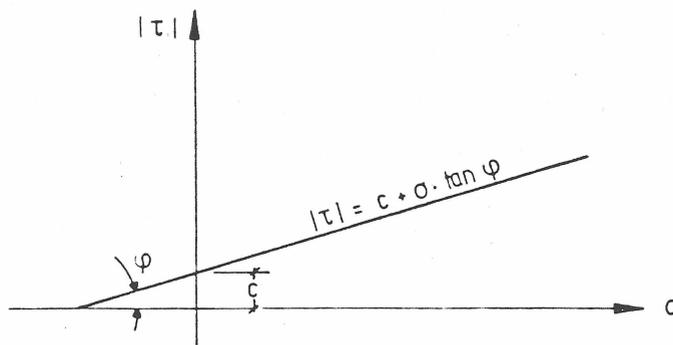


Bild 2.5: $\sigma - \tau$ - Beziehung nach Coulomb

Die Werte c und φ werden als Materialkonstanten angesehen.

Bei Anwendung dieser Bruchbedingung auf körnige Materialien nimmt man an, daß in der Bruchfläche Festkörper aufeinander gleiten; die Gleitfläche selbst ist unendlich dünn (Bild 2.6).

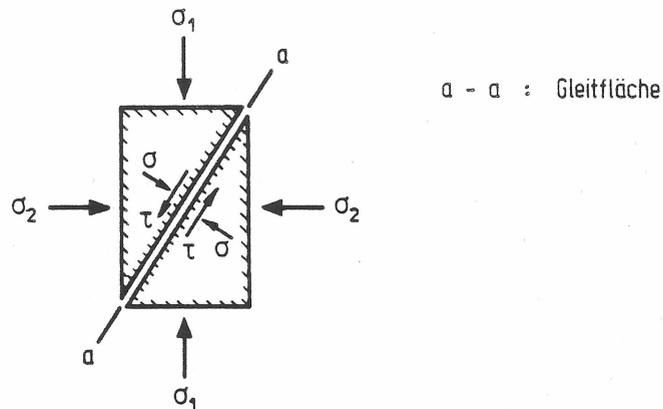


Bild 2.6

Mohr [20] verallgemeinert diese Bruchbedingung mit der Hypothese, wonach ein Bruch eintritt, wenn die in einer beliebigen Ebene wirkenden Spannungen σ und τ der Bedingung

$$\tau = F(\sigma) \quad (2.9)$$

genügen, wobei $F(\sigma)$ eine experimentell zu bestimmende Funktion ist (Bild 2.7).

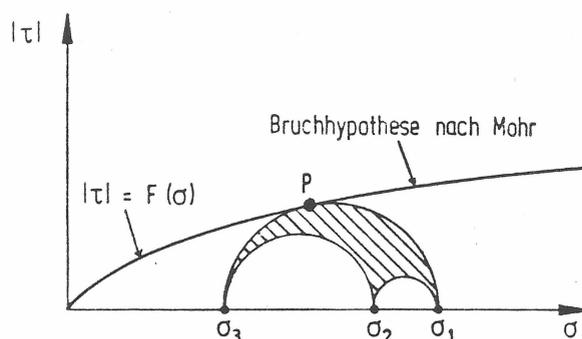


Bild 2.7: Spannungskreise und Bruchhypothese nach Mohr

Ausgehend von einem durch die drei Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) charakterisierten Spannungszustand kann der in einer beliebig geneigten Ebene wirkende Spannungsvektor durch die dieser Ebene zugeordnete Normalspannung σ und Schubspannung τ ausgedrückt werden. Mohr zeigt, daß bei Darstellung in einem σ, τ -Diagramm die einem bestimmten Spannungszustand zugehörigen Wertepaare σ, τ für alle möglichen Neigungswinkel der Ebene immer innerhalb der schraffierten Fläche zwischen den drei Mohr-Kreisen des Bildes 2.7 liegen.

Wenn der größte Mohr-Kreis gerade die begrenzende Bruchkurve berührt, wie Punkt P in Bild 2.7, wird ein Bruch eintreten, da in wenigstens einer Ebene die Bruchbedingung $\tau = F(\sigma)$ erfüllt ist. Die Bruchbedingung nach Mohr ist somit die Einhüllende der größten Mohr-Kreise, weshalb die mittlere Hauptspannung σ_2 ohne Einfluß auf das Bruchkriterium ist.

Mit der Mohr-Hypothese kann demnach keine allgemeine Bruchbedingung der Form

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.10)$$

beschrieben werden.

Der Ansatz (2.8) stellt ein zweiparametrisches Modell für $F(\sigma)$ (Bild 2.8) dar, das sich wie folgt in Hauptspannungen ausdrücken läßt:

$$\sigma_1 \frac{1 - \sin \varphi}{2 \cdot c \cdot \cos \varphi} - \sigma_3 \frac{1 + \sin \varphi}{2 \cdot c \cdot \cos \varphi} = 1 \quad (2.11)$$

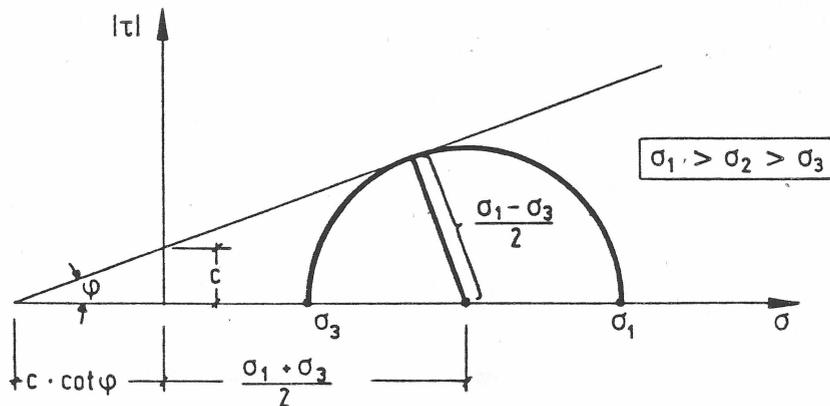


Bild 2.8: Mohr-Coulomb Bruchbedingung

Durch Nullsetzen von σ_1 oder σ_3 erhält man einen einachsigen Zug- bzw. Druckzustand, bei dem die Konstanten c und φ die Zug- bzw. Druckfestigkeit des Materials bestimmen:

$$\beta_Z = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad ; \quad \beta_D = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (2.12)$$

Diese Deutung ist in Bild 2.9 geometrisch veranschaulicht.

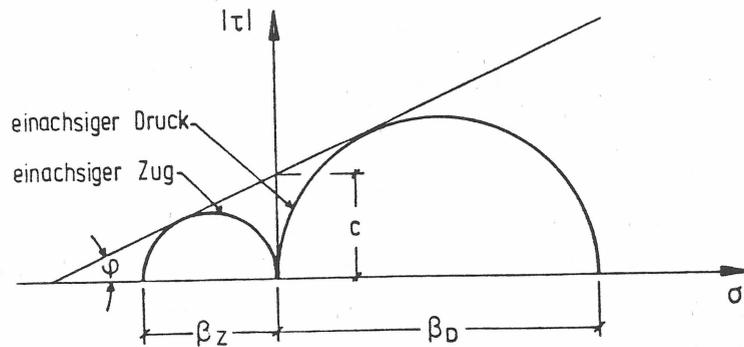


Bild 2.9: Geometrische Bedeutung von β_Z und β_D

Mit dem Verhältnis dieser Festigkeiten

$$m = \frac{\beta_D}{\beta_Z} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (2.13)$$

erhält man schließlich folgende Bruchbedingung

$$\sigma_1 = \beta_D + m \cdot \sigma_3 \quad (2.14)$$

2.3.2 Anwendungen

Für den Fall des ebenen Verzerrungszustandes ist die Mohr-Coulomb Bruchhypothese wiederholt in bodenmechanischen Berechnungen zur Bestimmung des Grenzgleichgewichts benutzt worden, [21 - 26].

Dabei wird der Boden als starr-plastisches Material betrachtet. Die beiden stationären Gleichgewichtsbedingungen unter Einschluß der Volumenkräfte nach Gl.(2.1) bilden zusammen mit der Mohr-Coulomb Bruchbedingung ein vollständiges, vom Verzerrungszustand unabhängiges Gleichungssystem zur Bestimmung des Spannungsfeldes. Die Lösung dieses inhomogenen Differentialgleichungssystems kann z.B. nach der Charakteristikenmethode erfolgen, da die beiden nach Elimination einer Unbekannten verbleibenden Gleichungen hyperbolischen Typs sind.

Die gleiche Vorgehensweise wurde des öfteren auch zur Bestimmung der Spannungs- und Gleitlinienfelder in Silobehältern sowohl für den Füll- und Lagerungszustand als auch für den Entleerungsvorgang gewählt, [27-33].

Ansätze dieser Art sind jedoch aus mehreren Gründen unbefriedigend:

- Durch die Vorgabe des starr-plastischen Stoffansatzes wird davon ausgegangen, daß sich das gesamte Füllgut an jeder Stelle im akuten Bruchzustand befindet - eine Annahme, die den tatsächlichen Verhältnissen nicht gerecht wird.
- Es sind lediglich Angaben über das Spannungsverhältnis im Bruchzustand möglich; die Spannungsentwicklung während der Belastung vom Ruhe- zum Bruchzustand kann nicht erfaßt werden.
- Über das Verformungsverhalten des Materials sind keine Angaben möglich.
- Das Bruchkriterium ist nur abhängig von der größten und kleinsten Hauptspannung σ_1 und σ_3 mit ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). Dies widerspricht experimentellen Beobachtungen an Sanden, wonach auch σ_2 das Stoffverhalten beeinflusst.

3. Grundlagen einer neuen Silotheorie - Stoffgesetze

3.1 Neuere Erkenntnisse der Boden- und Schüttgutmechanik

3.1.1 Stoffgesetzliche Zusammenhänge

Mit Hilfe von neuentwickelten Versuchsgeräten und entsprechend verbesserten Versuchsmethoden sind in den letzten Jahren neue Erkenntnisse über die stoffgesetzlichen Zusammenhänge von Boden- und Schüttgutmaterialien gewonnen worden, die im folgenden dargestellt werden.

3.1.1.1 Experimentelle Erkenntnisse

Neuere experimentelle und theoretische Untersuchungen auf den Gebieten der Boden- und Schüttgutmechanik haben eine enge Beziehung zwischen dem Spannungs-Verformungsverhalten eines Gutelementes und seiner Lagerungsdichte aufgezeigt.

Dies läßt sich anhand des Scherdiagramms eines kohäsionslosen Sandes bei einem einfachen weggesteuerten Rahmenscherversuch verdeutlichen, bei dem sich in Abhängigkeit von der Ausgangsdichte - Dichte der Probe im unbelasteten Zustand, siehe Anhang E - die folgenden Zusammenhänge zeigen (Bild 3.1):

- Beim locker gelagerten Sand wächst die Scherspannung monoton mit der Scherverformung; die Verformung ist größtenteils bleibend; eine Entlastung führt zu einer sehr kleinen elastischen Rückverformung, die wiedergewinnbar ist; die Porenziffer nimmt während des Schervorganges ab.

- Beim dicht gelagerten Sand nimmt die Scherspannung zunächst monoton mit der Verformung zu, erreicht ein Maximum im Punkt P und nimmt danach ab; bei Ent- und Wiederbelastung ist eine höhere Steifigkeit als bei lockerem Sand zu beobachten; die Porenziffer nimmt während des Versuchs zu.

Unabhängig von der Ausgangsdichte wird bei großen Scherverformungen die kritische Scherspannung τ_{kr} und die kritische Porenziffer e_{kr} erreicht [34].

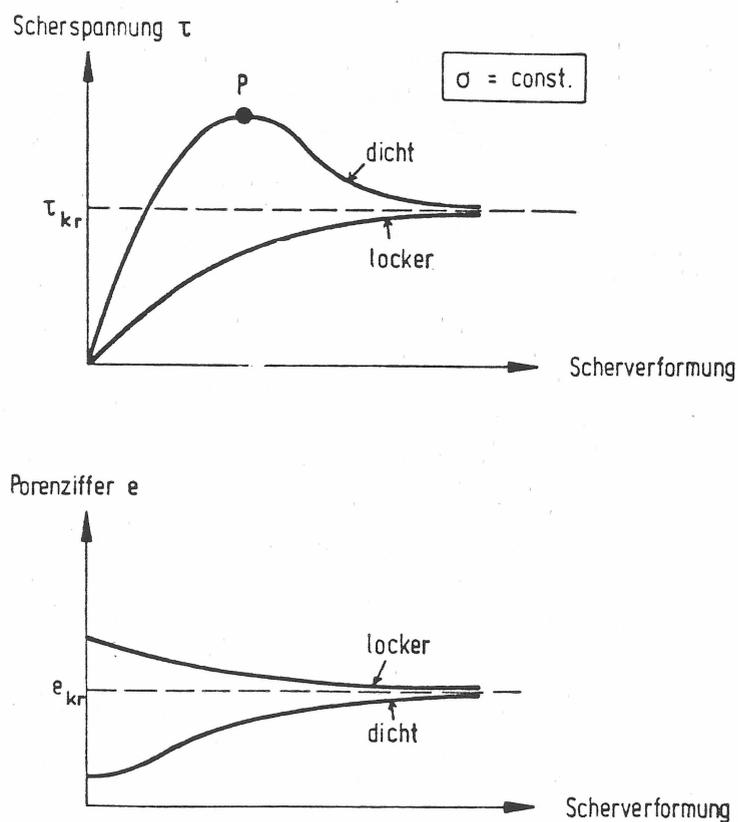


Bild 3.1: Scherspannung und Porenziffer als Funktion der Scherverformung

Auf die besondere Eigenschaft des Sandes, je nach der Ausgangsdichte bei Scherverformungen sein Volumen plastisch zu vergrößern oder zu verkleinern, hat erstmals Reynolds [35] hingewiesen; wenn durch genügend kleine Spannungen Einzelkornzertrümmerungen ausgeschlossen sind, handelt es sich um einen rein geometrischen Effekt, der durch Bild 3.2 an einem Kornhaufen deutlich wird.

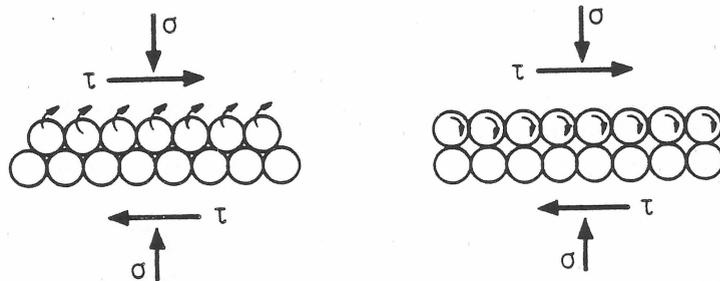


Bild 3.2: Volumenvergrößerung Volumenverkleinerung
(aus [50]) bei dicht gelagertem bei locker gelagertem
Sand Sand

Diese Beziehungen zwischen dem Spannungs-Verformungsverhalten einer Bodenprobe und seiner Lagerungsdichte wurde von Roscoe et.al. [u.a. 36, 37] eingehend studiert und schließlich in einem dreidimensionalen Zustandsdiagramm mit der Normalspannung σ , Schubspannung τ und Porenziffer e als Koordinaten anschaulich dargestellt.

Jenike [38, 39] weist aufgrund der von ihm durchgeführten Versuche darauf hin, daß bei den im Silobau üblichen Spannungen - die in Silokonstruktionen üblicher Ausmaße im Füll- und Lagerungszustand bei maximal $20 \text{ [N/cm}^2\text{]}$ und somit ungefähr eine Zehnerpotenz unter den im Grundbau üblichen Drücken liegen - nicht mit einer linearen Coulomb-Beziehung nach Abschnitt 2.3.1 gerechnet werden darf, sondern daß eine modifizierte Coulomb-Beziehung eingeführt werden muß, für die folgendes gilt:

- die σ - τ Grenzspannungsfunktion ist nichtlinear, und zwar besonders bei kleinen σ -Werten; somit ist der Winkel φ k e i n e Materialkonstante
- die Lage der Grenzspannungsfunktion ist von der Porenziffer der Schüttgutprobe im unbelasteten Zustand abhängig
- die Grenzspannungsfunktion hat in Richtung steigender σ -Werte einen Endpunkt, in dem stationäres Fließen ohne Volumenänderung einsetzt. Die Endpunkte der Grenzspannungsfunktion liegen annähernd auf einer Geraden durch den Ursprung.

Die Grenzspannungsfunktion wird nach Jenike als Fließort, die Verbindungslinie der Endpunkte der Fließorte als stationärer Fließort bezeichnet. Bild 3.3 zeigt eine Schar von Fließorten mit der Porenziffer e im unbelasteten Zustand als Parameter.

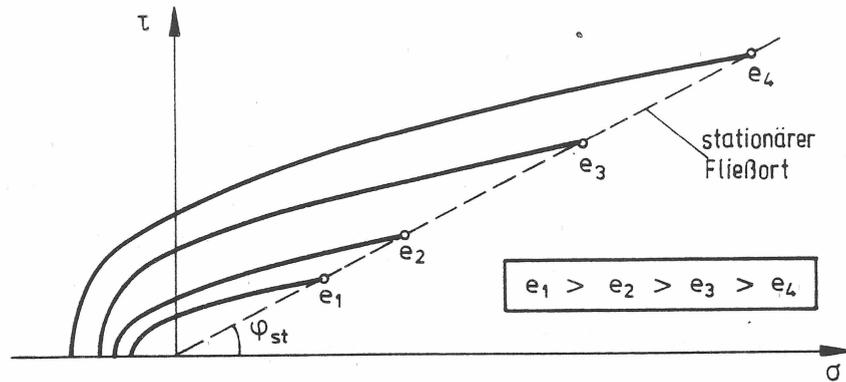


Bild 3.3: Fließorte nach Jenike

3.1.1.2 Zustandsdiagramm für Schüttgüter

Die Erkenntnisse von Roscoe und Jenike fassen Ashton et.al. [40] und Williams/Birks [41] mit ihrem Zustandsdiagramm zur Beschreibung des Materialverhaltens der in der Verfahrenstechnik üblichen Schüttgüter anschaulich zusammen (Bild 3.4). Ergänzungen und Erweiterungen finden sich bei Schwedes [42, 43] und Hoffmann [44].

In dem dreidimensionalen Zustandsdiagramm für Schüttgüter werden die Koordinatenachsen gebildet von der Normalspannung σ senkrecht zur Scherebene, der Schubspannung τ in der Scherebene und der Porenziffer e (Bild 3.4).

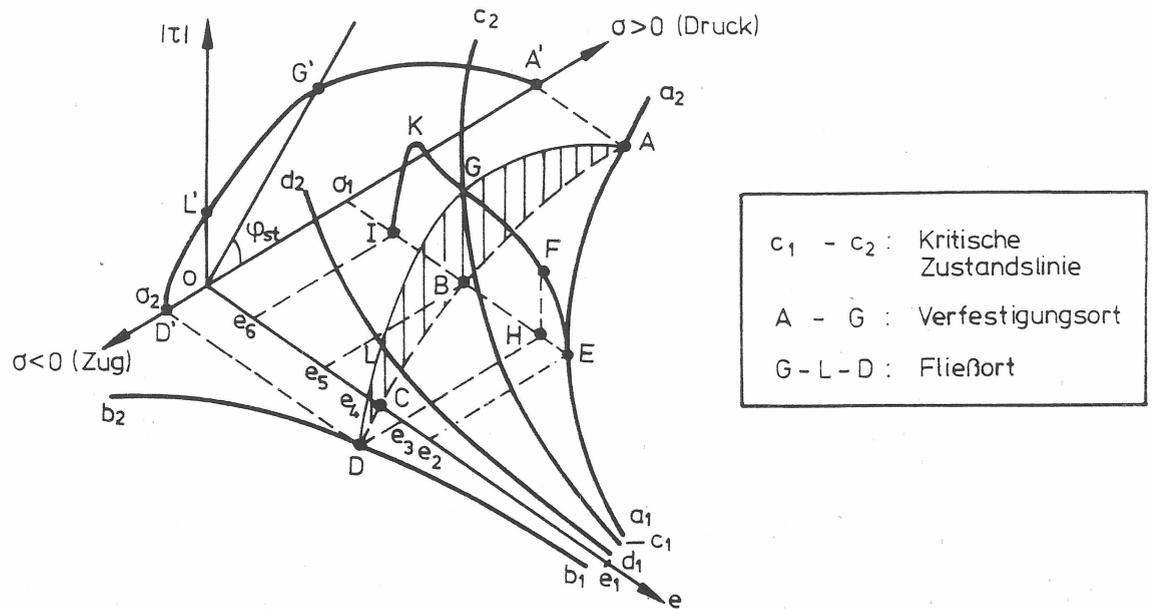


Bild 3.4: Zustandsdiagramm für Schüttgüter

Wird eine Schüttgutprobe mit der lockersten Lagerung e_1 einer steigenden σ -Belastung unterworfen, so durchläuft sie in der σ - e -Ebene die Erstbelastungskurve $a_1 - a_2$ (virgin consolidation line). Diese Kurve $a_1 - a_2$ ist die Grenzlinie für mögliche Anfangszustände dieses Materials, da Zustände auf der dem Koordinatenursprung abgewandten Seite nicht möglich sind.

Die ebenfalls in der σ - e -Ebene liegende Kurve $b_1 - b_2$ gibt den entsprechenden Zusammenhang zwischen der Zugfestigkeit eines kohäsiven Materials und der Porenziffer wieder; bei kohäsionslosem Material fällt sie mit der e -Achse zusammen.

Wird auf der Erstbelastungskurve $a_1 - a_2$ bis zum Punkt A belastet und dann wieder entlastet, so erfolgt

eine elastische Rückdehnung längs der Schwellkurve A-B-C-D (swelling line); eine Wiederbelastung erfolgt längs dieser Schwellkurve bis A und dann weiter auf $a_1 - a_2$ in Richtung a_2 . Ist einmal bis A belastet worden, sind Zustände außerhalb der Schwellkurve nicht mehr möglich.

Wird eine Probe auf $a_1 - a_2$ bis E belastet und dann unter $\sigma_1 = \text{const}$ einer wachsenden Scherbeanspruchung τ ausgesetzt, so werden die Zustände der Probe durch die Kurve E-F-G in der $\sigma_1 = \text{const}$ -Ebene wiedergegeben; die Porenziffer verringert sich dabei von e_2 auf e_5 . In G wird ein stationärer Fließzustand erreicht, bei dem eine weitere Änderung von τ und e nicht mehr möglich ist.

Die Verbindungslinie der Endzustände G aus analogen Versuchen mit verschiedenen Normalspannungen $\sigma_1 = \text{const}$ und Anfangszuständen auf der Erstbelastungskurve ergibt die Raumkurve $c_1 - c_2$, die nach Roscoe "kritische Zustandslinie" (critical state line) und nach Jenike "stationärer Fließort" genannt wird.

Die kritische Zustandslinie unterteilt das mögliche Verhalten eines Schüttgutmaterials in zwei Bereiche: die Kurven $c_1 - c_2$ und $a_1 - a_2$ spannen die sog. Verfestigungs-, die Kurven $c_1 - c_2$ und $b_1 - b_2$ die sog. Fließoberfläche auf. Die Fließoberfläche schneidet die Ebene $\sigma = 0$ in der Kurve $d_1 - d_2$, die den Zusammenhang zwischen der Kohäsion und der Porenziffer angibt und bei kohäsionslosen Gütern mit der e -Achse zusammenfällt.

Spannungszustände unterhalb dieser Oberflächen zeigen ein elastisches Verhalten des Materials an, Zustände auf den Oberflächen bedeuten ein unmittelbar bevorstehendes Fließen, Zustände außerhalb der Oberflächen sind nicht möglich.

Führt man einen Scherversuch an einer Probe von der Ausgangsdichte e_3 unter konstanter Spannung σ_1 durch (Punkt H), so steigt die Schubspannung τ linear mit der Verformung an, bis in F die Verfestigungsoberfläche erreicht wird; von diesem Punkt an wird die Probe unter weiterer Zunahme von τ bis zum Erreichen des stationären Fließzustandes im Punkt G verdichtet. Solche Proben nennt man unterverfestigt.

Liegt der Ausgangszustand der Probe auf der Projektion der kritischen Zustandslinie in die Ebene $\tau = 0$ (Punkt B), so wird beim Aufbringen der Schubspannung die kritische Zustandslinie in Punkt G ohne Porenziffernänderung direkt erreicht; die Probe ist kritisch verfestigt und erfährt vor und während des Fließzustandes keine Volumenänderung.

Beginnt der Scherversuch unter $\sigma_1 = \text{const}$ im Punkt I, so verhält sich die Probe bis zum Erreichen der Fließoberfläche im Punkt K elastisch. Bei lastgesteuerten Scherversuchen bricht die Probe hier auseinander, während bei weggesteuerten Versuchen ein weiterer Schervorgang möglich ist und unter Abnahme von τ und Zunahme von e längs der Fließoberfläche bis zum stationären Zustand in Punkt G verläuft. Solche Proben mit Ausgangszuständen unterhalb der Fließoberfläche nennt man überverfestigt.

Durch vertikale Projektion der Schwellkurve A-B-C-D nach oben erhält man die in Bild 3.4 schraffierte "elastische Wand", die die Verfestigungsoberfläche in der Kurve A-G (Verfestigungsort) und die Fließoberfläche in der Kurve G-L-D (Fließort) schneidet.

Die Projektion des Verfestigungs- und Fließortes in die σ - τ -Ebene ergibt die Kurven A'-G' und G'-L'-D'. Je nach Lage des Punktes A auf der Erstbelastungskurve schneidet

die elastische Wand aus der Verfestigungs- und Fließoberfläche andere Grenzkurven aus, deren Projektionen in die σ - τ -Ebene zu der von Normalspannung und Porenziffer abhängigen Kurvenschar nach Bild 3.3 führen.

Kennzeichnendes Merkmal dieser Grenzkurven ist die Tatsache, daß alle Punkte einer jeden Grenzkurve zu Schüttgutproben gehören, die im unbelasteten Zustand die gleiche Porenziffer aufweisen.

Bei Projektion der kritischen Zustandslinie in die σ - τ -Ebene erhält man die Gerade O-G':

$$\tau = \sigma \cdot \tan \varphi_{st} \quad (3.1)$$

wobei der Winkel φ_{st} ein Stoffparameter für das betreffende Material ist.

Diese Gleichung gilt nur für den kritischen Zustand, in dem stationäres Fließen ohne Volumenänderung stattfindet und ist nach Roscoe die einzige Form einer Coulomb-Beziehung, die verwendet werden sollte, da der Reibungswinkel $\varphi = \varphi_{st}$ nur in diesem kritischen Zustand ein Materialparameter ist.

Es ist festzuhalten, daß die kritische Zustandslinie eines Materials die Verbindungslinie stationärer Fließzustände unter verschiedenen Schüttgutdichten und verschiedenen, aber festgelegten Kombinationen der Hauptspannungen darstellt und daß der Winkel φ_{st} , der als Winkel der inneren Reibung im kritischen Zustand bezeichnet werden kann, von der Normalspannung und Porenziffer unabhängig ist. Nur diesem Winkel φ_{st} kommt die Bedeutung eines Materialparameters zu, während jeder andere bei Silodruckberechnungen verwendete Winkel φ wegen der nichtlinearen σ - τ -Grenzspannungsfunktion keineswegs als eine derartige Größe aufzufassen ist.

3.1.2 Wandreibungskoeffizienten

Bei Silokonstruktionen wird ein großer Teil der vertikalen Lasten aus dem Eigengewicht der Schüttgüter über Reibung in die begrenzenden Seitenwände eingeleitet.

Zur Beschreibung derartiger Reibungsvorgänge von körnigen Silogütern an den begrenzenden Silowänden beim Füllen und Entleeren wird in den bisherigen Drucktheorien auf die Coulomb'schen Gesetzmäßigkeiten für trockene Reibung von festen Körpern zurückgegriffen, in denen unterschieden wird zwischen der

- Haftreibung R_0 , für die gilt

$$R_0 = \mu_0 \cdot N, \quad (3.2)$$

wobei N die Druckkraft senkrecht zur Berührungsfläche ist und μ_0 ein Haftreibungskoeffizient, der als

- unabhängig von der Größe der Berührungsfläche
- unabhängig von der Druckkraft N
- abhängig vom Zustand der sich berührenden Flächen und deren Materialien

angesehen wird

und der

- Gleitreibung R mit der Beziehung

$$R = \mu \cdot N, \quad (3.3)$$

wobei μ ein Gleitreibungskoeffizient ist, der

- unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Berührungsflächen
- unabhängig von der Druckkraft N

sein soll.

Weiterhin gilt die experimentell beobachtete Relation

$$\mu_0 > \mu \quad (3.4)$$

Die diesen Reibungsgesetzen für feste Körper zugrundeliegende Annahme, daß die Reibungszahlen μ_0 und μ empirisch zu bestimmende Materialkonstanten sind, ist für Normalfälle mit nicht zu extremen Druckkräften und Relativgeschwindigkeiten berechtigt. Gelegentlich sind jedoch einige Zusätze bzw. Abänderungen zu machen [45]:

- durch neuere Untersuchungen ist eine Abhängigkeit der Reibungszahlen μ_0 und μ von der Druckkraft N festgestellt worden: bei sehr kleinen und sehr großen Drücken werden die Reibungszahlen größer als bei mittleren Drücken. Im ersten Fall können Adhäsionswirkungen, im zweiten Formänderungen der Materialien als Ursache angesehen werden.
- Weiterhin ist belegt, daß der Gleitreibungskoeffizient μ von der Relativgeschwindigkeit der Berührungsflächen abhängig ist (Bild 3.5).

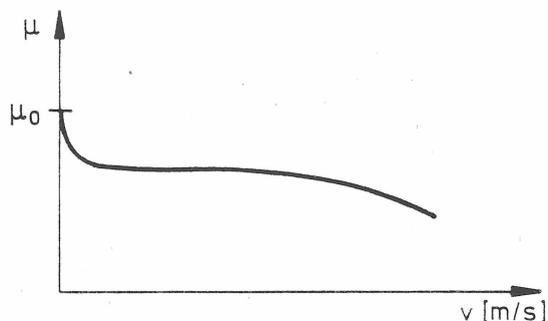


Bild 3.5: Qualitative Beziehung zwischen Gleitreibung und Geschwindigkeit

Bei der Verwendung dieser für feste Körper aufgestellten Coulomb'schen Reibungsgesetze auf die Beschreibung der Reibungsverhältnisse zwischen körnigen Siloschüttgütern und den Seitenwänden der Behälter geht man davon aus, daß die Reibungskoeffizienten auch für körnige Materialien als reine Materialkonstanten betrachtet werden können; darüber hinaus wird vielfach angenommen (z.B. in DIN 1055, Bl.6, "Lasten in Silozellen", Ausgabe Nov. 1964), daß zwischen dem als konstant angenommenen Winkel der inneren Reibung und den Reibungskoeffizienten eine feste Beziehung besteht, so daß die Reibungsbeiwerte in Abhängigkeit vom inneren Reibungswinkel des betreffenden Silogutes bestimmt werden können.

In den Vorschlägen zur Neufassung von DIN 1055, Teil 6 werden die Reibungsbeiwerte μ_0 in Abhängigkeit von der Art der Fläche, an der das Schüttgut reibt, in 3 Stufen erfaßt.

Neuere Untersuchungen zeigen jedoch, daß die Reibungskoeffizienten im Silobau keineswegs als ausschließlich materialabhängige, konstante Größen zu betrachten sind.

Aufgrund eigener Versuche kommen Platonov/Poltorak [46] zu dem Ergebnis, daß der Haftreibungskoeffizient nicht konstant ist, sondern mit wachsender Normalspannung größer wird.

Nach Peschl [47, 48] hängt auch der Gleitreibungskoeffizient von der Auflast ab; er vermindert sich für Getreide mit zunehmendem Normaldruck.

Jenike [49] weist für alle Schüttgüter darauf hin, daß der Gleitreibungsbeiwert als Funktion von der Auflast anzusehen ist, ohne jedoch klarzulegen, ob der Reibungsbeiwert bei zunehmender Auflast größer oder kleiner wird.

Auch Ogniwiek [50] kommt aufgrund eigener Versuche mit Kasten- und Jenikeschergeräten an verschiedenen Wandmaterialien und Schüttgütern zu dem Ergebnis, daß die Wandreibungskoeffizienten für das Füllen und Entleeren von Silos von der Auflast abhängen.

Er stellt fest, daß die Gleitreibungskoeffizienten mit wachsender Auflast kleiner werden und in keinem festen Verhältnis zum inneren Reibungswinkel stehen. Zudem seien als Einflußparameter die Oberflächenhärte der Seitenwände, deren Oberflächenrauigkeit, die Kornform und -festigkeit des Schüttgutmaterials und die Beziehung Korndurchmesser-Wandrauigkeit zu berücksichtigen.

Wie wenig realistisch eine Klassifizierung der Wandrauigkeit nach dem Augenschein sein kann, zeigt das Beispiel "Reibung an einer lackierten Stahlplatte" [50]:

Obwohl eine lackierte Stahlplatte sehr viel glatter als eine walzrauhe Platte wirkt, ergaben sich für sie in den Versuchen stets höhere Wandreibungskoeffizienten.

Dies liegt darin begründet, daß die Lackschicht weicher ist als das Einzelkorn des verwendeten Schüttgutes, so daß die Teilchen bei Belastung in die Lackierung eingepreßt werden, wodurch es zu einer Korn zu Korn Reibung mit entsprechend hohen Reibungsbeiwerten kommt.

Für organische Schüttgüter ist bei der Übertragung von Versuchswerten in die Praxis die Glättung der Wände im Betrieb durch Fett, Wachs und Öl zu beachten.

Es ist festzuhalten, daß zur Berechnung der Druckverhältnisse in Silokonstruktionen nicht von konstanten, ausschließlich materialabhängigen Reibungskoeffizienten ausgegangen werden kann, da die zur Berechnung der größten Horizontaldrücke benötigten Gleitreibungskoeffizienten eine deutliche Abhängigkeit von der vertikalen Auflast zeigen: sie vermindern sich i. a. mit zunehmender vertikaler Auflast und führen somit bei großen Silos zu höheren horizontalen Drücken. Daraus folgt, daß Reibungskoeffizienten, die aus Messungen an Modellsilos ermittelt wurden, nicht ohne weiteres zur Berechnung der Wandreibungsverhältnisse in größeren Silokonstruktionen verwendet werden dürfen.

Darüber hinaus können die Reibungskoeffizienten nicht aus dem Winkel der inneren Reibung mit einem vom jeweiligen Wandmaterial abhängigen Faktor hergeleitet werden.

3.2 Stoffgesetze für sandartige Materialien

3.2.1 Überblick

Zur Erstellung von konstitutiven Beziehungen sind verschiedene Theorien entwickelt worden, die sich in

- inkrementelle bzw. differentielle und
- finite

Ansätze unterteilen lassen.

In den finiten Gesetzen, die vorwiegend bei metallischen Werkstoffen [51, 52] Anwendung finden, wird postuliert, daß eine algebraische Beziehung zwischen den Dehnungen und Spannungen besteht. Solche Beziehungen erhält man formal durch Übertragung des bekannten elastischen Stoffgesetzes nach Hooke in den plastischen Bereich, indem Spannungen und plastische Verzerrungsanteile statt durch einen konstanten Elastizitätsmodul durch einen spannungsabhängigen Sekantenmodul miteinander gekoppelt werden.

Für Sande sind derartige Stoffansätze u.a. von Kondner/Zelasko [53], Duncan/Chang [54] entwickelt worden. Da in finiten Stoffansätzen die real immer vorhandene Abhängigkeit des Materialverhaltens vom Spannungsweg i.a. nicht berücksichtigt wird, gelten sie in der Regel nur für bestimmte Verformungswege und nur dann, wenn im Laufe einer Belastungsänderung das Verhältnis der Hauptspannungen konstant bleibt.

Leistungsfähiger sind in dieser Hinsicht die inkrementellen bzw. differentiellen Stoffgesetze, zu denen u.a.

die auf der Grundlage der sog. klassischen Plastizitätstheorie* entwickelten Stoffgesetze zählen. Derartige Gesetze für kohäsionslose Sande sollen im folgenden aufgezeigt werden.

3.2.2 Gegenüberstellung elasto-plastischer Stoffgesetze

Erste Ansätze, die für metallene Werkstoffe entwickelte klassische Plastizitätstheorie auch zur Beschreibung des Stoffverhaltens von sandartigen Materialien zu verwenden, gehen zurück auf Drucker/Prager [55].

Sie schlagen als Fließgrenze eine erweiterte Form der v. Mises-Fließhypothese vor

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \alpha \cdot J_1 + \sqrt{J_2^D} = k, \quad (3.5)$$

wobei J_1 die erste Invariante des Spannungstensors und J_2^D die zweite Invariante des Spannungsdeviators bedeuten.

Im Hauptspannungsraum beschreibt dieses Modell für $\alpha = 0$ einen Kreiszyylinder (v. Mises), für $\alpha > 0$ einen zur Äquisektrix symmetrischen geraden Kreiskegel mit der Spitze im Zugspannungsoktanten (Bild 3.6). Diese dreidimensionale Fließbedingung läßt sich auf die Mohr-Coulomb Fließbedingung des ebenen Verzerrungszustandes reduzieren, wenn

* Die Grundbegriffe der klassischen Plastizitätstheorie sind im Anhang F dargelegt.

$$\alpha^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{9 + 3 \sin^2 \varphi} \quad (3.6a)$$

und

$$k^2 = \frac{3c^2 \cos^2 \varphi}{3 + \sin^2 \varphi} \quad (3.6b)$$

gesetzt werden.

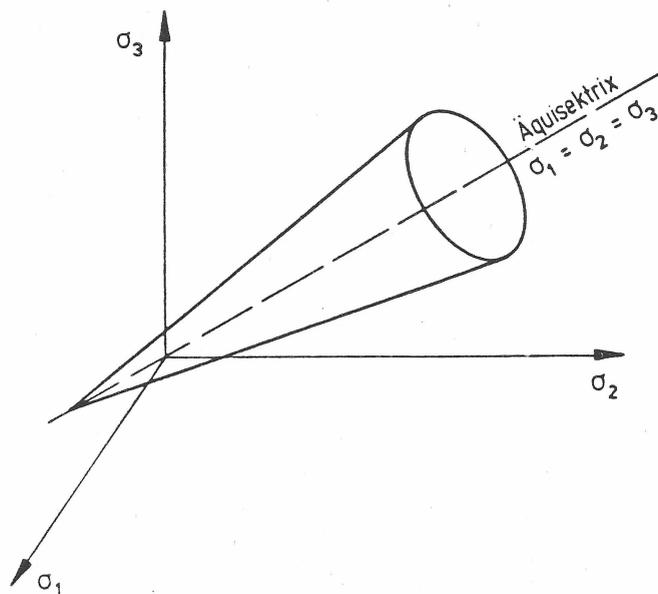


Bild 3.6: Mohr-Coulomb Fließbedingung als erweitertes v. Mises-Modell

Drucker [56] weist darauf hin, daß die Bruchhypothese nach Mohr-Coulomb im Hauptspannungsraum statt durch das v. Mises-

Modell besser durch ein erweitertes Tresca-Modell wiedergegeben wird - vgl. auch Shield [57], Kirkpatrick [58, 59] -, wonach Fließen des Materials dann einsetzt, wenn die größte Schubspannung einen bestimmten kritischen Wert erreicht. Zur Darstellung des Mohr-Coulomb Kriteriums als dreidimensionales erweitertes Tresca-Modell wird auf die Gleichung (2.14) zurückgegriffen:

Durch Variation der Hauptspannungen σ_1 , σ_2 , und σ_3 erhält man daraus für die 6 Ebenen im Hauptspannungsraum folgende Beziehungen:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3: \quad \sigma_1 = \beta_D + m \cdot \sigma_3 \\ 2) \quad \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1: \quad \sigma_3 = \beta_D + m \cdot \sigma_1 \\ 3) \quad \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3: \quad \sigma_2 = \beta_D + m \cdot \sigma_3 \\ 4) \quad \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2: \quad \sigma_3 = \beta_D + m \cdot \sigma_2 \\ 5) \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2: \quad \sigma_1 = \beta_D + m \cdot \sigma_2 \\ 6) \quad \sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1: \quad \sigma_2 = \beta_D + m \cdot \sigma_1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sigma_2 - \text{beliebig} \\ \\ \sigma_1 - \text{beliebig} \\ \\ \sigma_3 - \text{beliebig.} \end{array}$$

Diese Grenzfläche stellt im Hauptspannungsraum eine sechseckige, gleichseitige und für $\beta_Z \neq \beta_D$ nicht-gleichwinklige Pyramide dar; für $\beta_Z = \beta_D$ ist diese Pyramide auch gleichwinklig (Tresca), vgl. Bilder 3.7 und 3.8. (Zur Darstellung der Pyramide in der Triaxial- und Deviatorebene siehe Anhang A).

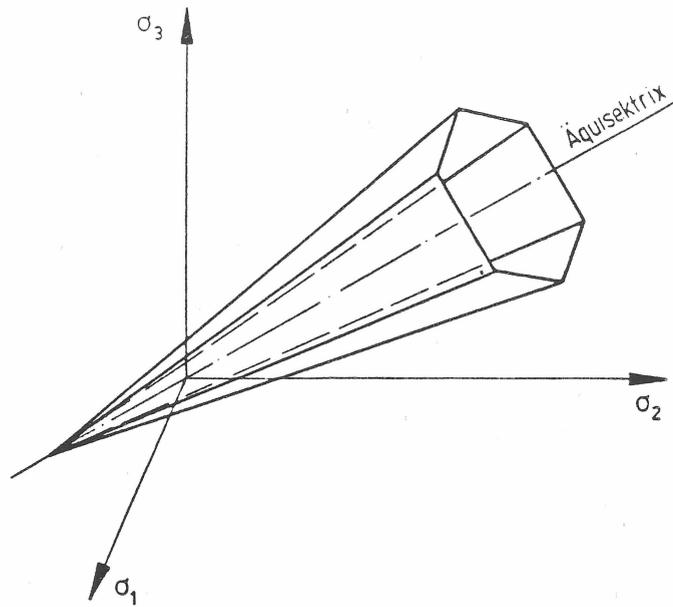


Bild 3.7: Mohr-Coulomb Fließbedingung als erweitertes Tresca-Modell

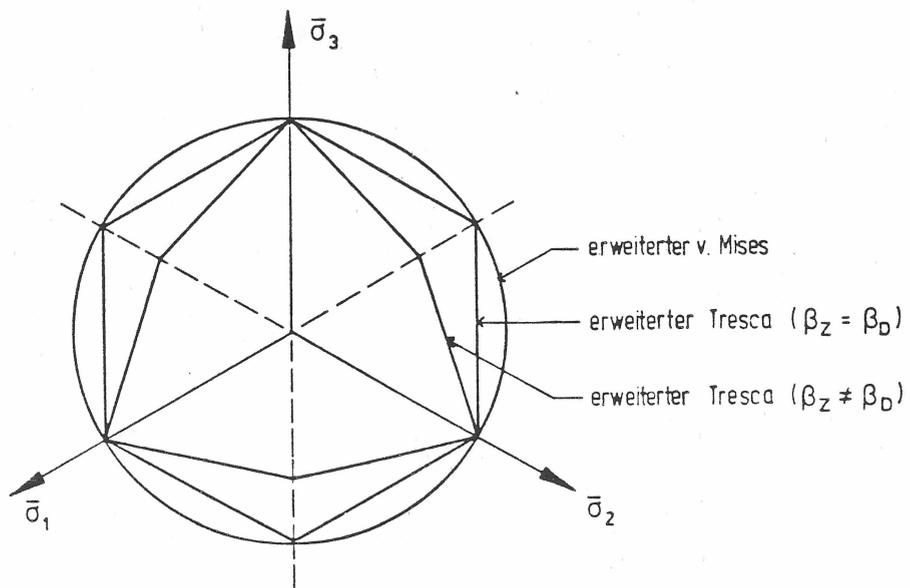


Bild 3.8: Schnitte der Mohr-Coulomb Fließflächen mit der Ebene $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Oktaeder- oder Deviatorebene)

Weiter verwenden Drucker/Prager [55] und Drucker [56] in ihren elasto-plastischen Stoffansätzen die sogenannte assoziierte Fließregel, setzen also das plastische Potential gleich der Fließfläche, wodurch der Vektor des plastischen inkrementellen Dehnungszuwachses senkrecht zur Fließfläche steht.

Mit den erörterten Fließbedingungen [55, 56] konnte zum ersten Mal berücksichtigt werden, daß die Scherbeanspruchung von sandartigen Materialien mit einer Volumenänderung verbunden ist, wenngleich sich jedoch bei Zugrundelegung dieser Fließbedingungen die folgenden Unzulänglichkeiten zeigen:

- Die Modelle [55, 56] führen immer zu plastischer Volumenausdehnung (Expansion), während z.B. bei lockerem Sand das Volumen nur abnehmen kann.
- Die mit diesen Modellen [55, 56] berechnete Volumenausdehnung ist bei dicht gelagertem Sand wesentlich größer als die experimentell beobachtete.
- Da diese Theorien [55, 56] lediglich einen Verfestigungsansatz (work-hardening) beinhalten, kann bei dicht gelagertem Sand der Spannungsabfall nach Überschreiten der maximalen Scherbeanspruchung (Punkt P in Bild 3.1) nicht nachvollzogen werden - work-softening.
- Bei dem Modell [56] ist die Richtung der plastischen Dehnungsinkrementvektoren für Spannungszustände, die auf den Schnittkanten der einzelnen Ebenen liegen, mehrdeutig.

Diese Unzulänglichkeiten konnten auch durch Modifikationen [60, 61, 62] und erweiterte Modellvorstellungen nur z.T. behoben werden, da eine Mohr-Coulomb Beziehung überhaupt

nicht zur Beschreibung einer Fließfläche (-bedingung) verwendet werden darf:

Nach Abschnitt 3.1.1 und Anhang F stellen Fließflächen die elastischen Grenzen eines Materials mit konstanter Ausgangsdichte dar; jedem Spannungszustand, der auf der kritischen Zustandslinie liegt - und dies ist nach Abschnitt 3.1.1.2 wegen des Materialparameters φ_{st} die einzige Form einer Coulomb-Beziehung, die verwendet werden kann - ist aber eine andere Dichte zugeordnet, so daß die aus einer solchen Coulomb-Beziehung aufgebaute Fließfläche nicht die elastischen Grenzzustände eines Materials konstanter Dichte darstellt, sondern die Verbindung stationärer Zustände verschiedener Dichten, vgl. Abschnit 3.1.1.2.

Es ist also nicht sinnvoll, aus einer Coulomb-Beziehung eine Fließfläche herzuleiten.

Die Anwendung der Normalitätsbedingung auf eine solche Fließfläche muß demzufolge ebenfalls zu unzutreffenden Ergebnissen führen.

Zudem weist Jenike [38, 39] darauf hin, daß bei den - im Vergleich zum Grundbau - niedrigen Drücken der Schüttgutmechanik keine lineare σ - τ -Beziehung nach Coulomb (Bild 2.5) besteht, sondern daß ein von der Ausgangsdichte bzw. Ausgangsfestigkeit des Materials abhängiger nichtlinearer Zusammenhang zwischen σ und τ vorliegt, vgl. Bild 3.3 .

Analog zur Mohr-Coulomb Bruchbedingung nach Gl.(2.11) kann eine Abhängigkeit zwischen den Hauptspannungen der den Fließort tangierenden Mohr-Kreisen und weiteren Größen (wie z.B. Kohäsion, Zugfestigkeit, Krümmung) aufgestellt werden.

Im Hauptspannungsraum erhält man dann eine sechseckige Pyramide - erweiterter Tresca - mit nicht mehr geraden, sondern gewölbten Begrenzungsebenen und Oktaederschnitten wie in Bild 3.8.

Mit den bislang aufgeführten Fließflächen kann bei Voraussetzung der Normalenhypothese lediglich die Volumenzunahme des Sandes bei Scherbeanspruchung erfaßt werden. Zur rechnerischen Erfassung der Volumenabnahme sind ergänzende Fließflächen für den Verfestigungsbereich vorgeschlagen worden.

Nach Jenike/Shield [63] wird die Fließfläche bei einem von der Ausgangsporenziffer e_i abhängigen Schnitt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ durch eine Ebene abgeschlossen (Bild 3.9).

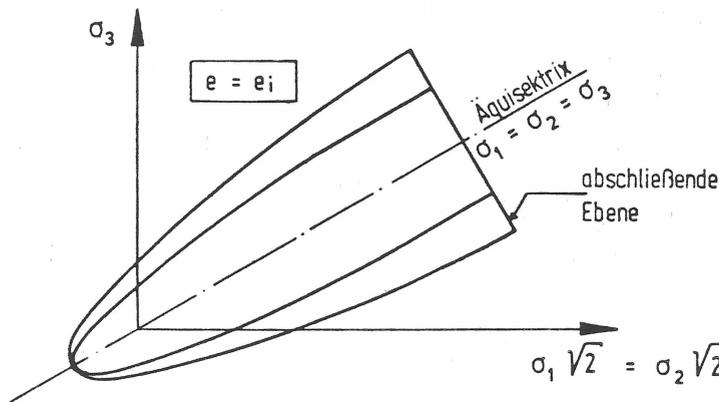


Bild 3.9: Fließflächen nach Jenike [38, 39] und Jenike/Shield [63] in der Triaxialebene (Ebene mit σ_3 und Äquisektrix)

In anderen Ansätzen, z.B. [60, 64 - 68], werden die kegel- oder pyramidenförmigen Fließflächen durch eine Kappe abgeschlossen - cap-type yield criteria, vgl. Bild 3.10 für den ebenen Verzerrungszustand. Man erkennt die Übereinstimmung mit Kurven des Typs A'-G' und G'-L'-D' nach Bild 3.4.

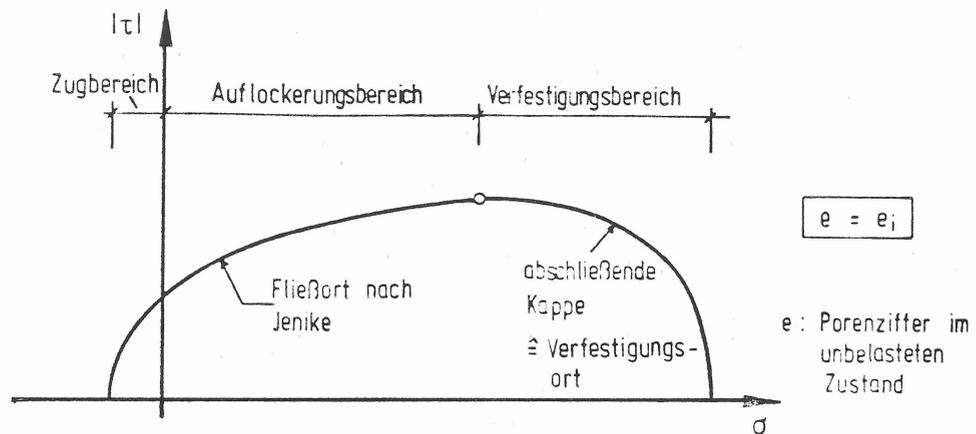


Bild 3.10: Fließort mit Kappe (Verfestigungsort)

Erweitert man die Darstellung des Bildes 3.10 auf den Hauptspannungsraum, so erhält man die in Bild 3.11 dargestellte zeppeinförmige Fließfläche mit der Porenziffer e im unbelasteten Zustand als Parameter.

Dies ist die grundsätzliche Form der Fließfläche für Schütt- und Silogüter im Hauptspannungsraum.

Weitere grundlegende Anstöße zur Formulierung von Spannungs-Dehnungsbeziehungen für körnige Materialien auf der Grundlage der Plastizitätstheorie wurden von Rowe [69] und Roscoe et.al. [70] gegeben.

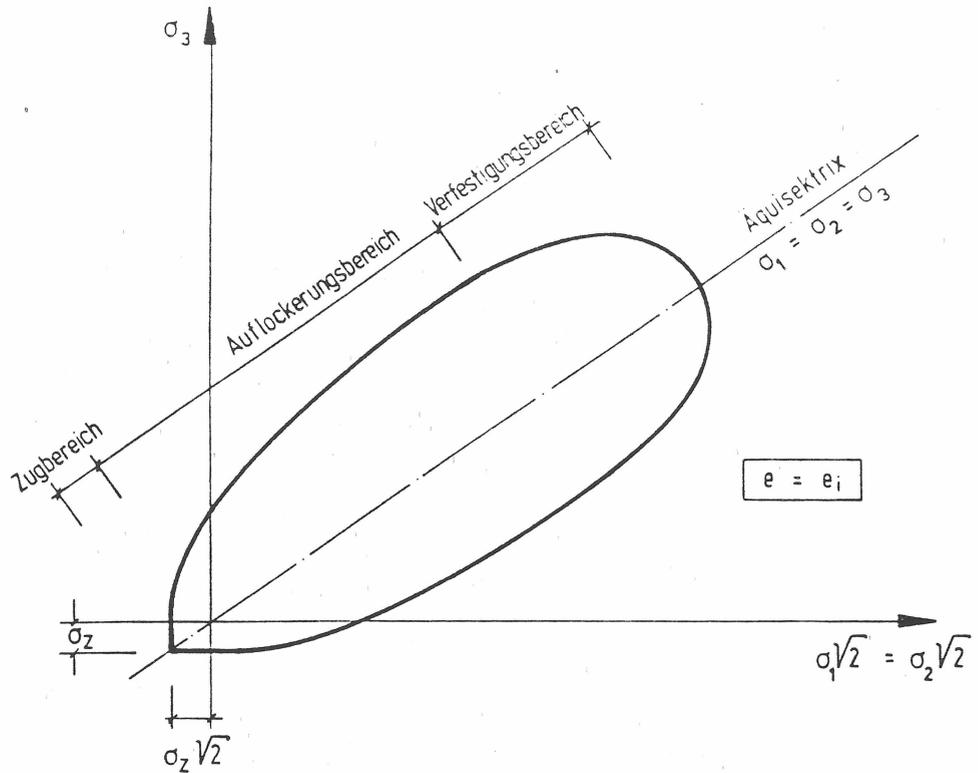


Bild 3.11: Fließfläche für Schüttgüter im Hauptspannungsraum

Mit seinen auf Energieprinzipien beruhenden Untersuchungen des Zusammenspiels von kugeligem Körpern bei Scherbeanspruchung gelingt es Rowe [69], Einblicke in das Dilatationsverhalten von Sanden zu gewinnen. Mit Hilfe der Plastizitätstheorie leitet er Beziehungen zwischen den Dehnungs- und Spannungsinkrementen bei dreiaxialer Kompression ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$), dreiaxialer Extension ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) und dem ebenen Verformungszustand ab.

Roscoe/Schofield/Wroth [70] kommen aufgrund von Versuchen mit neu entwickelten Scherzellen zu dem Schluß, daß jeder isotrope Boden bei kontinuierlicher Scherbeanspruchung letztendlich einem kritischen Zustand (critical state) zustrebt, (vgl. Abschnitt 3.1.2), in dem unbegrenzt weitere Scherdeformationen ohne Änderung der drei Parameter hydrostatische Spannung p , deviatorische Spannung q und Porenziffer e möglich sind und daß derartige Zustände im dreidimensionalen Raum mit den Parametern p , q und e als Koordinaten auf einer einzigen kritischen Zustandslinie (critical state line) liegen (Bild 3.12). (Die Spannungen σ und τ in Bild 3.4 haben für den ebenen Spannungszustand dieselbe Bedeutung wie p und q in Bild 3.12 für den dreidimensionalen Spannungszustand).

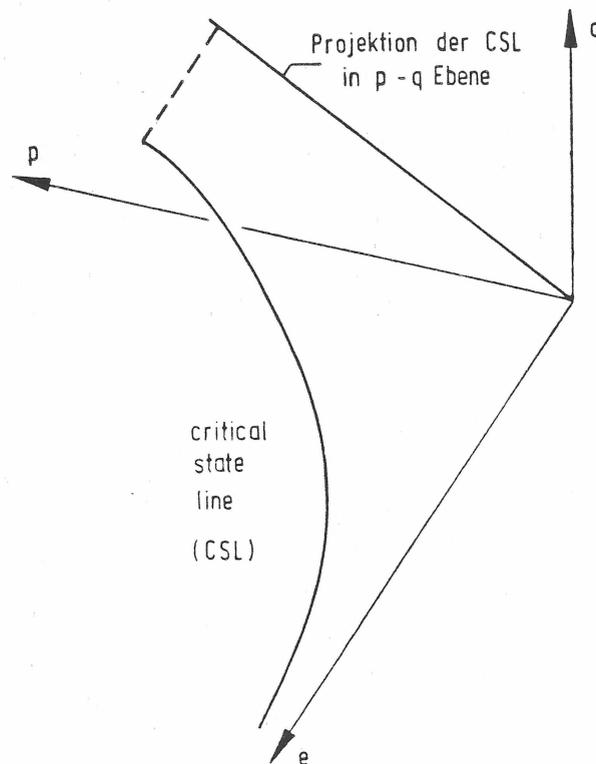


Bild 3.12: Critical State Line

Mit diesen Zusammenhängen zwischen p , q und e entwickeln sie aus einfachen physikalischen Arbeitsbeziehungen für zwei rheologische Modelle, dem "Granta-Gravel" und dem "Cam-Clay", Fließtheorien für die dreiaxiale Kompression und den ebenen Verzerrungszustand [70, 71, 37].

Diese Modellvorstellungen erfahren eine wesentliche Erweiterung u.a. durch Poorooshasb [72, 73, 74], der zeigt, daß der Vektor des plastischen inkrementellen Dehnungszuwachses bei Sanden nicht normal zur Fließfläche steht. Durch Einführung eines von der Fließbedingung unterschiedlichen plastischen Potentials entwickelt er ein Fließgesetz zur Beschreibung des Verhaltens von Sand bei dreiaxialer Kompression.

Wroth/Basset [75] geben Fließgesetze für Sand beim einfachen Schervorgang.

Da mit den in der Bodenmechanik gebräuchlichen einfachen Scherzellen bzw. mit den üblichen Dreiaxialgeräten keine beliebigen dreiaxialen Spannungszustände erzeugt werden können, stand zur Formulierung der bislang dargelegten Fließflächen und Fließgesetze lediglich eine begrenzte Auswahl von experimentellen Daten zur Verfügung.

Im einzelnen ist bei diesen "einfachen" Geräten zu kritisieren, daß

- bei den üblichen Scherzellen der Spannungszustand in einer Richtung unbekannt bleibt
- mit den üblichen Dreiaxialgeräten sich nur Spannungszustände erzeugen lassen, bei denen $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ist; mit ihnen können nur Extensions- ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) und Kompressionsversuche ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) durchgeführt werden, so daß man von der Fließfläche im Hauptspannungsraum lediglich sechs Meridiane bzw. in der Deviatorebene (Polfigur) sechs Punkte kennt.

Es ist zwar bekannt [76], daß die Fließfläche im Bereich zwischen diesen sechs Punkten konvex verläuft, jedoch ist der exakte Verlauf unbekannt und muß geschätzt werden; so wird z.B. im Fall der Mohr-Coulomb Bedingung die Verbindung der sechs Punkte als linear angenommen, Bild 3.13.

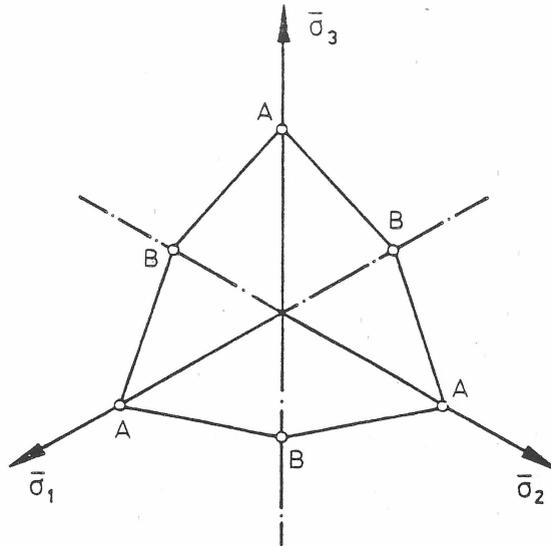


Bild 3.13: Mohr-Coulomb Bruchhypothese als erweitertes Tresca-Modell (vgl. Bild 3.8)

Zur Ermittlung des exakten Verlaufs der Fließfläche zwischen den sechs Grenzlinien sind wirkliche Dreiaxialversuche notwendig, bei denen Lastfälle $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ möglich sind.

Derartige Versuche sind mit Hilfe neuentwickelter Versuchsgeräte durchgeführt worden und in [77 - 84] beschrieben.

Die Versuchsergebnisse sind einander in Bild 3.14 gegenübergestellt.

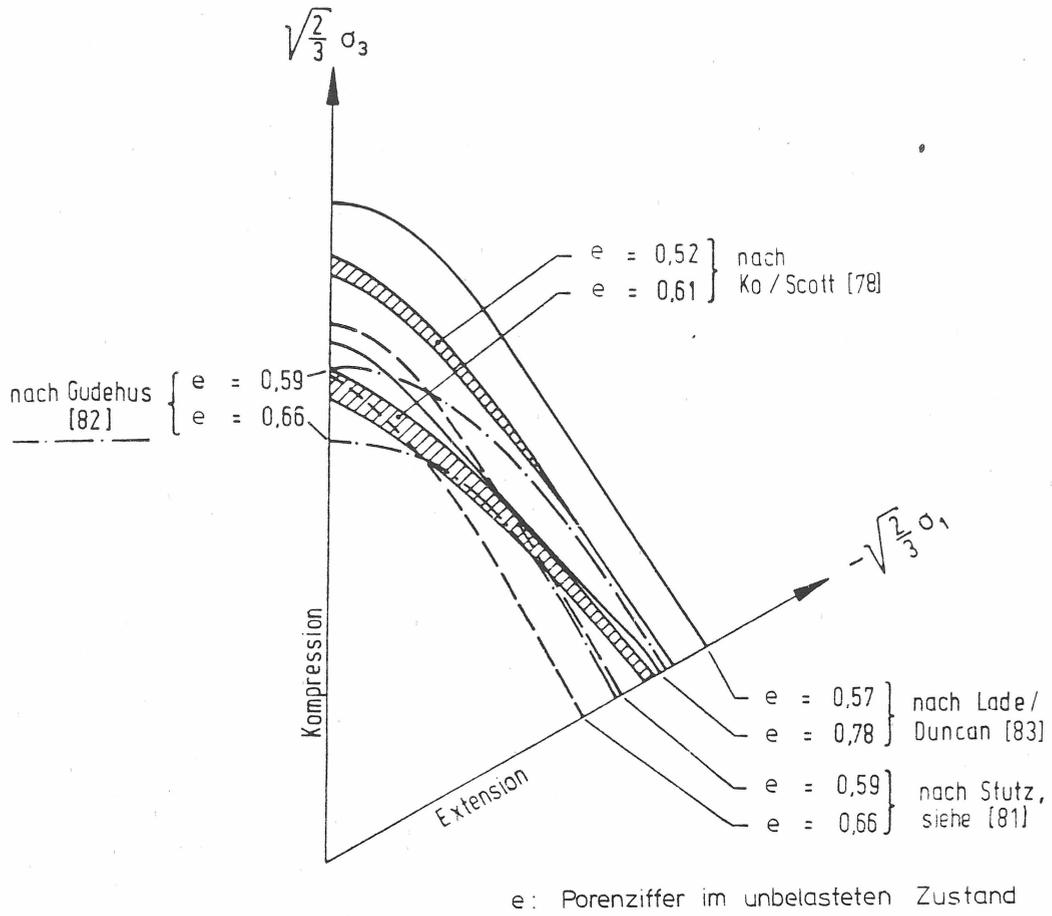


Bild 3.14: Darstellung der Fließfläche in der Deviatorebene (aus [85])

In Bild 3.15 werden die Versuchsergebnisse von Lade/Duncan [83] mit den Ergebnissen nach der Mohr-Coulomb-Hypothese verglichen. Dabei erfaßt in Bild 3.15b

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

den Einfluß der mittleren Hauptspannung σ_2 im Bereich zwischen der Kompression ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 + b = 0$) und der Extension ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 + b = 1$) und steht nach Anhang A in Beziehung zum Winkel θ zwischen der Kompression und Extension, vgl. Bild 3.15a; φ ist der Winkel der inneren Reibung nach der Mohr-Coulomb-Hypothese, vgl. Bilder 2.5 und 2.8.

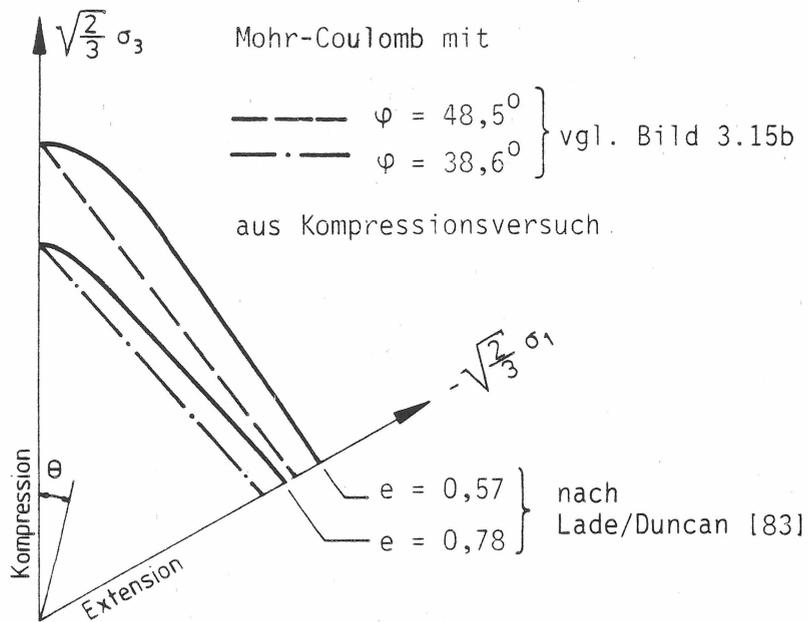


Bild 3.15a: Vergleich Mohr-Coulomb mit Versuchsergebnissen nach Lade/Duncan [83] in der Deviatorebene

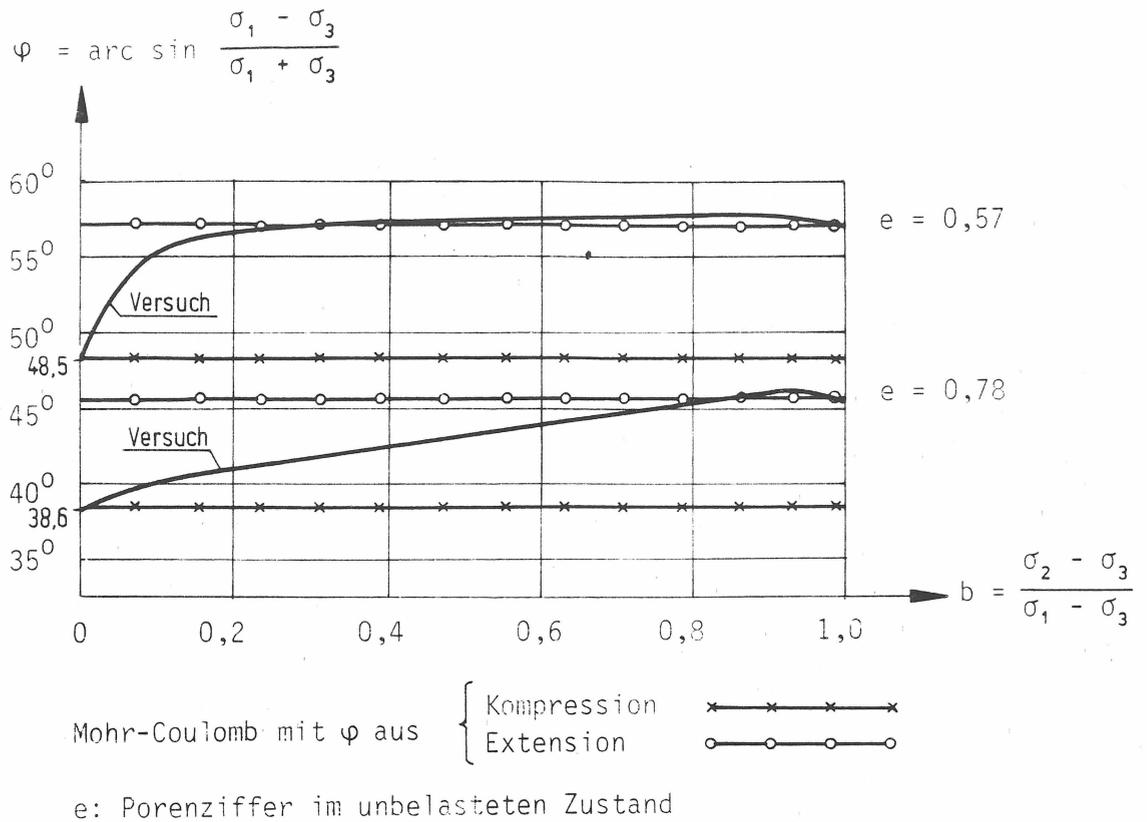


Bild 3.15b: Vergleich Mohr-Coulomb mit Versuchsergebnissen nach Lade/Duncan [83] im φ -b-Diagramm.

Die Darstellung der Bilder 3.14 und 3.15 erlaubt für den Verlauf der Fließflächen in der Deviatorebene folgende Feststellungen:

- Die experimentell beobachtete Fließfläche weicht z.T. stark von der Fließfläche nach Mohr-Coulomb ab.

- Die mittlere Hauptspannung σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), die bei der Mohr-Coulomb-Hypothese unberücksichtigt bleibt, beeinflusst den Verlauf der Fließfläche.
- Die Abhängigkeit der Fließfläche von der Lagerungsdichte wird bestätigt (vgl. Abschnitt 3.1.1.1).

Gudehus [82] entwickelt neben der Fließbedingung auch die übrigen auf der Plastizitätstheorie beruhenden Gleichungen zur Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens von Sanden. Er übernimmt die erstmals von Brown [86] vorgeschlagene Fließregel für plastisch volumentreue Metalle, die nur für die deviatorischen Komponenten der inkrementellen plastischen Verzerrungsvektoren die Normalitätsbedingung voraussetzt. Zur Erfassung der plastischen Volumenänderungen des Sandes führt er eine hauptsächlich von der Dichte abhängige Dilatanzfunktion ein.

Mit diesen Stoffgleichungen [82] lassen sich - bis auf den Spannungsabfall bei dicht gelagertem Sand nach Überschreiten des Punktes P in Bild 3.1 - die Zusammenhänge des Bildes 3.1 zutreffend beschreiben.

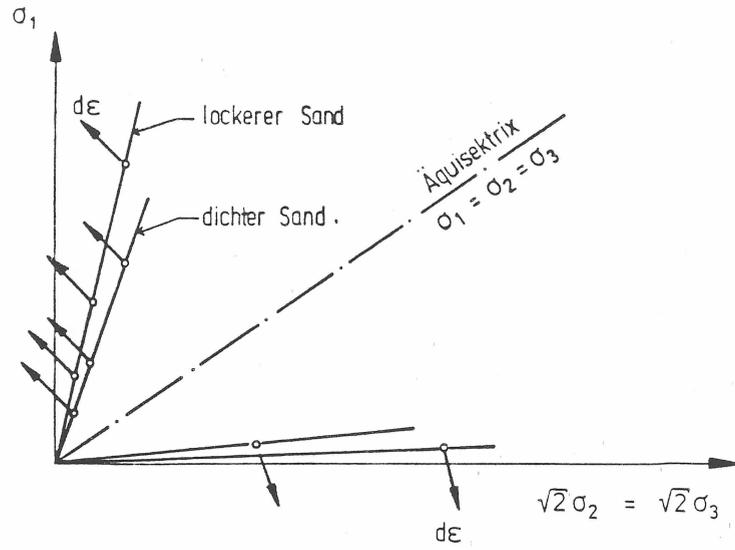
Lade/Duncan [83] kommen aufgrund der von ihnen durchgeführten Versuche zu einem Verlauf der Fließfläche in der Deviatorebene, der aus Bild 3.14 ersichtlich ist. Den Verlauf der Fließfläche im Hauptspannungsraum nehmen sie als geradlinigen Kegel an, was den experimentellen Beobachtungen anderer Autoren, wonach die Fließfläche leicht gekrümmt verläuft, der Öffnungswinkel des Kegels bei Anwachsen der hydrostatischen Spannung also abnimmt, widerspricht. Eine entsprechende Korrektur wird jedoch später von Lade [87, 88] vorgenommen.

Lade/Duncan bestätigen im übrigen die Beobachtungen von Ko/Scott u.a. [78], wonach die Normalitätsbedingung bei Sanden nicht gilt. In Bild 3.16 ist die Fließfläche nach Lade/Duncan zusammen mit dem Vektor der plastischen Dehnungssinkremente in der Triaxial - und Deviatorebene dargestellt.

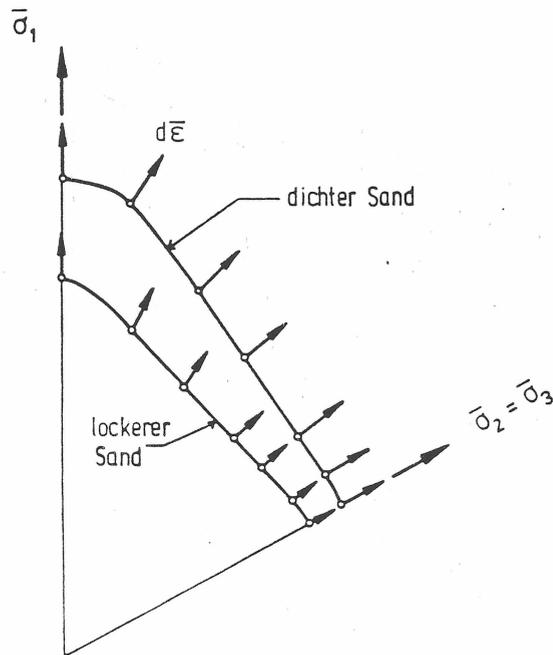
Es zeigt sich, daß die Normalität zwischen Fließoberfläche und plastischem Dehnungssinkrementvektor in der Triaxialebene (Rendulic-Ebene) nicht besteht, während sie in der Deviator-ebene annähernd gegeben ist.

Auf der Grundlage dieser in [83, 84] dargelegten Versuche entwickeln Lade/Duncan [89] eine elasto-plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung für kohäsionslosen Sand, die später von Lade [87, 88] erweitert wird.

Mit den Ansätzen [87] lassen sich die in Bild 3.1 dargestellten Zusammenhänge und die mit dem Zustandsdiagramm für Schüttgüter (Bild 3.4) aufgezeigten Abhängigkeiten hinreichend vollständig und zutreffend nachvollziehen.



a) Triaxialebene



b) Deviatorebene
(gleicher Ausschnitt wie in Bild 3.14)

Bild 3.16: Fließflächen und Richtungen der Vektoren der plastischen Dehnungssinkremente nach Lade/Duncan [83].

3.3 Zusammenfassung, Problemstellung und Lösungsweg

Die Gegenüberstellung der bisherigen Theorien zur Bestimmung von Druckverhältnissen in Silozellen (vgl. Abschnitt 2) hat aufgezeigt, daß es bisher keinen in sich geschlossenen Ansatz gibt, mit dem - ausgehend von den Stoffparametern des betreffenden Silogutes - die Druckverhältnisse in Silokonstruktionen beliebiger Geometrie während des Füllens und Ausfließens zutreffend beschrieben werden können.

Der Grund ist in den mangelhaften Kenntnissen über wirklichkeitsnahe Stoffgesetze für Schüttgüter zu sehen.

Erst mit neuentwickelten Versuchsgeräten, mit denen beliebige dreidimensionale Spannungszustände erzeugt werden können, sind Einblicke in die stoffgesetzlichen Zusammenhänge von Schüttgütern gewonnen worden, die zur Entwicklung von wirklichkeitsnahen Stoffgesetzen führten.

Einschränkend muß gesagt werden, daß sich die Entwicklung derartiger Stoffbeziehungen bislang fast ausschließlich auf den kohäsionslosen Sand als stellvertretendes Gut für kohäsionslose Silomaterialien mit sehr steifen, nahezu inkompressiblen Einzelkörnern beschränkt, während das stoffgesetzliche Verhalten organisch-kohäsiver Silogüter, wie Mehl und Extraktionsschrote, oder von Gärfutter (Silage), von einigen Detailproblemen abgesehen, so gut wie nicht erforscht ist.

Insbesondere liegt mit dem inkrementellen, nichtassozierten elasto-plastischen Stoffgesetz für kohäsionslose Sande von Lade [87] eine Formulierung vor, mit der

das Verhalten derartiger Materialien bei allgemeinen dreidimensionalen Spannungsänderungen offensichtlich hinreichend beschrieben werden kann.

Dieses Stoffgesetz wird als Grundlage für die weiteren Untersuchungen gewählt.

Für statische Aufgabenstellungen bildet es zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen und den geometrischen Feldgleichungen bei vorgegebenen Randbedingungen die Grundlage zur Beschreibung der Spannungs- und Verformungszustände im betrachteten Kontinuum.

Zur Lösung derartiger Probleme kann zwischen einer differentiellen Methode - Differentialgleichungssystem - und einer integralen - Variationsprinzip, weighted residual methods, etc. - unterschieden werden. Letztere bietet den Vorteil, daß Näherungsansätze, wie z.B. im vorliegenden Fall für die Verschiebungen, der richtigen Lösung "optimal" angepaßt werden können.

Formulierungen, bei denen die Ansätze für die unbekanntes Größen nicht über das gesamte Integrationsgebiet, sondern nur über Teilgebiete erfolgen, führen u.a. zur Methode der Finiten Elemente (FEM), die in dieser Arbeit verwendet werden soll.

Auf der Grundlage des elasto-plastischen Stoffgesetzes von Lade [87] und mit Hilfe der üblichen kontinuumsmechanischen Beziehungen für die Gleichgewichts- und Kompatibilitätsbedingungen soll im folgenden eine FEM-Formulierung für das vorliegende physikalisch nichtlineare Problem entwickelt werden.

4. Rechenalgorithmus

4.1 Berechnungsmodell

4.1.1 Annahmen und Voraussetzungen

Den in dieser Arbeit durchgeführten Siloberechnungen liegen die folgenden Annahmen und Voraussetzungen zugrunde:

1. Als mathematische Grundlage zur Lösung der Probleme dient die Finite Element Methode (FEM).
Das Kontinuum wird durch dreieckige Elemente mit linearen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen diskretisiert.
2. Es werden rotationssymmetrische Probleme behandelt.
3. Als betrachtetes Material wird trockener, kohäsionsloser Sand gewählt. Der Sand wird als homogenes, isotropes Material betrachtet. Das nicht-lineare Verhalten des Sandes wird durch das Stoffgesetz von Lade [87] erfaßt. Zugspannungen werden ausgeschlossen.
4. Es werden kleine Deformationen zugrunde gelegt.

4.1.2 Finite Element Formulierung

Wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie - vgl. Abschnitt 4.1.1 - werden die Verzerrungen

$$\underline{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_\theta\} \quad (4.1)$$

und Spannungen

$$\underline{\sigma}^T = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_{rz}, \sigma_\theta\} \quad (4.2)$$

nach Bild 4.1 in jeder Ebene senkrecht zur Rotationsachse vollständig durch die beiden Verschiebungskomponenten u und v in radialer bzw. axialer Richtung festgelegt [90].

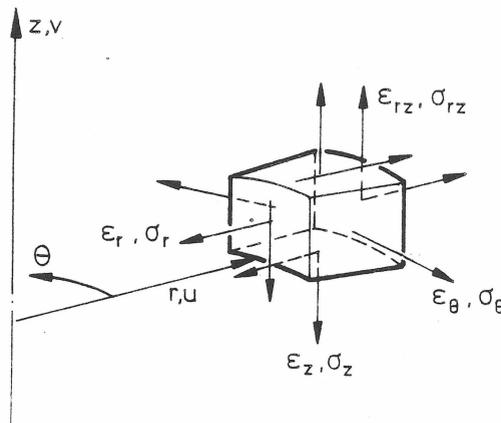


Bild 4.1: Dehnungs- und Spannungskomponenten bei Rotationssymmetrie

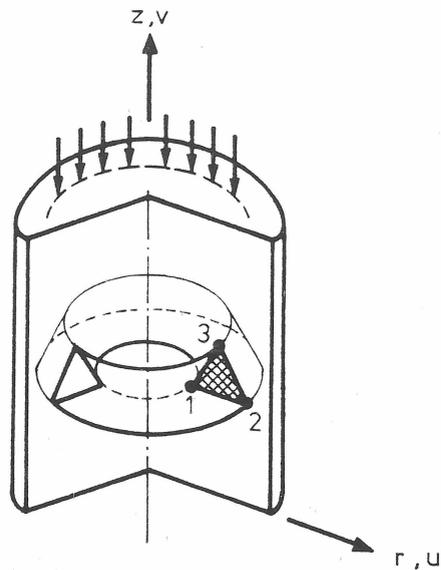


Bild 4.2: Diskretisierung

Die Diskretisierung des Kontinuums erfolgt in der vorliegenden Arbeit durch Dreieckselemente - vgl. Bild 4.2 - mit linearer Interpolation der Verschiebungen über die Elementfläche (CST-Elemente). Die Verschiebungen

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(r, z) \\ v(r, z) \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

eines beliebigen Punktes P innerhalb des Elementes mit den Knotenpunkten 1, 2, 3 werden somit in üblicher Weise wie folgt approximiert:

$$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{a}^e, \quad (4.4)$$

wobei

$$\underline{N} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ \hline 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{array} \right] \quad (4.5)$$

die Matrix der Formfunktionen mit den Flächenkoordinaten L_i nach Bild 4.3 und

$$\underline{a}^{eT} = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 \} \quad (4.6)$$

der Verschiebungsvektor der Elementknoten 1,2,3 ist.

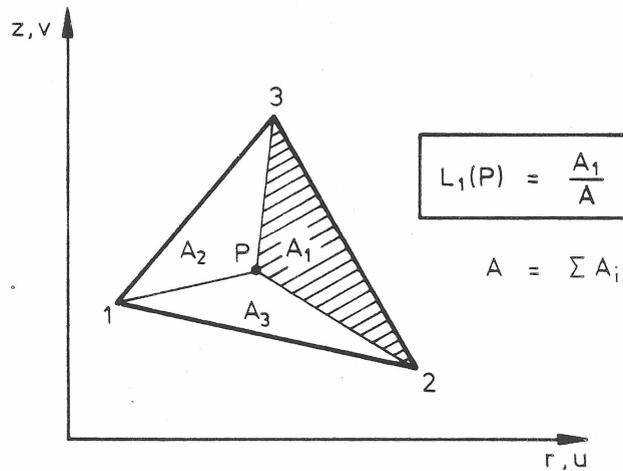


Bild 4.3: Flächenkoordinaten

Mit dem linearen Verschiebungsansatz (4.4) erhält man aus den üblichen Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen [90] die konstanten Dehnungen im Element zu

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \cdot \underline{a} \quad (4.7)$$

mit der 4 x 6 Matrix \underline{B} , deren Elemente aus der Formfunktion über die üblichen Differentialbeziehungen hergeleitet werden.

Über die konstitutive Beziehung für elastische Kontinua

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (4.8)$$

erhält man aus den bekannten konstanten Dehnungen $\underline{\varepsilon}$ die konstanten Elementspannungen $\underline{\sigma}$, wobei \underline{D} die elastische 4 x 4 Stoffmatrix ist.

Das Gleichgewicht am Element ergibt sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit zu

$$\underline{K}^e \cdot \underline{a}^e = \underline{f}^e \quad (4.9)$$

mit den Knotenlasten

$$\underline{f}^{eT} = \{ f_{1r}, f_{1z}, f_{2r}, f_{2z}, f_{3r}, f_{3z} \} \quad (4.10)$$

und den Knotenverschiebungen \underline{a}^e nach Gl. (4.6);

\underline{K}^e ist die 6 x 6 Elementsteifigkeitsmatrix, die sich für die in dieser Arbeit betrachteten rotationssymmetrischen Problemstellungen zu

$$\underline{K}^e = 2\pi \int \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \, r \, dr \, dz \quad (4.11)$$

ergibt [91].

Eine systematische Addition der Elementsteifigkeitsmatrizen \underline{K}^e und der Knotenkräfte \underline{f}^e führt zu der Gleichgewichtsbeziehung

$$\underline{K} \cdot \underline{a} = \underline{f} \quad (4.12)$$

im globalen System

mit \underline{f} : Knotenkräfte
 \underline{a} : Knotenverschiebungen
 \underline{K} : Steifigkeitsmatrix

des Gesamtsystems.

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems liefert die Knotenverschiebungen \underline{a} , mit denen sich aus Gl. (4.7) und Gl. (4.8) aus einer Nachlaufrechnung die Verzerrungen und Spannungen elementweise ermitteln lassen.

Wenn jedoch, wie im vorliegenden Fall, nichtlineares Materialverhalten vorliegt und zudem Kräfte-Randbedingungen zu berücksichtigen sind, erhält man statt der linearen Beziehung (4.12) ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem der Form

$$\underline{K}(\underline{a}) \cdot \underline{a} = \underline{f}(\underline{a}) \quad (4.13)$$

Als wirksame Methode zur Lösung derartiger Gleichungssysteme haben sich die gemischten inkrementell-iterativen Methoden erwiesen. Hierbei wird die äußere Last \underline{f} in einzelnen Inkrementen $\Delta \underline{f}$ aufgebracht und das innerhalb jeden Inkrements i als linear betrachtete Gleichungssystem

$$\underline{K}_i \cdot \Delta \underline{a} = \Delta \underline{f}_i \quad (4.14)$$

für jede Laststufe neu gelöst; das nichtlineare Problem wird somit durch eine Folge von linearen Problemen angenähert.

Durch eine Gleichgewichtsiteration läßt sich für jede Laststufe die gewünschte Genauigkeit erzielen, wobei wegen der Belastungsincrementierung schon die Anfangswerte der Iteration i.a. sehr dicht an der genauen Lösung liegen, so daß eine schnelle Konvergenz gewährleistet ist.

In der vorliegenden Arbeit wird das "initial stress"-Verfahren verwendet, auf das wegen der ausführlichen Darstellung in der Literatur [z.B. 92, 93] nur kurz eingegangen werden soll:

Die Last-Verschiebungskurve einer Struktur sei für den eindimensionalen Fall mit der Kurve A B C gegeben, vgl. Bild 4.4 . Eine Belastung ΔP von A aus führt wegen der in Punkt A vorzugebenden Steifigkeit - sie wird in der vorliegenden Arbeit zu Beginn eines jeden Iterationsablaufs aus dem bereits bekannten Spannungszustand im Punkt A ermittelt und während der Iteration unverändert beibehalten - zur Lösung B', die von der wirklichen Last-Verschiebungskurve abweicht. Aus der zu B' gehörenden Verschiebung Δv_1 läßt sich die Lösung A' auf der Kurve ermitteln. Damit erhält man die "Ungleichgewichtslast" ΔP_1 , mit der das System erneut belastet wird und die zur Lösung B" führt. Dieser Iterationszyklus wird solange durchlaufen, bis man sich der richtigen Lösung B hinreichend genau genähert hat.

4.1.3 Nichtlineare_Stoffbeziehung

Im folgenden Abschnitt 4.1.3.1 wird das Stoffgesetz für kohäsionslose Sande in der von Lade [87] gegebenen Form erläutert; es ermöglicht die Berechnung von Dehnungsänderungen aus vorgegebenen beliebigen Spannungsänderungen.

Für die numerischen Behandlungen wird jedoch die invertierte Form dieses Stoffgesetzes benötigt, also eine Beziehung zur Ermittlung von Spannungsänderungen aus vorgegebenen beliebigen Dehnungsänderungen, die im Abschnitt 4.1.3.2 in Matrizenform entwickelt wird.

4.1.3.1 Stoffgesetz von Lade_ [87]

1. Allgemeines

Auf der Grundlage zahlreicher Versuche mit neu entwickelten Dreiaxialgeräten, die beliebige Spannungszustände

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$$

zulassen [83, 84], entwickeln Lade/Duncan [54, 89] ein elasto-plastisches Stoffgesetz für kohäsionslose Sande, das später von Lade [87] erweitert wird. Das Gesetz beschreibt den Zuwachs der Dehnungsinkremente in Abhängigkeit von einer allgemeinen Änderung des dreidimensionalen Spannungszustandes σ_{ij} auf $\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$ in der Form

$$\Delta\varepsilon_{ij} = F(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \quad (4.15)$$

Im einzelnen berücksichtigt das Stoffgesetz die folgenden in Versuchen beobachteten Eigenschaften von kohäsionslosen Sanden:

- eine nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung
- den Einfluß der mittleren Hauptspannung σ_2 , ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$)
- Kontraktanz- und Dilatanzvermögen des Sandes bei deviatorischer Beanspruchung
- irreversible Volumenabnahme bei hydrostatischer Kompression
- Work-softening des Sandes bei Überschreiten der deviatorischen Grenzspannung (Punkt P, Bild 3.1)
- Übereinstimmung der Achsen von Dehnungs- und Spannungsinkrement bei niedrigen Spannungen mit Übergang zur Übereinstimmung der Achsen von Dehnungsincrement und Spannung bei hohen Spannungen [94, 95]
- Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von der Ausgangsporenziffer.

Die im Stoffgesetz enthaltenen Stoffparameter werden
- in Abhängigkeit von der Ausgangsdichte des Materials -
aus gewöhnlichen dreiaxialen Druckversuchen (CD-Versuchen)
gewonnen.

Der Boden wird als homogenes isotropes Material betrachtet.

Im folgenden bezeichnen I_1 , I_2 , I_3 die erste, zweite bzw. dritte Invariante des Spannungstensors σ_{ij} ; p_a ist der atmosphärische Druck und σ_3 bedeutet die kleinste Hauptspannung, ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$).

2. Elasto-plastische Spannungs-Dehnungs Beziehung

Bei der Formulierung des elasto-plastischen Gesetzes geht Lade davon aus, daß sich das Gesamtdehnungsinkrement $\Delta \underline{\epsilon}$ in drei Anteile aufspalten läßt, nämlich in die Anteile der

- elastischen $\Delta \underline{\epsilon}^e$
- plastisch-kontraktiven $\Delta \underline{\epsilon}^c$ und
- plastisch-expansiven $\Delta \underline{\epsilon}^p$ Dehnung,

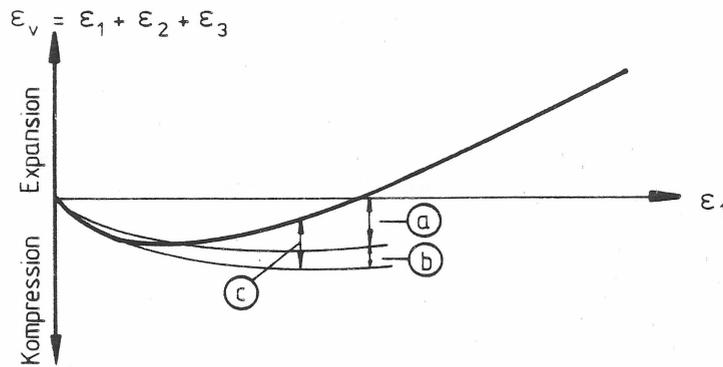
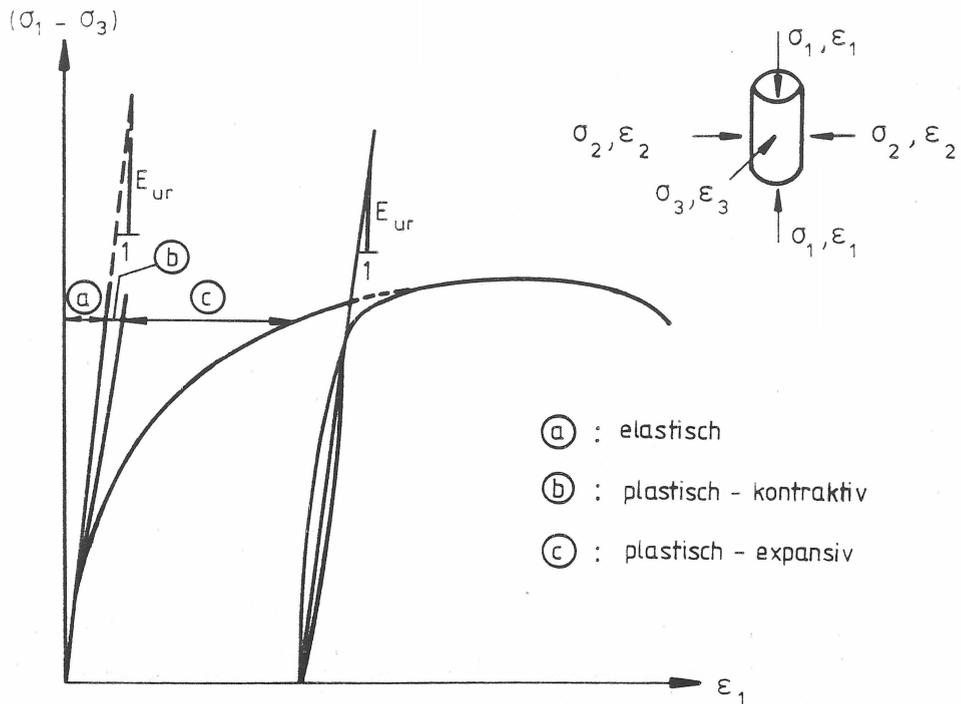
so daß gilt:

$$\Delta \underline{\epsilon} = \Delta \underline{\epsilon}^e + \Delta \underline{\epsilon}^c + \Delta \underline{\epsilon}^p \quad (4.16)$$

Bild 4.5 zeigt schematisch die Anteile der Gesamtdehnung, die als elastisch, plastisch-kontraktiv und -expansiv angesetzt werden.

Man erkennt, daß von Belastungsbeginn an elastische, d.h. reversible und plastische, d.h. irreversible Dehnungen vorhanden sind; die Volumenverformung ist anfangs kontraktiv und kann später expansiv werden (wie in Bild 4.5) oder kontraktiv bleiben; die plastischen Dehnungen sind erst kleiner als die elastischen Dehnungen, aber bei größerer Belastung überwiegen die plastischen Anteile.

Die drei Anteile des Gesamtdehnungsinkrementes werden nacheinander berechnet, die elastischen Anteile nach Hooke, die plastisch-kontraktiven und plastisch-expansiven Anteile mit plastischen Ansätzen, die kappenförmige bzw. kegelförmige Fließflächen beinhalten.



$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_{(a)} + \Delta \epsilon_{(b)} + \Delta \epsilon_{(c)}$$

Bild 4.5: Schematische Darstellung der elastischen, plastisch-kontraktiven und plastisch-expansiven Dehnungsanteile bei einem entwässerten dreiaxialen Kompressionsversuch ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const.}$)

2.1 Elastische Dehnungsanteile

Die elastischen Dehnungsanteile, die bei Entlastung rückgewinnbar sind, werden in üblicher Weise nach dem Hooke'schen Gesetz ermittelt; dabei wird ein Elastizitätsmodul für Belastung und Entlastung benutzt, wie er erstmals von Janbu [96] vorgeschlagen wurde:

$$E_{ur} = K \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (4.17)$$

Die Poisson-Zahl wird gemäß [54, 97, 98] zu 0,2 angenommen.

Die Materialparameter K und n werden aus dreiaxialen Kompressionsversuchen ermittelt.

2.2 Plastisch-kontraktive Dehnungsanteile

Die während hydrostatischer Belastung auftretenden Dehnungen sind z.T. irreversibel, d.h. plastisch, und führen zu bleibender Volumenabnahme. Um dieses Stoffverhalten mechanisch nachzuvollziehen, führt Lade für diesen Spannungsbereich als Fließfläche eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung des Hauptspannungsraumes ein (Bild 4.6). Dies entspricht dem in Bild 3.4 mit der Kurve A-G bzw. A'-G' gegebenen Verfestigungsort.

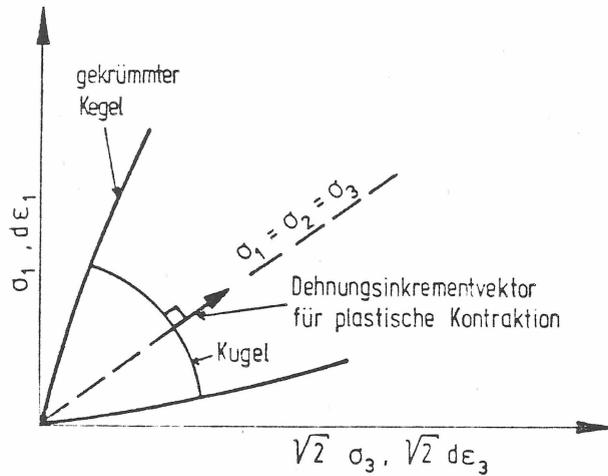


Bild 4.6: Fließflächen für plastische Kontraktion (Kugel) und plastische Expansion (gekrümmter Kegel) in der Triaxialebene

Mit den ersten und zweiten Invarianten I_1 und I_2 des Spannungstensors läßt sich dieser Verfestigungsort angeben zu

$$f_c = I_1^2 + 2I_2 \quad (4.18a)$$

oder, in Hauptspannungen formuliert, zu

$$f_c = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \quad (4.18b)$$

Wenn sich durch eine Laständerung ein größerer f_c - Wert als der momentane einstellt, liegt verfestigendes Materialverhalten mit plastischer Volumenabnahme vor.

Da eine hydrostatische Belastung bei der angenommenen Isotropie des Bodens zu gleichgroßen Dehnungen in allen drei Hauptachsen führt, fällt der Dehnungsinkrementvektor mit der Äquisektrix zusammen und steht somit senkrecht auf der Kugeloberfläche (Bild 4.6). Demzufolge ist das plastische Potential g_c identisch mit der Belastungsfunktion f_c und man erhält als Fließregel - vgl. Gleichung (F.5) in Anhang F -

$$\underline{\Delta \underline{\epsilon}}^c = \Delta \lambda_c \cdot \frac{\partial f_c}{\partial \underline{\sigma}} \quad , \quad (4.19)$$

wobei $\Delta \lambda_c$ ein momentaner Proportionalitätsfaktor ist, der den absoluten Wert des Dehnungsinkrementvektors angibt.

Der Proportionalitätsfaktor $\Delta \lambda_c$ läßt sich mit Hilfe einer experimentell bestimmbaren Beziehung

$$W_c = H_c(f_c) \quad (4.20)$$

- vgl. Gleichung (F.8) in Anhang F - ermitteln, für die Lade aufgrund der Ergebnisse aus hydrostatischen Kompressionsversuchen die funktionale Abhängigkeit

$$W_c = C \cdot p_a \cdot \left(\frac{f_c}{p_a} \right)^p \quad (4.21)$$

erhält mit den Materialkonstanten C und p , die aus hydrostatischen Kompressionsversuchen gewonnen werden.

Mit der plastischen Arbeit $\Delta W_c = \underline{\sigma} \cdot \Delta \underline{\varepsilon}$ bestimmt sich $\Delta \lambda_c$ nach Anhang B zu

$$\Delta \lambda_c = \frac{\Delta W_c}{2f_c} , \quad (4.22)$$

wobei mit Gleichung (4.21)

$$\Delta W_c = C \cdot p \cdot p_a \cdot \left(\frac{p_a^2}{f_c} \right)^{1-p} \cdot \Delta \left(\frac{f_c}{p_a^2} \right) \quad (4.23)$$

Es ist festzustellen, daß kontraktives Fließen nicht zum Versagen, d.h. zum Bruch des Materials führen kann; der Bruch wird ausschließlich durch die kegelförmige Fließfläche des expansiven Fließens kontrolliert.

2.3 Plastisch-expansive Dehnungsanteile

Als Belastungsfunktion für den jeweiligen Beginn des plastisch-expansiven Fließens gibt Lade folgende Beziehung an

$$f_p = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \cdot \left(\frac{I_1}{p_a} \right)^m \quad (4.24)$$

Dies entspricht dem Fließort G-L-D bzw. G'-L'-D' in Bild 3.4.

Im Hauptspannungsraum stellt diese Funktion einen gekrümmten Kegel dar mit der Kegelspitze im Koordinatenursprung (Bild 4.7a). Die Krümmung der Fließfläche steigt mit dem Wert von m ; für $m = 0$ verläuft die Fließfläche geradlinig. Bild 4.7b zeigt Schnitte des Kegels mit der Deviatorebene $I_1 = \text{const}$ für verschiedene Werte I_1/I_3 ; dieser Verlauf gibt die experimentell beobachtete Fließgrenze gut wieder [39, 99].

Bei steigender Beanspruchung dehnt sich der Fließort im Hauptspannungsraum symmetrisch um die Äquisektrix nach außen hin aus, bis letztendlich die Bruchgrenze des Bodens erreicht wird, die durch

$$f_p = \eta_1 \quad (4.25)$$

gegeben ist (Bild 4.7c).

Die Dehnungsinkremente für das plastisch-expansive Fließen werden mit einer nichtassoziierten Fließregel bestimmt, da es sich gezeigt hat, daß die plastischen Dehnungsinkrementvektoren bei sandartigen Materialien nicht normal zur Fließfläche stehen (vgl. Abschnitt 3.2.2).

Lade gibt für das plastische Potential g_p eine ähnliche Formulierung wie für die Belastungsfunktion f_p (siehe Anhang C)

$$g_p = I_1^3 - \left[27 + \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \right] \cdot I_3 \quad ; \quad (4.26)$$

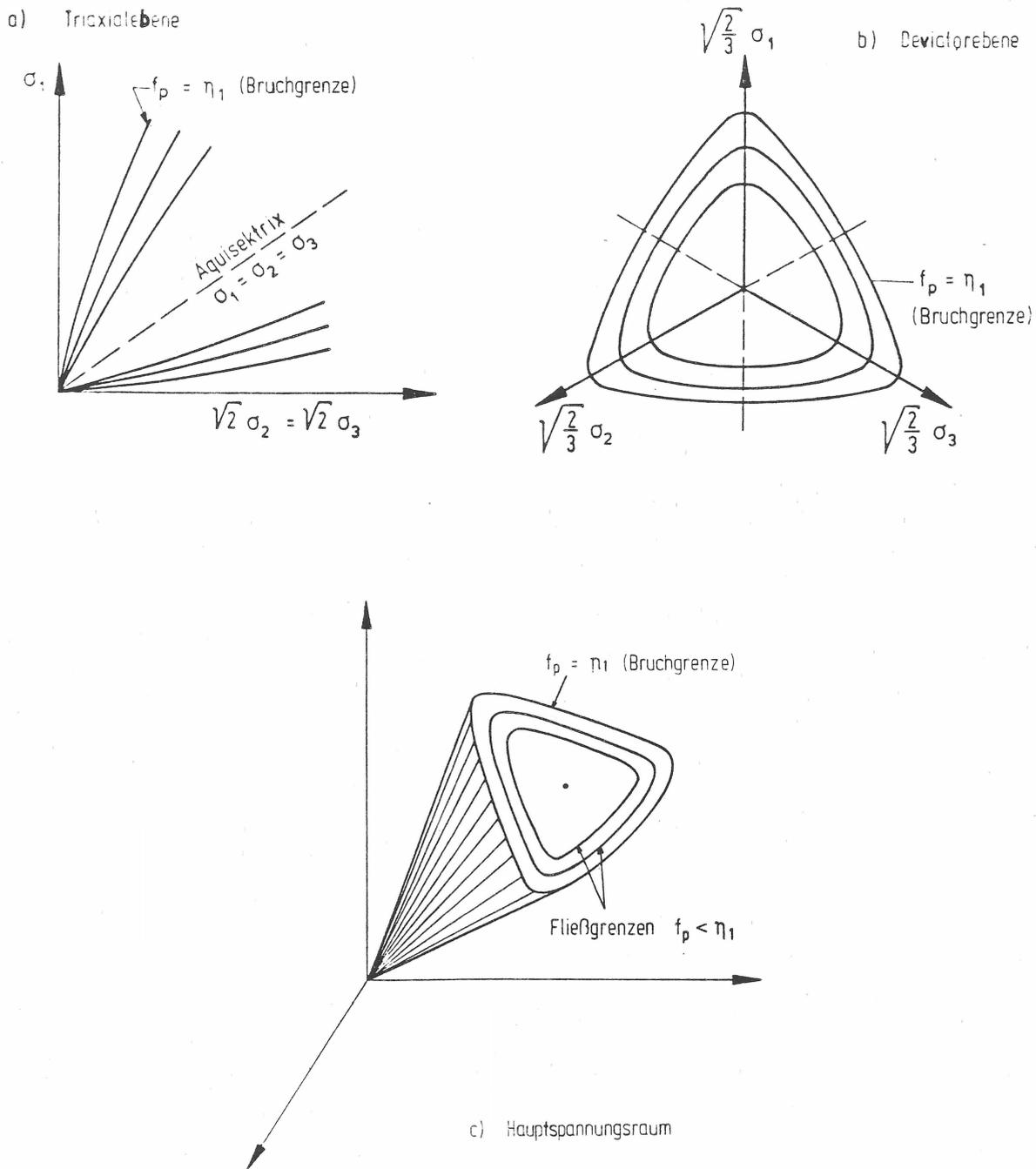


Bild 4.7: Fließ- und Bruchfläche für plastisch-expansives Fließen

dabei ist η_2 eine Funktion von f_p und σ_3 , für die aufgrund von dreiaxialen Kompressionsversuchen die Formulierung

$$\eta_2 = S \cdot f_p + R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_3}{P_a}} + t \quad (4.27)$$

mit den Stoffparametern S , R , t gefunden wurde.

Somit gilt nach Gleichung (F.5) in Anhang F

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^P = \Delta \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.28)$$

und analog zu (4.22)

$$\Delta \lambda_p = \frac{\Delta W_p}{3g_p + m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{P_a}{I_1}\right)^m \cdot I_3} \quad (4.29)$$

nach Anhang B, wobei ΔW_p der Zuwachs der plastischen Arbeit beim plastisch-expansiven Fließen ist, der aus dem isotropen Verfestigungs- und Auflockerungsansatz (isotropic work-hardening und -softening law)

$$W_p = H_p(f_p) \quad (4.30)$$

bestimmt wird - vgl. Gleichung (F.8) in Anhang F .

Aus dreiaxialen Kompressionsversuchen wurde ein Zusammenhang zwischen W_p und f_p gefunden, wie er schematisch in Bild 4.8 dargestellt ist und mathematisch beschrieben werden kann durch

$$f_p = a \cdot \exp(-b \cdot W_p) \cdot \left(\frac{W_p}{P_a}\right)^{1/q}, \quad q > 0; \quad (4.31)$$

dabei sind a , b und q für gegebene σ_3 - Werte konstante Größen.

Nach Bild 4.8 steigt f_p mit zunehmender plastischer Arbeit W_p an, bis bei $f_p = \eta_1$ mit zugehörigem $W_{p,peak}$ ein Bruch auftritt; danach nimmt f_p mit wachsendem W_p ab. Die plastische Arbeit, die benötigt wird, um den Sand bis zum Bruch zu führen, steigt mit wachsender σ_3 -Spannung.

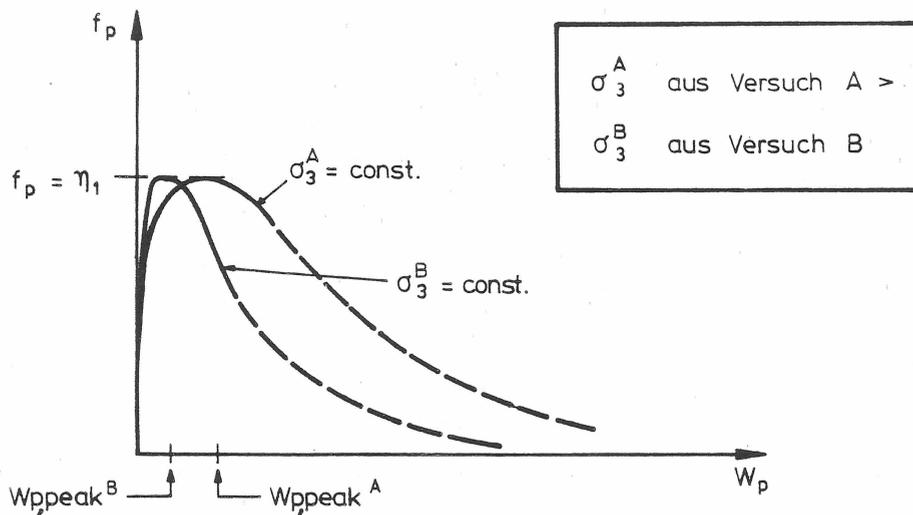


Bild 4.8: Zusammenhang zwischen f_p und W_p

Mit der experimentell begründbaren Abhängigkeit

$$W_{p,peak} = P \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^l \quad (4.32)$$

(P, l : Stoffparameter)

gilt für q , b und a :

$$q = \alpha + \beta \cdot \frac{\sigma_3}{p_a} \quad (4.33)$$

$$b = \frac{1}{q \cdot W_{p, peak}} \quad (4.34)$$

$$a = \eta_1 \cdot \left(\frac{e \cdot p_a}{W_{p, peak}} \right)^{1/q} \quad (4.35)$$

Das zur Bestimmung von $\Delta \lambda_p$ in Gleichung (4.29) benötigte Inkrement der plastischen Arbeit ergibt sich aus Gleichung (4.31) zu

$$\Delta W_p = \frac{1}{f_p} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{q \cdot W_p} - b \right)} \cdot \Delta f_p \quad (4.36)$$

3. Stoffparameter

Die zur Beschreibung des Gesetzes benötigten 14 Stoffparameter werden sämtlich aus Versuchen an gewöhnlichen Dreiaxialgeräten gewonnen; entweder aus hydrostatischen Kompressionsversuchen ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) oder aus gewöhnlichen dreiaxialen Druckversuchen ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$).

Lade [87] gibt diese Parameter für drei verschiedene kohäsionslose Böden (Sacramento River Sand, Crushed Napa Basalt, Painted Rock Material) bei jeweils zwei Ausgangsdichten;

als Beispiel werden in Tafel 1 die Werte für den Sacramento River Sand aufgeführt.

In [88] hat Lade für vierzehn weitere kohäsionslose Böden mit unterschiedlichen Dichten die Werte η_1 und m zur Bestimmung der Fließ- und Bruchgrenze bei plastisch-expansivem Fließen aus veröffentlichten Versuchsergebnissen ermittelt und zusammengestellt.

Alle Stoffparameter sind dimensionslos; die Dimensionen in den Gleichungen von Lade [87] werden - wenn nötig - durch den Druck $p_a = 1$ [kp/cm²] bestimmt.

Porenziffer, e		0,61 (dicht)	0,87 (locker)
elastische Anteile	K	1680	960
	n	0,57	0,57
	v	0,20	0,20
plastisch- kontraktive Anteile	C	0,00023	0,00028
	p	0,86	0,94
plastisch- expansive Anteile	η_1	80	28
	m	0,23	0,093
	R	-2,95	-1,00
	S	0,44	0,43
	t	8,45	0,00
	α	3,00	3,00
	β	-0,060	-0,076
	P	0,12	0,24
	l	1,16	1,25

Tafel 1: Zusammenstellung der Stoffparameter für Sacramento River Sand [87]

4. Kontrolle des Stoffgesetzes

In [87] zeigt Lade mit vielen Testbeispielen, daß mit dem aufgezeigten Stoffgesetz das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von kohäsionslosen Sanden bei beliebigen dreidimensionalen Spannungsabläufen richtig und vollständig wiedergegeben werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zur Kontrolle des eingesetzten Stoffgesetzes und des aufgestellten Finite Element Programms Problemstellungen aus den Gebieten der Bodenmechanik und des Grundbaus rechnerisch nachvollzogen; dabei konnte die Gültigkeit des Stoffgesetzes nach Lade ebenfalls bestätigt werden (vgl. Abschnitt 4.2).

4.1.3.2 Inversion des Stoffgesetzes von Lade [87] in Matrizenform

Für das in Abschnitt 4.1.3.1 dargestellte Stoffgesetz von Lade wird eine Beziehung in der Form

$$\underline{\Delta \sigma} = [D] \cdot \underline{\Delta \epsilon} \quad (4.37)$$

angestrebt.

Durch Substitution der Gleichungen (4.19), (4.28) für die plastisch-kontraktiven bzw. -expansiven Dehnungsanteile in Gleichung (4.16) und bei Beachtung der Hooke'schen Beziehung

$$\underline{\Delta \epsilon}^e = [D^e]^{-1} \cdot \underline{\Delta \sigma} \quad (4.38)$$

(mit $[D^e]^{-1}$ nach Anhang D1) für die elastischen Dehnungsanteile erhält man

$$\underline{\Delta \epsilon} = [D^e]^{-1} \cdot \underline{\Delta \sigma} + \Delta \lambda_c \cdot \underline{a} + \Delta \lambda_p \cdot \underline{b} \quad (4.39)$$

mit den Vektoren

$$\underline{a} = \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \quad (\text{Anhang D2}) \quad (4.40)$$

und

$$\underline{b} = \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \quad (\text{Anhang D3}) \quad (4.41)$$

Plastisch-kontraktives bzw. -expansives Fließen tritt ein, wenn die Fließbedingungen

$$F_c(\underline{\sigma}, W_c) = 0 \quad (4.42)$$

und

$$F_p(\underline{\sigma}, W_p) = 0, \quad (4.43)$$

die mit Gleichung (F.11) des Anhangs F aus den Gleichungen (4.18) und (4.21) bzw. (4.24) und (4.31) folgen, erfüllt sind.

Der Zuwachs dieser Fließbedingungen ergibt sich zu

$$\Delta F_c = \left\{ \frac{\partial F_c}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \cdot \Delta \underline{\sigma} + \frac{\partial F_c}{\partial W_c} \cdot \Delta W_c = 0 \quad (4.44)$$

$$\Delta F_p = \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\}^T \cdot \Delta \underline{\sigma} + \frac{\partial F_p}{\partial W_p} \cdot \Delta W_p = 0 \quad (4.45)$$

Mit den Parametern

$$A_c = \frac{1}{\Delta \lambda_c} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial W_c} \cdot \Delta W_c \quad (\text{Anhang D6}) \quad (4.46)$$

$$A_p = \frac{1}{\Delta \lambda_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \Delta W_p \quad (\text{Anhang D6}) \quad (4.47)$$

(unter Berücksichtigung von Gl. (F.7) des Anhangs F)

und dem Vektor

$$\underline{c} = \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \quad (\text{Anhang D4}) \quad (4.48)$$

erhält man daraus

$$\Delta F_c = \underline{a}^T \cdot \Delta \underline{\sigma} + A_c \cdot \Delta \lambda_c = 0 \quad (4.49)$$

$$\Delta F_p = \underline{c}^T \cdot \Delta \underline{\sigma} + A_p \cdot \Delta \lambda_p = 0 \quad (4.50)$$

Aus den Gleichungen (4.39), (4.49), (4.50), die zu der Matrizenform

$$\begin{Bmatrix} \Delta \underline{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D^*]^{-1} & \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{a}^T & A_c & 0 \\ \underline{c}^T & 0 & A_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \underline{\sigma} \\ \Delta \lambda_c \\ \Delta \lambda_p \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

zusammengefaßt werden können, werden die Proportionalitätskonstanten $\Delta \lambda_c$ und $\Delta \lambda_p$ eliminiert (siehe Anhang D7).

Dies führt zu der angestrebten Beziehung

$$\underline{\Delta \sigma} = [D^{eCP}] \cdot \underline{\Delta \epsilon} \quad (4.52)$$

zur Berechnung von Spannungsinkrementen aus vorgegebenen Dehnungsinkrementen mit der elasto-plastischen Stoffmatrix (vgl. Anhang D7)

$$[D^{eCP}(\underline{\sigma})] = \left[[D^e] - \frac{[D^e] \cdot \underline{a} \cdot (\underline{a}^T - \underline{\alpha}_p^T) \cdot [D^e]}{A_c + \underline{a}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a} - \underline{\alpha}_p^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a}} - \frac{[D^e] \cdot \underline{b} \cdot (\underline{c}^T - \underline{\alpha}_c^T) \cdot [D^e]}{A_p + \underline{c}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b} - \underline{\alpha}_c^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b}} \right] . \quad (4.53)$$

Derartige allgemeine Matrizenformulierungen für Plastizitätsprobleme wurden erstmals von Yamada et.al. [100] und Zienkiewicz et.al. [93] vorgelegt.

Die Stoffmatrix (4.53) kann direkt zum Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrizen gem. Gl. (4.11) verwendet werden. Dabei ist zu beachten, daß wegen der nichtassozierten Fließregel für das plastisch-expansive Fließen die Stoffmatrix $[D^{eCP}]$ unsymmetrisch ist, wodurch die Elementsteifigkeitsmatrizen und somit auch das ganze Gleichungssystem unsymmetrisch werden, was bei der Berechnung im Vergleich zu elastischen Problemen einen erheblichen Speicher- und Rechenzeitbedarf erfordert.

4.1.4 Lastaufbringung bei den Siloberechnungen

4.1.4.1 Simulation des Füllvorgangs

Um in dem Berechnungsmodell den kontinuierlichen Vorgang des Füllens eines Silos mit dem betreffenden Silogut zu erfassen, wird als Näherung angenommen, daß das Silogut schichtenweise eingebracht wird: jeweils neue Schichten von einer finiten Höhe h , einer Ausgangsporenziffer e verbunden mit einer davon abhängigen Dichte ρ werden auf das bereits eingelagerte alte Silogut aufgebracht, so daß dieses durch das Eigengewicht des neu eingelagerten Materials erneut belastet wird (Bild 4.9).

Während des Füllvorgangs wird durch die von oben her aufprallenden Silogutpartikel auf das bereits eingelagerte Material ein dynamischer Einfluß ausgeübt, der im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt wird.

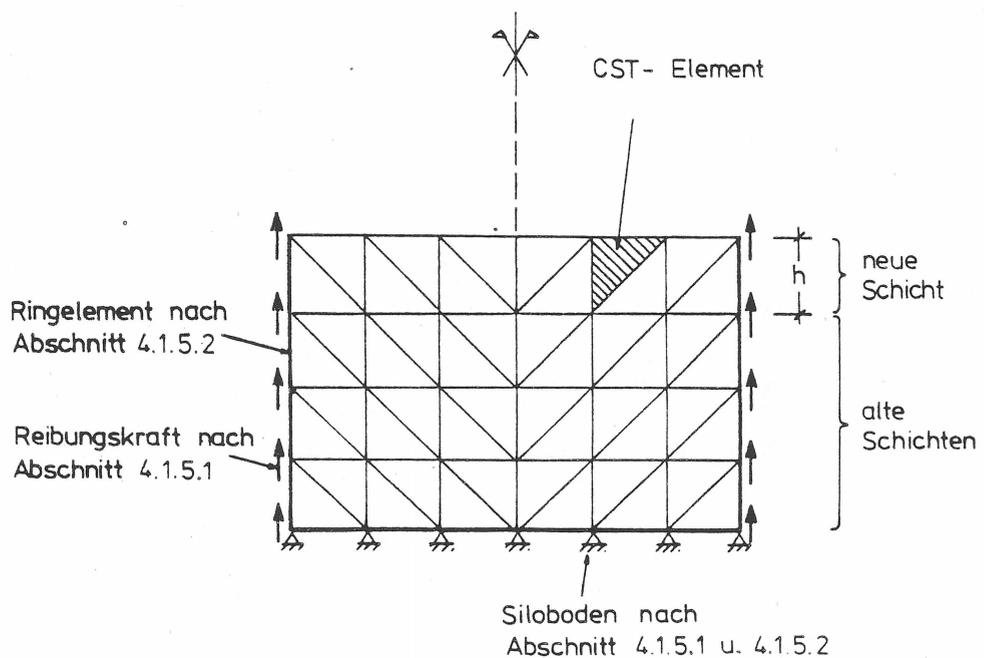


Bild 4.9: Prinzipielle Darstellung der Diskretisierung und der Randbedingungen beim Füllvorgang

Als Silogut wird trockener, kohäsionsloser Sand gewählt - im speziellen wird hier der Sacramento River Sand (S.R.S.) betrachtet, für den die Stoffparameter in Abhängigkeit von den Ausgangsporenziffern $e_d = 0,61$ (dichte Lagerung) und $e_l = 0,87$ (lockere Lagerung) in Tafel 1 gegeben sind.

Der S.R.S. besteht nach [101] aus Feldspat und Quarz mit einer Körnung von $0,297 - 0,149$ [mm], so daß dieses Material als Mittel-Feinsand einzustufen ist.

Nach [102] beträgt für den S.R.S. die Dichte der Bodenkörner $\rho = 2,68$ [g/cm³], so daß sich die Dichte des trockenen Bodens mit der Beziehung

$$\rho_t = \frac{1}{1+e} \rho \quad (4.54)$$

bei dichter Lagerung ($e_d = 0,61$) zu

$$\rho_t = 1,66 \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

und bei lockerer Lagerung ($e_l = 0,87$) zu

$$\rho_t = 1,43 \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

ergibt.

Die Einhüllenden der aus dreiaxialen Druckversuchen ermittelten Mohr'schen-Spannungskreise sind für den S.R.S. in Bild 4.10 dargestellt. Es ist deutlich zu sehen, daß der Reibungswinkel φ keine Materialkonstante ist, sondern von der Ausgangsporenziffer e und dem Normaldruck σ abhängt.

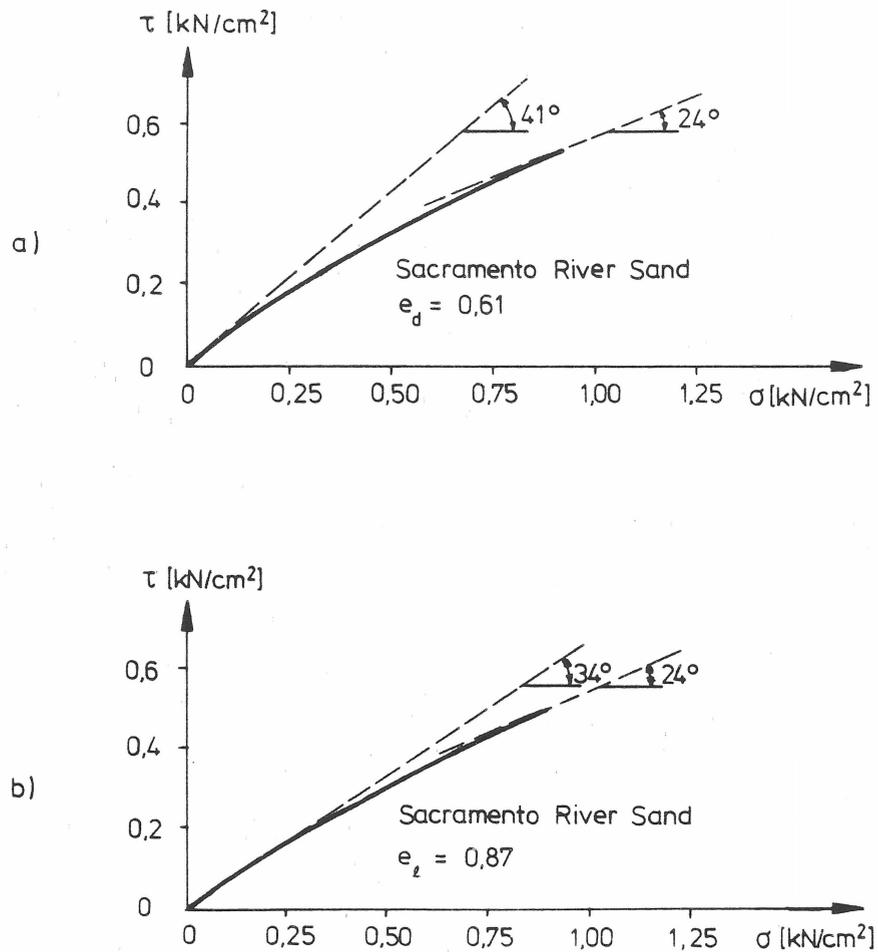


Bild 4.10: Einhüllende der Mohr'schen Spannungskreise für
a) dicht gelagerten
b) locker gelagerten
Sacramento River Sand, aus [101]

4.1.4.2 Simulation des Entleerungsvorgangs

Aus dem Füllvorgang resultieren am Boden des Silos horizontale und vertikale Druckspannungen, die beim Öffnen des Silos am Rand des Öffnungsbereiches auf Null abgebaut werden, so daß das Silogut ausfließen kann.

Mit dem Berechnungsmodell wird dieser Vorgang des Entleerungsbeginns durch die Vorgabe von geeigneten Randbedingungen simuliert; wegen des gewählten Stoffgesetzes ist auch hier eine inkrementelle Vorgehensweise erforderlich:

Die horizontalen und vertikalen Auflagerkräfte A_i aus dem Füllzustand im Öffnungsbereich werden durch n -maliges Aufbringen von Kräften $(-A_i/n)$ auf Null abgebaut; für die Randknoten im Öffnungsbereich wird dabei die freie Verschieblichkeit in vertikaler und horizontaler Richtung zugelassen. Die aus dem i -ten Belastungsinkrement folgenden Zuwächse der Zustandsgrößen (Verschiebungen, Spannungen etc.) werden den jeweiligen zu Beginn des Inkrements vorliegenden Gesamtwerten überlagert; für das erste Belastungsinkrement sind dies die Werte aus dem Füllzustand.

Da das in dieser Arbeit verwendete Stoffgesetz lediglich das Stoffverhalten des Sandes im Druckoktanten des Hauptspannungsraums beschreibt, kann der Ausfließvorgang rechnerisch nur solange nachvollzogen werden, bis die aus dem Füllvorgang resultierenden Druckspannungen im Öffnungsbereich abgebaut sind und das Silogut ins Fließen kommt (vgl. Abschnitt 5.2).

4.1.5 Einfluß der Behälterwand

4.1.5.1 Wandreibung

Der innere Spannungszustand in einem Silo wird stark durch den Einfluß der Reibung des Silogutes an den begrenzenden Seitenwänden beeinflusst. Dieser Effekt wird in dem Berechnungsmodell durch eine Kräfte-
randbedingung erfaßt, mit der die Reibungskräfte in Abhängigkeit vom aktuellen Spannungszustand fortlaufend aktualisiert werden:

In jeder Silogutschicht werden die Reibungskräfte für das Inkrement (i) aus dem Spannungszustand am Ende des Inkrements (i-1) mit Hilfe des Coulomb'schen Gesetzes für trockene Reibung von festen Körpern (vgl. Abschnitt 3.1.2) bestimmt, wobei konstante Wandreibungskoeffizienten μ_F und μ_E für die Berechnung des Füll- bzw. Entleerungsvorgangs verwendet werden.

Der Rückgriff auf das Coulomb'sche Gesetz ist ein Notbehelf, der durch mangelnde Kenntnisse über wirklichkeitsnähere Wandreibungsgesetze für körnige Materialien begründet ist.

Für den Bereich des Behälterbodens wird angenommen, daß infolge des hohen Vertikaldrucks die Reibungskräfte derart groß sind, daß sich das Silogut horizontal nicht verschieben kann.

4.1.5.2 Wandsteifigkeit

Um den Einfluß der horizontalen Wandverformungen zu erfassen, werden die Behälterwände durch elastische Ringelemente abgebildet.

Die Steifigkeitsmatrix für ein derartiges Ringelement wird aus den üblichen Beziehungen an kreisförmig gekrümmten, dünnwandigen Tragelementen mit vernachlässigbarer Biegesteifigkeit unter gleichbleibender radialer Belastung hergeleitet.

Aus der Beziehung

$$\Delta r = \frac{N \cdot r}{E \cdot A} \quad (4.55)$$

für eine Änderung des Kreishalbmessers r infolge der gleichbleibenden radialen Belastung mit

N : Ringzugkraft

E : Elastizitätsmodul des Ringes

A : Querschnittsfläche des Ringes mit $A = t \cdot h$,
wobei $t \ll r$

bestimmt sich die Steifigkeitsmatrix für ein Ringelement nach Bild 4.11 zu

$$\underline{K} = \frac{E \cdot t \cdot h}{2r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

mit dem dazugehörigen Verschiebungsvektor

$$\underline{u}^T = \{ u_1, v_1, u_2, v_2 \} \quad (4.57)$$

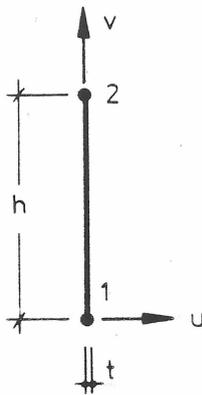


Bild 4.11: Querschnitt eines Ringelementes

Der Behälterboden wird als unendlich starr angesehen; in Verbindung mit der Annahme über die Reibungskräfte (vgl. Abschnitt 4.1.5.1) führt dies zu horizontal und vertikal unverschieblichen Auflagerbedingungen nach Bild 4.9.

4.1.6 Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität und der Bruch- und Zugbedingung des Silogutes

Zur Erfassung der physikalischen Nichtlinearität sowie der Bruch- bzw. Zugbedingung des Stoffgesetzes von Lade [87] wird in dem Berechnungsmodell das in Abschnitt 4.1.2 dargelegte "initial stress"-Verfahren verwendet.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie der beim Iterationsablauf benötigte Lastvektor - Ungleichgewichtslast - der rechten Seite des Gleichungssystems (4.14) ermittelt wird.

a) Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität

Die physikalische Nichtlinearität wird deutlich durch die Gleichung (4.53) für die Stoffmatrix $[D^{eCP}]$, die in Abhängigkeit vom gesuchten Spannungszustand $\underline{\sigma}$ angegeben ist.

Die inkrementelle Vorgehensweise führt aufgrund der zu Beginn des Inkrements vorzugebenden Steifigkeitsmatrix zu Spannungszuständen, die mit dem Stoffgesetz unverträglich sind - vgl. Bild 4.12 für den eindimensionalen Fall.

Der Spannungszustand des Punktes P erfüllt zwar das Gleichgewicht, verletzt jedoch das Stoffgesetz, das durch den zu ϵ_P gehörigen Spannungszustand des Punktes \bar{P} richtig wiedergegeben wird.

Die Spannungsdifferenz $\Delta \underline{\sigma}$ wird mit dem "initial stress"-Verfahren umgelagert.

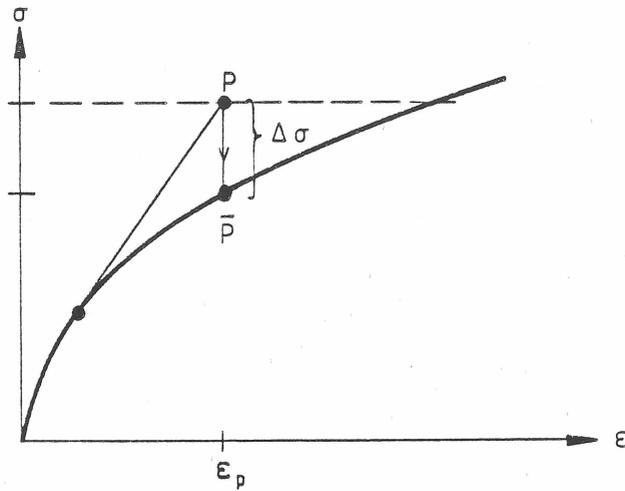


Bild 4.12: Verletzung des Stoffgesetzes infolge vorgegebener Steifigkeit

b) Berücksichtigung der Bruchgrenze

Mit der Gleichung

$$f_p = \eta_1 \quad (4.25)$$

ist die absolute Bruchgrenze des Sandes gegeben; wird durch eine inkrementelle Belastung von Punkt Q (vgl. Bild 4.13) aus ein Spannungszustand erreicht, der wie Punkt P diese Bruchbedingung verletzt, indem er außerhalb der "Bruchbirne" liegt, so ist dieser unzulässig und muß umgelagert werden. Dazu wird in der vorliegenden Arbeit folgender Weg gewählt:

Der erreichte hydrostatische Spannungszustand S_h des Punktes P wird beibehalten, während der deviatorische Anteil S_d von P nach \bar{P} iterativ reduziert wird, bis

letztendlich ein zulässiger Spannungszustand erreicht ist, der das Gleichgewicht und die Bruchbedingung erfüllt (vgl. Bild 4.13).

Zwar könnte durch einen wesentlich aufwendigeren, "genaueren" Iterationsablauf, bei dem auch der hydrostatische Spannungsanteil S_h geändert wird, die "exakte" Lösung R (vgl. Bild 4.13) gefunden werden; da jedoch der Ausgangsspannungszustand Q und - wegen der inkrementellen Lastaufbringung - auch der erreichte Spannungszustand P sehr dicht beieinander an der Bruchgrenze liegen, bleibt der durch die hier gewählte vereinfachende Vorgehensweise begangene Fehler, der mit der Spannungsdifferenz zwischen den Punkten R und \bar{P} wiedergegeben wird, sehr gering.

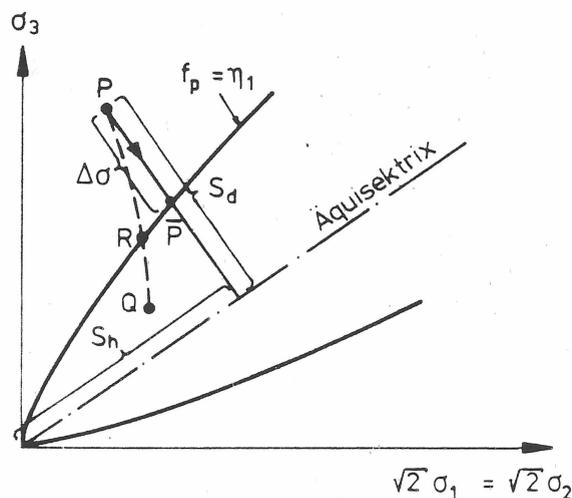


Bild 4.13: Umlagerung bei Verletzung der Bruchbedingung (Der Abstand zwischen Q und P ist stark vergrößert wiedergegeben)

c) Berücksichtigung der Zuggrenze

Da das Stoffgesetz von Lade [87] für kohäsionslosen Sand nur im Druckoktanten des Hauptspannungsraums gültig ist, sind Spannungszustände mit Hauptzugspannungskomponenten unzulässig und müssen umgelagert werden.

Es wird die folgende Vorgehensweise gewählt:

Ein Spannungszustand, wie mit Punkt P in Bild 4.14 dargestellt, wird umgelagert, indem die Hauptzugspannungskomponente eliminiert wird (\rightarrow Punkt Q in der $\sigma_2 - \sigma_3$ -Ebene); da dieser Punkt Q die Bruchbedingung Gl. (4.25) verletzt, müssen auch die anderen Hauptspannungskomponenten modifiziert werden, so daß der neue Spannungszustand mit Punkt \bar{P} im Ursprung des Hauptspannungsraums zu liegen kommt.

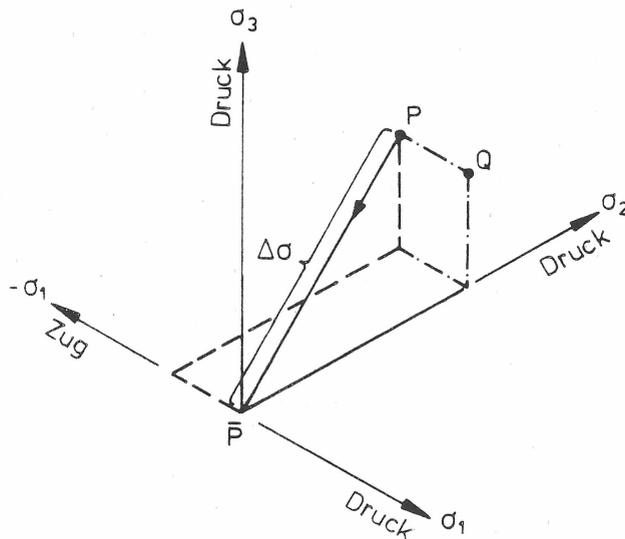


Bild 4.14: Umlagerung bei Verletzung der Zugbedingung

Auch in diesem Fall ist diese Vorgehensweise dadurch begründet, daß der Ausgangsspannungszustand und der nach der inkrementellen Belastung erreichte Spannungszustand wegen der gewählten inkrementellen Lastaufbringung sehr dicht beieinander liegen - in diesem Fall nahe am Ursprung.

In den Bildern 4.12 - 4.14 sind Spannungszustände, die zwar das Gleichgewicht erfüllen, aber gewisse Nebenbedingungen (Stoffgesetz, Bruch- oder Zuggrenze) verletzen, durch den Punkt P dargestellt; aufgrund der Nebenbedingung wird ein Spannungspunkt \bar{P} ermittelt, der die Nebenbedingung erfüllt, aber das Gleichgewicht verletzt.

Die dabei auftretenden Spannungsdifferenzen $\Delta \underline{\sigma}$ werden mit dem in Abschnitt 4.1.2 dargestellten 'initial-stress'-Verfahren auf iterativem Wege so umgelagert, daß sowohl das Gleichgewicht als auch die Nebenbedingungen erfüllt sind.

Mit der Differenz $\Delta \underline{\sigma}$ zwischen dem "elastischen" und "richtigen" Spannungszuwachs, die auch als 'initial-stress' bezeichnet wird, erhält man den für den Iterationsablauf benötigten neuen Lastvektor auf der rechten Seite des Gleichungssystems (4.14) zu

$$\Delta \underline{f} = \int_V \underline{B}^T \cdot \Delta \underline{\sigma} \, dV \quad (4.58)$$

4.1.7 Programmablauf

Zur Berechnung und Auswertung von konkreten Problemstellungen wurden zwei Rechenprogramme sowie ein Auswerteprogramm für die zeichnerische Darstellung der Spannungsfelder durch Höhenlinien erstellt; alle Programme sind in FORTRAN IV codiert. Die Erprobung und Anwendung der Rechenprogramme erfolgte auf der abteilungseigenen PRIME 400, die des Auswerteprogramms auf der Rechenanlage IBM 370/158 der Universität Dortmund.

Der Ablauf des Programmes 1 für die Berechnung des Füllzustandes eines Silos ist in dem Strukturdiagramm Bild 4.15 dargestellt.

Das zweite Programm übernimmt die zwischengespeicherten Daten des Programms 1 (Ausgangszustand) und führt die Berechnung des Entleerungsvorgangs durch, vgl. Strukturdiagramm Bild 4.16.

Die Lösung des nichtsymmetrischen Gleichungssystems erfolgt nach der Eliminationsmethode von Gauss in zwei voneinander unabhängigen Rechenschritten, vgl. Unterprogramme (1) und (2) in den Strukturdiagrammen. Diese Zerlegung hat den Vorteil, daß die Steifigkeitsmatrix K auf der "linken Seite" des Gleichungssystems (4.14) und die aus ihr berechnete Dreiecksmatrix bei der Korrektur z.B. infolge der physikalischen Nichtlinearität, die mit den Ungleichgewichtslasten nach Gl. (4.58) zu einer neuen "rechten Seite" des Gleichungssystems führt, nicht verändert werden.

Diese rechenzeitsparende Vorgehensweise ist als "Iteration über die rechte Seite des Gleichungssystems" bekannt.

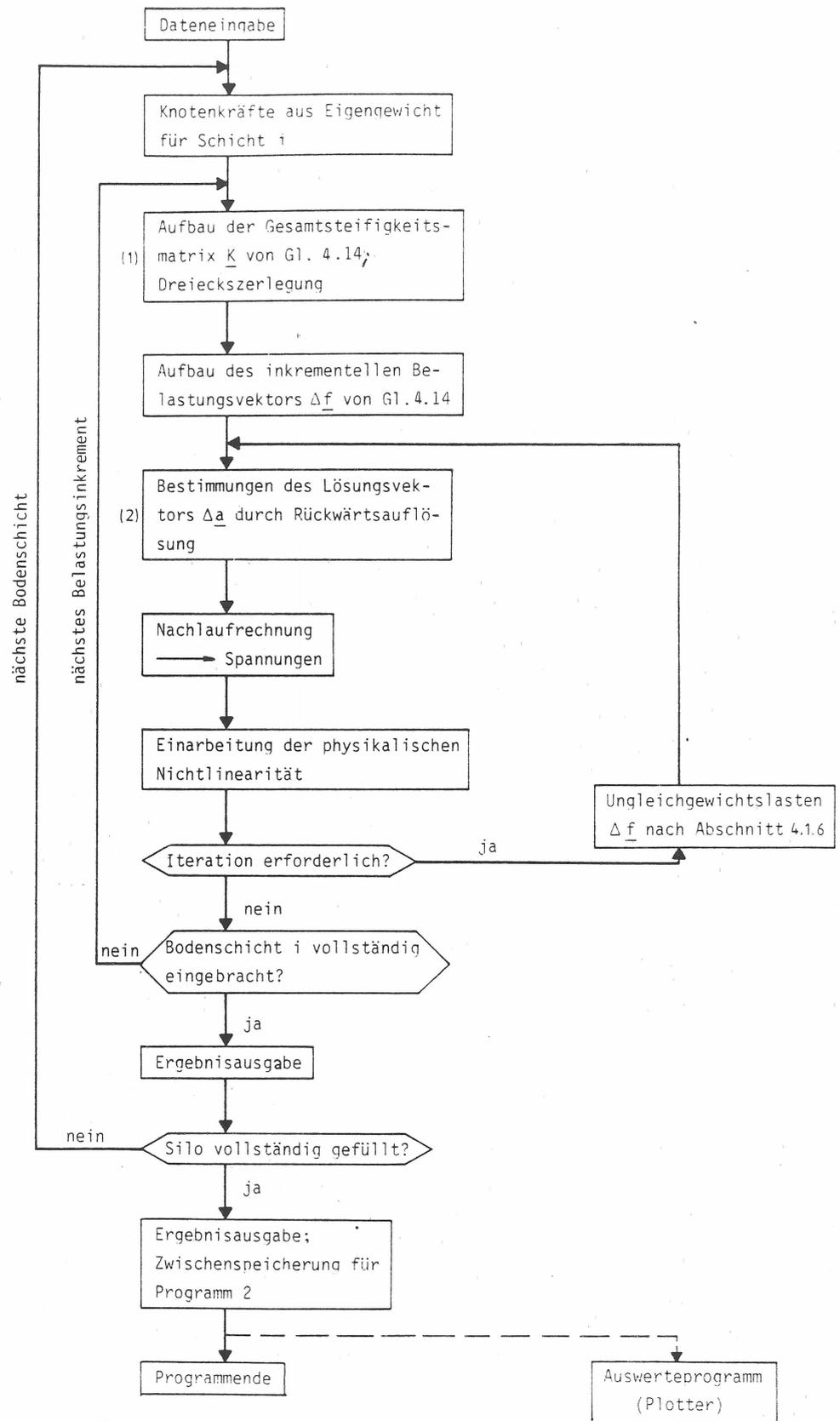


Bild 4.15: Strukturdiagramm:
Programm 1 für die Berechnung des Füllzustandes
eines Silos

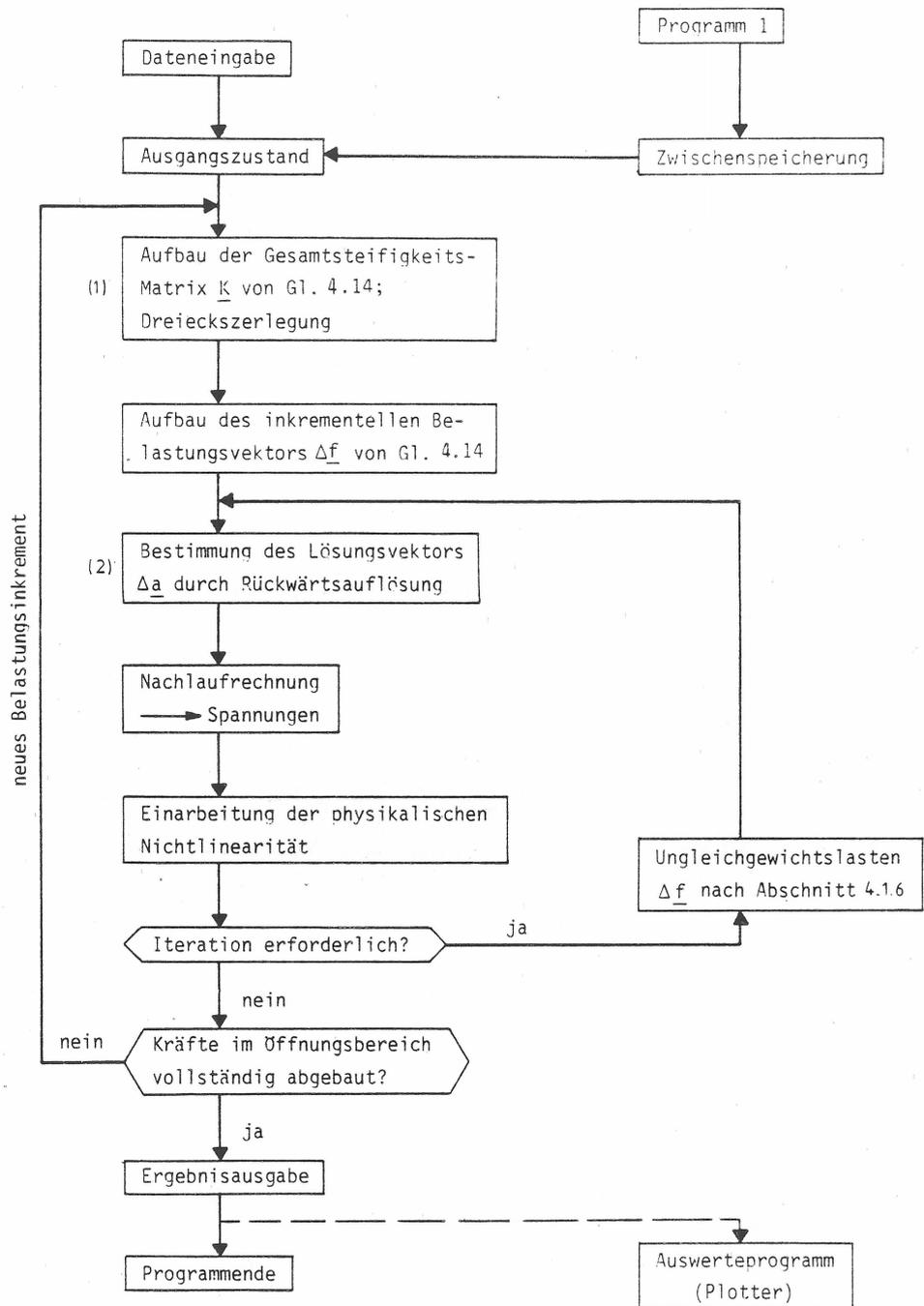


Bild 4.16: Strukturdiagramm:
Programm 2 für die Berechnung des Entleerungs-
vorganges eines Silos

4.2 Numerische Überprüfung des Berechnungsmodells

4.2.1 Bodenmechanik

Zur Überprüfung des verwendeten Stoffgesetzes und der entwickelten FEM-Formulierung werden Versuche aus der Bodenmechanik rechnerisch nachvollzogen.

Aus der Fülle der bei dreiaxialer Belastung möglichen Spannungswege werden hier die beiden Belastungswege herausgegriffen, die in der bodenmechanischen Versuchstechnik am gebräuchlichsten sind und für die somit abgesicherte Versuchsergebnisse vorliegen (vgl. Bild 4.17):

- Weg ① gibt den Belastungsverlauf für einen konventionellen dreiaxialen Druckversuch wieder, bei dem die axiale Belastung σ_1 auf die Bodenprobe gesteigert wird, während der seitliche Druck σ_2 bzw. σ_3 konstant bleibt:

$$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const.}$$

- Mit Weg ② sind proportionale Belastungswege angedeutet, bei denen das Verhältnis der axialen Spannung σ_1 zur seitlichen Spannung σ_2 bzw. σ_3 während des Belastungsvorganges konstant bleibt:

$$\sigma_1 / \sigma_3 = \text{const.}$$

Das diskretisierte Modell für die Berechnungen ist zusammen mit den Randbedingungen in Bild 4.18 dargestellt; die Abmessungen beziehen sich auf die Angaben in [101].

Als Bodenmaterial wird locker bzw. dicht gelagerter Sacramento River Sand mit den Stoffparametern nach Tafel 1 gewählt.

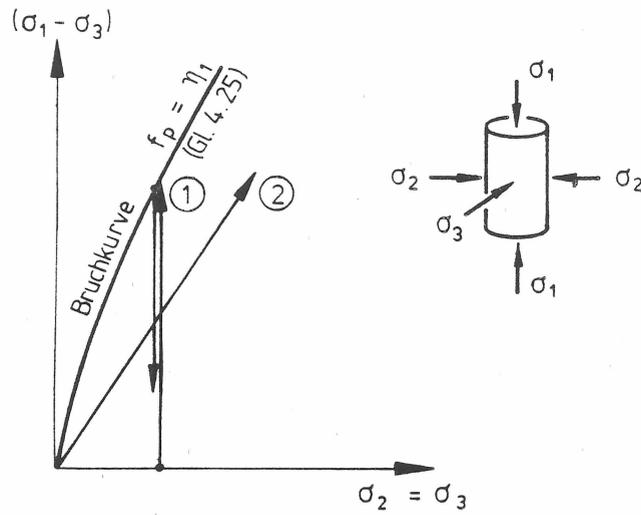


Bild 4.17: Spannungswege beim Triaxialversuch ① und bei proportionaler Belastung ②

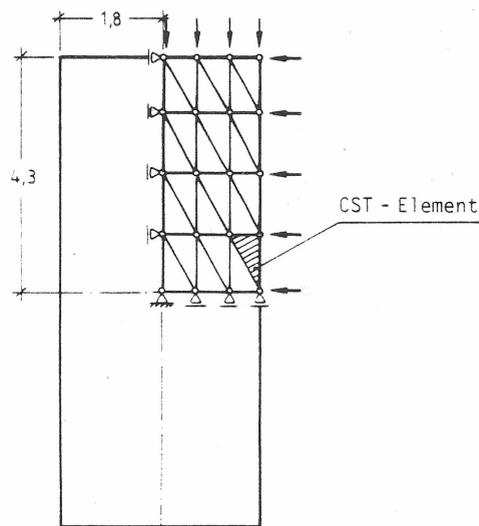


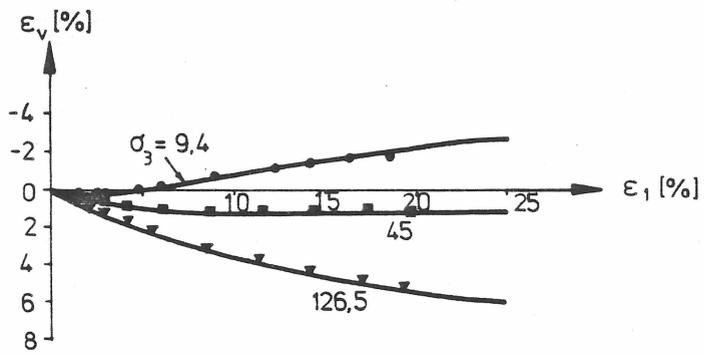
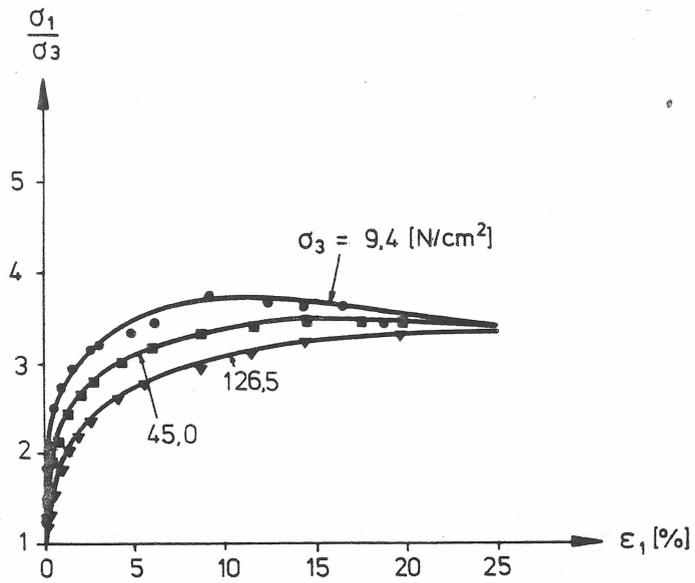
Bild 4.18: Diskretisierung und Randbedingungen der Bodenprobe; Maße in [cm].

4.2.1.1 Entwässerte dreiaxiale Kompressionsversuche

Die Ergebnisse der eigenen FEM-Berechnungen für entwässerte dreiaxiale Kompressionsversuche sind den versuchsmäßig ermittelten Werten aus [101] für die gleichen Probenabmessungen und Ausgangsporenziffern in den Bildern 4.19 und 4.20 gegenübergestellt.

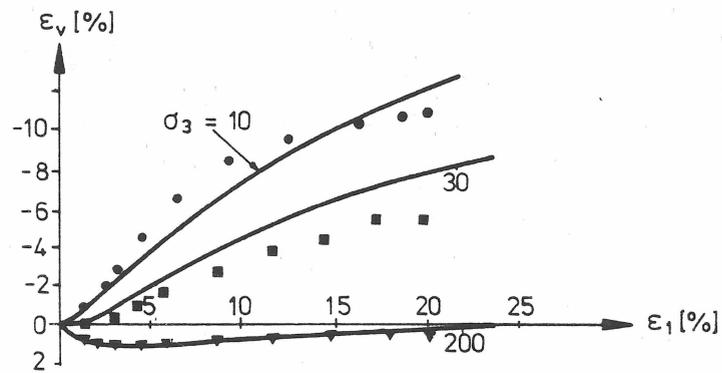
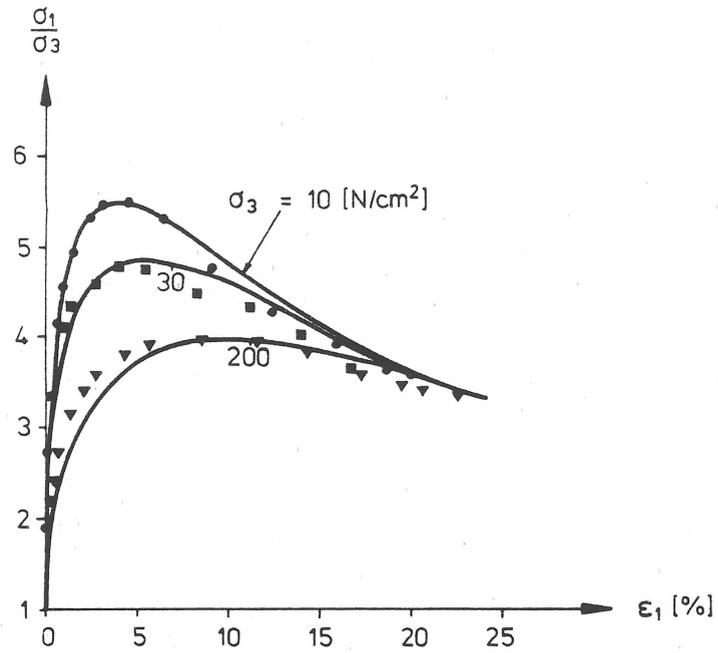
Die berechneten Kurvenverläufe stimmen qualitativ und quantitativ gut mit den Werten aus den Versuchen überein. Der Abfall des Spannungsverhältnisses σ_1/σ_3 mit wachsender seitlicher Spannung σ_3 wird richtig erfaßt, ebenso der Einfluß von σ_3 auf die Volumendehnung ε_v : Expansion bei kleinem σ_3 bzw. Kompression bei großem σ_3 . Auch der Kurvenlauf nach Überschreiten der σ_1/σ_3 - Spitzenwerte ($\hat{=}$ softening) wird richtig wiedergegeben.

Aus der Gegenüberstellung der Bilder 4.19 und 4.20 ist deutlich der Einfluß der Ausgangsporenziffer - lockere bzw. dichte Lagerung - auf das Verhalten der Bodenprobe bei der Belastung zu ersehen, vgl. auch Bild 3.1.



Sacramento River Sand ; $e = 0,87$
— : FEM ; $\bullet, \blacksquare, \blacktriangledown$: Versuche [101]

Bild 4.19: Entwässertes dreiaxialer Kompressionsversuch;
lockere Lagerung



Sacramento River Sand; $e = 0,61$
—: FEM ; •, ■, ▼: Versuche [101]

Bild 4.20: Entwässertes dreiaxialer Kompressionsversuch;
dichte Lagerung

4.2.1.2 Proportionale Belastungswege

Die Ergebnisse der eigenen FEM-Berechnungen bei proportionalen Belastungswegen mit Sacramento River Sand sind für die konstanten Verhältnismerte $\sigma_1/\sigma_3 = 1,0$ und $\sigma_1/\sigma_3 = 2,8$ für locker und dicht gelagerten Sand in den Bildern 4.21 und 4.22 dargestellt.

Zum Vergleich sind versuchsmäßig ermittelte Werte [87] eingetragen.

Die Kurvenverläufe in den σ_3/ε_1 und σ_3/ε_v - Diagrammen passen für beide Ausgangsporenziffern gut zu den aus Versuchen ermittelten Werten.

Es fällt auf, daß die Volumenzusammendrückung ε_v bei dichter Lagerung vom Spannungsverhältnis σ_1/σ_3 nahezu unabhängig ist, während bei lockerer Lagerung eine Steigerung von σ_1/σ_3 zu einer Erhöhung der Zusammendrückung führt.

Auch diese Tendenz wird mit den rechnerisch ermittelten Kurvenverläufen richtig wiedergegeben.

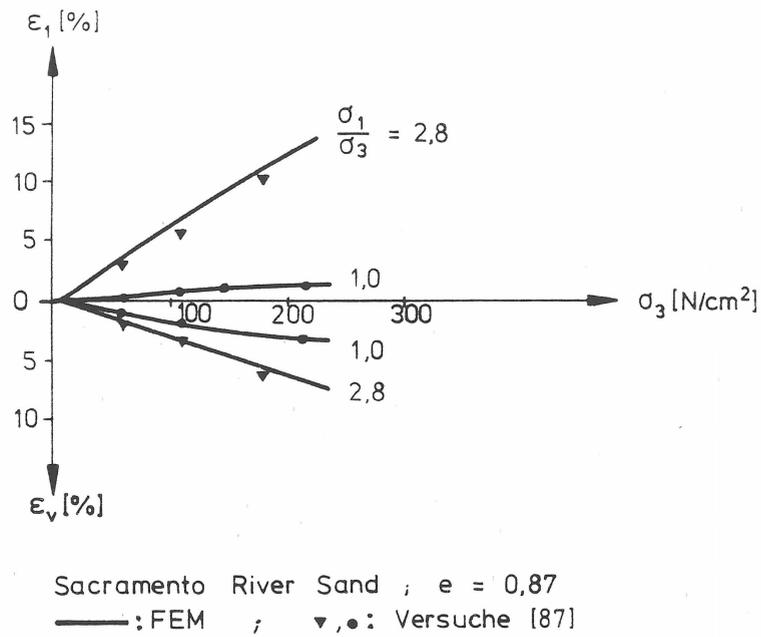


Bild 4.21: Proportionale Belastungswege bei locker gelagertem Sacramento River Sand

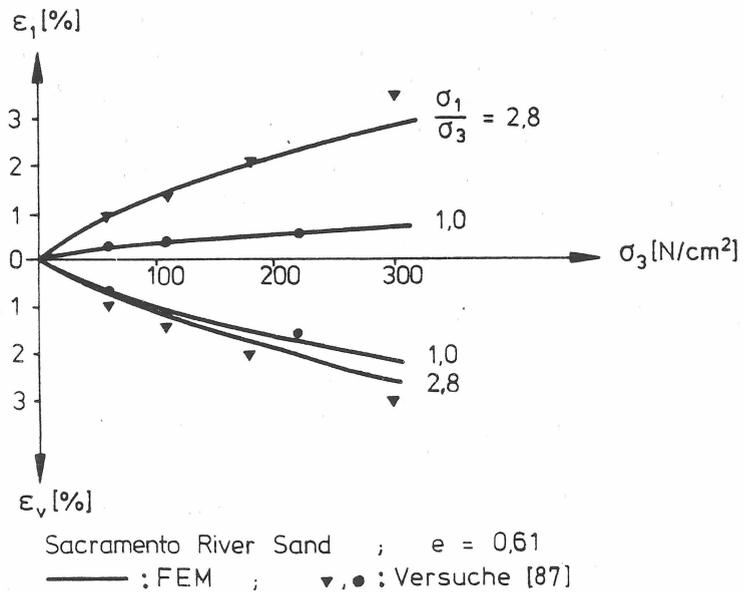


Bild 4.22: Proportionale Belastungswege bei dicht gelagertem Sacramento River Sand

4.2.2 Grundbau - Grundbruchberechnung eines schlaffen Kreisfundamentes

Ein Stoffgesetz als mechanisch-mathematische Verallgemeinerung von Beobachtungen an Laborversuchen mit speziellen Randbedingungen kann erst bei der Berechnung realer, komplexer Problemstellungen und im Vergleich mit dazugehörigen Versuchsergebnissen seine allgemeine Eignung und Verwendbarkeit beweisen.

Dazu wird im folgenden das Stoffgesetz von Lade [87] zur Berechnung der Grundbruchlast eines schlaffen ($EI = 0$) Kreisfundamentes auf homogenem Halbraum eingesetzt. Das Fundament wird monoton mittig belastet; eine Schubspannungsübertragung in der Sohlfuge soll nicht möglich sein.

Für den Halbraum gilt das Stoffgesetz von Lade mit den Stoffparametern für lockere und dichte Lagerung nach Tafel 1.

Bild 4.23 zeigt die Diskretisierung und die Randbedingungen dieses Beispiels; die Unterteilung des Rasters mit den CST-Elementen ist dort unten rechts angedeutet. Das System besitzt 512 Elemente und 289 Knoten.

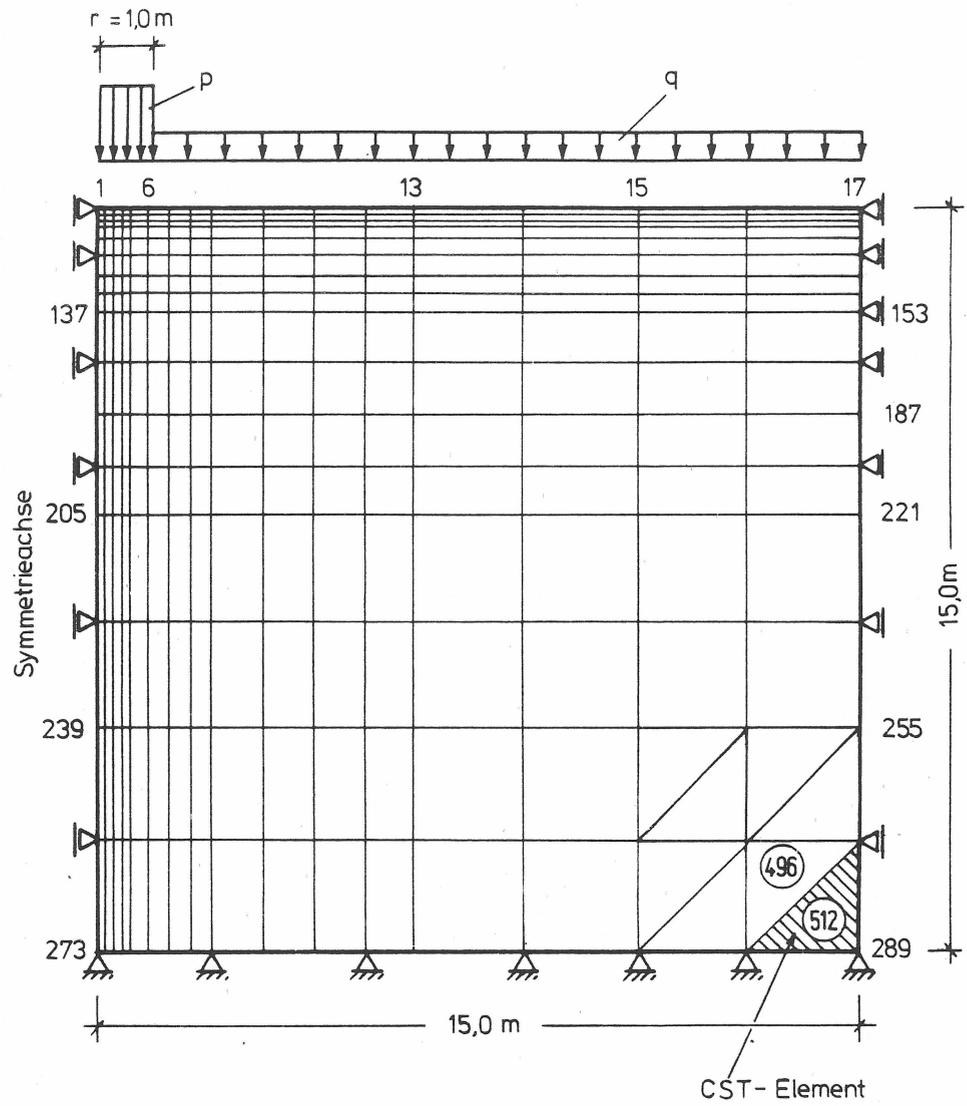


Bild 4.23: Diskretisierung des Halbraums, Randbedingungen und Belastung

In Anlehnung an [104] werden die Breite und Höhe des Elementnetzes mit jeweils 15,0 [m] bei einem Radius des Fundamentes von 1,0 [m] relativ groß gewählt, um den Einfluß der festen Ränder so weit wie möglich auszuschalten.

- Seitlich vom Kreisfundament wird eine Auflast $q = 28,6/33,2$ [kN/m²] aufgebracht, womit für $\gamma = 14,3/16,6$ [kN/m³] bei lockerer/dichter Lagerung (vgl. Abschnitt 4.1.4.1) eine Einbindetiefe von 2,0 [m] simuliert wird.

Der Berechnungsablauf gliedert sich in zwei Abschnitte:

- Zunächst wird die Konsolidierung des Bodens infolge seines Eigengewichtes und der Auflast q berechnet (primärer Spannungszustand). Unter dieser Belastung stellen sich Horizontalspannungen ein, die mit denen des aktiven Erddrucks übereinstimmen; die Erddruckbeiwerte aus der FEM-Berechnung von $K_{ah} = 0,28/0,23$ bei lockerer/dichter Lagerung entsprechen denen der aktiven Coulomb'schen Erddrucktheorie bei Beachtung der inneren Reibungswinkel nach Bild 4.10.
- Anschließend wird das Fundament mit Belastungsinkrementen von jeweils $\Delta p = 4,0$ [N/cm²] bei dichter und von $\Delta p = 2,5$ [N/cm²] bei lockerer Lagerung des Halbraumes bis zum Grundbruch belastet.

Als Ergebnis dieser Grundbruchberechnungen sind im Bild 4.24 die vertikalen Verschiebungen des Fundamentmittelpunktes in Abhängigkeit von der Fundamentbelastung für den locker und dicht gelagerten Halbraum aufgetragen.

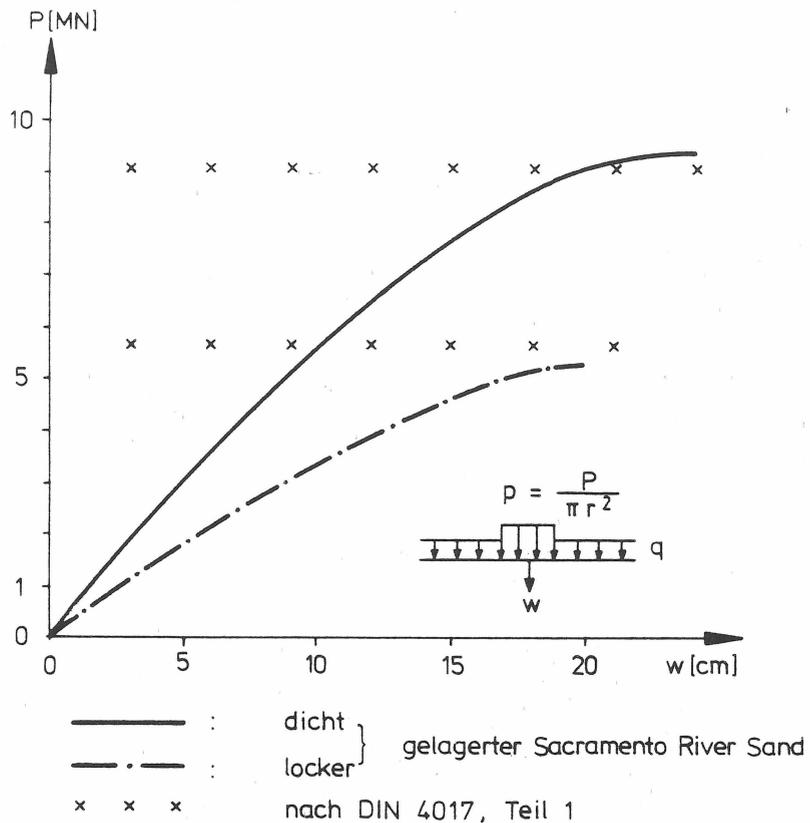


Bild 4.24: Lastsetzungskurve aus Grundbruchberechnung

Diese Darstellung zeigt, daß der für Grundbruchberechnungen charakteristische Verlauf der Lastsetzungskurve mit seiner Annäherung an eine horizontale Tangente mit dem FEM-Programm für beide Lagerungsdichten richtig ermittelt wird. Die überproportionale Zunahme der Setzung mit der Laststeigerung zeigt deutlich den Einfluß der Nichtlinearität des verwendeten Stoffgesetzes.

Ebenfalls richtig erfaßt wird das Vermögen des dicht gelagerten Sandes, höhere Fundamentbelastungen zu ertragen als locker gelagerter Sand.

Ein Vergleich zwischen der Größe der Versagenslast aus der FEM-Berechnung und aus einer Berechnung nach DIN 4017, Teil 1, "Grundbruchberechnungen", Ausgabe August 1979, unter Beachtung von Bild 4.10 für die inneren Reibungswinkel, zeigt für beide Lagerungsdichten eine bemerkenswert gute Übereinstimmung.

Dies soll jedoch nicht so gedeutet werden, als ob hiermit das absolut richtige Ergebnis vorliegen würde, da eine Berechnung nach DIN 4017, Teil 1 wesentlich durch den Winkel φ der inneren Reibung als Eingangsgröße für die Berechnung beeinflusst wird.

Ohne Vergleich mit geeigneten Versuchsergebnissen ist keine abschließende Aussage hinsichtlich der absoluten Richtigkeit der Ergebnisse möglich, jedoch ist zu beachten, daß die Ergebnisse nach der FEM-Berechnung zumindest in der Nähe der tatsächlichen Grundbruchlast liegen dürften.

Als Résumé dieser Grundbruchberechnungen kann festgestellt werden, daß die Verwendung des anhand einer kleinen Bodenprobe ermittelten Stoffgesetzes von Lade [87] zur Berechnung von Problemstellungen mit wesentlich größeren Geometrien zu realistischen Ergebnissen führt, bei der die zu beobachtenden phänomenologischen Erscheinungen im Boden richtig wiedergegeben werden, so daß der Einsatz des entwickelten FEM-Programms zur Berechnung der Druckverhältnisse in Silozellen gerechtfertigt erscheint.

5. Darstellung und Diskussion der Siloberechnungen

Die im Abschnitt 4.2 vorgelegten numerischen Untersuchungen zu Problemstellungen aus der Bodenmechanik und dem Grundbau haben aufgezeigt, daß die im kohäsionslosen Sand zu beobachtenden Erscheinungen (Spannungsverhältnisse, etc.) mit dem im Abschnitt 4.1 entwickelten FEM-Berechnungsmodell wirklichkeitsnah wiedergegeben werden können.

Dieses Berechnungsmodell wird im folgenden zur Bestimmung von Druckverhältnissen in rotationssymmetrischen Silozellen beim Füllen und während des Entleerungsbeginns eingesetzt.

Zuerst wird auf die Berechnung der Druckverhältnisse während des Füll- und Lagerungszustandes eingegangen:

- Im Abschnitt 5.1.1 werden die für die weiteren Berechnungen relevanten Erkenntnisse einer Voruntersuchung dargelegt.

Um aufzuzeigen, daß mit dem entwickelten FEM-Berechnungsmodell Problemstellungen aus dem Gebiet der Silostatik realistisch bearbeitet werden können, schließt sich eine vergleichende Gegenüberstellung der aus einer eigenen FEM-Berechnung ermittelten Spannungsverhältnisse in Silozellen mit anderen, experimentell gewonnenen Daten an.

- Es folgt der Abschnitt 5.1.3 mit einer Untersuchung über den Einfluß verschiedener Parameter auf den inneren Spannungszustand im Schüttgut.
- Auf der Grundlage dieser Erkenntnisse werden dann im Abschnitt 5.1.4 die eigenen numerischen Ergebnisse mit den Janssen-Formeln und der DIN 1055, Bl. 6, Ausgabe Nov. 1964, verglichen.

Im Abschnitt 5.2 wird auf die Berechnung der Druckverhältnisse in Silozellen beim Beginn des Entleerens eingegangen.

5.1 Füllzustand

5.1.1 Voruntersuchung

Vor der eigentlichen Berechnungs- und Auswertephase wurde eine vergleichende Untersuchung durchgeführt mit dem Ziel, den Einfluß

- der Diskretisierung des Silos (Elementanzahl) und
- der Anzahl der einzufüllenden Schichten (Schichtenhöhe "h", vgl. Bild 4.9)

auf die Ergebnisse aufzuzeigen.

Für die anschließenden weiteren Berechnungen ergeben sich daraus die folgenden Erkenntnisse:

- Diskretisierung:

Die weiteren Berechnungen werden an dem in Bild 5.1 dargestellten Elementnetz mit 199 Elementen und 126 Knoten durchgeführt.

Zwar zeigten alle Berechnungen, daß die Druckverhältnisse des Füllzustandes bereits mit einem wesentlich groberen Elementraster qualitativ gut beschrieben werden können - siehe als typisches Beispiel Bild 5.2 für den Horizontaldruck auf eine Silowand -, jedoch werden auch die Berechnungen für den Füllzustand an dem o.a. feinen Elementraster durchgeführt, da der Füllzustand die Ausgangsbasis für die Berechnung des Entleerungsvorgangs bildet - vgl. Strukturdiagramm Bild 4.16 -, bei dem wegen der zu erwartenden großen Änderun-

gen der Spannungsgrößen und -orientierungen der Bereich um den Auslauf herum entsprechend fein diskretisiert werden muß, vgl. Abschnitt 4.1.4.2 und 5.2.

Die Strecken a, b bzw. c, d in Bild 5.1 können der jeweiligen Silogeometrie, z.B. der Größe der Auslauföffnung, etc. beliebig angepaßt werden.

- Schichtenhöhe "h":

Vergleichende Berechnungen zeigen, daß die Anzahl der einzufüllenden Silogutschichten bzw. die Schichtenhöhe "h" keinen nennenswerten Einfluß auf die Größe und Verteilung der Verformungs- und Spannungszustände im Silogut hat, vgl. als Beispiel Bild 5.3:

Nach allen Berechnungen lag der Horizontaldruck auf die Seitenwände beim schichtenweisen Füllen maximal 2 % über den Werten aus dem Füllen des gesamten Silos mit einer Schicht.

Da der Einfluß des schichtenweisen Füllens auf die inneren Spannungsverhältnisse derart gering ist, kann der gesamte Berechnungsablauf wesentlich vereinfacht werden, indem im weiteren so vorgegangen wird, daß der Silo auf einmal mit einer Schicht gefüllt wird, die Schichtenhöhe "h" also gleich der gesamten Silohöhe "H" ist.

Im übrigen gelten die Angaben des Abschnittes 4.1.

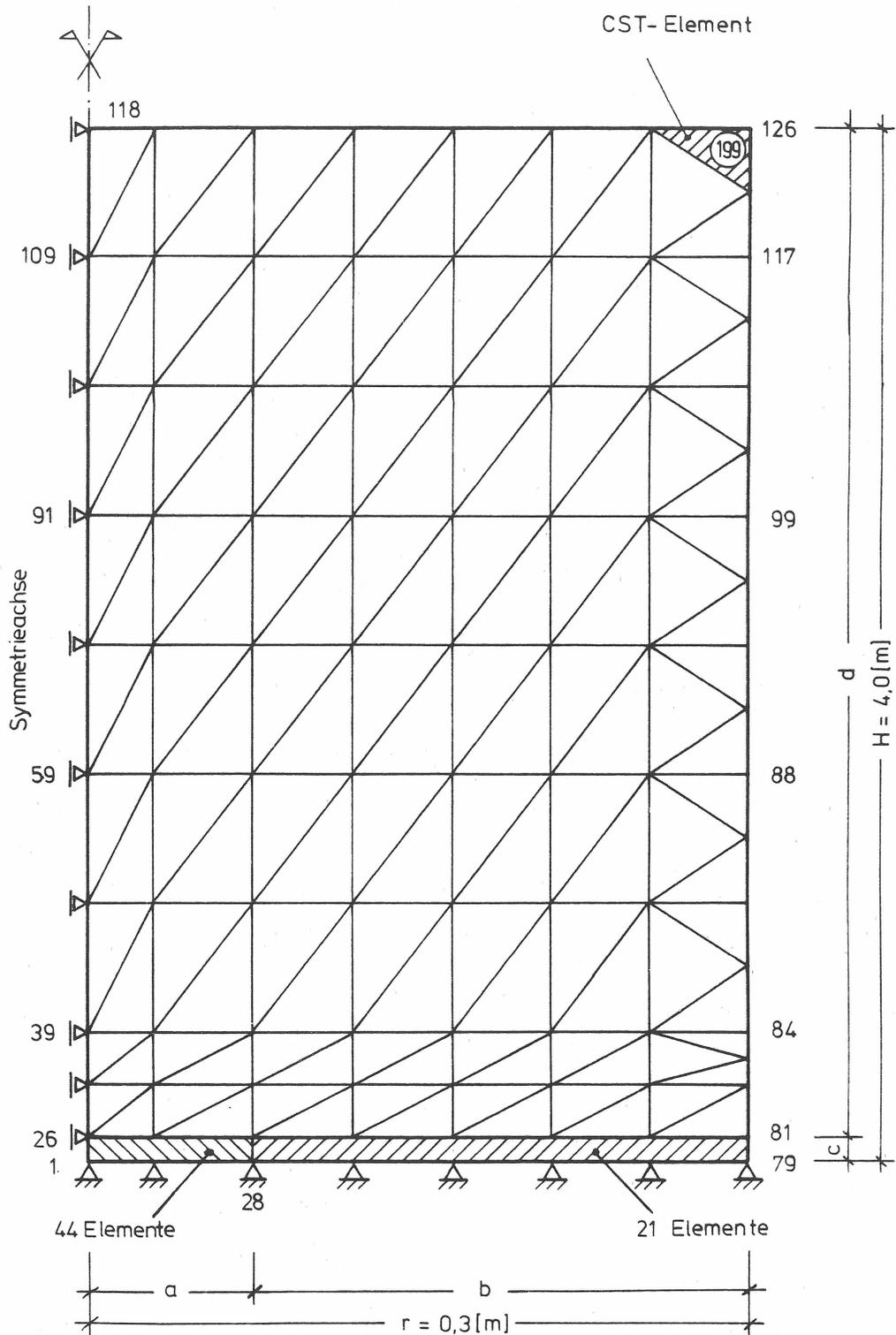


Bild 5.1: Elementnetz für die Silodruckberechnungen

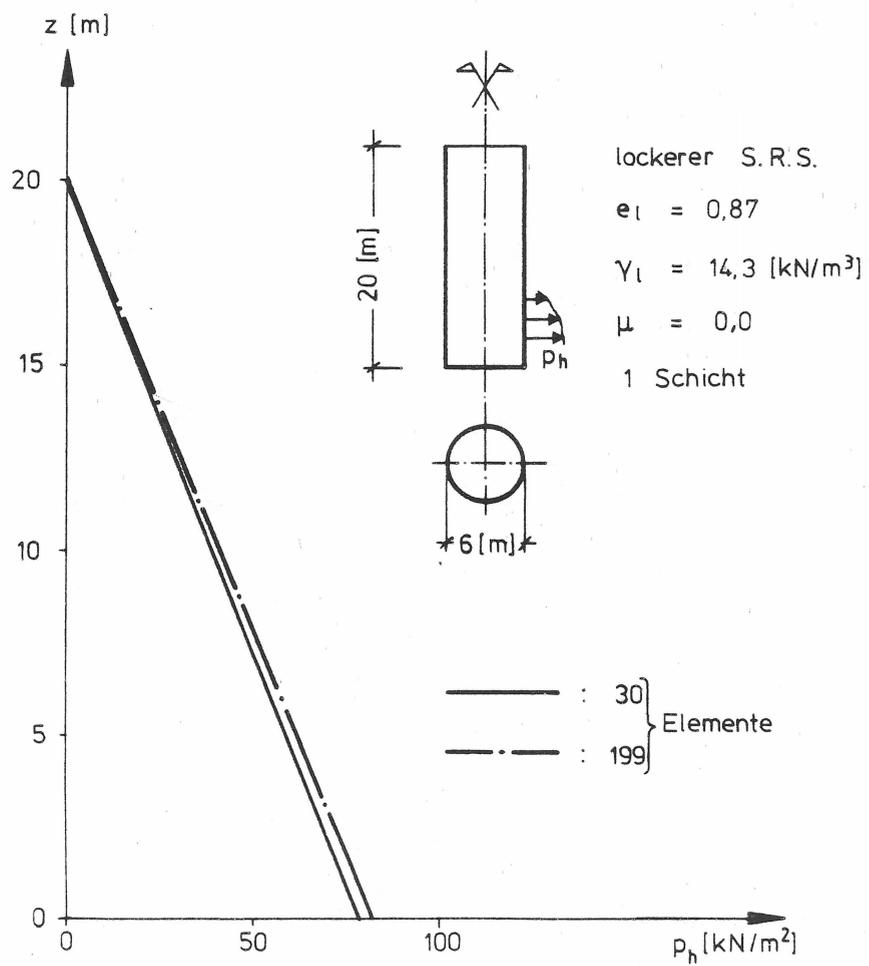


Bild 5.2: Einfluß der Elementanzahl auf den Horizontaldruck p_h an der Silowand

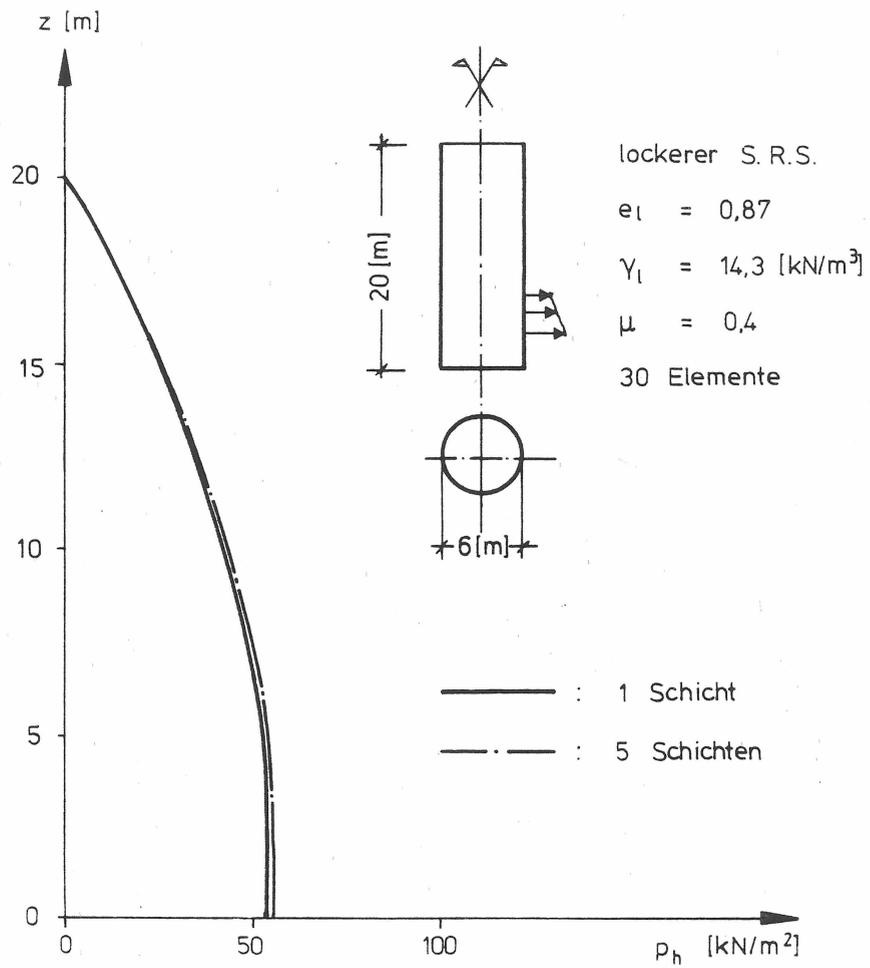


Bild 5.3: Einfluß der Schichtenanzahl auf den Horizontaldruck p_h an der Silowand

5.1.2 Vergleich eigener numerischer Ergebnisse mit experimentell ermittelten Werten

Durch umfangreiche Druckmessungen an zylindrischen Modellsilos kommt Frese [105] zu Angaben über Größe und Verlauf des horizontalen Fülldruckes auf die begrenzenden Silowände.

Als Füllmaterial wird Quarzsand mit einer Körnung von 5 - 3 mm (= Feinkies) und einer Wichte $\gamma = 14,51 \text{ [kN/m}^3\text{]}$ bei lockerer Lagerung verwendet. Der Wandreibungsbeiwert dieses Füllgutes wird von Frese zu $\mu = 0,474$ angegeben.

Diese experimentell ermittelten Seitendrucke bieten sich für einen Vergleich mit den numerischen Ergebnissen einer eigenen FEM-Berechnung an, da zum einen die Parameter des Stoffgesetzes von Lade [87] für einen locker gelagerten Quarzsand bekannt sind - vgl. Tafel 1 mit den Angaben über den S.R.S. - und zum anderen auch die Wichten γ des von Frese verwendeten Füllgutes und des S.R.S. für den hier vorliegenden Fall der lockeren Lagerung praktisch identisch sind: γ (Frese) = $14,51 \text{ [kN/m}^3\text{]}$;
 γ (S.R.S.) = $14,3 \text{ [kN/m}^3\text{]}$.

Zwar ist zu beachten, daß sich die Parameter der Tafel 1 auf einen mittleren bis feinen Quarzsand beziehen, während bei Frese mit einem feinen Quarzkies gearbeitet wird, jedoch darf für diese beiden Materialien ein stoffgesetzlich ähnliches Verhalten erwartet werden.

Verlauf und Größe des horizontalen Wanddruckes aus der eigenen FEM-Berechnung sind in Bild 5.4 den experimentell ermittelten Werten von Frese [105] gegenübergestellt:

Das von vielen Verfassern - vgl. z.B. bei [14, 106] - durch Versuche und erstmals von Janssen [1] auch theoretisch gefundene Ergebnis, daß die Drücke mit zunehmender Silotiefe einem Grenzwert zustreben, findet mit den Resultaten des hier entwickelten numerischen Berechnungsverfahrens seine Bestätigung.

Nach Bild 5.4 stimmen die rechnerisch ermittelten Horizontaldrücke sowohl im Verlauf als auch in der Größe gut mit den gemessenen Werten überein.

Der von Frese [105] angegebene Verlauf einer "möglichen Druckzustandslinie" mit der ausgeprägten Schwingung um die "Mittelwertkurve" konnte - zumal in der oberen Hälfte des Silos - in dieser Deutlichkeit nicht festgestellt werden; lediglich im unteren Bereich des Silos zeigt die Druckkurve leichtere Schwingungen und in Bodennähe einen Abfall des Horizontaldrucks, der durch die Bodenreibung bedingt ist - vgl. dazu Abschnitt 5.1.3.1.

Der rechnerisch ermittelte Verlauf des vertikalen Bodendruckes ist in Bild 5.5 dargestellt:

Der mittlere Bodendruck ergibt sich daraus zu

$$p_{vm} = 20,1 \text{ [kN/m}^2\text{]},$$

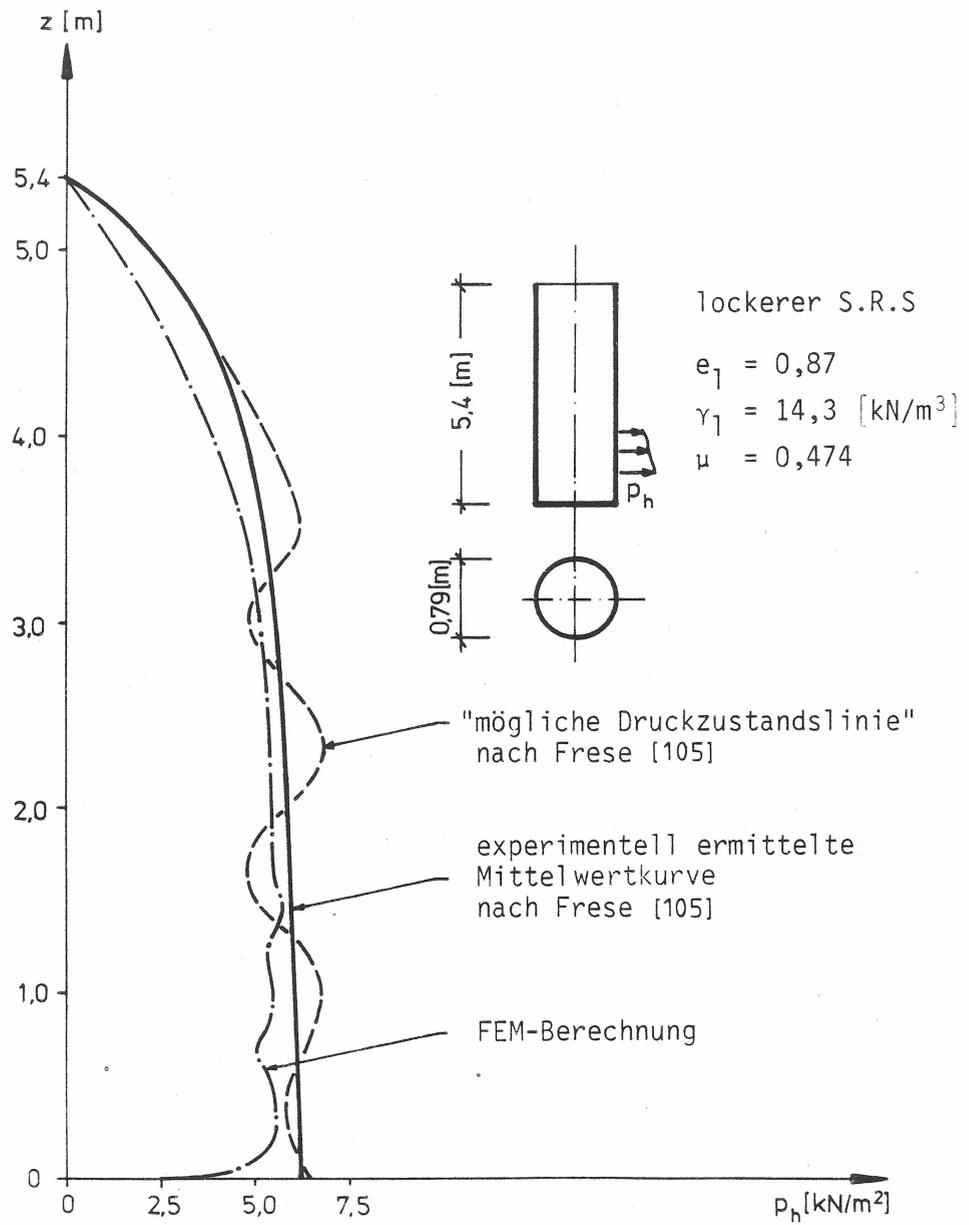


Bild 5.4: Horizontaldruck p_h nach Frese [105] und nach eigener FEM-Berechnung

während Frese [105] mit der experimentell bestimmten "Mittelwertkurve" nach Bild 5.4 über die Gleichgewichtsbeziehung

$$p_{vm}(z) = \gamma \cdot z - \frac{U}{A} \int_0^z p_w dz$$

zu dem geringeren mittleren Bodendruck

$$p_{vm} = 14,5 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

kommt.

Diese Abweichung wird verständlich, wenn man die Horizontaldruckverläufe in Bild 5.4 vergleicht:

Da sich der Druck p_h aus der FEM-Berechnung - vor allem im Bereich der "Schwingungen" - etwas kleiner als bei Frese [105] einstellt, führt dies wegen der festen Kopplung $\mu = p_w/p_h$ zu geringeren Wandreibungskräften und somit aus Gleichgewichtsgründen zwangsläufig zu größeren vertikalen Bodendrücken p_{vm} als bei Frese [105].

Nach den Berechnungen mit dem FEM-Berechnungsmodell werden 26,1 % der Lasten aus dem Schüttguteigengewicht über Bodenpressungen und 73,9 % über die Wandreibung abgetragen; diese Werte betragen bei Frese [105] 18,8 % bzw. 81,2 %. Aufgrund von Messungen des Bodendruckes von Motzkus [8] an rechteckigen, mit Quarzsand gefüllten Silozellen mit ebenem Boden bei einem Wandreibungsbeiwert $\mu = 0,5$ werden 33 % des Siloguteigengewichts vom Siloboden getragen. Das Ergebnis aus der FEM-Berechnung fügt sich somit gut in den durch experimentelle Ergebnisse abgesicherten Rahmen ein.

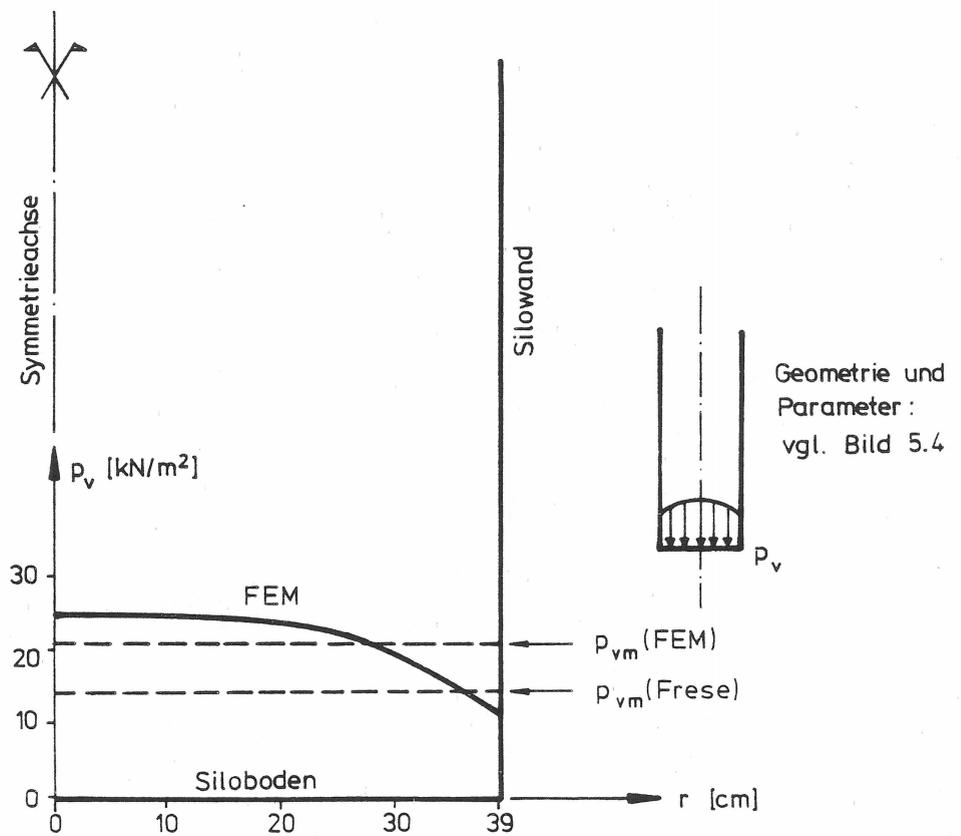


Bild 5.5: Vertikaler Bodendruck p_v nach eigener FEM-Berechnung und nach Frese [105]

Zudem erhält man nach einem durch experimentelle Erkenntnisse begründeten Vorschlag [8], wonach im Füllzustand ein Horizontaldruckverhältnis gem. Gl. (2.7) zutreffend sei, für die vorliegenden Verhältnisse dieses Beispiels einen λ -Wert von $\lambda = 0,33$, was sich gut mit dem aus den Ergebnissen der FEM-Berechnungen ermittelbaren mittleren Horizontaldruckbeiwert von $\lambda_m = \sim 0,30$ deckt, während sich dieser Wert bei Frese [105] zu $\lambda_m = 0,42$ ergibt.

Als Ergebnis dieses Abschnitts bleibt festzuhalten, daß mit dem in dieser Arbeit entwickelten FEM-Berechnungsmodell unter Verwendung des wirklichkeitsnahen Stoffgesetzes von Lade [87] die Spannungsverhältnisse in Silozellen während des Füllzustandes sowohl dem Verlauf als auch der Größe nach zutreffend ermittelt werden können.

5.1.3 Parameterstudie

Zu dieser Arbeit wurden zylindrische Silozellen mit den unterschiedlichsten Geometrien nachgerechnet, von denen im Rahmen dieser Darstellung nur einige wenige - exemplarisch für alle übrigen Geometrien - betrachtet werden können. Die im folgenden aufgezeigten prinzipiellen Erscheinungen sind jedoch charakteristisch für alle durchgeführten Berechnungen.

5.1.3.1 Einfluß der Wandreibung

Wie in der Silodrucktheorie von Janssen [1] und in allen darauffolgenden Ansätzen (vgl. Abschnitt 2) wird auch in dieser Arbeit die Wandreibung wegen des Fehlens wirklichkeitsnäherer Wandreibungsgesetze - speziell auch für körnige Schüttgüter, vgl. Abschnitt 3.1.2 - durch einen konstanten Coulomb'schen Wandreibungskoeffizienten berücksichtigt (vgl. Abschnitt 4.1.5.1), so daß die Wandreibungsdrücke und die horizontalen Seitendrucke in einem festen Verhältnis zueinander stehen.

Um den Einfluß der Wandreibung auf das Spannungs- und Verformungsverhalten im Silogut zu studieren, sind Berechnungen mit unterschiedlichen Wandreibungskoeffizienten durchgeführt worden; die dabei aufgetretenen typischen Erscheinungen sollen anhand der Bilder 5.6 bis 5.12 erläutert werden:

- In Bild 5.6 ist der Einfluß der Wandreibung auf den horizontalen Wanddruck p_h an der Silowand dargestellt. Für den Fall der vollständig glatten Silowand ($\mu = 0,0$) erhält man den bereits von den Grundbauberechnungen her bekannten linearen Horizontaldruckverlauf, vgl. Abschnitt 4.2.2; mit zunehmender Wandreibung weichen die Drücke immer weiter von diesem linearen Verlauf ab und nähern sich den von Janssen [1] beschriebenen exponentialen Kurvenverläufen. Es zeigt sich deutlich, wie mit zunehmender Wandreibung der Horizontaldruck in größerer Silotiefe einem Grenzwert zustrebt.

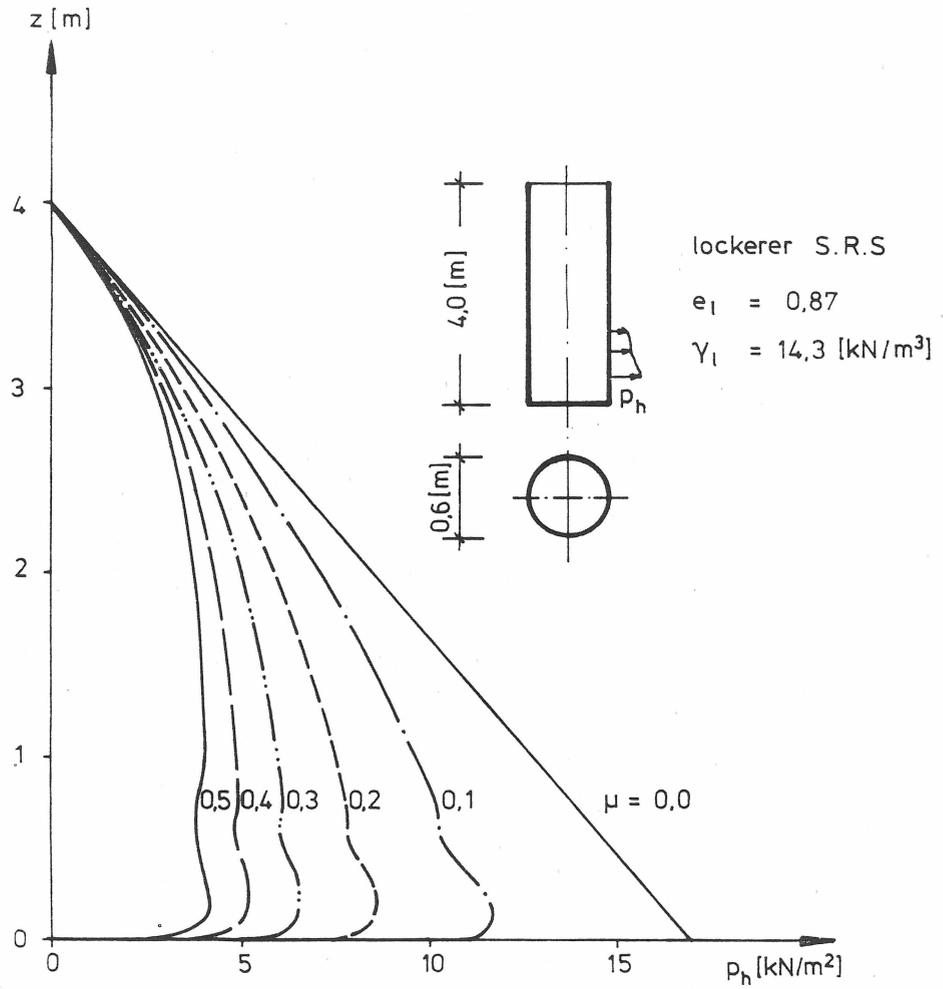


Bild 5.6: Einfluß der Wandreibung auf den Horizontaldruck p_h an der Silowand

Bei allen untersuchten Geometrien und Elementnetzen war in einem Abstand bis zu ca. $2r$ vom Siloboden eine "Schwingung" im horizontalen Druckverlauf zu registrieren. Diese Erscheinung ist dadurch zu erklären, daß mit wachsender Auflast nach und nach immer mehr in der Wandnähe gelegene Elemente dieses Bereichs bereits vor Aufbringung der gesamten Auflast aus dem Siloguteigen-
gewicht die $f_p = \eta_1$ - Bruchgrenze (vgl. Gl. 4.25) erreichen, was darauf hindeutet, daß in diesen Bereichen die maximale Tragfähigkeit des Silogutes erreicht ist, so daß dort keine weiteren Tragreserven mehr vorhanden sind. Die zusätzlichen Lasten aus dem Eigengewicht müssen somit durch die nach Abschnitt 4.1.6 durchzuführende f_p -Umlagerung von anderen umliegenden Elementen aufgenommen werden, so daß es auch zu einem Anstieg des Horizontaldruckes p_h kommt. Ein derartiges Ansteigen des Horizontaldruckes in Bodennähe konnte bei zylindrischen Silozellen mit ebenem Boden u.a. bei Quarzsand auch experimentell bestätigt werden [107].

Die anschließende Abnahme des Seitendruckes in unmittelbarer Bodennähe deutet auf den Einfluß der Bodenreibung hin, indem der Siloboden infolge der Bodenreibungskräfte einen Teil der Horizontalkräfte aufnehmen kann und die Wand in diesem Bereich somit entlastet wird.

- Bild 5.7 zeigt den Einfluß der Wandreibung auf den vertikalen Bodendruck. Während für den Fall der glatten Wand ($\mu = 0,0$) das gesamte Eigengewicht des Silogutes durch den über den Querschnitt konstant verlaufenden Bodendruck $p_v = p_{vm} = 57,2 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ getragen wird, nimmt bei zunehmender Wandreibung dieser mittlere Bodendruck wegen der Lasteinleitung von Vertikalkräften in die Silowände deutlich ab; bei $\mu = 0,5$ werden mit einem mittleren Bodendruck von $p_{vm} = 11,7 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ nur

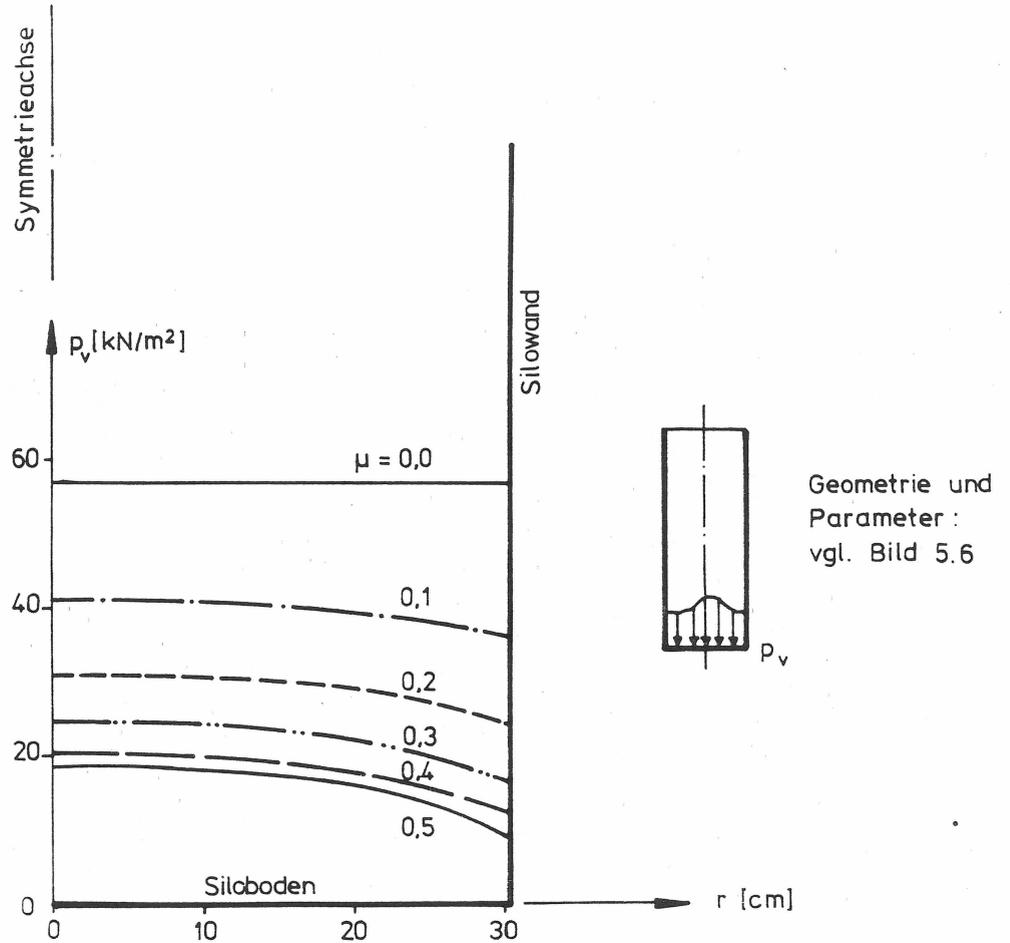


Bild 5.7: Einfluß der Wandreibung auf den vertikalen Boden-
druck p_v

noch 20,5 % der Gesamtlast vom Boden getragen, während 79,5 % über Reibung in die Silowände eingeleitet werden. Mit der nachfolgenden Tabelle Bild 5.8 wird verdeutlicht, wie sehr die Lastabtragung vom Wandreibungskoeffizient μ beeinflusst wird.

Neben dieser Auswirkung auf die Größe des mittleren Bodendrucks p_{vm} ist auch ein deutlicher Einfluß der Wandreibung auf den Verlauf des Bodendruckes zu verzeichnen, vgl. Bild 5.7:

Während bei $\mu = 0,0$ der Bodendruck über den Querschnitt konstant verteilt ist, stellt sich bei $\mu \neq 0,0$ ein Verlauf ein, bei dem der Bodendruck von einem Größtwert in der Symmetrieachse aus wegen des zunehmenden Einflusses der Reibung zur Wand hin abnimmt; so beträgt bei $\mu = 0,5$ der Bodendruck neben der Wand mit $p_{v,wand} = 9,4 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ nur noch ca. 49 % des in der Silomitte vorherrschenden Druckes.

μ	p_{vm} [kN/m ²]	Prozentualer Anteil am Schüttguteigengewicht	
		p_{vm}	p_w
0,0	57,2	100	0
0,1	39,2	68,5	31,5
0,2	28,4	49,7	50,3
0,3	21,5	37,6	62,4
0,4	17,2	30,1	69,9
0,5	11,7	20,5	79,5

Geometrie und
Parameter:
vgl. Bild 5.6

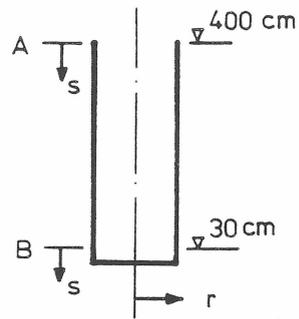
Bild 5.8: Einfluß der Wandreibung auf das Verhältnis der Boden- und Wandreibungslast

- Infolge der Auflast aus dem Eigengewicht des Silogutes kommt es zu Setzungen im Material, vgl. Bild 5.9.

Da das Silogut zur Rechenvereinfachung in einer Schicht eingebracht wird - vgl. Abschnitt 5.1.1 -, ergeben sich auch im Schnitt A bei der Höhenkote $h = 400$ [cm] Setzungen; bei dieser Vorgehensweise ist der Silo nach Beendigung des Füllvorgangs also nicht - wie es bei einem schichtenweisen Füllen der Fall wäre - exakt 4 [m] hoch gefüllt.

In Analogie zum Verlauf der vertikalen Drücke kommt es im Fall der glatten Wand ($\mu = 0,0$) zu gleichmäßigen Setzungen über den Siloquerschnitt, während sich bei wachsender Wandreibung eine absolute Abnahme der "mittleren" Setzung und eine relative Abnahme der Setzung von der Symmetrieachse zur Wand hin feststellen läßt. Diese Erscheinung nimmt vom unteren Teil des Silos, wo die Wandreibung am ausgeprägtesten ist, zum oberen Teil hin ab.

- Der Einfluß der Wandreibung auf den Spannungszustand im Inneren des Silogutes wird durch die Gegenüberstellung der Bilder 5.10 und 5.11 aufgezeigt. Dort sind die Linien gleicher Drücke (Isobaren) für die größten und kleinsten Hauptspannungen zusammen mit den Richtungen, in denen diese Drücke wirken, für die Fälle $\mu = 0,0$ und $\mu = 0,5$ aufgetragen; außerdem ist der Verlauf des vertikalen Boden- und des horizontalen Wanddrucks dargestellt. Da die Drücke in tangentialer Richtung in Verlauf und Größe annähernd identisch mit den Werten der dargestellten kleinsten Hauptspannung sind, wird auf eine gesonderte Wiedergabe verzichtet.



Geometrie und
Parameter:
vgl. Bild 5.6

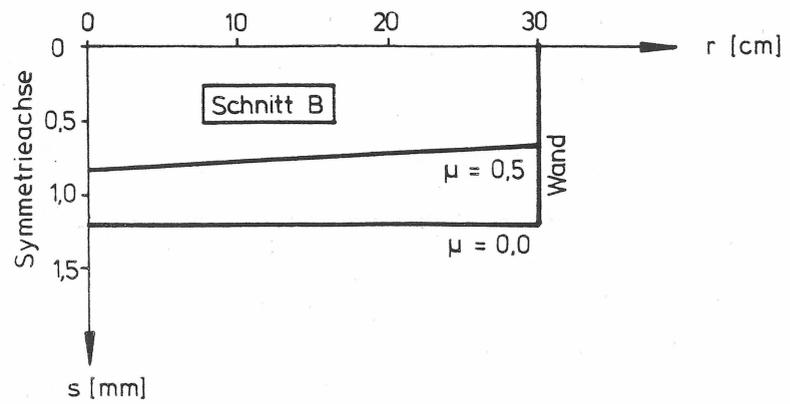
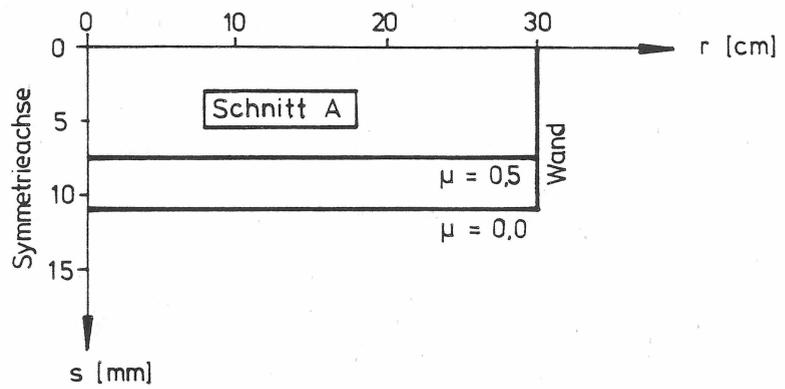


Bild 5.9: Setzungen im Schüttgut

Für den Fall der glatten Wand ($\mu = 0,0$) werden die inneren Spannungsverhältnisse mit den Bildern 5.10a und 5.10b wiedergegeben: beide Hauptspannungen sind erwartungsgemäß in jeder Silotiefe über den Querschnitt konstant verteilt und wachsen linear mit der Tiefe an; sie wirken exakt in lotrechter bzw. waagerechter Richtung.

Im Vergleich mit den Bildern 5.11a und 5.11b wird die Veränderung dieses "gleichmäßigen" Spannungszustandes durch den Einfluß der Wandreibung ($\mu = 0,5$) offenkundig: beide Hauptspannungen verlaufen jetzt - vor allem in der unteren Silohälfte - ungleichförmig über den Querschnitt. Durch den Einfluß der Wandreibung weichen ihre Druckrichtungen zum Rand hin immer mehr von der lot- bzw. waagerechten Ausgangslage in der Silomitte ab.

Die Drücke nehmen im oberen, von der Reibung weniger beeinflussten Teil des Silos gleichmäßig zu und erreichen bei ungefähr halber Silohöhe Spannungswerte, die nach unten fast konstant bleiben bzw. nur noch wenig anwachsen; die Drücke erreichen also - wie in der Janssen-Theorie [1] vorausgesagt - mit zunehmender Silotiefe einen Grenzwert.

Im Bereich bis zu ca. $2r$ über dem Boden sind wegen der weiter oben beschriebenen f_p - Umlagerungen drastische Spannungsänderungen zu verzeichnen:

Da das in diesem Bereich in Wandnähe gelegene Silogut bereits vor Aufbringung der gesamten Last aus dem Eigengewicht versagt, so daß die Spannungen hier nicht weiter anwachsen können, müssen andere Silogutbereiche diese Lasten zusätzlich aufnehmen, wodurch die Drücke über die Höhe $2r$ zur Silomitte hin stark ansteigen.

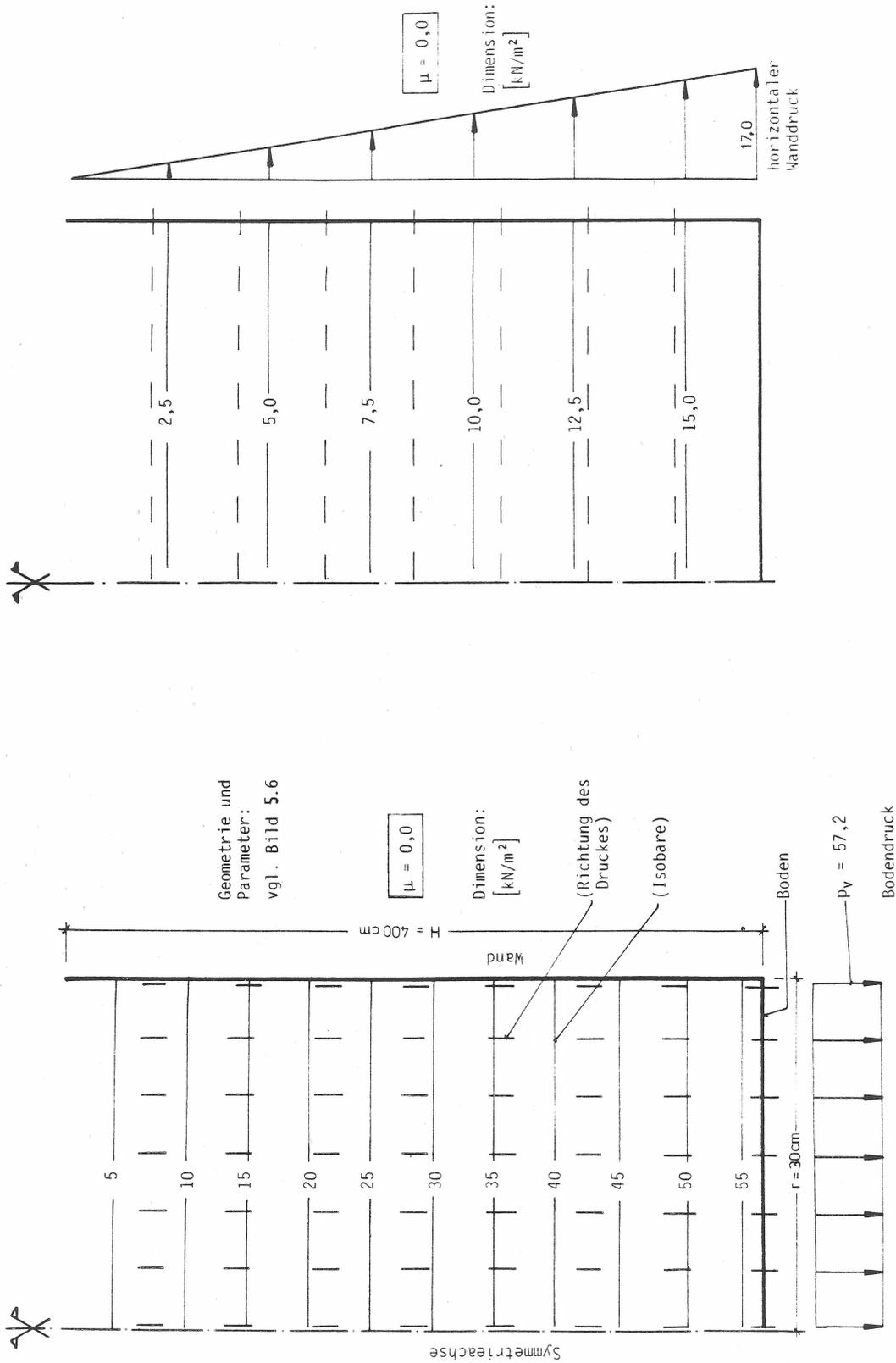


Bild 5.10a: Isobaren und Richtungen der größten Hauptspannungen für $\mu = 0,0$

Bild 5.10b: Isobaren und Richtungen der kleinsten Hauptspannungen für $\mu = 0,0$

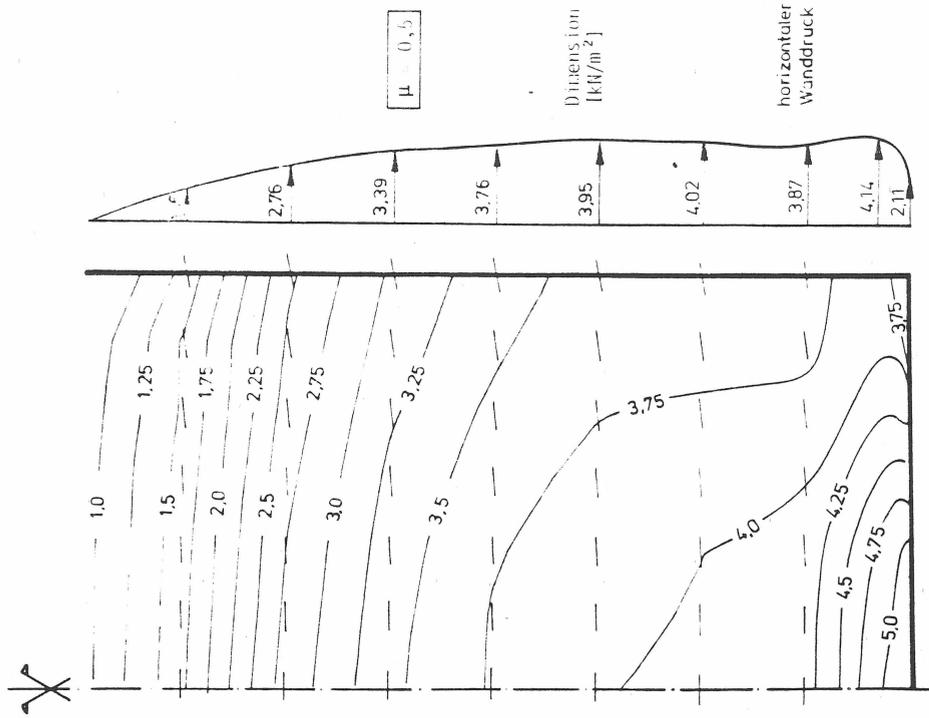


Bild 5.11b: Isobaren und Richtungen der kleinsten Hauptspannungen für $\mu = 0,5$

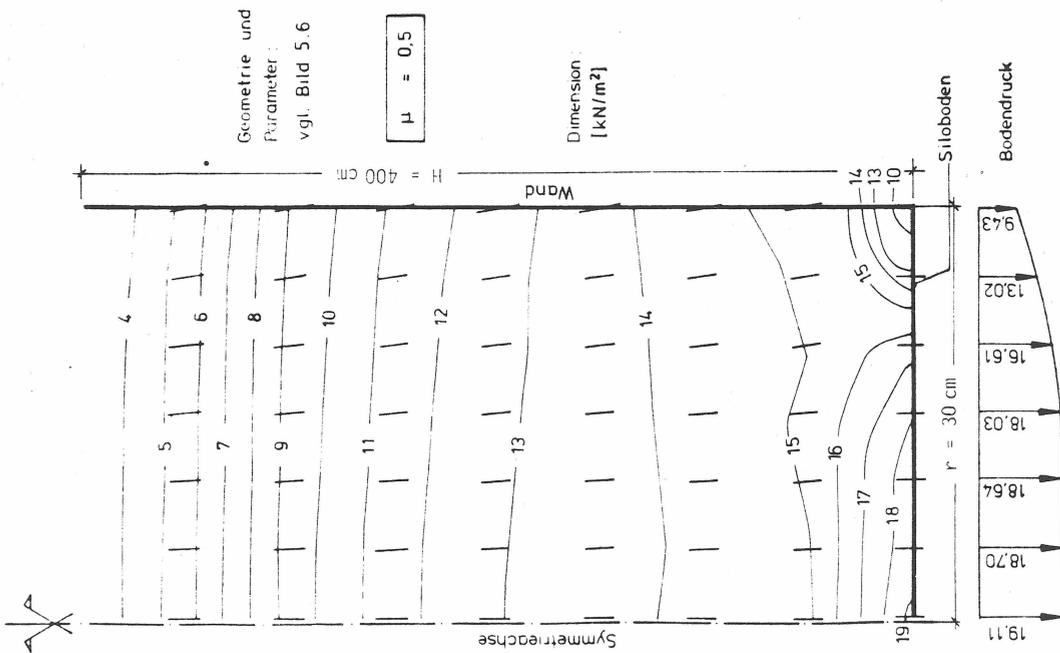


Bild 5.11a: Isobaren und Richtungen der größten Hauptspannungen für $\mu = 0,5$

- Diese Spannungszustände im Innern des Silogutes spiegeln sich auch in dem Verlauf des in den Janssen-Formeln (Gl. 2.5) und den nachfolgenden Arbeiten verwendeten Horizontaldruckbeiwertes $\lambda = p_h/p_v$ wieder, der in Bild 5.12 dargestellt ist:

Während dieser Wert λ in der Silomitte (Bild 5.12a) von der Wandreibung kaum beeinflusst wird, sind geringe Auswirkungen an der Wand (Bild 5.12b) vor allem in der unteren Silohälfte festzustellen; auch für die λ - Kurve zeigt sich in diesem Bereich die bereits für den Verlauf des Horizontaldrucks p_h (Bild 5.6) festgestellte "Schwingung". Nach Bild 5.12 läßt sich der mittlere λ_m -Wert über den ganzen Silobereich für alle Reibungsbeiwerte zu $\lambda_m = \sim 0,30$ angeben.

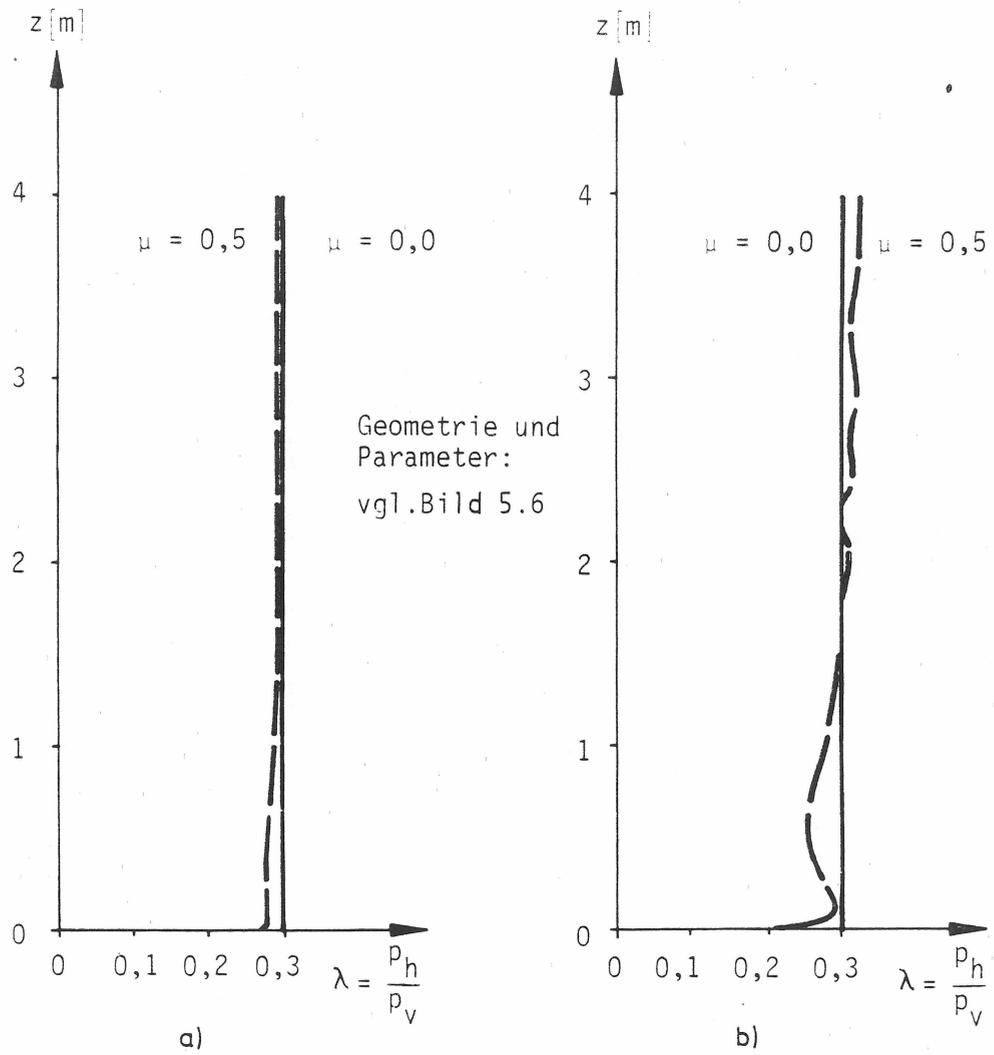


Bild 5.12: Einfluß der Wandreibung auf das Horizontal-
druckverhältnis $\lambda = p_h/p_v$

a) in der Silomitte

b) an der Wand

5.1.3.2 Einfluß der Wandsteifigkeit

Da in den bislang üblichen Verfahren zur Bestimmung der Druckverhältnisse in Silozellen lediglich von den Gleichgewichtsbedingungen Gebrauch gemacht wird (vgl. Abschnitt 2), kann mit ihnen naturgemäß nicht überprüft werden, ob die Steifigkeit bzw. die Verformbarkeit der begrenzenden Siloseitenwände die inneren Spannungsverhältnisse im Silogut beeinflußt oder nicht.

Mit dem in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodell kann dieser Effekt untersucht werden; die Vorgehensweise ist im Abschnitt 4.1.5.2 dargelegt.

Mit dem Füllmaterial "locker und dicht gelagerter S.R.S." sind für verschiedene Silogeometrien bei technisch sinnvoll vorgegebenen Steifigkeiten der Silowände aus Stahl und Stahlbeton nach Gl.(4.56) die inneren Spannungszustände im Schüttgut ermittelt worden. Daneben wurden diese Berechnungen auch für eine unendlich steife Wand durchgeführt, indem die seitliche Verschieblichkeit der in der Wand liegenden Elementknotenpunkte durch horizontale Auflager verhindert wurde.

Beim Vergleich all dieser Ergebnisse zeigten sich zwischen den Spannungszuständen bei zugelassener Wandverformung und denen bei der unendlich steifen Wand keine nennenswerten Unterschiede.

Daraus kann geschlossen werden, daß die Wandsteifigkeit - zumindest bei dem hier verwendeten Füllgut und den untersuchten exakt zylindrischen Silogeometrien - keinen Einfluß auf den inneren Spannungszustand im Schüttgut und damit auf die horizontalen Wanddrücke ausübt.

5.1.3.3 Einfluß der Lagerungsdichte

Der Einfluß der Lagerungsdichte auf die Spannungsverhältnisse in Silozellen soll anhand der Verläufe für den horizontalen Druck p_h an der Silowand aufgezeigt werden:

Bild 5.13 zeigt den Horizontaldruck p_h an der Silowand für locker und dicht gelagerten Sacramento River Sand mit den Stoffparametern nach Tafel 1 und den Wichten $\gamma_{\text{locker}} = 14,3 \text{ [kN/m}^3\text{]}$ und $\gamma_{\text{dicht}} = 16,6 \text{ [kN/m}^3\text{]}$. Bei prinzipiell gleichem Kurvenverlauf ergibt sich dabei für den dicht gelagerten Sand erwartungsgemäß eine Erhöhung des Druckes, die für den Höchstdruck ca. 16 % beträgt, was in etwa dem prozentualen Anwachsen von γ_1 auf γ_d entspricht.

Um zu untersuchen, ob diese Druckerhöhung allein durch das Anwachsen der Wichte von γ_1 auf γ_d zurückzuführen ist, oder ob auch die für lockere und dichte Lagerungsart unterschiedlichen Stoffparameter darauf einen Einfluß ausüben, wird in Bild 5.14 der Horizontaldruck p_h an der Silowand mit den Parametern für dichte (Kurve (b)) und lockere (Kurve (c)) Lagerung, aber bei gleicher Wichte γ_d aufgetragen.

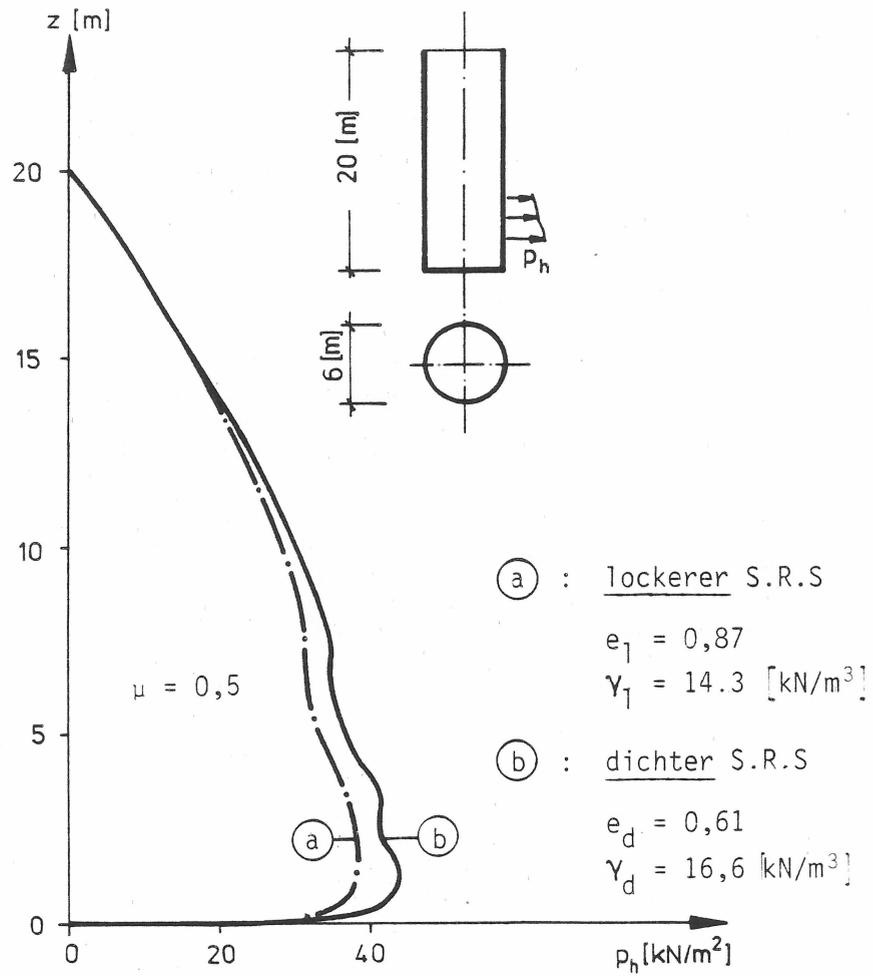


Bild 5.13: Einfluß der Lagerungsdichte auf den Horizontaldruck p_h an der Silowand

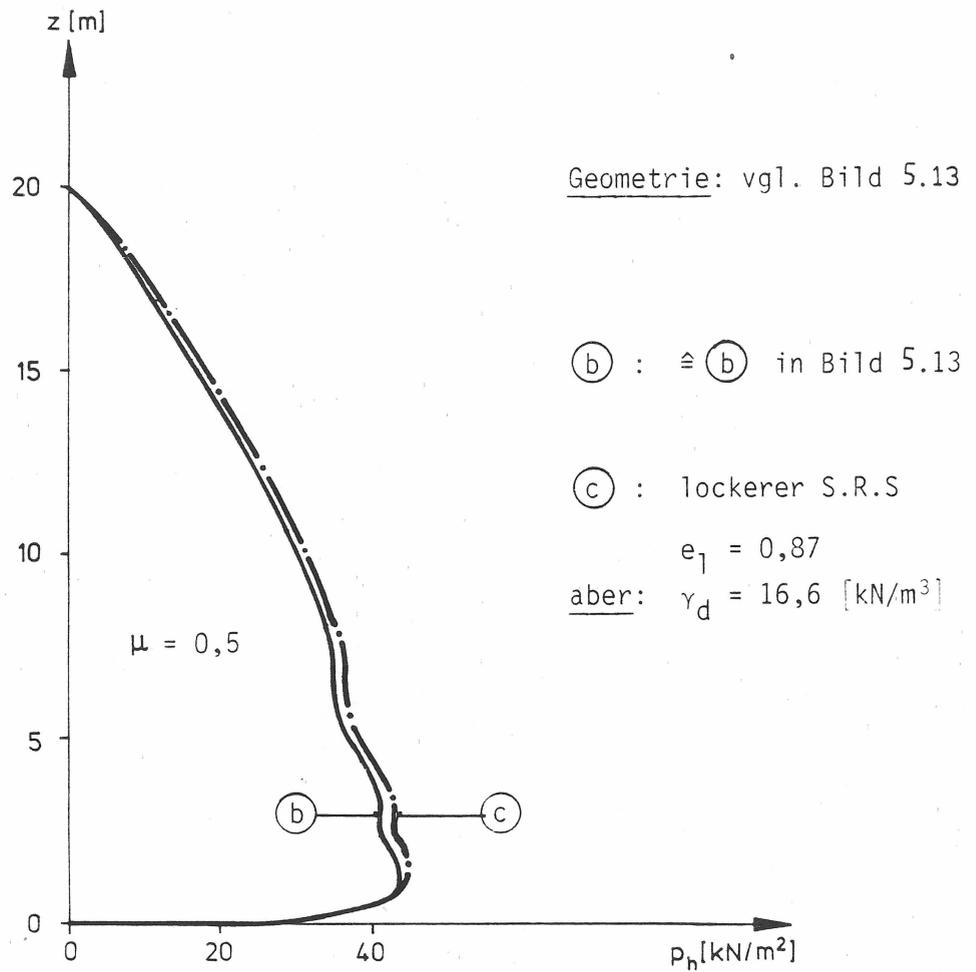


Bild 5.14: Einfluß der Stoffparameter auf den Horizontal-
druck p_h an der Silowand
($\gamma_{(b)} = \gamma_{(c)} = 16,6$ [kN/m³])

Beim Vergleich dieser Kurven zeigt sich, daß sich der Horizontaldruck bei dichter Lagerung (Kurve (C)) zu groß einstellt, falls - fälschlicherweise - mit den Stoffparametern für lockere Lagerung gerechnet wird.

Man erkennt den Einfluß der Stoffparameter:
Beim Übergang von der lockeren zur dichten Lagerung führt die zwangsläufige Erhöhung der Wichte von γ_1 auf γ_d zu einer deutlichen Steigerung des Horizontaldrucks, die jedoch durch die Verwendung der Stoffparameter für die dichte Lagerung so abgemindert wird, daß der Druck linear mit dem Anstieg von γ_1 auf γ_d um 16 % zunimmt.

Aufgrund vergleichender Berechnungen mit dem FEM-Modell wird auch der mittlere Horizontaldruckbeiwert $\lambda_m = p_h/p_v$ von der Lagerungsdichte des Silogutes beeinflusst; während sich z.B. für die Geometrie des Bildes 5.13 der λ_m -Wert bei dem lockeren S.R.S. zu $\lambda_m = \sim 0.30$ einstellt, ergibt sich dieses Verhältnis bei dem dichten S.R.S. zu $\lambda_m = \sim 0.27$.

5.1.3.4 Einfluß des Silodurchmessers

Um den bei den numerischen Berechnungen beobachteten Einfluß des Silodurchmessers auf den Horizontaldruck p_h an der Silowand aufzuzeigen, wird auf die Bilder 5.6 und 5.13 zurückgegriffen, in denen die Horizontaldrücke für zylindrische Silozellen mit den Geometrien (in [cm])
 $H_1/r_1 = 400/30$ und $H_2/r_2 = 2000/300$ u.a. für lockeren Sand bei einer Wandreibung von $\mu = 0.5$ dargestellt sind.

Für beide Geometrien ist die Silohöhe H_i so groß gewählt, daß sich für die betrachteten Horizontaldrücke bei zunehmender Silotiefe Grenzwerte einstellen, die wegen der sonst gleichen Verhältnisse direkt miteinander verglichen werden können.

Es zeigt sich, daß die Größe des Seitendrucks wesentlich vom Siloradius abhängig ist:

$$\begin{aligned} H_1/r_1 = 400/30 & : p_{h,max} = 4,14 \text{ [kN/m}^2\text{]} \\ H_2/r_2 = 2000/300 & : p_{h,max} = 38,28 \text{ [kN/m}^2\text{]}. \end{aligned}$$

Vergleicht man für diese beiden Geometrien die Horizontaldrücke in gleichen Höhenkoten, so stellt sich heraus, daß das Verhältnis der Seitendrücke p_{h1}/p_{h2} fast linear mit dem Verhältnis der Radien $r_1/r_2 = 30/300 = 1/10$ zunimmt, der Seitendruck also fast linear abhängig ist vom Siloradius bzw. vom hydraulischen Radius wegen $A/U = r/2$ bei zylindrischen Silozellen.

Ein Einfluß der Silogeometrie auf den Horizontaldruckbeiwert $\lambda = p_h/p_v$ konnte nach den Berechnungen mit dem FEM-Modell nicht festgestellt werden; so ergibt sich z.B. für die Geometrien der Bilder 5.6 und 5.13 bei $\mu = 0.5$ für den lockeren Sand ein übereinstimmender mittlerer λ -Wert von $\lambda_m = \sim 0.30$; vgl. dazu auch die Ausführungen über λ in Abschnitt 5.1.2.

5.1.4 Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den
Janssen-Formeln und mit DIN 1055, Blatt 6,
Ausgabe Nov. 1964 _ _ _ _ _

Aufgrund der mit dem FEM-Berechnungsmodell gewonnenen Einblicke in die inneren Spannungsverhältnisse von zylindrischen, sandgefüllten Silozellen mit Wandreibung kann für den Füllzustand zur Gültigkeit der Janssen-Formeln, Gln. (2.5), und der darauf fußenden DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, Stellung genommen werden.

a) Horizontaldruck p_h an der Silowand

Gemäß den Janssen-Formeln, Gln. (2.5), folgt der Horizontaldruck p_h an der Silowand einem exponentialen Kurvenverlauf mit einem Grenzwert \bar{p}_h bei zunehmender Silotiefe.

Diese grundsätzliche Aussage konnte mit allen Berechnungen des FEM-Modells bestätigt werden, vgl. z.B. die Bilder 5.6 und 5.13. Besondere Merkmale, wie z.B. der Einfluß der Bodenreibung auf den Horizontaldruck oder die durch f_p -Umlagerungen hervorgerufene leichte "Schwingung" im Druckverlauf können mit der Janssen-Theorie naturgemäß nicht erfaßt werden, haben aber andererseits auch keinen Einfluß auf die Größe des maximalen Horizontaldrucks \bar{p}_h .

Zwar können die folgenden zur Herleitung der Janssen-Formeln getroffenen Voraussetzungen und Annahmen aufgrund der mit dem FEM-Berechnungsmodell gewonnenen Ergebnisse als nicht erfüllt gelten:

- der vertikale Druck p_v verläuft nicht konstant über den Siloquerschnitt, vgl. z.B. Bild 5.7

- die Spannungen p_v und p_h an der Silowand sind nach Bild 5.11 keine lot- bzw. waagrecht gerichtete Hauptspannungen
- das Verhältnis $\lambda = p_h/p_v$ ist nach Bild 5.12 nicht eine über die gesamte Silohöhe konstant verlaufende Größe.

Dennoch werden mit der Janssen-Formel

$$\bar{\sigma}_x = \bar{p}_h = \frac{\rho \cdot g \cdot A}{\mu \cdot U} \quad (2.5e)$$

zur Bestimmung des maximalen Horizontaldrucks \bar{p}_h an der Silowand die wesentlichen Aspekte richtig erfaßt:

die Wichte $\gamma = \rho \cdot g$ und - mit dem Verhältnis A/U , das sich für zylindrische Silozellen zu $A/U = r/2$ bestimmt - auch der Radius r gehen in diese Beziehung linear ein. Diese theoretisch gefundene Abhängigkeit wird nach Abschnitt 5.1.3.3 und 5.1.3.4 mit den Ergebnissen des FEM-Berechnungsmodells bestätigt.

Ebenfalls wird mit dem Faktor $1/\mu$ in der Janssen-Formel (2.5e) der nichtlineare Einfluß der Wandreibung auf den maximalen Horizontaldruck \bar{p}_h richtig erfaßt:

Dies wird mit dem Bild 5.15 gezeigt, in dem die normierten Verhältnisse

$$\frac{\bar{p}_h}{\gamma \cdot \frac{A}{U}} \left[= \frac{1}{\mu} \right]$$

mit \bar{p}_h aus FEM-Berechnungen für eine Variation von μ bei ansonsten konstanten Werten $\gamma = 14,3 \text{ [kN/m}^3\text{]}$, $A/U = 0,15 \text{ [m]}$ (vgl. Bild 5.6) in Abhängigkeit von μ dargestellt sind; gleichzeitig ist die von Janssen gegebene Abhängigkeit

$$\left[\frac{\bar{p}_h}{\gamma \cdot \frac{A}{U}} = \right] \frac{1}{\mu}$$

als Funktion von μ aufgetragen.

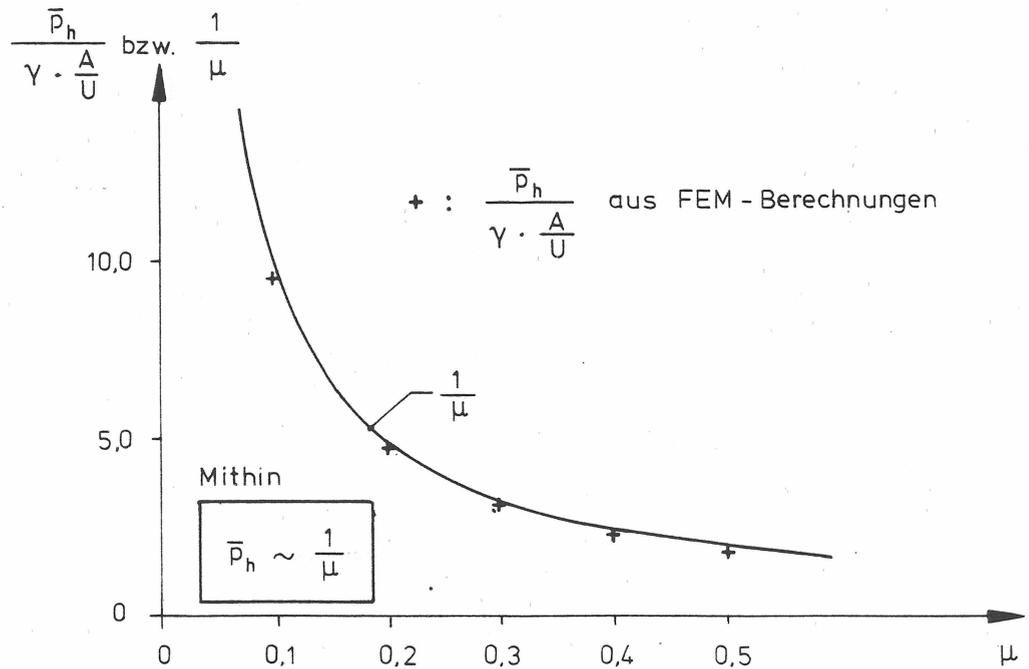


Bild 5.15: Abhängigkeit der normierten maximalen Horizontaldrücke \bar{p}_h und des Verhältnisses $1/\mu$ vom Wandreibungsbeiwert μ

Die Übereinstimmung der Werte aus der FEM-Berechnung und nach Janssen ist offensichtlich, so daß der nichtlineare Einfluß der Wandreibung auf den maximalen Horizontaldruck mit der Formulierung von Janssen zutreffend wiedergegeben wird.

Da gemäß DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, der horizontale Druckverlauf an der Silowand mit den Janssen-Formeln, Gl. (2.5), zu bestimmen ist, gelten diese Ausführungen für die DIN gleichermaßen.

Mit einem Vergleich der Horizontaldruckverläufe an der Silowand nach der FEM-Berechnung und nach der Janssen-Theorie, Gl. (2.5b), wird in Bild 5.16 für die Geometrie und Parameter nach Bild 5.13, Kurve (b), beispielhaft aufgezeigt, daß die Horizontaldrücke sowohl dem Verlauf als auch der Größe nach gut mit den Janssen-Formeln abgeschätzt werden können:

für ein mittleres Horizontaldruckverhältnis $\lambda = 0,27$, wie es sich gemäß den FEM-Berechnungen nach Abschnitt 5.1.3.3 für den dicht gelagerten S.R.S. einstellt, zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen nach der FEM-Berechnung und nach Janssen, während die Janssen-Theorie mit dem von der DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, vorgeschriebenen λ - Wert von $\lambda = 0,5$ bis zum Erreichen des Grenzwertes \bar{p}_h höhere Horizontaldrücke als die FEM-Berechnung liefert.

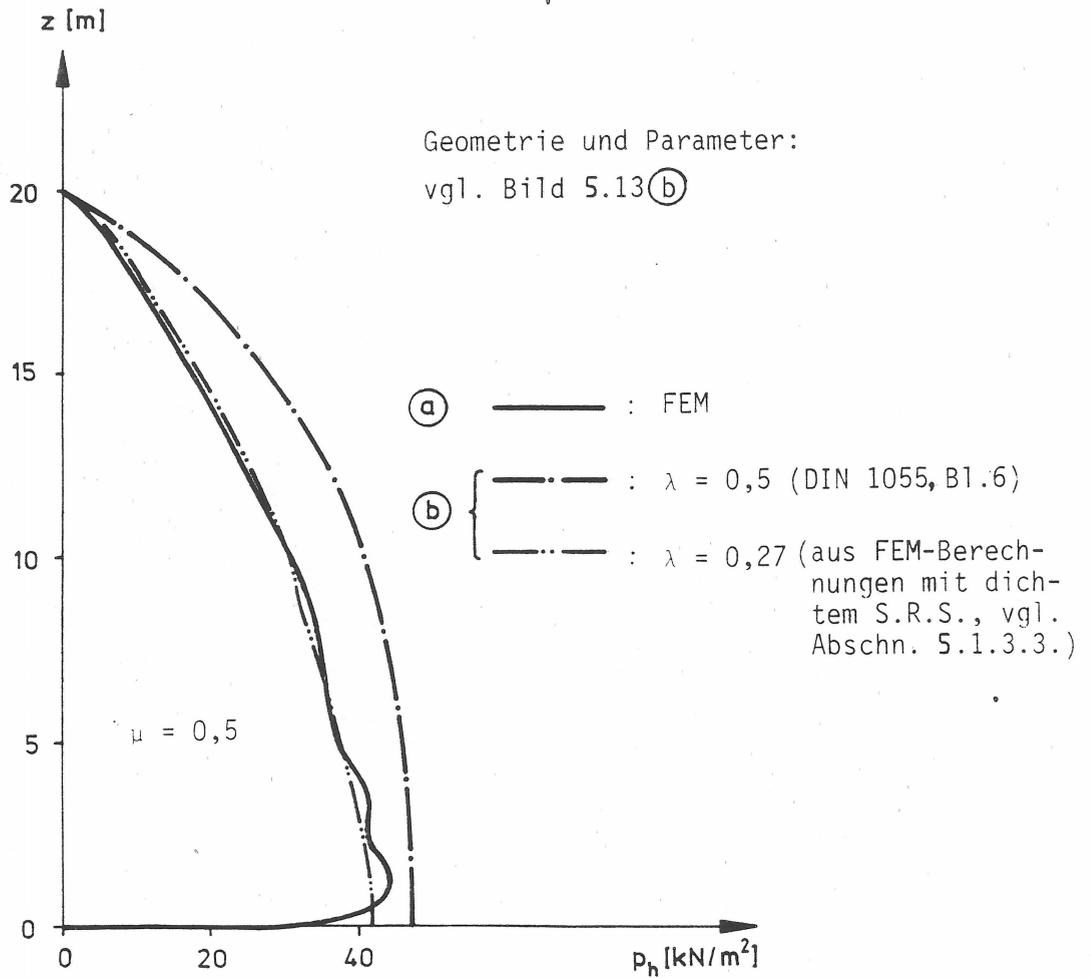


Bild 5.16: Vergleich des Horizontaldrucks p_h an der Silowand

- (a) nach FEM
- (b) nach Janssen

b) Vertikaldruck p_v über den Siloquerschnitt

Nach Janssen [1] besteht zwischen den über den Siloquerschnitt (vermeintlich) konstant verlaufenden Horizontal- und Vertikaldrücken die feste Beziehung

$$\bar{p}_v = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{p}_h \quad , \quad (2.5d)$$

wobei λ eine über die Silohöhe konstante Größe sein soll. Bei diesem theoretisch gefundenen Ansatz macht die Bestimmung des Wertes λ große Schwierigkeiten; vgl. dazu die Ausführungen in Abschnitt 2.2.

Wie jedoch in Abschnitt 5.1.3.1 mit dem Bild 5.11 aufgezeigt wurde, sind die Horizontal- und Vertikaldrücke infolge des Einflusses der Wandreibung vor allem in der unteren Silohälfte - also dort, wo die Grenzwerte \bar{p}_v und \bar{p}_h auftreten, keineswegs gleichförmig über den Siloquerschnitt verteilt. Auch das Verhältnis λ ist in diesem Bereich keine konstante Größe, sondern Schwankungen unterworfen, die von der Silowand zur Symmetrieachse hin abnehmen, vgl. Bild 5.12.

Zudem besteht nach Abschnitt 5.1.3.3 eine Abhängigkeit des λ -Wertes von der Lagerungsdichte, während λ nach Abschnitt 5.1.3.4 von der Silogeometrie nicht beeinflusst wird.

Die Annahme von Janssen [1], daß das Horizontaldruckverhältnis λ eine konstante Größe sei, kann somit nicht bestätigt werden.

Mit Gl. (2.5d) kann also lediglich eine Abschätzung des mittleren Vertikaldruckes p_{vm} erfolgen, bei der man von Mittelwerten für p_{hm} und λ_m auszugehen hat.

Bei der Abschätzung von p_{hm} ist zu beachten, daß nach Bild 5.11b der maximale Horizontaldruck \bar{p}_h an der Wand zur Silomitte hin ansteigt.

Die Mittelwerte λ_m für den Sacramento River Sand können nach Abschnitt 5.1.3.3 in Abhängigkeit von der Lagerungsdichte angegeben werden zu

locker gelagerter S.R.S. : $\lambda_m = \sim 0,30$
dicht gelagerter S.R.S. : $\lambda_m = \sim 0,27$.

Wie bereits in Abschnitt 5.1.2 angedeutet, decken sich diese Werte ungefähr mit den nach Gl. (2.7) bestimmbaren λ -Werten:

μ	φ	λ nach Gl.(2.7)
0,5	34° für <u>locker</u> gelagerten S.R.S. nach Bild 4.10	0,33
0,5	40° für <u>dicht</u> gelagerten S.R.S. nach Bild 4.10	0,24

Auch Motzkus[8] kommt aufgrund von Messungen des Horizontal- und Vertikaldrucks an rechteckigen, sandgefüllten Silozellen zu dem Schluß, daß λ näherungsweise mit der Gl. (2.7) abgeschätzt werden kann.

Nach DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, hat die Ermittlung des maximalen Bodendruckes \bar{p}_v nach Gl. (2.5d) zu erfolgen, wobei der Wert λ nach der Norm unabhängig vom Wandreibungskoeffizienten μ und dem Winkel φ der inneren Reibung für alle Schüttgüter einheitlich zu $\lambda = 0,5$ anzusetzen ist.

Mit diesem Ansatz wird schon der mittlere Bodendruck p_{vm} , der nach z.B. Bild 5.7 kleiner ist als der maximale Druck \bar{p}_v in der Silomitte, zu gering ermittelt:

einerseits ist der mittlere, über den Siloquerschnitt konstante Horizontaldruck p_{hm} größer als der Wert \bar{p}_h in Gl. (2.5d), andererseits ist das mittlere Horizontaldruckverhältnis λ_m mit $\lambda_{m,locker} = 0,30$ bzw. $\lambda_{m,dicht} = 0,27$ deutlich kleiner als der nach der DIN vorgeschriebene Wert $\lambda = 0,5$.

So ergibt sich z.B. für die Silogeometrie nach Bild 5.6 bei $\mu = 0,5$ der maximale (und konstante) Bodendruck entsprechend der Norm mit $\bar{p}_h = 4,29 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ nach Gl. (2.5e) zu $\bar{p}_v = 4,29/0,5 = 8,58 \text{ [kN/m}^2\text{]}$, während schon der mittlere Bodendruck für diesen Fall nach Bild 5.8 mit $p_{vm} = 11,7 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ um 36 % über diesem Wert liegt; mit dem Mittelwert $\lambda_m = 0,3$, wie er sich für locker gelagerten S.R.S. aus den FEM-Berechnungen ergibt, erhält man einen mittleren Bodendruck von $p_{vm} = 14,3 \text{ [kN/m}^2\text{]}$, vgl. Bild 5.17. Mit diesem Bild wird deutlich aufgezeigt, wie vor allem in der Silomitte der tatsächliche Bodendruck deutlich über dem nach der Norm ermittelten Druck liegt.

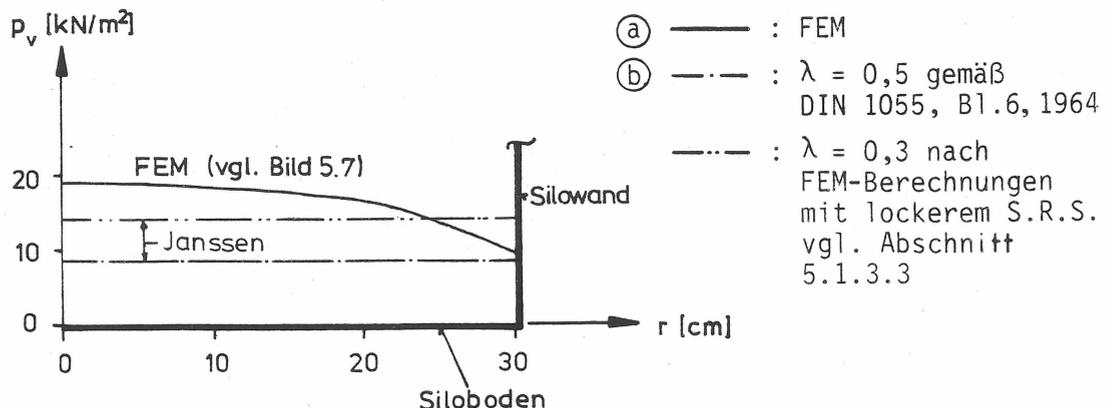


Bild 5.17: Vertikaler Bodendruck p_v

- (a) nach FEM
- (b) nach Janssen

Dieses auf der Basis von FEM-Berechnungen gefundene Ergebnis deckt sich auch mit den experimentell gewonnenen Erkenntnissen von Motzkus [8], der aufgrund von Messungen des Bodendrucks zu der Feststellung kommt, daß der vertikale Druck mit der DIN-Vorschrift rechnerisch zu klein ermittelt wird, und vorschlägt, abweichend von DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, mit einem kleineren λ -Wert nach Gl. (2.7) zu rechnen.

Als Ergebnis dieses Abschnitts ist für den Füllzustand festzuhalten, daß mit der DIN 1055, Blatt 6, Ausgabe November 1964, der Horizontaldruck an der Silowand sowohl dem Verlauf als auch der Größe nach realistisch abzuschätzen ist, während der vertikale Bodendruck deutlich zu niedrig bestimmt wird.

5.2 Beginn des Entleerens

Damit das Silogut aus dem Silobehälter ausfließen kann, muß die aus dem Druck des Eigengewichts herrührende "Vorspannung", die nach Beendigung des Füllvorgangs im Silogut vorhanden ist, im Bereich der Auslauföffnung abgebaut werden.

Da das in dieser Arbeit verwendete Materialgesetz von Lade [87] das stoffgesetzliche Verhalten von Schüttgütern im Druckoktanten des Hauptspannungsraums bei statischen Problemstellungen beschreibt, kann der kinetische Vorgang des Ausfließens mit dem hier entwickelten FEM-Modell rechnerisch nur so lange nachvollzogen werden, bis die Druckvorspannung aus der statischen Belastung abgebaut ist und das eigentliche Ausfließen unmittelbar bevorsteht.

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen des Abbaus dieser Druckspannungen im Öffnungsbereich auf den inneren Spannungszustand im gesamten Schüttgut beschrieben. Die rechentechnische Simulation dieses Vorgangs ist im Abschnitt 4.1.4.2 dargelegt.

In allen Berechnungen führt die Abnahme der Druckspannungen am Rand der Auslauföffnung - hervorgerufen durch inkrementelles Aufbringen der negativen Auflagerkräfte aus dem Füllzustand - dazu, daß in immer größeren Bereichen des Silogutes Zugspannungen auftreten, die nach Abschnitt 4.1.6 umzulagern sind. Für das letzte Belastungsinkrement kann kein statischer Gleichgewichtszustand mehr gefunden werden, was darauf hindeutet, daß das Silogut unmittelbar vor dem Ausfließen steht.

Die beobachteten typischen Erscheinungen derartiger Berechnungen werden mit den Bildern 5.18 und 5.19 anhand der Isobaren und der Druckspannungsverläufe an der Silowand und am Siloboden aufgezeigt; dazu wird auf die Geometrie und Parameter des Bildes 5.6 zurückgegriffen.

Um die Veränderungen des inneren Spannungszustands im Silogut während des inkrementellen Abbaus der Druckspannungen im Öffnungsbereich übersichtlich und chronologisch aufzuzeigen, werden aufeinanderfolgend die Spannungszustände nach Beendigung des Füllvorgangs (Bild 5.18a, 5.19a, identisch mit Bild 5.11a, 5.11b), nach Abbau der halben Druckspannungen (Bild 5.18b, 5.19b) und nach fast vollständigem Abbau der Druckspannungen im Öffnungsbereich (Bild 5.18c, 5.19c) dargestellt.

Die Bilder 5.18 und 5.19 zeigen deutlich, wie sich der innere Spannungszustand bei Abnahme der Druckspannungen im Auslaufbereich verändert:

Die nach Beendigung des Füllvorgangs vorhandenen vertikalen und horizontalen Druckspannungen in den über der Öffnung befindlichen Silogutbereichen nehmen über eine gewisse Höhe hin ab und lagern sich zum Eckbereich hin um, so daß dort die inneren Druckspannungen deutlich anwachsen. Weiter oben gelegene Silogutbereiche werden von diesen Umlagerungsvorgängen überhaupt nicht betroffen; die Spannungsgrößen dort behalten ihre Werte gegenüber dem Füllzustand unverändert bei.

Die Richtungen der größten und kleinsten Hauptspannungen ändern sich im Öffnungsbereich während des Entleerungsbeginns: die größte Hauptspannung schlägt von der vertikalen Richtung des Füllzustands in die horizontale beim Entleerungsbeginn um.

Die Spannungsumlagerungen wirken sich auf den Verlauf des vertikalen Bodendrucks und des horizontalen Wanddrucks so aus, daß im Vergleich zu den Drücken aus dem Füllzustand ein starkes Anwachsen dieser Drücke im Eckbereich zu verzeichnen ist.

Während des eigentlichen Ausfließvorgangs werden sich diese Erscheinungen zu weiter oben hin gelegenen Silogutbereichen fortpflanzen.

Als Einflußparameter auf den inneren Spannungszustand infolge des Druckabbaus im Öffnungsbereich sind die Wandreibung ($\mu_E = 0,4; 0,3; 0,2; 0,1$) und der Auslaufradius (z.B. für die Silogeometrie nach Bild 5.18 die Auslaufradien $r_a = 5; 10; 15; 20$ [cm]) untersucht worden:

- Der Öffnungsradius hat einen großen Einfluß auf die Veränderung der inneren Spannungsverhältnisse im Silogut; bei kleineren Öffnungen sind zwar ebenfalls die oben beschriebenen Umlagerungsvorgänge zu beobachten, jedoch sind die Spannungserhöhungen in diesem Fall mehr auf die inneren Silogutbereiche beschränkt und klingen zum Rand hin infolge der Pufferwirkung des dazwischenliegenden Silogutes ab; die Horizontaldrücke an der Wand und die vertikalen Bodendrücke wachsen nicht so stark an wie bei größeren Auslaufradien.
- Da die Spannungszustände im Silogut mit dem hier beschriebenen Berechnungsmodell wegen der stationären Grundgleichungen lediglich bis zum unmittelbar bevorstehenden Ausfließen beschrieben werden können und größere Bewegungen im Silogut somit nicht eintreten, zeigen sich für verschiedene Wandreibungskoeffizienten μ_E erwartungsgemäß kaum Veränderungen bei den Spannungsumlagerungen.

Es bleibt festzuhalten, daß der vor dem Ausfließen stattfindende Abbau der Druckspannungen im Auslaufbereich zu deutlichen Spannungserhöhungen im Silogut führt, die sich in Abhängigkeit von der Größe des Öffnungsradius bis zur Silowand hin mit entsprechendem Anstieg des horizontalen Wanddrucks auswirken können.

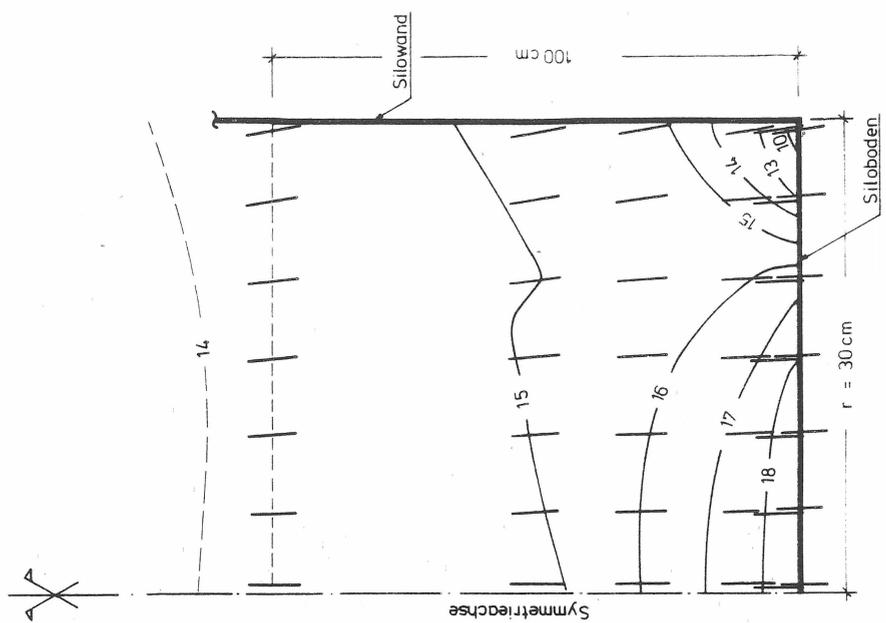
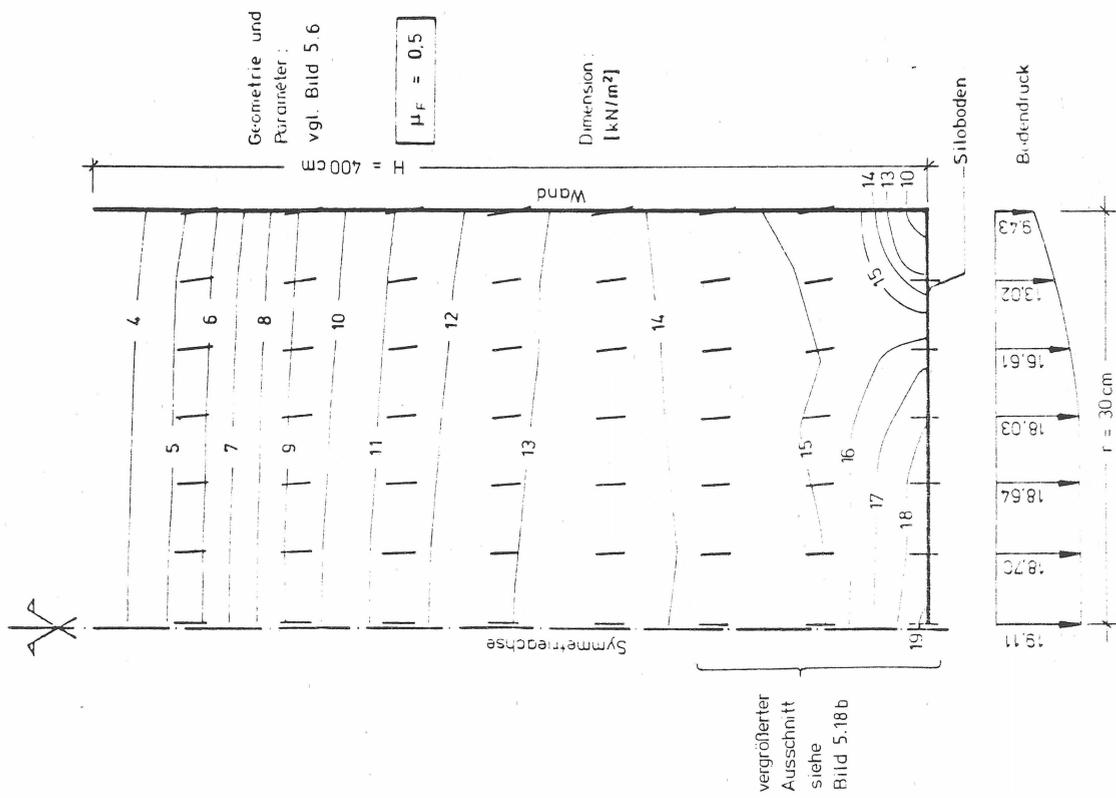


Bild 5.18b: Detail aus Bild 5.18a

Bild 5.18a: Isobaren und Richtungen der größten Hauptspannungen nach Beendigung des Füllvorganges

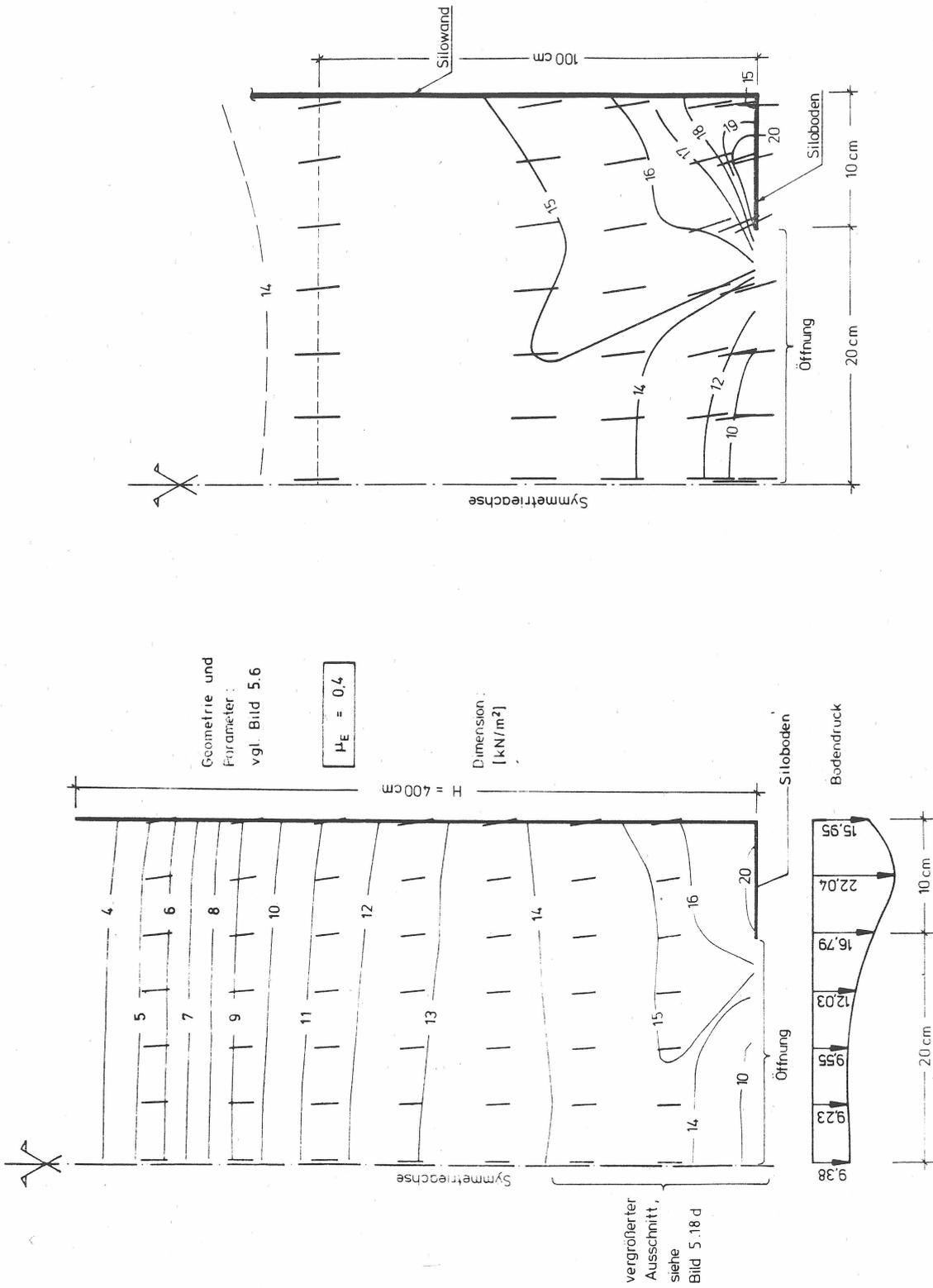


Bild 5.18 d: Detail aus Bild 5.18 c

Bild 5.18 c: Isobaren und Richtungen der größten Hauptspannungen nach Abbau der halben Druckspannungen im Öffnungsbereich

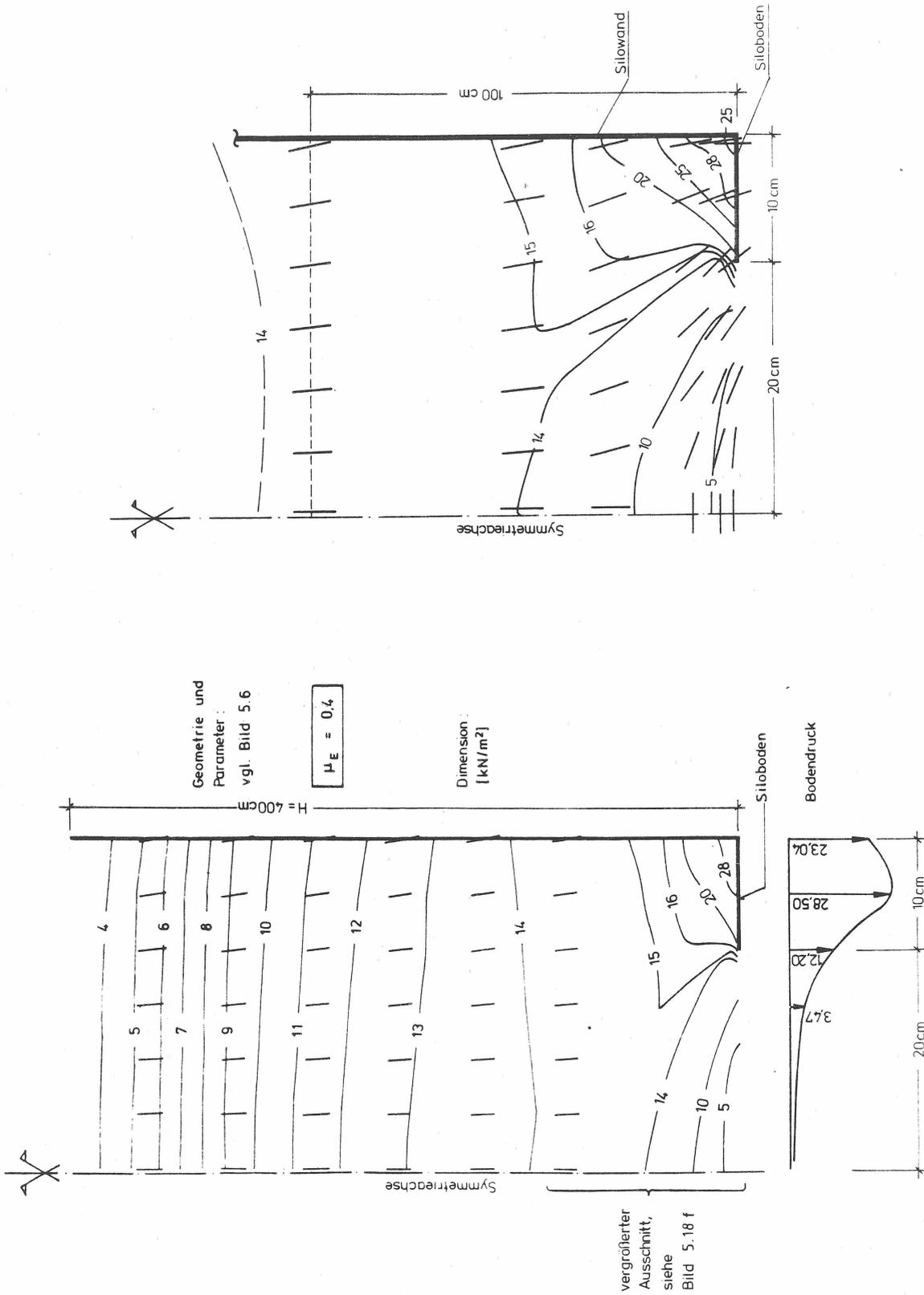


Bild 5.18 f: Detail aus Bild 5.18 e

Bild 5.18 e: Isobaren und Richtungen der größten Hauptspannungen nach fast vollständigem Abbau der Druckspannungen im Öffnungsbereich

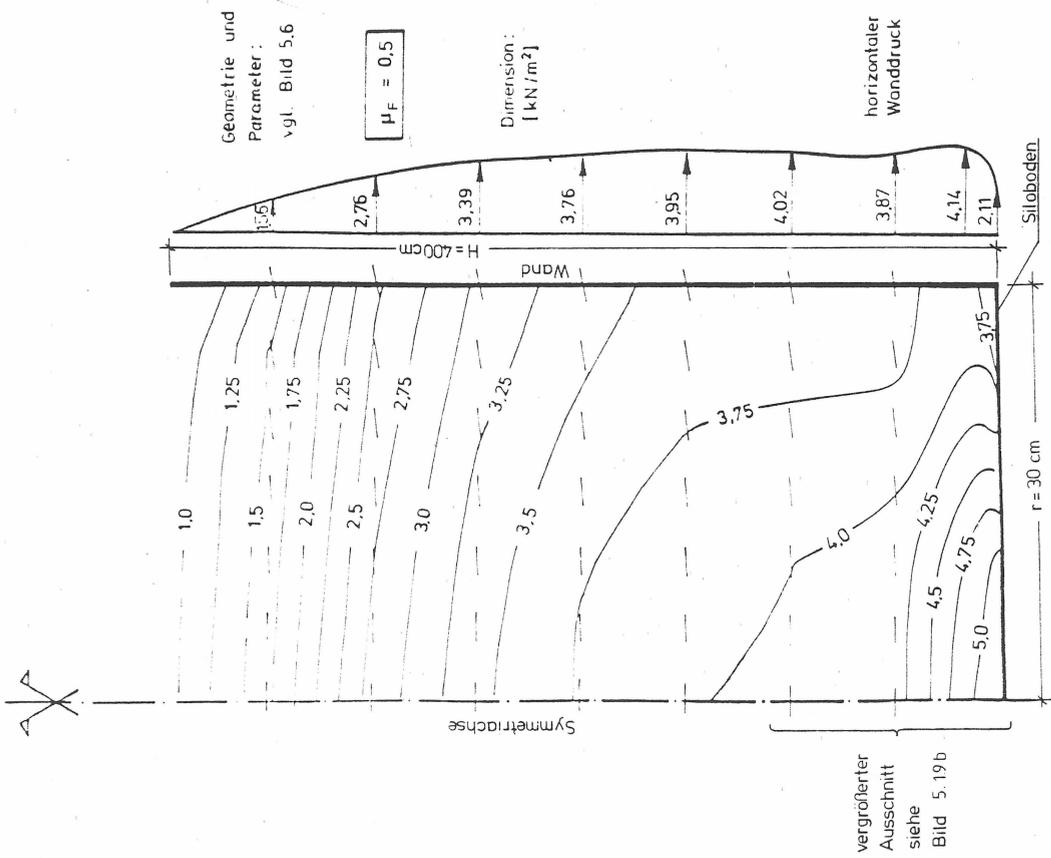


Bild 5.19a: Isobaren und Richtungen der kleinsten Hauptspannungen nach Beendigung des Füllvorgangs

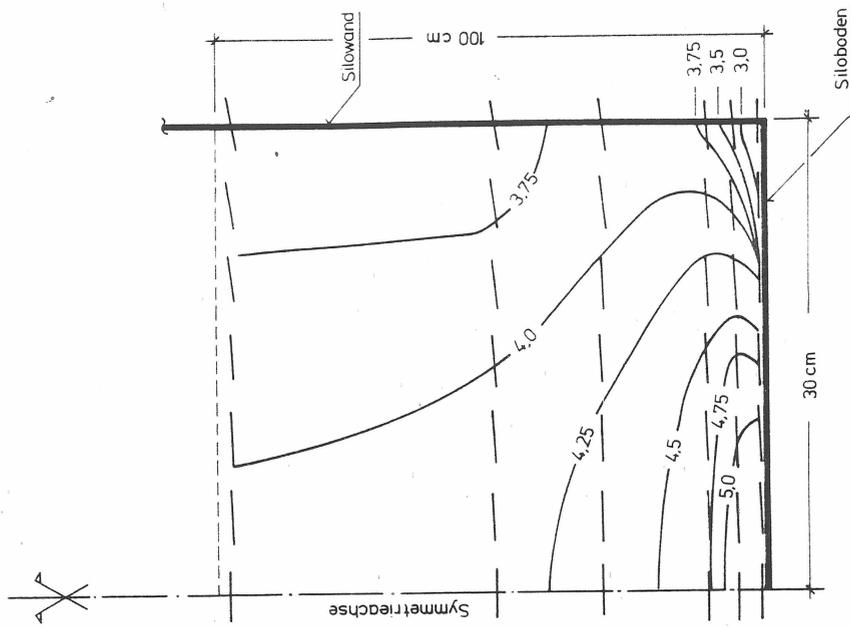


Bild 5.19b: Detail aus Bild 5.19a

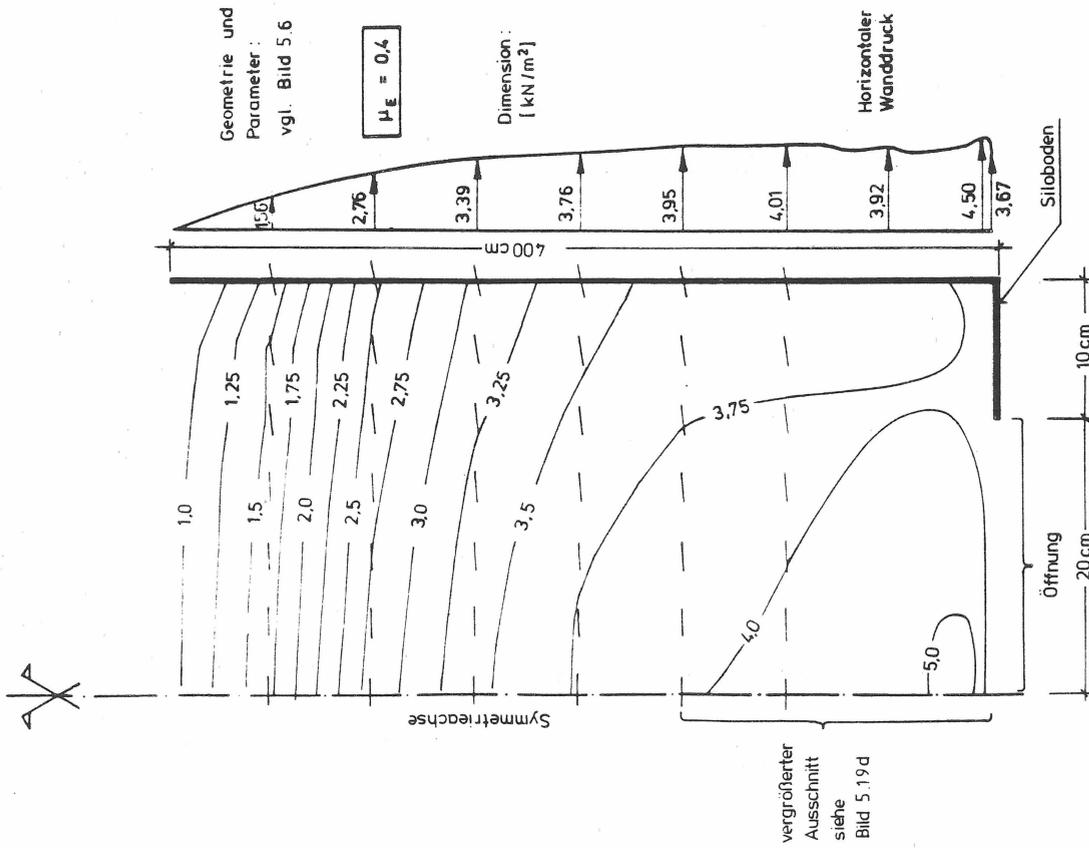


Bild 5.19c: Isobaren und Richtungen der kleinsten Hauptspannungen nach Abbau der halben Druckspannungen im Öffnungsbereich

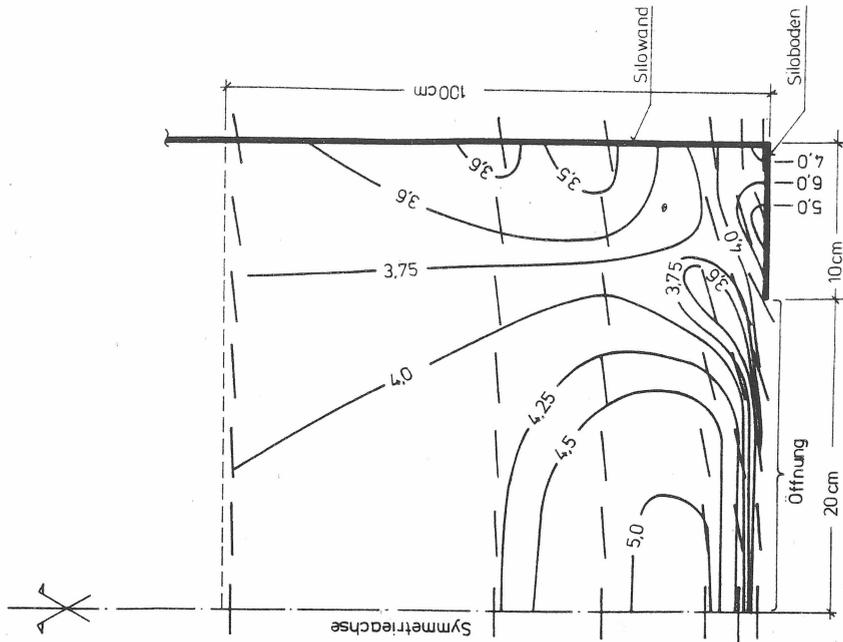


Bild 5.19d: Detail aus Bild 5.19c

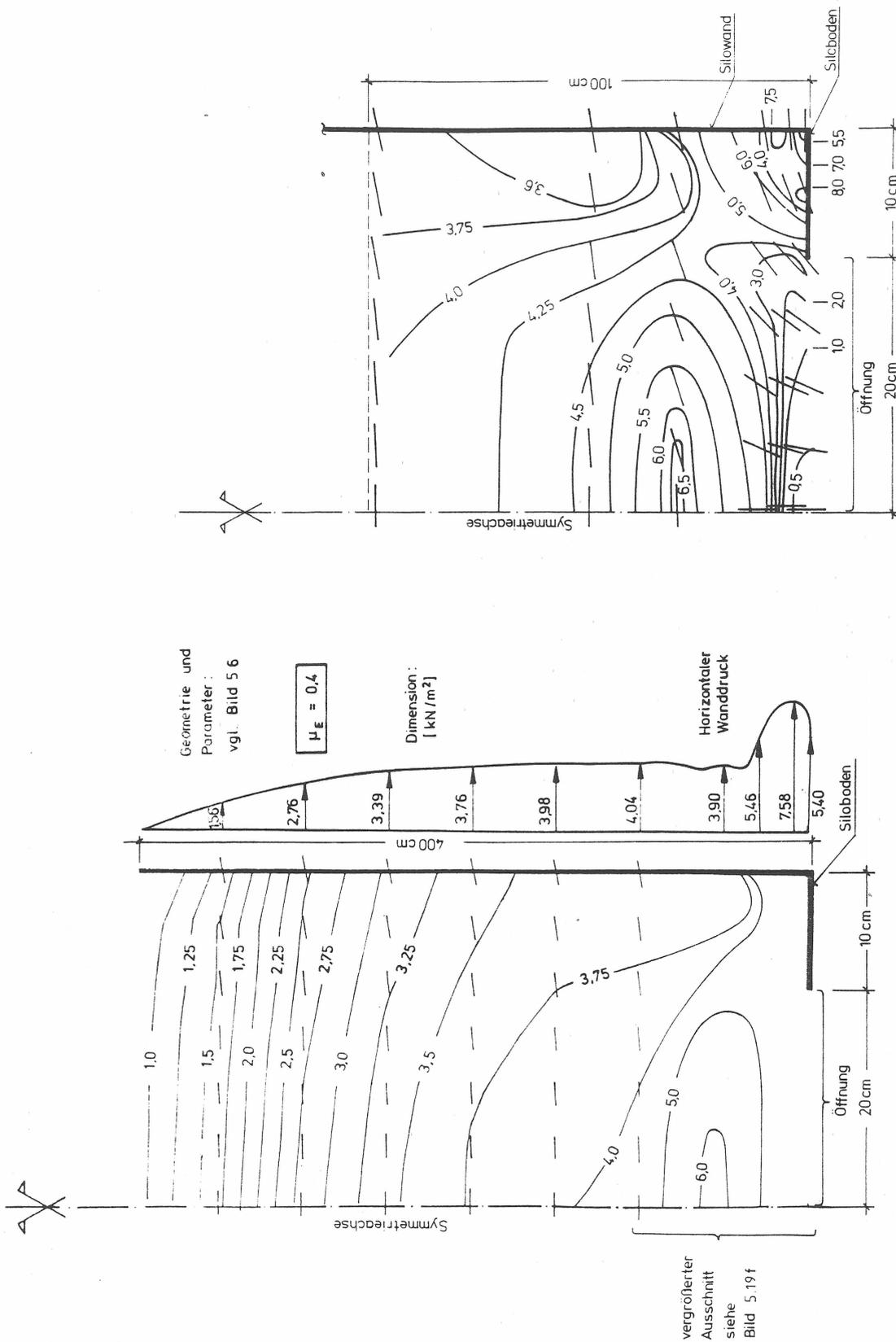


Bild 5.19f: Detail aus Bild 5.19e

Bild 5.19e: Isobaren und Richtungen der kleinsten Hauptspannungen nach fast vollständigem Abbau der Druckspannungen im Öffnungsbereich

6. Zusammenfassung und Ausblick

Mit einem Überblick über die derzeit üblichen Verfahren zur Bestimmung der Druckverhältnisse in Silozellen während des Füll- und Ausfließvorgangs wird aufgezeigt, daß in den bisherigen Theorien wegen der mangelnden Kenntnis über zutreffende Stoffgesetze lediglich von den Gleichgewichtsbedingungen und zusätzlichen vereinfachenden Annahmen ausgegangen wird.

Im Gegensatz zu diesen herkömmlichen Methoden wird in der vorliegenden Arbeit unter Verwendung eines wirklichkeitsnahen Stoffgesetzes von Lade [87] für kohäsionslose Silogüter der vollständige Gleichungssatz der Kontinuumsmechanik, bestehend aus Gleichgewichtsbedingungen, Kompatibilitätsbedingungen und konstitutiven Beziehungen, zur Berechnung von Silodrücken verwendet.

Ausgehend von diesem Gleichungssatz wird ein auf der Finiten Element Methode basierendes numerisches Berechnungsmodell entwickelt, wobei das resultierende nichtlineare algebraische Gleichungssystem mit einem gemischten inkrementell-iterativen Verfahren gelöst wird.

Dazu wird für das nichtassozierte elasto-plastische Stoffgesetz von Lade [87] eine Matrizen-Formulierung entwickelt, die das nichtlineare Spannungs-Dehnungsverhalten von kohäsionslosen Sanden unter beliebigen dreidimensionalen Druckbeanspruchungen beschreibt.

Neben dieser physikalischen Nichtlinearität werden in dem Berechnungsmodell die Bedingungen berücksichtigt, daß für das in dieser Arbeit betrachtete Silogut eine Bruchgrenze vorliegt und Zugspannungen auszuschließen sind. Außerdem werden Kräfte- und Randbedingungen erfaßt, mit denen die Einflüsse aus der Reibung des Silogutes an den begrenzenden Seitenwänden beschrieben werden.

Bei den mit diesem Berechnungsmodell zu dieser Arbeit durchgeführten Siloberechnungen wird zwischen dem Füll- und Lagerungszustand und dem Entleerungsvorgang unterschieden.

Zum Problemkreis "Berechnung der Fülldrücke in Silozellen" wird anhand eines Vergleiches eigener numerischer Ergebnisse mit experimentell ermittelten Werten aufgezeigt, daß die Spannungsverhältnisse in gefüllten Silozellen sowohl dem Verlauf als auch der Größe nach mit dem hier entwickelten Berechnungsmodell zutreffend ermittelt werden.

Mit einer vergleichenden Untersuchung werden die Einflüsse verschiedener Parameter, wie Wandreibung, Wandsteifigkeit, Lagerungsdichte des Silogutes und Siloradius auf die Größe und Verteilung der Verformungen und Spannungen im Inneren des Silobehälters und an den Boden- und Wandbereichen dargestellt.

Die dadurch gewonnenen Einblicke in die inneren Spannungsverhältnisse des Silogutes ermöglichen einen Vergleich mit den Janssen-Formeln [1] und der darauf fußenden DIN 1055, Blatt 6, "Lasten in Silozellen", Ausgabe November 1964:

Die Größe des maximalen Horizontaldrucks an der Silowand wird mit der Janssen-Theorie bzw. mit der DIN 1055, Blatt 6, richtig ermittelt, während der Verlauf dieses Drucks über die Behälterhöhe abweichend von der Norm besser mit dem kleineren Horizontaldruckverhältnis λ nach Ohde [9] bestimmt werden sollte.

Der vertikale Bodendruck ergibt sich mit den Vorschriften der Norm deutlich zu niedrig. Zur richtigen Erfassung eines mittleren vertikalen Bodendrucks sollte auch hier - ausgehend von einem mittleren Horizontaldruck - der gegenüber der Norm kleinere λ -Wert nach Ohde [9] verwendet werden.

Die Ermittlung der Spannungs- und Verformungszustände im Silogut während des Füll- und Lagerungszustandes bildet die Ausgangsbasis für die nachfolgenden Berechnungen des kinetischen Ausfließvorgangs.

Zu diesem Problemkreis wird aufgezeigt, wie der Abbau der Druckspannungen am Rand der Auslauföffnung beim Entleerungsbeginn zu deutlichen Spannungserhöhungen im eingelagerten Silogut führt, die sich bis zur Silowand hin mit entsprechendem Anstieg der Wanddrücke auswirken können.

Die hier für das Silogut "kohäsionsloser Sand" durchgeführte Untersuchung läßt sich ohne weiteres auch auf andere Silogüter ausdehnen; dazu müßten durch entsprechende Versuche an Triaxialgeräten die jeweiligen Stoffparameter für das Gesetz von Lade [87] bereitgestellt werden.

Desweiteren sind konstitutive Beziehungen für solche Silogüter zu entwickeln, bei denen weitere stoffgesetzliche Einflußgrößen, wie z.B. viskoelastische Effekte, von Bedeutung sind, z.B. für Gärfutter.

Neben den in dieser Arbeit untersuchten exakt zylindrischen Siloformen sollten Silogeometrien mit unvermeidlichen, herstellungsbedingten baulichen Imperfektionen, wie sie sich z.B. beim Gleitverfahren für Stahlbetonsilos ergeben können, untersucht werden, da eine Abweichung von der geometrisch exakten Silogeometrie zu höheren Horizontaldrücken führen kann [108, 109].

Auch sollten andere Silogeometrien, wie z.B. zylindrische Silos mit zentrischen und exzentrischen Trichtern, in die Untersuchungen mit einbezogen werden. Daneben ist der Einfluß von Einbauten auf die Spannungsverhältnisse zu studieren.

Desweiteren ist das vorliegende Berechnungsmodell in Hinblick auf die Beschreibung des vollständigen kinetischen Entleerungsvorgangs zu erweitern. Der benötigte Gleichungssatz [110, 111] besteht aus den Bewegungsgleichungen nach Cauchy, einer Beziehung für die Verzerrungsrate und einer konstitutiven Beziehung, mit der neben den üblichen Gleichgewichtsspannungen eines elasto-plastischen Stoffes zusätzlich dissipative Spannungen aus der Bewegung erfaßt werden können [112, 113]; siehe auch die Literaturhinweise in [114].

Für diese Berechnungen zum vollständigen kinetischen Entleerungsvorgang eines Silos können - wie schon bei den hier durchgeführten Untersuchungen zum Entleerungsbeginn - die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und Ergebnisse zum Füllzustand die Ausgangsbasis bilden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Janssen, H.A.: "Versuche über Getreide-
druck in Silozellen"
VDI-Zeitschrift, 39, 1895,
S. 1045 - 1049

- [2] Lvin, J.B.: "Analytical Evaluation of
Pressures of Granular
Materials on Silo Walls"
Powder Technology, 4, 1970/71
S. 280 - 285

- [3] Walker, D.M.: "An Approximate Theory for
Pressures and Arching in
Hoppers"
Chem. Engng. Sci., 21, 1966,
S. 975 - 997

- [4] Yoshioka, N.,
et.al.: 30th Annu. Meeting Soc. Chem.
Engrs. Japan, 1965, S. 249

- [5] Takami, A.,
Oka, S.: "A Theory of the Pressure
Distribution in Powder in
Equilibrium in a Cylindrical
Vessel"
Powder Technology, 10, 1974,
S. 295 - 301

- [6] Koenen, M.: "Berechnung des Seiten- und
Bodendrucks in Silozellen"
Zentralblatt der Bauver-
waltung, 16, 1896, S. 446

- [7] Wenzel, F.: "Druckverhältnisse in Silo-
zellen"
Dissertation TU Braunschweig,
1963

- [8] Motzkus, U.: "Belastung von Siloböden
und Auslauftrichtern durch
körnige Schüttgüter"
Dissertation TU Braunschweig,
1974

- [9] Ohde, J.: "Silo- Aufgaben"
Hütte, Des Ingenieurs
Taschenbuch,
Bd. III, Bautechnik,
27. Aufl., S. 921
Wilh. Ernst & Sohn,
Berlin 1950

- [10] Nanninga, N.: "Gibt die übliche Berechnungsart der Drücke auf die Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse?"
De Ingenieur, Nov. 1956, H. 44, Vol. 68
- [11] Jakobson: "On Pressure in Silos"
Brussels Conf. 58 on Earth Pressure Problems I, Brussels 1958, S. 41
- [12] Cowin, S.C.: "The Theory of Static Loads in Bins"
J. Appl. Mech., 44, 1977, S. 409 - 412
- [13] Cowin, S.C., Sundaram, V.: "The Effect of Material Compressibility on Static Bin Pressures"
Powder Technology, 25, 1980 S. 225 - 227
- [14] Pieper, K., Wenzel, F.: "Druckverhältnisse in Silozellen"
Wilh. Ernst & Sohn, Berlin, 1964
- [15] Reimbert, M. u. A.: "Silos. Berechnung, Betrieb und Ausführung"
Bauverlag GmbH, Wiesbaden, 1975
- [16] Safarian, S.: "Design Pressure of Granular Materials in Silos"
ACI-Journ., Aug. 1969, S. 647 - 655
- [17] Walters, J.K.: "A Theoretical Analysis of Stresses in Silos with Vertical Walls"
Chem. Engng. Sci., 28, 1973, S. 13 - 21
- [18] Walters, J.K.: "A Theoretical Analysis of Stresses in Axially-Symmetric Hoppers and Bunkers"
Chem. Engng. Sci., 28, 1973, S. 779 - 789

- [19] Coulomb, C.A.: "Essai sur une application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture" Mémoires de Mathématique de l'Académie Royale des Sciences, Vol. 7, Paris, 1776
- [20] Mohr, O.: "Abhandlungen aus dem Gebiete der Technischen Mechanik" Wilh. Ernst & Sohn, Berlin 1928
- [21] Sokolovskii, V.V.: "Statics of Granular Media" Pergamon Press, Oxford, 1965
- [22] De Jong, G.J.: "Statics and Kinematics in the Failable Zone of a Granular Material" Thesis, University of Delft, 1959
- [23] Schäfer, M.: "Über die Anwendung der Charakteristikenmethode in der Bodenmechanik" ZAMM, 48, Sonderheft GAMM-Tagung, 1968, T 158, T 159
- [24] Schäfer, M.: "Über die Berechnung von Schüttungen unter Zugrundelegung einer allgemeinen Bruchhypothese nach der Charakteristikenmethode" Powder Technology, 4, 1970/71, S. 69 - 73
- [25] Zimmermann, B.: "Praktische Berechnung der Böschungsform von Schüttgütern unter Zugrundelegung einer nicht-linearen Bruchhypothese" Powder Technology, 4, 1970/71, S. 111 - 113

- [26] Marais, R.: "Stresses at Wedges of Cohesionless Materials formed by Free Discharge at the Apex" Trans. ASME, J. Engng. Ind., May 1969, S. 345 - 352
- [27] Torre, C.: "Berechnung von Silodrücken nach der Charakteristikentheorie" Österreichische Ingenieurzeitschrift, 1, 1968, S. 16 - 19
- [28] Cornish, R.J.: "Pressure on a Hopper Wall at a Stress Discontinuity during Mass Flow" Powder Technology, 8, 1973, S. 1 - 12
- [29] Hancock, A.W., Nedderman, R.M.: "Prediction of Stresses on Vertical Bunker Walls" Trans. Instn. Chem. Engrs., 52, 1974, S. 170 - 179
- [30] Horne, R.M., Nedderman, R.M.: "Analysis of the Stress Distribution in Two-Dimensional Bins by the Method of Characteristics" Powder Technology, 14, 1976, S. 93 - 102
- [31] Horne, R.M., Nedderman, R.M.: "An Analysis of Switch Stresses in Two-Dimensional Bunkers" Powder Technology, 19, 1978, S. 235 - 241
- [32] Horne, R.M., Nedderman, R.M.: "Stress Distribution in Hoppers" Powder Technology, 19, 1978, S. 243 - 254
- [33] Morrison, H.L., Richmond, O.: "Application of Spencer's Ideal Soil Model to Granular Materials Flow" Trans. ASME, J. Appl. Mech., March 1976, S. 49 - 53

- [34] Casagrande, A.: "Characteristics of Cohesionless Soils Affecting the Stability of Slopes and Earth Fills" Journ. Bost. Soc. Civ. Eng., 23, 1936, S. 13 - 32
- [35] Reynolds, O.: "On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Contact, with experimental illustrations" Phil. Mag., 20, 1885, S. 469 - 481
- [36] Roscoe, K.H.: "The Critical State Concept and the Use of Short-Wave Length Radiation to Study the Onset and Maintenance of Flow in Granular Materials" Proc. "Probleme des Kugelhaukens und körniger Schüttungen", Herausgeber: D. Bedenig Euratom 4190 d,e, 1968, S. 79 - 115
- [37] Schofield, A.N., Wroth, C.P.: "Critical State Soil Mechanics" McGraw-Hill, London, 1968
- [38] Jenike, A.W.: "Gravity Flow of Bulk Solids" Univ. Utah, Engineering Exp. Station, Bull. 108, 1961
- [39] Jenike, A.W., Elsey, P.J., Woolley, R.H.: "Flow Properties of Bulk Solids", Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 60, 1960, S. 1168 - 1190
- [40] Ashton, M.D., Cheng, D.C.-H., Farley, R., Valentin, F.H.: "Some Investigations into the Strength and Flow Properties of Powders" Rheol. Acta, Bd. 3, H.4, 1965, S. 206 - 218

- [41] Williams, J.C.,
Birks, A.H.: "The Preparation of Powder Specimens for Shear Cell Testing"
Rheol. Acta, Bd. 4, H.3,
1965, S. 170 - 180
- [42] Schwedes, J.: "Fließverhalten von Schüttgütern in Bunkern"
Verlag Chemie, Weinheim,
1968
- [43] Schwedes, J.: "Scherverhalten leicht verdichteter, kohäsiver Schüttgüter"
Dissertation, Universität Karlsruhe, 1971
- [44] Hoffmann, O.H.: "Neuere Grundlagen der Mechanik körniger Haufwerke"
Grundl. Landtechnik 25,
1975, Nr. 2, S. 48 - 59
- [45] Reckling, K.-A.: "Mechanik I"
Vieweg, Braunschweig, 1968
- [46] Platonov, P.,
Poltorak, V.: "Investigation of Shear of a Granular Material along a Bordering Surface"
Powder Technology, 3,
1969/70, S. 361 - 363
- [47] Peschl, I.A.S.Z.: "Beitrag zur sicheren Berechnung der Silos"
Die Mühle und Mischfutters-
futters-technik, 110,
1973, H. 40, S. 635
- [48] Peschl, I.A.S.Z.: "Probleme der Silostatik"
Haus der Technik e.V.,
Essen, Vortragsveröffentlichungen H. 386,
Lagertechnik für Schüttgüter,
Vulkan-Verlag,
Essen, 1976

- [49] Jenike, A.W.:
"Load Assumptions and Distributions in Silo Design"
Symposium Construction of Concrete Silos,
28.2. - 2.3.1977,
Fagernes, Norwegen
Norwegian Society of Chartered Engineers
- [50] Ogniwek, D.:
"Die innere Reibung von Schüttgütern. Untersuchungen von Materialeigenschaften verschiedener Silo-Lagerstoffe"
Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 3, Nr. 50, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1979
- [51] Hencky, H.:
"Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen"
ZAMM, 4, 1924, S. 323 - 334
- [52] Fung, Y.C.:
"Foundations of Solid Mechanics"
Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, S. 477
- [53] Kondner, R.L.,
Zelasko, J.S.:
"A Hyperbolic Stress-Strain Formulation for Sands"
Proceedings, 2nd Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Vol. 1, Brazil, 1963, S. 289 - 324
- [54] Duncan, J.M.,
Chang, C.Y.:
"Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils"
J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 96, No. SM5, Sept., 1970, S. 1629 - 1653
- [55] Drucker, D.C.,
Prager, W.:
"Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design"
Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, 1952, S. 157 - 165

- [56] Drucker, D.C.: "Limit Analysis of Two and Three Dimensional Soil Mechanics Problems" J. Mech. Phys. of Solids, Vol. 1, 1953, S. 217 - 226
- [57] Shield, R.T.: "On Coulomb's Law of Failure in Soils" J. Mech. Phys. of Solids, Vol. 4, 1955, S. 10 - 16
- [58] Kirkpatrick, W.M.: "The Condition of Failure for Sands" Proc., IVth. International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, 1957, Vol. 1, S. 172 - 178
- [59] Kirkpatrick, W.M.: Civil Engineering Department, Internal Report No. SM 70/01, April 1970, University of Strathclyde
- [60] Drucker, D.C.,
Gibson, R.E.,
Henkel, D.J.: "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity" Trans. ASCE, Vol. 122, 1957, S. 338 - 346
- [61] Drucker, D.C.: "Concept of Path Independence and Material Stability for Soils" Proc. Int. Symp. of Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, 1964, Springer-Verlag, 1966, S. 23 - 46
- [62] Nelson, I.,
Baron, M.: "Development of Mathematical Material Models" Report 5-68-1. Contract DASA 39-67 -C-146-XZ-508 und DA-49-146-XZ-568, Paul Weidlinger, Consulting Engr., Juli, 1968
- [63] Jenike, A.W.,
Shield, R.T.: "On the Plastic Flow of Coulomb Solids beyond Original Failure" J. Appl. Mech., Dec. 1959, S. 599 - 602

- [64] DiMaggio, F.L.,
Sandler, I.S.:
"Material Model for Granular Soils"
J. Engng. Mech. Div.,
ASCE, Vol. 97, No.EM 3,
Juni 1971, S. 935 - 950
- [65] Sandler, I.S.,
DiMaggio, F.L.,
Baladi, G.Y.:
"Generalized Cap Model
for Geological Materials"
J. Geotech. Eng. Div.,
ASCE, Vol. 102, No.GT 7,
Juli 1976, S. 683 - 699
- [66] Prévost, J.H.,
Höeg, K.:
"Effective Stress-Strain
Strength Model for Soils"
J. Geotech. Eng. Div.,
ASCE, Vol. 101, No.GT3,
März 1975, S. 259 - 278
- [67] Roscoe, K.H.,
Burland, J.B.:
"On the Generalized Stress-
Strain Behaviour of
'Wet' Clay" in:
"Engineering Plasticity",
edited by J. Heymann,
F.A. Lecki, Cambridge
Univ. Press, London, 1968
S. 535 - 609
- [68] Khosla, V.K.,
Wu, T.H.:
"Stress-Strain Behaviour
of Sand"
J. Geotech. Eng. Div.,
ASCE, Vol. 102, No. GT4,
April 1976, S. 303 - 321
- [69] Rowe, P.W.:
"The Stress-Dilatancy
Relation for Static
Equilibrium of an Assembly
of Particles in Contact"
Proceedings of the Royal
Society, Vol. 269,
Series A, London, Oct.,
1962, S. 500 - 527
- [70] Roscoe, K.H.,
Schofield, A.N.,
Wroth, C.P.:
"On the Yielding of Soils"
Géotechnique, London, Vol.8,
No. 1, 1958, S. 22 - 53
- [71] Roscoe, K.H.,
Schofield, A.N.,
Thurairajah, A.:
"Yielding of Clays in
States Wetter than Critical"
Géotechnique, London, Vol.11
No. 3, 1963, S. 211 - 240

- [72] Poorooshasb, H.B.: "The Properties of Soils and Other Granular Media in Simple Shear"
PhD thesis, Cambridge, 1961
- [73] Poorooshasb, H.B.,
Holubec, I.,
Sherbourne, A.N.: "Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression, Part I"
Canadian Geotechnical Journ., Vol. III, No. 4, Nov. 1966, S. 179 - 190
- [74] Poorooshasb, H.B.,
Holubec, I.,
Sherbourne, A.N.: "Yielding and Flow of Sand in Triaxial Compression, Part II and III"
Canadian Geotechnical Journ., Vol. IV, No. 4, Nov. 1967, S. 376 - 397
- [75] Wroth, C.P.,
Bassett, R.H.: "A Stress-Strain Relationship for the Shearing Behaviour of a Sand"
Géotechnique, London, Vol. 15, No. 1, 1965, S. 32 - 56
- [76] Drucker, D.C.: "A More Fundamental Approach to Plastic Stress Strain Relations"
1st U.S. Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1952, S. 487 - 491
- [77] Ko, H.-Y.,
Scott, R.F.: "A New Soil Testing Apparatus"
Géotechnique, London, Vol. 17, Mar. 1967, S. 40 - 57
- [78] Ko, H.-Y.,
Scott, R.F.: "Deformation of Sand in Shear"
J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 93, No. SM5, Sept. 1967, S. 283 - 310
- [79] Ko, H.-Y.,
Scott, R.F.: "Deformation of Sand at Failure"
J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 94, No. SM4, Juli 1968, S. 883 - 898

- [80] Green, G.E.,
Bishop, A.W.: "A Note on the Drained Strength of Sand under Generalized Strain Conditions"
Géotechnique, London, Vol. 19, 1969, S. 144 - 149
- [81] Stutz, P.: "Comportement élasto-plastique des milieux granulaires"
Foundations of Plasticity, Internat. Symposium, Warschau, 1972
- [82] Gudehus, G.: "Elastoplastische Stoffgleichungen für trockenen Sand"
Ingenieur-Archiv 42, 1973, S. 151 - 169
- [83] Lade, P.V.,
Duncan, J.M.: "Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil"
J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 99, No. SM10, Oct. 1973, S. 793 - 812
- [84] Lade, P.V.,
Duncan, J.M.: "Stress-Path Dependent Behaviour of Cohesionless Soil"
J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 102, No. GT1, Jan. 1976, S. 51 - 68
- [85] Fröning, H.: "Spannungs-Deformationsbeziehungen für Silogüter und Randbedingungen zur numerischen Berechnung der Entleerungsvorgänge in Silozellen"
Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 4, Nr. 44, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1979
- [86] Brown, E.H.: "A Theory for the Mechanical Behaviour of Sand"
Proc. XIth.Int.Congr. Appl. Mech., München, 1964

- [87] Lade, P.V.: "Elasto-Plastic Stress Strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces" Int. J. Solids Structures, Vol. 13, 1977, S. 1019 - 1035
- [88] Lade, P.V.: "Prediction of Undrained Behaviour of Sand" J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 104, No. GT6, June 1978, S. 721 - 735
- [89] Lade, P.V.,
Duncan, J.M.: "Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil" J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 101, No. GT10, Oct. 1975, S. 1037 - 1053
- [90] Timoshenko, S.,
Goodier, J.N.: "Theory of Elasticity" 2nd ed., McGraw-Hill, 1951
- [91] Zienkiewicz, O.C.: "The Finite Element Method" 3rd Edition, McGraw-Hill, London, 1977
- [92] Zienkiewicz, O.C.,
Valliappan, S.,
King, I.P.: "Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material" Géotechnique, London, Vol. 18, 1968, S. 56 - 66
- [93] Zienkiewicz, O.C.,
Valliappan, S.,
King, I.P.: "Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems, 'Initial Stress', Finite Element Approach" Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 1, 1969, S. 75 - 100
- [94] Roscoe, K.H.: "The Influence of Strains in Soil Mechanics" 10th Rancine Lecture, Géotechnique, London, Vol. 20, No.2, 1970, S. 129 - 170

- [95] Roscoe, K.H.,
Basset, R.H.,
Cole, E.R.L.:
"Principal Axes Observed during Simple Shear of a Sand"
Proc. Conf. on "Shear Strength Properties of Natural Soils and Rocks", Oslo, 1967, Vol. I, S. 231 - 237
- [96] Janbu, N.:
"Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests"
European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Wiesbaden, Vol. I, 1963, S. 19 - 25
- [97] Holubec, I.:
"Elastic Behaviour of Cohesionless Soil"
J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol.94, No. SM6, Nov. 1968, S. 1215 - 1231
- [98] Calladine, C.R.:
"Overconsolidated Clay: A Microstructural View"
Proc. Symp. Role of Plasticity in Soil Mechanics, edited by A.C.Palmer, Cambridge University, 1973, S. 144
- [99] Lade, P.V.:
"The Stress-Strain and Strength Characteristics of Cohesionless Soils"
Ph.D.Thesis, University of California, Berkeley, 1972

- [100] Yamada, Y.,
Yoshimura, N.,
Sakurai, T.:
"Plastic Stress-
Strain Matrix and its
Application for the
Solution of Elastic-
Plastic Problems by
the Finite Element
Method"
Int. J. Mech. Sci.,
Vol. 10, 1968,
S. 343 - 354
- [101] Lee, K.L.,
Seed, B.H.:
"Drained Strength
Characteristics of
Sands"
J. Soil Mech. Found.
Div., ASCE, No. SM6,
Nov., 1967, S. 117 - 141
- [102] Hill, R.:
"The Mathematical
Theory of Plasticity"
Oxford University
Press, London,
1950
- [103] Mendelson, A.:
"Plasticity: Theory
and Application"
The Macmillan Company,
New York, 1968
- [104] Richter, T.,
Savidis, S.:
"Einfluß des Element-
typs und der Netzwahl
bei der Standsicher-
heitsberechnung eines
Streifenfundaments"
in: "Finite Elemente
in der Baupraxis",
Herausgeber: P.J.Pahl,
E.Stein, W.Wunderlich,
Verlag Ernst & Sohn,
Berlin, 1978,
S. 212 - 221
- [105] Frese, B.:
"Druckverhältnisse
in zylindrischen
Silozellen"
Aus Forschung und
Lehre, Heft 4,
Institut für Trag-
konstruktionen,
Universität Karlsruhe,
1979

- [106] Wagner, K: "Probleme des Silodruckes"
Dissertation TU Braunschweig, 1971
- [107] Schütz, M.,
Pieper, K.: Bericht über das Forschungsvorhaben
"Innere Reibung - Ermitteln der Schüttgutkennwerte zum Berechnen von Silo- lasten am Modellsilo und Vergleich mit Messungen an Schergeräten"
TU Braunschweig, Lehrstuhl für Hochbaustatik, 1981
- [108] Jenike, A.W.,
Johanson, J.R.,
Carson, J.W.: "Bin Loads - Part. 2: Concepts, Part 3: Mass-Flow Bins, Part 4: Funnel-Flow Bins".
ASME J. Eng. Ind. 95, 1973, Sev. B, Nr. 1
- [109] Askegaard, V.,
Bergholdt, M.,
Nielsen, J.: "Probleme bei der Messung des Silodruckes mit Hilfe von Druckzellen"
Die Bautechnik 3, 1972, S. 83 - 86
- [110] Malvern, L.E.: "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium"
Prentice-Hall, Inc.
Englewood Cliffs, New Jersey, 1969
- [111] Truesdell, C.,
Noll, W.: "The Non-Linear Field Theories of Mechanics"
Encyclopedia of Physics, Vol. III/3
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1965
- [112] Goodman, M.A.: "A Continuum Theory for the Dynamical Behaviour of Granular Materials"
Ph. D. Thesis, 1970, Tulane University

- [113] Savage, S.B.: "Gravity Flow of Cohesionless Granular Materials in Chutes and Channels"
J. Fluid Mech. (1979),
Vol. 92, Part 1, S. 53 - 96
- [114] Eibl, J.,
Kühn, H.E.: Bericht zum Forschungsvorhaben
"Druckverteilung in Silo-
ausläufen"
Lehrstuhl für Beton- und
Stahlbetonbau,
Universität Dortmund, 1976
- [115] Melan, E.: "Zur Plastizität des räum-
lichen Kontinuums"
Ing.-Arch., Vol. 9,
1938, S. 116 - 126

ANHÄNGE A-F

Darstellung der Mohr-Coulomb-Bruchbedingung für kohäsions-
loses Material in der Triaxial- und Deviatorebene
(vgl. Abschnitt 3.2.2)

Im Schnitt der Pyramide mit der Ebene, die von den Achsen σ_3 und $\sqrt{2} \sigma_1 = \sqrt{2} \sigma_2$ aufgespannt wird (Bild A1), zeigen sich zwei Schnittkanten der Pyramide, nämlich die Geraden

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sigma_1 \quad (\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$$

und

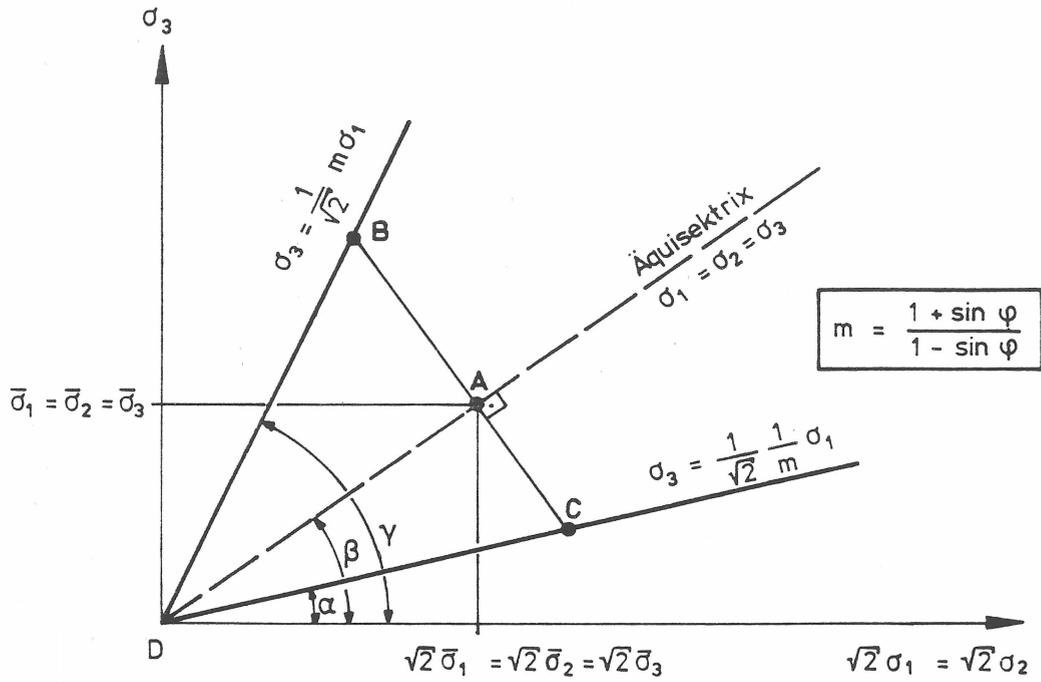
$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot m \cdot \sigma_1 \quad (\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1)$$

Nach Bild A2 erscheinen die Strecken \overline{AB} und \overline{AC} in der Deviatorebene in wahrer Länge. Mit den Vorwerten α , β , γ und \overline{AD} nach Bild A1 bestimmen sich \overline{AB} und \overline{AC} für einen Deviatorabschnitt $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} \cdot \tan(\gamma - \beta) \Rightarrow \overline{AB} = \frac{m-1}{m+2} \sqrt{6} \cdot \bar{\sigma}_1 \\ &= \frac{2 \sin \varphi}{3 - \sin \varphi} \sqrt{6} \cdot \bar{\sigma}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{AD} \cdot \tan(\beta - \alpha) \Rightarrow \overline{AC} = \frac{m-1}{2m+1} \sqrt{6} \cdot \bar{\sigma}_1 \\ &= \frac{2 \sin \varphi}{3 + \sin \varphi} \sqrt{6} \cdot \bar{\sigma}_1 \end{aligned}$$

Wegen der 6-fachen Symmetrie genügt zur vollständigen Darstellung ein Ausschnitt, wie z.B. der Sektor zwischen den Achsen $2/3 \sqrt{\sigma_3}$ und $-2/3 \sqrt{\sigma_1}$ in Bild A2.



$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{m}\right) \quad ; \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot m\right) \quad ; \quad \overline{AD} = \bar{\sigma}_1 \cdot \sqrt{3}$$

Bild A1: Pyramide nach Mohr-Coulomb in der Triaxialebene
 $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$ für $\varphi = 30^\circ \Rightarrow m = 3$

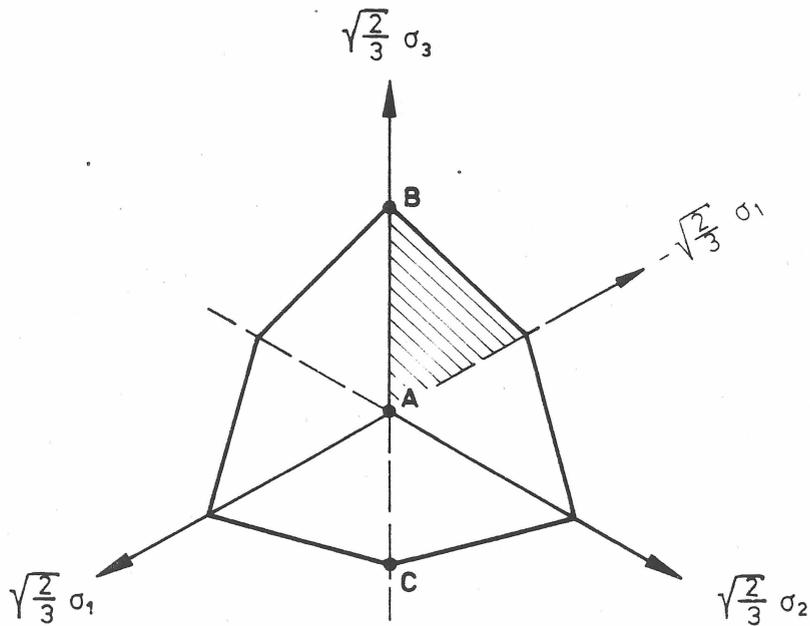


Bild A2: Mohr-Coulomb Pyramide in der Deviatorebene
 für $\varphi = 30^\circ$

Ein beliebiger, aus den Komponenten der Hauptspannungen gebildeter Ortsvektor \bar{r} im dreidimensionalen Hauptspannungsraum läßt sich immer so zerlegen, daß eine Komponente \bar{q} in Richtung der Äquisektrix weist, während die dazu Senkrechte \bar{p} in der Deviatorebene liegt (Bild A3).

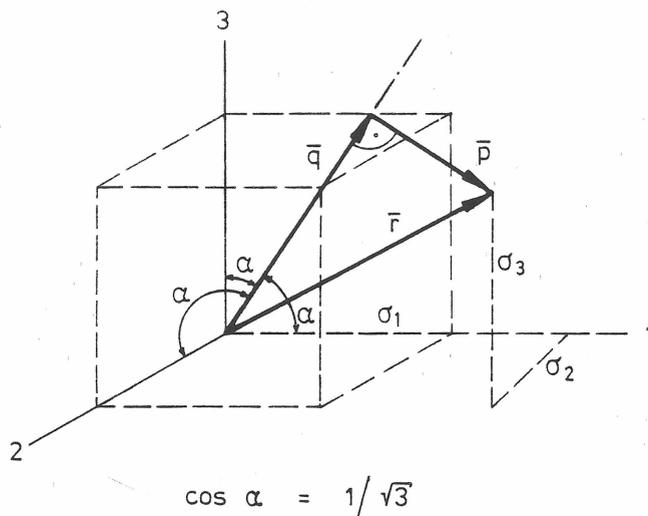


Bild A3: Zerlegung des Ortsvektors \bar{r}

Der Abstand der Deviatorebene vom Koordinatenursprung wird durch den Betrag

$$|\bar{q}| = \frac{J_1}{\sqrt{3}} \quad (\text{A1})$$

gegeben; der Vektor \bar{p} in der Deviatorebene läßt sich z.B. in Polarkoordinaten durch den Betrag

$$|\bar{p}| = \sqrt{2J_2'} \quad (\text{A2})$$

und den Winkel

$$\cos 3\theta = \frac{3}{2} \sqrt{3} \frac{J_3'}{J_2'^{3/2}} \quad (\text{A3})$$

festlegen, vgl. Bild A4. In diesen Gleichungen ist I_1 die erste Invariante des Spannungstensors, während I_2' und I_3' die zweite bzw. dritte Invariante des Spannungsdeviators bedeuten.

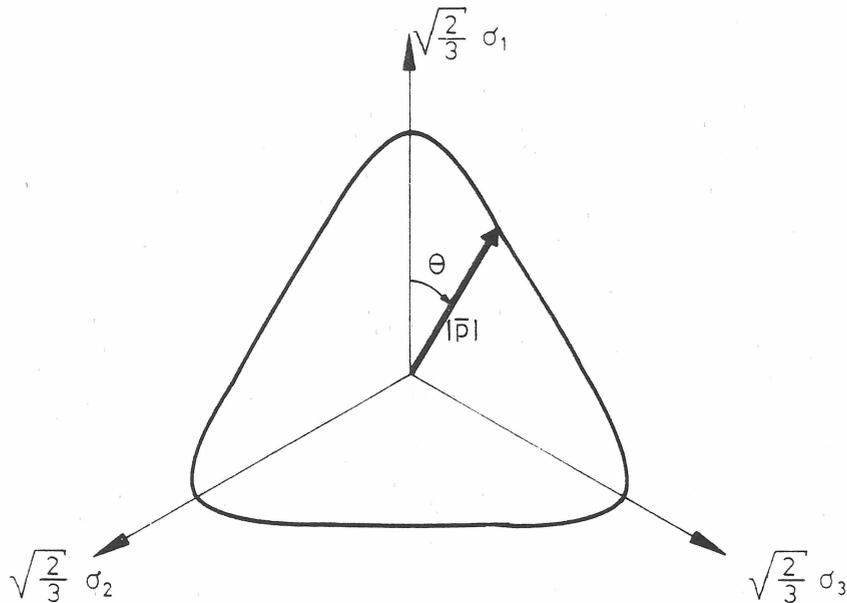


Bild A4: Festlegung des Vektors \bar{p} in der Deviatorebene

Aus Gl. (A3) lässt sich mit

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (\text{A4})$$

ein Ausdruck herleiten, der in der Bodenmechanik häufig zur Erfassung des Einflusses der mittleren Hauptspannung σ_2 bei $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ verwendet wird, vgl. z.B. Bild 3.15b.

Bestimmung der Proportionalitätsfaktoren $\Delta\lambda_c$ und $\Delta\lambda_p$ für
plastisch-kontraktives und -expansives Fließen
(vgl. Abschnitt 4.1.3.1, Gl. (4.22) und Gl. (4.29))

a) Plastisch-kontraktives Fließen

Aus der Fließregel (4.19) erhält man

$$\Delta\lambda_c = \Delta\varepsilon^c \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial f_c(\underline{\sigma})}$$

Nach Hill [102] gilt: $\Delta W_c = \underline{\sigma} \cdot \Delta\varepsilon^c$.

Die Elimination von $\Delta\varepsilon^c$ führt zu

$$\Delta\lambda_c = \Delta W_c \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial f_c(\underline{\sigma})} \cdot \frac{1}{\underline{\sigma}}$$

Mit

$$f_c = I_1^2 + 2I_2 \quad (4.18a)$$

bzw.

$$f_c = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{13}^2 + 2\sigma_{23}^2 \quad (4.18b)$$

ist

$$\frac{\partial f_c(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\sigma} = 2f_c,$$

so daß sich für $\Delta\lambda_c$ folgender Ausdruck ergibt:

$$\Delta\lambda_c = \frac{\Delta W_c}{2f_c} \quad (4.22)$$

b) Plastisch-expansives Fließen

In Analogie zum plastisch-kontraktiven Fließen erhält man unter Einführung des plastischen Potentials g_p

$$\Delta \lambda_p = \Delta W_p \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial g_p(\sigma)} \cdot \frac{1}{\sigma} ;$$

Mit

$$g_p = I_1^3 - \left\{ 27 + \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \right\} \cdot I_3 \quad (4.26)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial g_p}{\partial \sigma} \cdot \sigma = 3g_p + m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \cdot I_3$$

und daraus

$$\Delta \lambda_p = \frac{\Delta W_p}{3g_p + m \cdot \eta_2 \cdot \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \cdot I_3} \quad (4.29)$$

Herleitung des plastischen Potentials für plastisch-expansives Fließen

(vgl. Abschnitt 4.1.3.1, Gl. (4.26))

Für das plastisch-expansive Fließen gibt Lade die Belastungsfunktion

$$f_p = \frac{I_1^3}{I_3} \cdot I_1^m - 27 \cdot I_1^m \quad (4.24)$$

bzw.

$$0 = I_1^3 \cdot I_1^m - 27 \cdot I_1^m \cdot I_3 - f_p \cdot I_3$$

Mit den experimentell abgesicherten Erkenntnissen [87], daß für das plastische Potential $g_p(\underline{\sigma})$ dieselbe Funktion wie für die Fließfläche $f_p(\underline{\sigma})$ zugrunde gelegt werden kann und daß zudem für jeden Spannungszustand $\underline{\sigma}$ der Wert des Potentials $g_p(\underline{\sigma})$ kleiner ist als der zugehörige Wert $f_p(\underline{\sigma})$, erhält Lade durch Substitution von f_p durch die rein empirisch bestimmte Funktion η_2 bei sonst gleichen Verhältnissen:

$$h = I_1^3 \cdot I_1^m - 27 \cdot I_1^m \cdot I_3 - \eta_2(f_p) \cdot I_3$$

Mit $\frac{h}{I_1^m} = g_p$

erhält man so

$$g_p = I_1^3 - (27 + \eta_2 \cdot \frac{1}{I_1^m}) \cdot I_3 \quad (4.26)$$

Vektoren $\underline{\Delta\sigma}$, $\underline{\Delta\varepsilon}$ für den dreidimensionalen Spannungszustand
(vgl. Abschnitt 4.1.3.2)

Der Tensor

$$\underline{\Delta\sigma} = \begin{pmatrix} \Delta\sigma_{11} & \Delta\sigma_{12} & \Delta\sigma_{13} \\ & \Delta\sigma_{22} & \Delta\sigma_{23} \\ & \text{symm.} & \Delta\sigma_{33} \end{pmatrix}$$

wird geordnet zum Vektor

$$\underline{\Delta\sigma} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \\ \Delta\sigma_{23} \\ \Delta\sigma_{13} \end{bmatrix}$$

Analog

$$\underline{\Delta\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\varepsilon_{22} \\ \Delta\varepsilon_{33} \\ \Delta\varepsilon_{12} \\ \Delta\varepsilon_{23} \\ \Delta\varepsilon_{13} \end{bmatrix}$$

Anhang D1

Elastische Stoffmatrizen $[D^e]$, $[D^e]^{-1}$
 (vgl. Abschnitt 4.1.3.2)

$$[D^e] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot$$

1	$\frac{\nu}{1-\nu}$	$\frac{\nu}{1-\nu}$	0	0	0
	1	$\frac{\nu}{1-\nu}$	0	0	0
		1	0	0	0
			$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	0	0
	symm.			$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$	0
					$\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$

$$[D^e]^{-1} = \frac{1}{E} \cdot$$

1	$-\nu$	$-\nu$	0	0	0
	1	$-\nu$	0	0	0
		1	0	0	0
			$2(1+\nu)$	0	0
	symm.			$2(1+\nu)$	0
					$2(1+\nu)$

E = Elastizitätsmodul

ν = Poisson- Zahl

Bestimmung von $\underline{a} = \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$

(vgl. Abschnitt 4.1.3.2, Gl. (4.40))

Aus

$$f_c = I_1^2 + 2 \cdot I_2 \quad (4.18a)$$

bestimmt sich \underline{a} zu

$$\begin{aligned} \underline{a} = \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial \underline{\sigma}} \right\} &= \left\{ \frac{\partial f_c}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f_c}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \\ &= [2 \cdot [M_1] + 2 \cdot [M_2]] \cdot \underline{\sigma} \end{aligned}$$

mit den Matrizen $[M_1]$ und $[M_2]$ nach Anhang D5.

Der Vektor \underline{a} ergibt sich dann zu

$\underline{a} =$	2	0	0	0	0	0	σ_{11}
		2	0	0	0	0	σ_{22}
			2	0	0	0	σ_{33}
				4	0	0	σ_{12}
			symm.		4	0	σ_{23}
						4	σ_{13}

bzw. zu

a =

$2 \sigma_{11}$
$2 \sigma_{22}$
$2 \sigma_{33}$
$4 \sigma_{12}$
$4 \sigma_{23}$
$4 \sigma_{13}$

Bestimmung von $\underline{b} = \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$

(vgl. Abschnitt 4.1.3.2, Gl. (4.41))

Die Gleichung des plastischen Potentials g_p für das plastisch-expansive Fließen lautet

$$g_p = I_1^3 - 27I_3 - \eta_2 \cdot I_1^{-m} \cdot I_3 \quad (4.26)$$

Damit erhält man

$$\underline{b} = \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = \left\{ \frac{\partial g_p}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial g_p}{\partial I_3} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\sigma}} \right\} .$$

Mit den Ausdrücken für A und B

$$A \cdot I_1 = \frac{\partial g_p}{\partial I_1} = 3I_1^2 + m \cdot \eta_2 \cdot \frac{I_3}{I_1^{m+1}}$$

$$-B = \frac{\partial g_p}{\partial I_3} = -(27 + \eta_2 \cdot \frac{1}{I_1^m})$$

und den Matrizen $[M_1]$ und $[M_3]$ nach Anhang D5 ergibt sich schließlich

$$\underline{b} = [A \cdot [M_1] - B \cdot [M_3]] \cdot \underline{\sigma}$$

oder

$\underline{b} =$

A	$A - \frac{B}{2} \sigma_{33}$	$A - \frac{B}{2} \sigma_{22}$	0	$B\sigma_{23}$	0	σ_{11}
	A	$A - \frac{B}{2} \sigma_{11}$	0	0	$B\sigma_{13}$	σ_{22}
		A	$B\sigma_{12}$	0	0	σ_{33}
	symm.		$B\sigma_{33}$	$-B\sigma_{13}$	$-B\sigma_{23}$	σ_{12}
				$B\sigma_{11}$	$-B\sigma_{12}$	σ_{23}
					$B\sigma_{22}$	σ_{13}

Bestimmung von $\underline{c} = \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$

(vgl. Abschnitt 4.1.3.2, Gl. (4.48))

Die Gleichung der Belastungsfunktion für das plastisch-expansive Fließen lautet

$$f_p = I_1^{(3+m)} \cdot I_3^{(-1)} - 27 \cdot I_1^m \quad (4.24)$$

Damit erhält man

$$\underline{c} = \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f_p}{\partial I_3} \cdot \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$$

Mit den Ausdrücken für α und β

$$\alpha \cdot I_1 = \frac{\partial f_p}{\partial I_1} = (3+m) \cdot I_3^{(-1)} \cdot I_1^{(2+m)} - 27 \cdot m \cdot I_1^{(m-1)}$$

$$-\beta = \frac{\partial f_p}{\partial I_3} = -I_1^{(3+m)} \cdot I_3^{(-2)}$$

und den Matrizen $[M_1]$ und $[M_3]$ nach Anhang D5 ergibt sich schließlich

$$\underline{c} = [\alpha \cdot [M_1] - \beta \cdot [M_3]] \cdot \underline{\sigma}$$

oder

$\underline{c} =$

α	$\alpha - \frac{\beta}{2} \sigma_{33}$	$\alpha - \frac{\beta}{2} \sigma_{22}$	0	$\beta \sigma_{23}$	0	σ_{11}
	α	$\alpha - \frac{\beta}{2} \sigma_{11}$	0	0	$\beta \sigma_{13}$	σ_{22}
		α	$\beta \sigma_{12}$	0	0	σ_{33}
		symm.	$\beta \sigma_{33}$	$-\beta \sigma_{13}$	$-\beta \sigma_{23}$	σ_{12}
				$\beta \sigma_{11}$	$-\beta \sigma_{12}$	σ_{23}
					$\beta \sigma_{22}$	σ_{13}

Bestimmung der Vektoren $\left\{ \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial I_3}{\partial \sigma} \right\}$

1. Der Vektor $\left\{ \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \right\}$ bestimmt sich aus

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad \text{ZU}$$

$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{11}}$	$= \frac{1}{I_1} \cdot$	1	1	1	0	0	0	\cdot	σ_{11}
$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{22}}$		1	1	0	0	0	0		σ_{22}
$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{33}}$		1	0	0	0	0	0		σ_{33}
0		0	0	0	0	0	0		σ_{12}
0		0	0	0	0	0	0		σ_{23}
0		0	0	0	0	0	0		σ_{13}

bzw. zu

$$\left\{ \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \right\} = \frac{1}{I_1} \cdot [M_1] \cdot \sigma$$

2. Der Vektor $\left\{ \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$ bestimmt sich aus

$$I_2 = -\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2$$

zu

$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{11}}$
$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{22}}$
$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{33}}$
$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{12}}$
$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{23}}$
$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{13}}$

=

0	-1	-1	0	0	0
	0	-1	0	0	0
		0	0	0	0
		symm.	2	0	0
				2	0
					2

\cdot

σ_{11}
σ_{22}
σ_{33}
σ_{13}
σ_{23}
σ_{13}

bzw. zu

$$\left\{ \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = [M_2] \cdot \underline{\sigma} .$$

3. Der Vektor $\left\{ \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\sigma}} \right\}$ bestimmt sich aus

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

zu

$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{11}}$	=	0	$\frac{1}{2} \sigma_{33}$	$\frac{1}{2} \sigma_{22}$	0	$-\sigma_{23}$	0	σ_{11}
$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{22}}$		0	$\frac{1}{2} \sigma_{11}$	0	0	0	$-\sigma_{13}$	σ_{22}
$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{33}}$		0	$-\sigma_{12}$	0	0	0	0	σ_{33}
$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{12}}$		symm.	$-\sigma_{33}$	σ_{13}	σ_{23}	0	0	σ_{12}
$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{23}}$		$-\sigma_{11}$	σ_{12}	0	0	0	0	σ_{23}
$\frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{13}}$		$-\sigma_{22}$	0	0	0	0	0	σ_{13}

bzw. zu

$$\left\{ \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = [M_3] \cdot \underline{\sigma}$$

Ermittlung von A_c und A_p
(vgl. Abschnitt 4.1.3.2, Gl. (4.46) und Gl. (4.47))

1.

$$A_c = \frac{1}{\Delta\lambda_c} \cdot \frac{\partial f_c}{\partial W_c} \Delta W_c \quad (4.46)$$

Mit der Beziehung

$$W_c = C \cdot f_c^p \quad (4.21)$$

wobei der Druck $p_a = 1$ [kp/cm²] nicht mit angeschrieben wird, erhält man

$$\frac{\partial f_c}{\partial W_c} = \frac{f_c^{1-p}}{C \cdot p}$$

Mit $\Delta\lambda_c$ nach Anhang B

$$\Delta\lambda_c = \frac{\Delta W_c}{2f_c}$$

folgt daraus schließlich

$$A_c = \frac{2f_c^{2-p}}{C \cdot p}$$

2.

$$A_p = \frac{1}{\Delta\lambda_p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial W_p} \cdot \Delta W_p \quad (4.47)$$

Mit der experimentell bestimmten Beziehung

$$f_p = a \cdot \exp(-b \cdot W_p) \cdot W_p^{1/q} \quad (4.31)$$

- der Druck $p_a = 1$ [kp/cm²] wird nicht angeschrieben -

folgt

$$\frac{\partial f_p}{\partial W_p} = f_p \cdot \left(\frac{1}{q \cdot W_p} - b \right)$$

und wegen $\Delta\lambda_p$ nach Anhang B mit

$$\Delta\lambda_p = \frac{\Delta W_p}{3g_p + m \cdot \eta_2 \cdot I_3 \cdot I_1^{-m}}$$

erhält man schließlich mit Gl. (4.34)

$$A_p = (3g_p + m \cdot \eta_2 \cdot I_3 \cdot I_1^{-m}) \cdot \frac{f_p}{q} \cdot \left(\frac{1}{W_p} - \frac{1}{W_{p,peak}} \right)$$

Herleitung der elasto-plastischen Stoffmatrix $[D^{eCP}]$
(vgl. Abschnitt 4.1.3.2, Gl. (4.53))

Die Ausgangsgleichungen lauten (vgl. Gl. (4.51))

$$\underline{\Delta \epsilon} = [D^e]^{-1} \cdot \underline{\Delta \sigma} + \Delta \lambda_c \cdot \underline{a} + \Delta \lambda_p \cdot \underline{b} \quad (D7.1)$$

$$0 = \underline{a}^T \cdot \underline{\Delta \sigma} - A_c \cdot \Delta \lambda_c \quad (D7.2)$$

$$0 = \underline{c}^T \cdot \underline{\Delta \sigma} - A_p \cdot \Delta \lambda_p \quad (D7.3)$$

Multiplikation der Gleichung (D7.1) mit $\underline{a}^T \cdot [D^e]$ bzw. mit $\underline{c}^T \cdot [D^e]$ und Elimination von $\underline{\Delta \sigma}$ durch Gleichung (D7.2) bzw. (D7.3) führt zu zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $\Delta \lambda_c$ und $\Delta \lambda_p$, die als Lösung liefern:

$$\Delta \lambda_c = \frac{\underline{a}^T \cdot [D^e] - \alpha_p^T \cdot [D^e]}{A_c + \underline{a}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a} - \alpha_p^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a}} \cdot \underline{\Delta \epsilon}$$

wobei

$$\alpha_p^T = \frac{\underline{a}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b} \cdot \underline{c}^T}{A_p + \underline{c}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b}}$$

und

$$\Delta \lambda_p = \frac{\underline{c}^T \cdot [D^e] - \alpha_c^T \cdot [D^e]}{A_p + \underline{c}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b} - \alpha_c^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b}} \cdot \underline{\Delta \epsilon}$$

wobei

$$\underline{\alpha}_c^T = \frac{\underline{c}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a} \cdot \underline{a}^T}{A_c + \underline{a}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a}}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (D7.1) erhält man die gesuchte Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

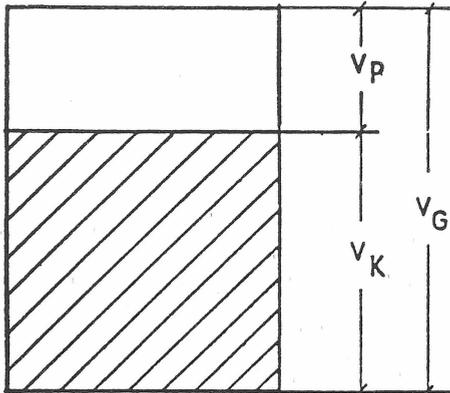
$$\Delta \underline{\sigma} = [D^{ep}] \cdot \Delta \underline{\epsilon} \quad (4.52)$$

mit der elasto-plastischen Stoffmatrix

$$[D^{ep}(\underline{\sigma})] = \left[[D^e] - \frac{[D^e] \cdot \underline{a} \cdot (\underline{a}^T - \underline{\alpha}_p^T) \cdot [D^e]}{A_c + \underline{a}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a} - \underline{\alpha}_p^T \cdot [D^e] \cdot \underline{a}} - \frac{[D^e] \cdot \underline{b} \cdot (\underline{c}^T - \underline{\alpha}_c^T) \cdot [D^e]}{A_p + \underline{c}^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b} - \underline{\alpha}_c^T \cdot [D^e] \cdot \underline{b}} \right] \quad (4.53)$$

Volumenmaße der Bodenmechanik

Bei Schüttgütern ist die Dichte im spannungslosen Zustand ein wesentlicher Parameter zur Kennzeichnung des Spannungs-Dehnungsverhaltens; für diese Dichte sind in der Literatur unterschiedliche Definitionen gebräuchlich, die hier kurz zusammengestellt sind.



V_G : Gesamtvolumen
 V_K : Kornvolumen
 V_P : Porenvolumen

$$V_G = V_K + V_P$$

Porenanteil (porosity, voidage): $n = \frac{V_P}{V_G}$

Porenziffer (void ratio, pore number): $e = \frac{V_P}{V_K}$

"Spezifisches Volumen" nach [37] : $v = \frac{V_G}{V_K}$

"Volumenverteilung" nach [112] : $\omega = \frac{V_K}{V_G}$

	n	e	v	ω
n =	n	$\frac{e}{1+e}$	$\frac{v-1}{v}$	$1-\omega$
e =	$\frac{n}{1-n}$	e	$v-1$	$\frac{1-\omega}{\omega}$
v =	$\frac{1}{1-n}$	$1+e$	v	$\frac{1}{\omega}$
ω =	$1-n$	$\frac{1}{1+e}$	$\frac{1}{v}$	ω

Grundbegriffe der Plastizitätstheorie [102, 103]

In der vorliegenden Arbeit wird ein Werkstoffverhalten als plastisch bezeichnet, wenn wegen bleibender Verformungen bei Entlastung der Zusammenhang zwischen den Spannungen σ_{ij} und Dehnungen ϵ_{ij} nicht mehr durch eine eindeutige Gesetzmäßigkeit ausgedrückt werden kann (Bild F1).

Die aufgebrachte Deformationsenergie ist nicht mehr voll wiedergewinnbar. Irreversible Energieanteile treten in Erscheinung.

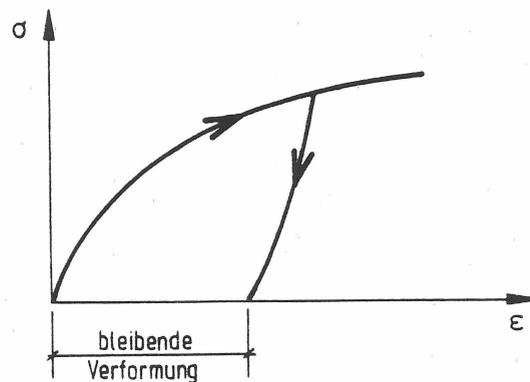


Bild F1: Plastisches Materialverhalten

Elastische und plastische Bereiche werden durch eine Fließgrenze bzw. -bedingung (yield function,-criterion) voneinander getrennt.

Im einfachen Fall der einachsigen Beanspruchung eines ideal elasto-plastischen Materials setzt stationäres Fließen ohne Dichteänderung ein, wenn die Spannung σ den kritischen Wert k (der als Verfestigungsparameter bezeichnet wird) erreicht hat (Bild F2).

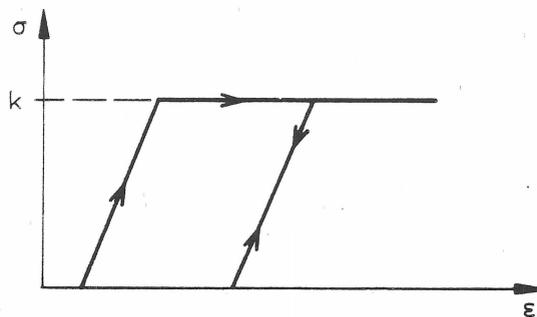


Bild F2: Ideal elasto-plastisches Materialverhalten

Die Fließgrenze bzw. -bedingung für diesen Fall ist

$$f(\sigma) = k \quad (F1)$$

bzw.

$$F \{f(\sigma), k\} = 0 \quad (F2)$$

Im mehrachsigen Fall hat man statt der Spannung σ den Spannungstensor σ_{ij} zu betrachten.

Analog zu (F1) bzw. (F2) gilt dann

$$f(\sigma_{ij}) = k \quad (F3)$$

bzw.

$$F \{f(\sigma_{ij}), k\} = 0 \quad (F4)$$

wobei $f(\sigma_{ij})$ als Belastungsfunktion bezeichnet wird.

Wegen der notwendigen Unabhängigkeit des stoffgesetzlichen Verhaltens vom beschreibenden Koordinatensystem (Koordinateninvarianz) ist die Darstellung der Fließbedingung auch in den Invarianten des Spannungstensors möglich.

Geometrisch anschaulich läßt sich die Fließbedingung (F4) im dreidimensionalen Koordinatensystem der Hauptspannungen, dem Hauptspannungsraum, als Fließfläche darstellen.

Alle Spannungszustände innerhalb dieser Fließfläche - dem Koordinatenursprung zugewandt - sind elastische Zustände.

Nach Überschreitung der Fließfläche kann idealplastisches oder verfestigendes (hardening) Materialverhalten vorliegen, je nach dem, ob nach einer Entlastung und anschließenden Wiederbelastung die ursprüngliche Fließfläche unverändert bleibt (Bild F2) oder erhöht wird (Bild F3).

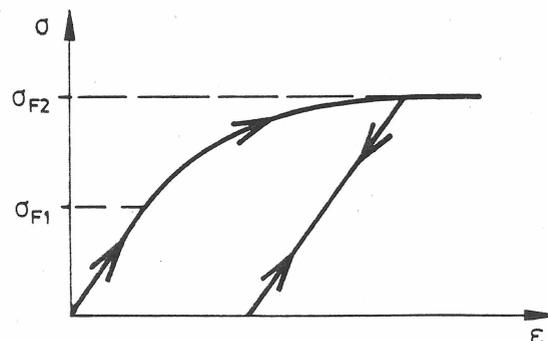


Bild F3: Verfestigendes Materialverhalten

Die Möglichkeit einer weiteren Materialverfestigung kann durch eine Grenzfließfläche begrenzt sein. Nach Erreichen dieser Grenzfließfläche können neue Spannungszustände nur noch auf der Grenzfließfläche selbst liegen oder wieder ins Innere der Grenzfließfläche zurückfallen, was als auflockern-
des (softening) Materialverhalten bezeichnet wird.

Zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen bei sich verfestigenden Materialien sind verschiedene Verfestigungs-
hypothesen aufgestellt worden. Die Hypothese der isotropen
Verfestigung (isotropic hardening) wird in der Praxis am häufigsten verwendet.

Danach wird bei Überschreitung einer ursprünglichen Fließfläche f_1 diese konzentrisch nach außen zur Fließfläche f_2 verschoben (Bild F4).

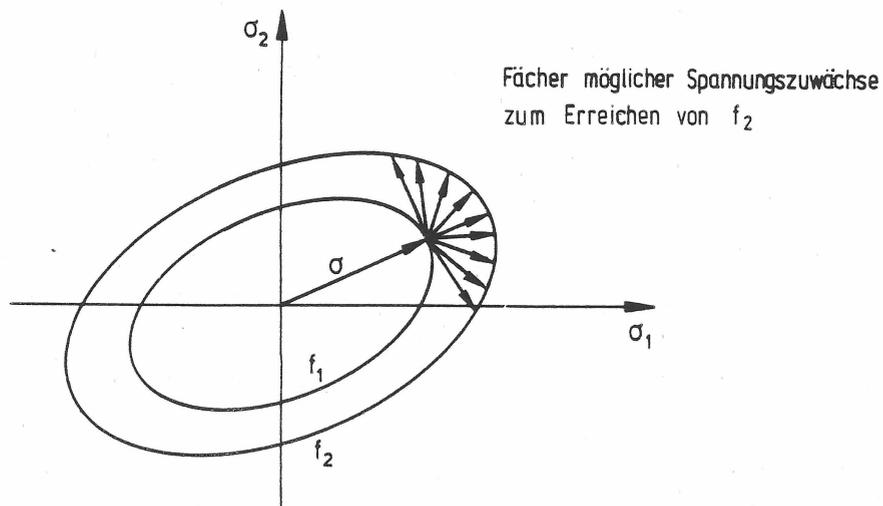


Bild F4: Isotrope Verfestigung

Da der Grenzwert der plastischen Dehnungen vom erreichten Spannungsniveau abhängt, ist es i.a. notwendig, die inkrementellen Zuwächse der Dehnungen bzw. Spannungen während des Belastungsvorgangs zu ermitteln und diese anschließend zu summieren.

Die Beziehung zwischen Dehnungsinkrementen und Spannungen wird durch eine Fließregel (flow rule) beschrieben. Die Hypothese, daß eine skalare Funktion der Spannungen $g(\sigma_{ij})$ existiert [115], aus der durch partielle Differentiation nach den Spannungen die Richtung der Dehnungsinkremente bestimmt werden kann, führt zu der Formulierung

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \lambda \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (F5)$$

mit $\Delta \lambda$ als Proportionalitätsfaktor.

Nimmt man - wie in der sogenannten "perfekten" Plastizitätstheorie - weiter an, daß die Funktion $g(\sigma_{ij})$, die auch als plastisches Potential bezeichnet wird, mit der Belastungsfunktion $f(\sigma_{ij})$ zusammenfällt, so spricht man von "assoziierter" Plastizität. Für diesen Fall kann gezeigt werden, daß der Vektor des plastischen inkrementellen Dehnungszuwachses normal zur Fließfläche steht - Normalitätsbedingung.

Der in der Fließregel (F5) zunächst noch unbekanntes Proportionalitätsfaktor $\Delta \lambda$ wird mit Hilfe eines hypothetischen Verfestigungsansatzes (hardening law) bestimmt; demnach gibt es für Werkstoffe mit isotropem Verfestigungsverhalten eine eindeutige Beziehung zwischen der plastischen Arbeit W_p , die durch

$$W_p = \int \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij} \quad (F6)$$

gegeben ist, und dem Verfestigungsparameter k :

$$f(\sigma_{ij}) = k = h(W_p) \quad (F7)$$

bzw.

$$W_p = H \{ f(\sigma_{ij}) \} \quad (F8)$$

wobei H eine experimentell bestimmbare monoton anwachsende positive Funktion ist.

Mit den Gln. (F5), (F6) und (F8) erhält man den Proportionalitätsfaktor zu

$$\Delta \lambda = \Delta W_p \cdot \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial g(\sigma_{ij})} \cdot \frac{1}{\sigma_{ij}} \quad (F9)$$

Mit (F7) ergibt sich schließlich die Fließbedingung (F4) zu

$$F \{ f(\sigma_{ij}), h(W_p) \} = 0 \quad (F10)$$

bzw.

$$F \{ \sigma_{ij}, W_p \} = 0 \quad (F11)$$

Mithin ist festzuhalten, daß die relative Größe und Richtung der durch Spannungsänderungen hervorgerufenen Dehnungsinkremente durch eine Fließregel bei zugehörigem plastischen Potential bestimmt werden, während die absolute Größe der Dehnungsinkremente vom Verfestigungsansatz abhängt.