

Parameterstudie zur Ermittlung der
Drücke in Silozellen beim Füllen und
während des Entleerungsbeginns mit
einem F.E.-Programm

T 1419

T 1419

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

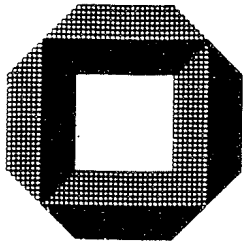
Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

T 1419: Parameterstudie zur Ermittlung der Drücke in Silozellen
beim Füllen und während des Entleerungsbeginns mit einem
F.E.-Programm



Universität Karlsruhe

Geschwindigkeits- und Spannungsfelder
beim Entleeren von Silozellen

von U. Häußler

Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben

"Parameterstudie zur Ermittlung der Drücke
in Silozellen beim Füllen und während des
Entleerungsbeginns mit einem F.E.-Programm"

November 1984

Institut für Massivbau und Baustofftechnologie
Abteilung Massivbau
Leitung: Prof. Dr.-Ing. J. Eibl

Vorbemerkung:

Die Untersuchungen, über deren Ergebnisse im folgenden berichtet wird, wurden im Rahmen des Forschungsvorhabens

"Parameterstudie zur Ermittlung der Drücke
in Silozellen beim Füllen und während des
Entleerungsbeginns mit einem F.E.-Programm"

durchgeführt und unter dem AZ: IV/1-5-342/82 u. 84 vom

Institut für Bautechnik, Berlin

gefördert, dem hierfür besonderer Dank ausgesprochen sei.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Problemstellung	1
2 Diskussion vorliegender Theorien	3
3 Diskussion vorliegender Stoffgesetze für ein granulares Schüttgut	15
4 Ableitung eines Stoffgesetzes für ein granulares Schüttgut	23
4.1 Allgemeines	23
4.2 Die Darstellung des Verformungszustandes	26
4.3 Die Darstellung des Spannungszustandes	33
4.4 Das Stoffgesetz	38
4.4.1 Allgemeiner Ansatz	38
4.4.2 Die allgemeine Form des elasto- plastischen Anteils	41
4.4.3 Eine spezielle Form des elasto- plastischen Anteils	48
4.4.4 Der viskose Anteil	52
4.5 Die Anwendung des Stoffgesetzes im Eulerschen Bezugssystem	53
5 Das numerische Rechenverfahren	58
5.1 Allgemeines	58
5.2 Räumliche und zeitliche Diskretisierung	61
5.2.1 Gleichgewichtsbedingungen	61
5.2.2 Stoffgesetz	66
5.2.3 Die Kombination von Gleichgewichts- bedingungen und Stoffgesetz	69
5.3 Die Lösung des nichtlinearen Gleichungs- systems	71
5.4 Die Anwendung des Lösungsverfahrens	77
5.4.1 Spannungsberechnung	77
5.4.2 Anfangs- und Randbedingungen	80

6	Numerische Untersuchungen	84
6.1	Programmablauf	84
6.2	Allgemeine Ergebnisse	87
6.3	Der Einfluß von Diskretisierungsparametern	102
6.4	Der Einfluß der Viskositätszahl	112
6.5	Wandreibung und Trichterneigung	117
7	Diskussion der Erkenntnisse	124
7.1	Ein Vergleich mit anderen Rechenverfahren	124
7.2	Ein Vergleich mit experimentellen Untersuchungen	132
8	Zusammenfassung und Ausblick	146
Anhang A:	Schreibweise I für Tensoren	151
Anhang B:	Schreibweise II für Tensoren	153
Anhang C:	Die Rauminvarianz des elasto-plastischen Stoffgesetzes	156
Anhang D:	Differenzenverfahren zur Lösung von Systemen nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung - lineare Mehrschrittverfahren	162
Bezeichnungen		170
Literaturverzeichnis		174

1 Problemstellung

Nach wie vor bestehen keine Theorien, die das mechanische Verhalten granularer Schüttgüter in Silobehältern während des Entleerens wirklichkeitsnah beschreiben können.

Bisherige experimentelle und theoretische Untersuchungen weisen darauf hin, daß mit Beginn des Entleerens Spannungsspitzen an den Behälterwänden auftreten, die ein Vielfaches der Spannungen im Füllzustand betragen können. Dabei gehen die Angaben über die Größe, den Ort und die Dauer des Auftretens weit auseinander. Sowohl bei experimentellen Untersuchungen als auch bei theoretischen Ansätzen ergibt sich bei gleichen Behältern und Füllgütern, je nach Meßmethode bzw. nach getroffenen Annahmen und Voraussetzungen, eine große Bandbreite der Ergebnisse. Mangels fundierter Kenntnisse werden Spannungsspitzen an den Wänden bei der Bemessung von Silobehältern bisher kaum berücksichtigt und sind vermutlich mitverantwortlich für die relativ große Zahl von Schäden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein wirklichkeitsnahes Verfahren entwickelt werden, das die näherungsweise Berechnung der Spannungsverhältnisse in einem Schüttgut in Silobehältern während des Entleerens gestattet.

Zunächst werden in Abschnitt 2 vorliegende Theorien und Rechenverfahren dargestellt. In Abschnitt 3 werden vorliegende Stoffgesetze für granulare Schüttgüter beschrieben. In Abschnitt 4 werden zuerst allgemeingültige Bedingungen für Stoffgesetze formuliert, dann wird in Anlehnung an ein bestehendes Stoffgesetz ein solches für ein schnell fließendes granulares Schüttgut abgeleitet. Der vollständige Satz von Stoffgesetz, Gleichgewichtsbedingungen und kinematischen Gleichungen wird in Abschnitt 5 aufgestellt. Dann wird ein

numerisches Verfahren zur Lösung des Gleichungssatzes abgeleitet. In Abschnitt 6 werden die Ergebnisse des Lösungsverfahrens dargestellt. Schließlich werden diese in Abschnitt 7 den Ergebnissen anderer Rechenverfahren und experimenteller Untersuchungen gegenübergestellt.

2 Diskussion vorliegender Theorien

Die erste und bisher allen Lastannahmen zugrundeliegende Theorie über die Spannungsverhältnisse in Silos stammt von JANSSEN [1]. Sie baut auf einer Reihe von Annahmen und Vereinfachungen auf und gilt für zylindrische Silos mit ebenem Boden. Es zeigt sich, daß für den Füllzustand die hiernach ermittelten Horizontaldrücke auf den Behälter annähernd mit empirischen Beobachtungen übereinstimmen. Dies gilt nicht für das Entleeren. Die prinzipielle Vorgehensweise von JANSSEN wurde in einer Vielzahl von Arbeiten aufgenommen mit dem Ziel, dessen weitgehende Vereinfachungen zu umgehen und insbesondere Aussagen über die Spannungsverhältnisse in Auslauftrichtern zu gewinnen. Eine Zusammenstellung und Diskussion dieser Arbeiten findet sich bei MOTZKUS [2]. Er kommt zu dem Ergebnis, daß, mit Ausnahme derjenigen von WALKER [3], alle bis dahin entwickelten theoretischen Ansätze zur Berechnung der Drücke auf Trichter und Böden wenig geeignet sind.

Häufig wurde versucht, die Janssen-Gleichungen und ähnliche für das Entleeren anzuwenden. Hierfür wurden die Parameter des Rechenverfahrens so bestimmt, daß die berechneten mit empirisch ermittelten Entleerungsdrücken übereinstimmen. Das Verfahren erscheint unbefriedigend. Insbesondere ist fragwürdig, ob damit Aussagen über nicht gemessene Vorgänge gestattet sind.

Erste Überlegungen über ein physikalisch fundiertes Verfahren zur Berechnung von Entleerungsdrücken stammen von JENIKE et. al. [4], [5], [6]. JENIKE stellt zunächst eine qualitative Betrachtung über die Spannungsverhältnisse im Schüttgut während des Füllens und des Entleerens an. Im Füllzustand wird das Schüttgut in vertikaler Richtung zusammengedrückt. Horizontal tritt im Trichter ebenfalls eine Zusammendrückung auf, während im zylindrischen Teil horizontal keine Verformung auftritt. Es entwickelt sich ein aktiver Spannungs-

zustand, d.h. die größere Spannung tritt in vertikaler Richtung auf. Dies ist im zylindrischen Teil ein aktiv-plastischer Zustand, dagegen im Trichter infolge der zweiseitigen Zusammendrückung ein aktiv-elastischer Zustand. Die Richtungen der größeren Hauptspannung und die Randspannungen sind schematisch in Bild 2.1a dargestellt.

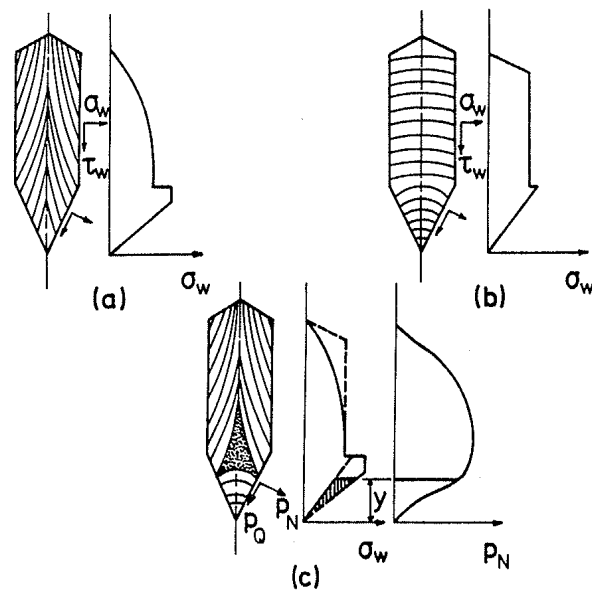


Bild 2.1: Spannungsverhältnisse im Schüttgut nach JENIKE [5]
(a) aktiver Zustand (Füllen)
(b) passiver Zustand (Entleeren)
(c) "Switch"

Die geringfügige Neigung der Hauptspannung gegen die Vertikale resultiert aus den Reibungskräften zwischen Behälterwand und Schüttgut. Um Gleichgewicht zu erreichen, muß das Schüttgutgewicht durch die vertikale Komponente der Resultierenden aus den Randspannungen σ_w und τ_w getragen werden. Während des Entleerens stellen sich andere Spannungsverhältnisse ein. Bei einem Massenfluß, d.h. das gesamte Schüttgut ist in Bewegung, wird sich das absinkende Schüttgut im Trichter vertikal ausdehnen und wegen der Querschnittsverengung horizontal zusammendrücken. Dementsprechend stellt sich dort ein passiv-plastischer

Spannungszustand ein, d.h. die größere Spannung tritt in horizontaler Richtung auf. Dies kann sich in den zylindrischen Teil fortsetzen. Die dann auftretenden Richtungen der größeren Hauptspannung und die Randspannungen sind in Bild 2.1b dargestellt. Bei Vernachlässigung von Trägheitskräften müssen die vertikalen Komponenten der Randspannungen wieder das Schüttgut tragen. JENIKE kommt dann bei quantitativen Überlegungen zu folgenden Ergebnissen:

- Bei Annahme der Janssen-Gleichungen für den zylindrischen Behälterteil sind die Randspannungen dort während des Entleerens im passiv-plastischen Zustand größer als während des Füllens im aktiv-plastischen Zustand.
- Bei Annahme eines radialen Spannungsfeldes (vgl. Bild 2.2) für den Trichter sind dort die Randspannungen während des Entleerens mit einem passiv-plastischen Zustand kleiner als während des Füllens mit einem elastischen Zustand.

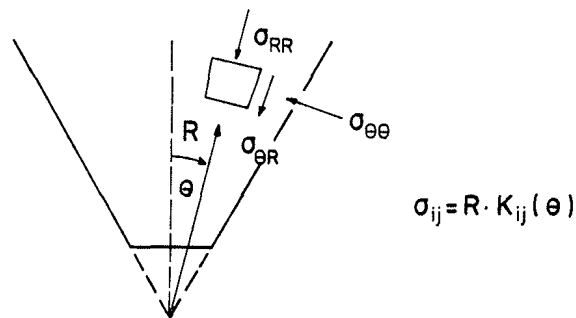


Bild 2.2: Radiales Spannungsfeld

Zur Erfüllung der Spannungsübergangsbedingungen muß zwischen Trichter und zylindrischem Teil ein örtlich begrenztes Störspannungsfeld angenommen werden.

Der Übergang vom aktiven in den passiven Spannungszustand findet nicht gleichzeitig im gesamten Silo statt, sondern wird sich zunächst unmittelbar über der Auslaßöffnung einstellen und dann nach oben fortpflanzen. Dies ist schematisch in Bild 2.1c dargestellt. Unterhalb der Höhe y befindet sich das Schüttgut im passiven Zustand, das gepunktete Gebiet kennzeichnet einen Übergangsbereich, im Rest herrscht der aktive Spannungszustand. Es zeigt sich, daß die sich aus der Kombination von passivem und aktivem Zustand ergebenden Randspannungen nicht ausreichen, das Schüttgutgewicht zu tragen. Die fehlende Kraft entspricht der resultierenden Differenz zwischen passiven und aktiven Randspannungen, die in Bild 2.1c durch die schraffierte Fläche bis zur Höhe y bezeichnet ist.

JENIKE setzt diese Differenz als Einzellast mit den Komponenten P_N und P_Q an der Behälterwand in der Höhe y an. Sie läßt sich bei bekannten Randspannungsverläufen in Abhängigkeit von y berechnen. JENIKE bezeichnet den Vorgang als "Switch". Er gibt weiter an, daß sich die konzentrierte Last unter bestimmten Bedingungen, die hier nicht näher erläutert werden sollen, nicht in den zylindrischen Teil fortpflanzt, sondern sich in der Ecke zum Trichter festsetzt. Wandelt man die Einzellast in eine dreieckförmige Streckenlast um - JENIKE gibt als Verteilungsbreite den 0,3-fachen Silodurchmesser an - so ergibt sich nach seinem Berechnungsverfahren ein typischer Randspannungsverlauf, wie in Bild 2.3 gezeigt. Zum Vergleich sind die in dem gleichen Fall gemessenen Werte eingetragen.

Eine weitere Theorie zur Spannungsberechnung für Füllen und Entleeren stammt von WALTERS [7], [8]. Er geht ähnlich wie JANSSEN vor, bleibt aber im Gegensatz zu JANSSEN in sich widerspruchsfrei und erhält auch eine Lösung für die Spannungen im Trichter. Zunächst wird die Gleichgewichtsbedingung an einer horizontalen Scheibe des Schüttguts aufgestellt (vgl. Bild 2.4b).

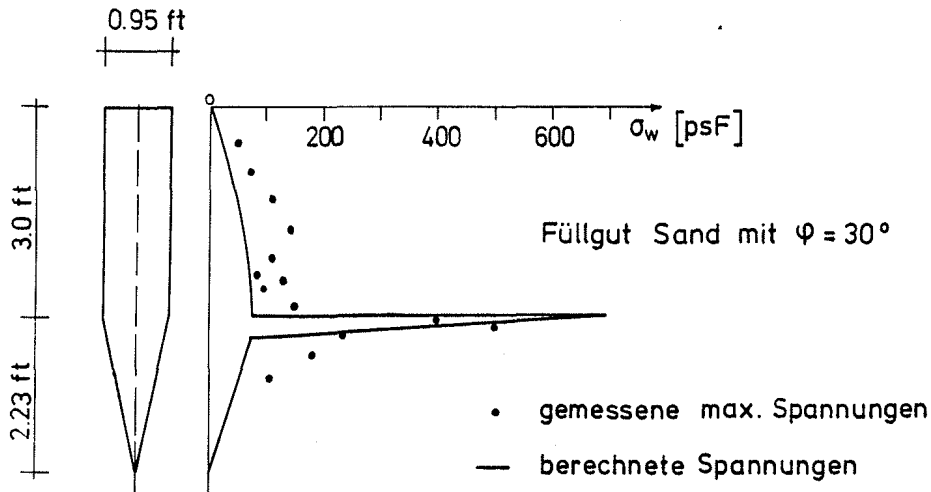


Bild 2.3: Randspannungen für das Entleeren nach JENIKE [6]

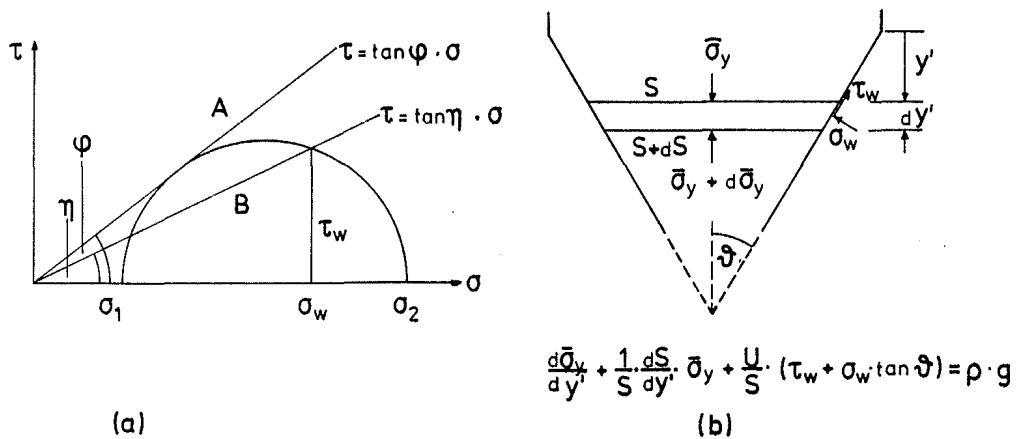


Bild 2.4: Spannungsverhältnisse im Schüttgut nach WALTERS [8]

- (a) Grenzbedingungen des Spannungszustandes
- (b) Gleichgewicht an der Schüttgutscheibe

Die Annahme, daß die Vertikalspannung σ_y über den Querschnitt konstant ist, entfällt bei WALTERS. Er setzt den mittleren Wert $\bar{\sigma}_y$ an und trifft folgende Voraussetzungen:

- Der Spannungszustand erfüllt an jeder Stelle die Mohr-Coulomb'sche Grenzbedingung, dargestellt in Bild 2.4a, Linie A, mit einem inneren Reibungswinkel φ .

- Ausgehend von der Symmetrieachse nehmen die Schubspannungen zum Rand hin linear zu.

- Am Rand erfüllt der Spannungszustand die Bedingung

$$\tau_w = \tan \eta \cdot \sigma_w$$

mit η als Wandreibungswinkel (vgl. Bild 2.4a, Linie B).

- Die Horizontalspannung σ_x ist in der horizontalen Ebene konstant.

Unter diesen Voraussetzungen kann zunächst die Vertikalspannung an der Wand $(\sigma_y)_w$ über einen sogenannten Verteilungsfaktor C , der eine Funktion der Reibungswinkel φ , η und der Trichterneigung ϑ ist, in Abhängigkeit von der mittleren Vertikalspannung $\bar{\sigma}_y$ bestimmt werden:

$$(\sigma_y)_w = C \cdot \bar{\sigma}_y$$

Weiterhin ergeben sich die auf die Wand bezogene Normalspannung σ_w und Schubspannung τ_w aus $(\sigma_y)_w$ durch

$$\tau_w + \sigma_w \cdot \tan \vartheta = (E + \tan \vartheta) \cdot (\sigma_y)_w$$

Darin ist E eine Funktion von φ , η und ϑ . Die Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Bild 2.4b) ergeben damit eine Differentialgleichung, die als abhängige Größe nur noch $\bar{\sigma}_y$ enthält. Sie hat zwei Lösungen, eine für den Fall der vertikalen Orientierung der größeren Hauptspannung (= aktiver Zustand), die andere für den Fall der horizontalen Orientierung (= passiver Zustand). Das Verfahren liefert als Sonderfall auch eine Lösung für den zylindrischen Teil, hierfür wird der Winkel der Trichterneigung $\vartheta = 0$ gesetzt.

Zur Berechnung der Spannungen während des Entleerens trifft WALTERS weitere Annahmen:

- Die Einflüsse aus der Massenträgheit des Schüttguts können vernachlässigt werden.
- Im zylindrischen Behälterteil herrscht ein aktiver Spannungszustand.
- Im Trichter herrscht ein passiver Spannungszustand.

Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich typische Spannungsverläufe, wie sie in Bild 2.5 gezeigt sind.

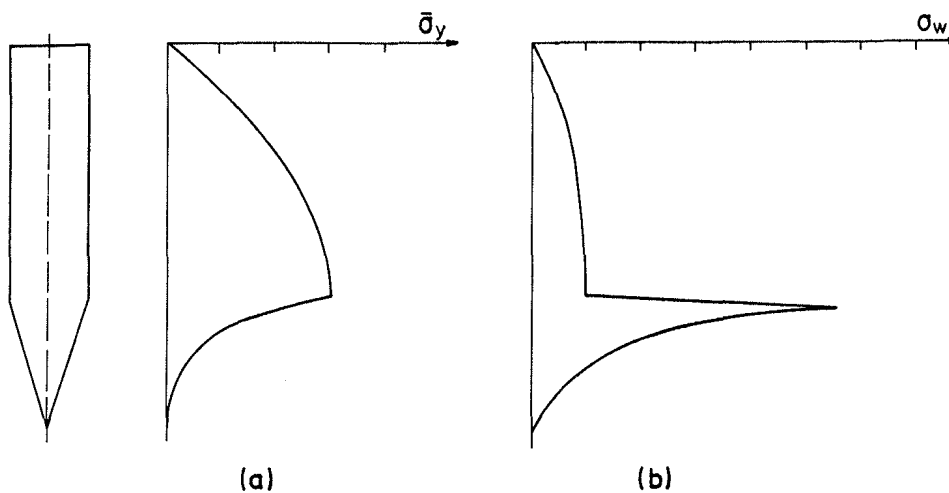


Bild 2.5: Spannungen für das Entleeren nach WALTERS

(a) mittlere Vertikalspannung $\bar{\sigma}_y$

(b) Randnormalspannung σ_w

Die hohe Spannungsspitze im Eckbereich ergibt sich aus der Forderung, daß die Lösungen $\bar{\sigma}_y$ der Gleichgewichtsbedingung für den zylindrischen Teil und den Trichter an der Übergangsstelle übereinstimmen müssen. Die Annahme des passiven Zustands im Trichter, d.h. die größere Spannung wirkt horizontal, führt dann zu dem hohen Wert der Randspannung.

Ein weiterer Vorschlag zur Berechnung der Spannungen während des Entleerens stammt von ENSTADT [9]. Hierbei wird wieder angenommen, daß das Schüttgut überall die Mohr-Coulomb'sche Grenzbedingung erfüllt, wobei es sich im zylindrischen Behälterteil im aktiven und im Trichter im passiven Spannungszustand befindet. Die Spannungen im zylindrischen Teil werden nach JANSSEN bestimmt. Dabei ergibt sich das Verhältnis K zwischen der Horizontal- und der Vertikalspannung an der Behälterwand aus der Forderung, daß sowohl die Mohr-Coulomb'sche Bedingung, als auch die Kräfteerandbedingung $\tau_w = \tan \eta \cdot \sigma_w$ erfüllt werden. Das Gleichgewicht des Schüttguts im Trichter wird nicht, wie sonst üblich, an ebenen horizontalen Scheiben bestimmt, sondern an kreisförmigen Ausschnitten. Solche Ausschnitte zeigt Bild 2.6.

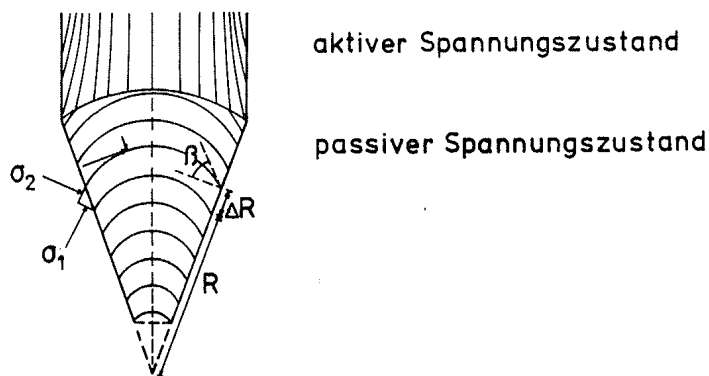


Bild 2.6: Hauptspannungstrajektorien im Schüttgut
nach ENSTADT

Es werden dann folgende Annahmen getroffen:

- Die größere Hauptspannung σ_1 ist im Trichter tangential zu einem Kreis gerichtet, dementsprechend die kleinere Hauptspannung σ_2 normal zum Kreis.

- Die hydrostatische Spannung $\sigma = 0,5 (\sigma_1 + \sigma_2)$ ist entlang eines Kreises konstant.

Mit den Bedingungen, daß das Schüttgut an der Trichterwand die Mohr-Coulomb'sche Bedingung und die Kräfte- randbedingung $\tau_w = \tan \eta \cdot \sigma_w$ erfüllt, läßt sich der Neigungswinkel β der Hauptspannung σ_1 zur Wand bestimmen. Mit den oben getroffenen Annahmen liegt dann die Geometrie der Kreisausschnitte fest und man kann an ihnen eine Gleichgewichtsbetrachtung durchführen. Dies führt auf eine Differentialgleichung für die hydrostatische Spannung σ in Abhängigkeit von R , dem Abstand der Trichterspitze zum Schnittpunkt eines Kreises mit der Wand (vgl. Bild 2.6). Aus der Lösung ergeben sich durch eine Umrechnung auch die Hauptspannungen und Randspannungen.

Das Verfahren nach ENSTADT zeigt folgende Unstimmigkeit: Aus Gleichgewichtsgründen müssen Lösungen für σ im zylindrischen Teil, das sei σ_z , und im Trichter, das sei σ_T , in irgendeiner Fläche des Übergangsbereichs ein bestimmtes, festes Verhältnis zueinander annehmen. Dies kann weder die Horizontale sein, in der σ_z konstant ist, noch der Zylindermantel (für keilförmige Trichter) oder der Kugelausschnitt (für kegelförmige Trichter), in dem σ_T konstant ist. Eine solche Fläche läßt sich i.a. nicht finden, so daß die Gleichgewichtsbedingungen im Übergangsbereich verletzt sind.

Mit dem Verfahren von ENSTADT ergeben sich qualitativ gleiche Verläufe der Randspannungen wie bei WALTERS (vgl. Bild 2.5b). Vergleichende Rechnungen an konkreten Fällen zeigen aber erhebliche quantitative Unterschiede. In Abschnitt 7.1 ist an einem Beispiel eine Vergleichsrechnung mit den Verfahren von JENIKE, WALTERS und ENSTADT durchgeführt und den Ergebnissen des numerischen Lösungsverfahrens, wie es im folgenden entwickelt wird, gegenübergestellt.

Die hier dargestellten Verfahren haben den Vorteil der mathematischen Einfachheit. Dies zu erreichen, wurde aber eine Reihe von Annahmen getroffen, deren Gültigkeit fragwürdig ist:

- Die Annahme, daß der Spannungszustand im Schüttgut an jeder Stelle zu jeder Zeit die Mohr-Coulomb'sche Grenzbedingung erfüllt, trifft in dieser strengen Form nicht zu.
- Weitere Annahmen hinsichtlich des Spannungszustandes (JENIKE: radiales Spannungsfeld, WALTERS: Horizontalspannungen konstant, ENSTADT: Hauptspannungen normal und tangential zu Kreisen mit konstanten hydrostatischen Spannungen) sind offensichtlich weniger unter physikalischen Gesichtspunkten als unter dem Zwang zur Lösbarkeit getroffen worden.
- Die Aufteilung des Schüttgutes in Bereiche mit aktivem oder passivem Spannungszustand ist insofern willkürlich, als es hierfür kein objektives Kriterium gibt.

Wie gezeigt, lassen sich mit diesen Annahmen Verfahren entwickeln, in denen das Stoffverhalten des Schüttguts weitgehend unberücksichtigt bleibt. Dies schafft wesentliche Vereinfachungen und die Voraussetzungen zur Anwendung analytischer Rechenmethoden. Andererseits bleibt zu fragen, ob bei der Vernachlässigung des Stoffverhaltens nicht wesentliche Aspekte der physikalischen Vorgänge verlorengehen. Die Alternative zu den oben dargestellten Vorgehensweisen besteht darin, statt mehr oder weniger fragwürdiger Spannungshypothesen ein physikalisch sinnvolles Stoffgesetz zu verwenden. Der Realisierung stehen folgende Schwierigkeiten entgegen:

- Das Stoffverhalten granularer Schüttgüter ist sehr komplex, Stoffgesetze sind entsprechend aufwendig und bisher nur eingeschränkt gültig.
- Gleichgewichtsbedingungen, Stoffgesetz und kinematische Gleichungen liefern i.a. ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, das sind die Feldgleichungen, die nicht analytisch gelöst werden können. Es ist die Anwendung numerischer Verfahren erforderlich.

Unter diesen Bedingungen wurde von LANDAHL [13] auf der Basis der Methode der Finiten Elemente ein numerisches Rechenverfahren zur Lösung von Siloproblemen entwickelt. LANDAHL untersucht zunächst eine Reihe von Stoffgesetzen für kohäsionslose granulare Stoffe, die von der Bodenmechanik für die Anwendung im Grundbau entwickelt worden sind, hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf Schüttgüter. Er zeigt, daß insbesondere das von LADE [14] vorgeschlagene Stoffgesetz gute Ergebnisse liefert und berechnet damit Verformungen und Spannungen in Silos im Füllzustand und zu Beginn des Entleerens. Da vorausgesetzt wird, daß die Verformungen klein sind und langsam ablaufen, ist die Berechnung des Entleerens nur beschränkt möglich. Im Rahmen dieser Arbeit soll mit demselben Ansatz ein erweitertes numerisches Verfahren zur Berechnung von Fließgeschwindigkeiten und Spannungen beim Entleeren abgeleitet werden. Dies schließt ein:

- Die Zulässigkeit großer Verformungen des Schüttguts.
- Die Berücksichtigung großer Verformungsgeschwindigkeiten des Schüttguts.
- Die Berücksichtigung der Massenträgheit des Schüttguts.

Die Zusammenhänge sind sehr komplex und berühren neben der eigentlichen Silothematik Gebiete wie die nichtlineare Kontinuumsmechanik und die numerische Mathematik. Die dabei entstehenden Probleme lassen sich im Rahmen der hier gebotenen Beschränkung noch nicht vollständig und optimal lösen.

Es geht zunächst darum, einen in dieser Art (soweit dem Verfasser bekannt) ersten Lösungsweg für den angesprochenen Problembereich aufzuzeigen.

3 Diskussion vorliegender Stoffgesetze für granulare Schüttgüter

Im Bereich des Grundbaus treten Stoffe auf, die in ihrer Struktur den Schüttgütern in Silos vergleichbar sind. Hierfür wurden im Rahmen der Bodenmechanik unter Verwendung der Plastizitätstheorie Stoffgesetze abgeleitet. Eine Zusammenstellung findet man u.a. bei GUDEHUS [15] und speziell unter dem Gesichtspunkt der Siloproblematik bei LANDAHL [13]. Auf eine Darstellung dieser Stoffgesetze wird hier verzichtet. Es sei zunächst nur festgestellt, daß deren Anwendungsbereich i.a. auf kleine und langsame Verformungen beschränkt ist. Erfahrungsgemäß treten aber beim Entleeren von Silos große Fließgeschwindigkeiten des Schüttguts auf. Es wird somit ein Stoffgesetz benötigt, das den Fall großer Verformungen und Fließgeschwindigkeiten einschließt.

Frühe Untersuchungen über das Verhalten schnell fließender granularer Stoffe stammen von BAGNOLD [16]. Er geht von Dispersionen granularer Modellmaterialien in Newtonschen Flüssigkeiten aus. Dies ist insofern auf granulare Schüttgüter übertragbar, als das umgebende Medium Luft als Newtonsche Flüssigkeit betrachtet werden kann. Das Modellmaterial besteht aus Kugeln mit einem konstanten Durchmesser d . Bezeichnet s den Durchschnittswert des Abstandes der Kugeln, so ist durch

$$\lambda = d/s$$

ein Maß für die Konzentration des Modellmaterials gegeben, wobei hohe Werte λ eine hohe Konzentration bezeichnen. BAGNOLD unterwirft Dispersionen verschiedener Konzentration einer ebenen, räumlich und zeitlich konstanten Schubverformungsrate $\dot{\gamma}$ und leitet theoretisch und experimentell im

Bereich $\lambda > 1$ für hinreichend große Werte $\dot{\gamma}$ folgende Zusammenhänge ab:

$$\sigma = c_1 \cdot \lambda^2 \cdot \dot{\gamma}^2$$

$$\tau = c_2 \cdot \sigma$$

Darin bezeichnet σ die Normalspannung, τ die Schubspannung und c_1, c_2 materialabhängige Konstante. An den Gleichungen zeigt sich:

- Das Stoffverhalten ist von der Verformungsgeschwindigkeit abhängig.
- Die Geschwindigkeitsabhängigkeit nimmt mit wachsender Konzentration des granularen Materials zu. Man beachte, daß der Wert λ , um überhaupt eine relative Bewegung einzelner Partikel zu ermöglichen, einen oberen Grenzwert hat.
- Die Geschwindigkeitsabhängigkeit ist nichtlinear.
- Im Gegensatz zu Newtonschen Flüssigkeiten besteht ein Zusammenhang zwischen Schubverformungsrate und der Normalspannung.

Die Ergebnisse von BAGNOLD geben einen qualitativen Einblick in das Verhalten eines granularen Materials, sind aber für die quantitative Behandlung vieler Probleme ungeeignet:

- Sie erfassen nur den Bereich hinreichend großer Verformungsraten.
- Sie gelten nur für den eindimensionalen Fall.
- Die Werte der Stoffkonstanten bleiben offen.

Wie gerade festgestellt, hat die Konzentration des granularen Materials bzw. der Feststoffanteil am Gesamtvolumen einen wesentlichen Einfluß auf das Stoffverhalten. Dies berücksichtigt SAVAGE [17], indem er eine sogenannte Volumenverteilungsfunktion als kinematische Variable in ein Stoffgesetz für granulares Material einführt. Dies soll kurz dargestellt werden.

Eine Anhäufung von granularen Partikeln nimmt das Gesamtvolumen dV ein, worin die Partikel das Volumen dV_p und das umgebende Medium das Volumen dV_m haben.

$$dV = dV_p + dV_m$$

Die Volumenverteilungsfunktion ω gibt den Feststoffanteil am Gesamtvolumen an:

$$\omega = dV_p / dV$$

Sie ist i.a. mit dem Ort, dargestellt durch räumliche Koordinaten \underline{x} , und der Zeit t veränderlich:

$$\omega = \omega(\underline{x}, t)$$

Die Funktion ω ermöglicht die stetige mathematische Beschreibung einer unstetigen Verteilung von festen Partikeln, so daß diese Verteilung innerhalb eines kontinuumsmechanischen Stoffgesetzes mitberücksichtigt werden kann. Aus dem Gradienten $\nabla\omega$ mit den Komponenten

$$\omega_{,i} = \frac{\partial\omega}{\partial x_i}$$

läßt sich ein Tensor der 2. Stufe $\underline{\beta}$ mit den Komponenten β_{ij}

$$\beta_{ij} = \omega_{,i} \cdot \omega_{,j}$$

bilden. SAVAGE postuliert für granulares Material, daß sich der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$ als Tensorpolynom der Verformungsrate, das ist der Tensor \underline{d} mit den Komponenten

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

und des Tensors $\underline{\beta}$ darstellen läßt. Nun existieren unter Voraussetzung bestimmter Isotropiebedingungen Darstellungstheoreme für Tensorpolynome, d.h. man kann zeigen, daß sich alle Polynome aus zwei Tensoren 2. Stufe auf ein Polynom mit dem höchsten Grad (2 x 2) zurückführen lassen (vgl. TRUESDELL/NOLL [18], Abschn. 13). Die Anwendung auf $\underline{\beta}$ und \underline{d} liefert bei Vernachlässigung der Anteile $\underline{d} \cdot \underline{d}$

$$\underline{\sigma} = a_0 \underline{1} + a_1 \underline{d} + a_2 \underline{\beta} + a_3 (\underline{\beta} \cdot \underline{d} + \underline{d} \cdot \underline{\beta}) \quad (3.1)$$

Darin hängen die Koeffizienten $a_0 - a_3$ von ω und den Invarianten von $\underline{\beta}$ und \underline{d} ab. Von besonderem Interesse ist der Ruhezustand mit $\underline{d} = 0$, der mit Gl. (3.1) die Spannung

$$\underline{\sigma}_r = a_0 \underline{1} + a_2 \underline{\beta} \quad (3.2)$$

ergibt. Es entsteht die Frage, ob der Ruhezustand, bzw. ein Zustand mit kleinen Verformungsgeschwindigkeiten, durch Gl. (3.2) zutreffend beschrieben werden kann. Die Bodenmechanik weist in einigen Fällen nach, daß die Spannungen in einem granularen Material auch vom Verformungszustand, z.B. vom infinitesimalen Dehnungstensor $\underline{\epsilon}$ mit

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

abhängt. Dies bleibt in Gl (3.2) unberücksichtigt. SAVAGE schränkt deshalb den Gültigkeitsbereich des Stoffgesetzes Gl. (3.1) ein. Es heißt in [17], S. 69:

"... stresses result from different mechanisms; in the static case they result from dry interparticle friction and particle interlocking whereas in the shear-flow case particles override other particles... In other words the static and flowing cases may be regarded as two different states... There is not a smooth transition from one state to another as $\underline{d} \rightarrow 0$ and thus a constitutive equation suitable for flowing materials need not necessarily be appropriate to describe the state of static equilibrium. With this in mind we interpret the stress $\underline{\sigma}_r$ merely as an additional component of stress arising during the deformation of the bulk solid of a non-uniform ω ."

Damit ist die Gültigkeit des Stoffgesetzes Gl. (3.1) auf einen bestimmten Mechanismus der Partikelwechselwirkung eingeschränkt, wogegen andere Mechanismen nicht erfaßt werden.

SAVAGE trifft hinsichtlich des Stoffgesetzes Gl. (3.1) eine Reihe von Vereinfachungen und erhält eine Beziehung für die "dynamische" Zusatzspannung

$$\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_r = b_0 \cdot II_{\underline{d}} \underline{1} + b_1 \sqrt{II_{\underline{d}}} \cdot \underline{d} \quad (3.3)$$

Darin ist $II_{\underline{d}}$ die zweite Invariante von \underline{d} und die Koeffizienten b_0 , b_1 sind Funktionen der Volumenverteilungsfunktion ω . Eine genaue Betrachtung von Gl. (3.3) ergibt:

- Es besteht ein Zusammenhang zwischen Schubverformungsrate und Normalspannungen.
- Die Spannung ist dem Quadrat der Verformungsrate proportional.

Es zeigt sich eine Übereinstimmung zu den Ergebnissen von BAGNOLD. Mit dem von ihm vorgeschlagenen Stoffgesetz kann

SAVAGE zwei Randwertprobleme lösen: den Fluß granularen Materials auf einer geneigten Ebene und zwischen vertikalen Wänden. Die analytisch berechneten Ergebnisse stimmen qualitativ mit von ihm selbst gewonnenen Versuchsergebnissen überein, während quantitativ größere Unterschiede auftreten.

Man kann die bisherigen Ausführungen dahingehend interpretieren, daß "finite" Stoffgesetze für granulare Materialien, die in formaler Analogie zu den Stoffgesetzen der Flüssigkeitsmechanik die Spannungen (und nicht nur Spannungsinkremente) in Abhängigkeit von der Verformungsrate und zusätzlich von der Volumenverteilungsfunktion angeben, den Ruhezustand¹⁾ nicht erfassen können. Dies wird auch durch Arbeiten im Rahmen der Bodenmechanik bestätigt, wo finite Stoffgesetze jeweils nur für spezielle Verformungs- und Spannungswege angewendet werden können. Die Darstellung allgemeiner Verformungs- und Spannungswege im Ruhezustand gelingt nur mit inkrementellen Stoffgesetzen.

Will man beide Aspekte eines Stoffes, d. h. sowohl sein Verhalten im Ruhezustand als auch im Fließzustand, durch denselben formalen Ansatz erfassen, so bietet sich folgende Vorgehensweise an. Die gebräuchlichen Stoffgesetze der Flüssigkeitsmechanik bestimmen Spannungen aus der Verformungsrate. Differenziert man einen solchen Zusammenhang nach einem Zeitparameter, so ergibt sich eine Spannungsrate in Abhängigkeit von einer Verformungsbeschleunigung. Andererseits verbinden die inkrementellen Stoffgesetze der Bodenmechanik eine Spannungsrate mit einer Verformungsrate. Beides läßt sich durch einen gemeinsamen

1) Der Begriff "Ruhezustand" soll den Zustand kleiner Verformungsgeschwindigkeiten einschließen

Zusammenhang von Spannungsrate, Verformungsrate und Verformungsbeschleunigung miteinander verbinden.

Ein Vorschlag in dieser Richtung stammt von GUDEHUS/KOLYMBAS [19]. Darin dient als abhängige Variable die Jaumannsche Spannungsrate $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$ und als unabhängige Variable der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$, die Verformungsrate \underline{d} und eine Verformungsbeschleunigung $\underline{d}^{(2)}$. Der Tensor $\underline{d}^{(2)}$ wird von TRUESDELL/NOLL in [18] definiert. Eine Erläuterung erfolgt in Abschnitt 4.2 dieser Arbeit. Die allgemeine Form des Stoffgesetzes von GUDEHUS/ KOLYMBAS lautet:

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}} = \underline{h}(\underline{\sigma}, \underline{d}) + \underline{g}(\underline{\sigma}, \underline{d}, \underline{d}^{(2)}) \quad (3.4)$$

Darin ist der Anteil \underline{h} geschwindigkeitsunabhängig, d.h. bei konstanter Spannung $\underline{\sigma}$ sind Spannungsrate $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$ und Verformungsrate \underline{d} proportional zueinander. \underline{h} beschreibt irreversibles, also plastisches Verformungsverhalten. Hierbei ist aber im Gegensatz zur klassischen Plastizitätstheorie weder die Aufspaltung der Verformungen in reversible und irreversible Anteile, noch die Verwendung von Fließkriterien zur Bestimmung von irreversiblen Verformungen notwendig. Die "inkrementell nichtlineare" Form von \underline{h} gestattet es trotzdem, das unterschiedliche Materialverhalten bei Be- und Entlastung mit demselben Ansatz zu beschreiben. Auf eine weitere Darstellung wird hier verzichtet, ausführliche Erläuterungen finden sich bei KOLYMBAS [20]. Der geschwindigkeitsabhängige Anteil \underline{g} in Gl. (3.4) hat die Form

$$\underline{g} = K \cdot \underline{d}^{(2)}$$

mit

$$K = \frac{c_1 \operatorname{tr} \underline{\sigma}}{(c_2^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{d}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Darin sind c_1 und c_2 Stoffkonstanten. Somit ist \underline{g} der Verformungsbeschleunigung proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor K mit der hydrostatischen Spannung \underline{tr}_g zunimmt und mit zunehmender Auflockerungsgeschwindigkeit \underline{tr}_d abnimmt. Leider geben GUDEHUS und KOLYMBAS in [19] und [20] keine näheren Erläuterungen hinsichtlich der Anwendung von \underline{g} auf granulares Material und verweisen auf noch nicht abgeschlossene Untersuchungen. Im Gegensatz zu SAVAGE geht die Lagerungsdichte des granularen Materials, ausgedrückt durch eine Volumensverteilungsfunktion oder durch ein anderes Maß, nicht direkt in das Stoffgesetz Gl. (3.4) ein. GUDEHUS und KOLYMBAS geben an, daß die Konstanten des Stoffgesetzes in Abhängigkeit von der Lagerungsdichte zu bestimmen sind.

Innerhalb der weiteren Überlegungen wird für das Stoffgesetz, welches später im Rechenverfahren verwendet wird, ein Ansatz ähnlich dem von GUDEHUS und KOLYMBAS gewählt. Wegen der guten Ergebnisse, die LANDAHL bei seinen numerischen Siloberechnungen mit dem von LADE vorgeschlagenen elastoplastischen Stoffgesetz erzielt, wird dieses jedoch als Grundlage des geschwindigkeitsunabhängigen Anteils gewählt. Der zweite, geschwindigkeitsabhängige Anteil wird zunächst unter dem Aspekt festgelegt, eine möglichst einfache Form zu erhalten. Eine ausführliche Darstellung findet sich im folgenden Abschnitt 4.

4 Ableitung eines Stoffgesetzes für ein granulares Schüttgut

4.1 Allgemeines

Hier sollen die Bedingungen beschrieben werden, unter denen ein Stoffgesetz bei großen Verformungen formuliert werden kann. Zunächst ist ein Bezugssystem festzulegen.

Man unterscheidet in der Kontinuumsmechanik das raumfeste (Eulersche) Bezugssystem und das körperfeste (Lagrange) Bezugssystem. Im Bereich der Flüssigkeitsmechanik wird das Eulersche Bezugssystem verwendet und auch die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Stoffgesetze sind in diesem Bezugssystem formuliert. Es soll auch hier für alle weiteren Überlegungen zugrundegelegt werden. Einerseits ist darin eine einfache Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen möglich; es führt aber andererseits zu Schwierigkeiten, wenn man den Einfluß der Materialgeschichte auf das Stoffverhalten berücksichtigen will, da sich die Materialgeschichte nur auf körperfeste Punkte beziehen läßt. Weiterhin ist zu beachten, daß sich anisotropes Stoffverhalten nicht im Eulerschen Bezugssystem darstellen läßt, da eine in Eulerkoordinaten beschriebene stoffliche Anisotropie dem Prinzip der Rauminvarianz, das im folgenden erläutert wird, widerspricht. Alle weiteren Überlegungen beschränken sich deshalb auf isotrope Stoffe.

Man kann für Stoffgesetze jeglicher Art eine Reihe von Axiomen formulieren, die an sich physikalisch sinnvoll sind und keiner weiteren Begründung bedürfen, man vergleiche z.B. TRUESDELL/NOLL [18], MALVERN [21], ERINGEN [22]. Dazu gehören unter anderem:

- Das Prinzip der Determinanz
Der mechanische Zustand eines körperfesten Punktes wird durch die Verformungsgeschichte seiner unmittelbaren Umgebung bestimmt und ist nur von der Geschichte des Verformungsgradienten abhängig.

- Das Prinzip der Koordinateninvarianz
Ein Stoffgesetz soll vom angenommenen Koordinatensystem unabhängig sein; es darf dann nur Tensoren als Variable enthalten.

- Das Prinzip der Rauminvarianz
In der englischsprachigen Literatur "Objectivity" genannt. Ein Stoffgesetz soll gegenüber der Lage und Bewegung raumfester Koordinatensysteme invariant sein; es muß dann von bestimmten Transformationen der Eulerkoordinaten unabhängig sein.

- Das Prinzip der Stoffinvarianz
Ein Stoffgesetz für einen homogenen, isotropen Stoff muß von bestimmten Transformationen der Lagrangekoordinaten unabhängig sein. Dabei ergeben sich je nach Art der Transformation verschiedene Klassen anisotroper Stoffgesetze.

Es zeigt sich, daß insbesondere das Prinzip der Rauminvarianz zu wesentlichen Aussagen über mögliche Darstellungsformen für inkrementelle Stoffgesetze führt, man vergleiche z.B. ERINGEN [22], Abschnitt 44. Es wird im folgenden näher beschrieben. Aus Zweckmäßigkeitsgründen wird dazu eine symbolische Schreibweise für Tensoren und Tensorprodukte eingeführt, die im Anhang A erläutert wird.

Es wird ein Eulersches Bezugssystem mit den raumfesten kartesischen Koordinaten $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ vorausgesetzt. Die Transformation

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{q} \cdot \underline{x} + \underline{o} \quad (4.1)$$

des Punktes \underline{x} mit einem orthogonalen ortsunabhängigen Transformationstensor \underline{q}

$$\underline{q}^T \cdot \underline{q} = \underline{q} \cdot \underline{q}^T = \underline{1} \quad (4.2)$$

$$\det \underline{q} = 1$$

und einem ortsunabhängigen beliebigen Vektor \underline{o} läßt sich als starre Bewegung des Koordinatensystems interpretieren. Dabei bewirkt \underline{q} die Rotation und \underline{o} die Translation.

Die Tensoren, die als Variable in das Stoffgesetz eingehen, brauchen hier nicht näher bestimmt zu werden und erhalten die Bezeichnungen $\underline{t}^{(1)}, \underline{t}^{(2)} \dots \underline{t}^{(n)}$. In allgemeiner Form lautet das Stoffgesetz

$$\underline{s}(\underline{t}^{(1)}, \underline{t}^{(2)}, \dots, \underline{t}^{(n)}) = 0 \quad (4.3)$$

Eine Transformation der Koordinaten nach Gl. (4.1) beeinflußt auch die Variablen des Stoffgesetzes. Diese gehen über in $\underline{\tilde{t}}^{(1)}, \underline{\tilde{t}}^{(2)} \dots \underline{\tilde{t}}^{(n)}$. Das Prinzip der Rauminvarianz fordert dann, daß

$$\underline{s}(\underline{\tilde{t}}^{(1)}, \underline{\tilde{t}}^{(2)}, \dots, \underline{\tilde{t}}^{(n)}) = 0 \quad (4.4)$$

ist, d.h. der funktionale Zusammenhang \underline{s} der Variablen muß bei einer Starrkörpertransformation erhalten bleiben. Dies bedeutet, daß das Stoffgesetz in verschiedenen Koordinaten-

systemen, die sich starr zueinander bewegen, dieselbe mathematische Darstellung haben soll. Die Forderung der Gl. (4.4) ist erfüllt, wenn

- die Variablen $\underline{t}^{(k)}$ des Stoffgesetzes objektiv sind, d.h. bei einer Transformation der Koordinaten nach Gl. (4.1) transformieren sich die Variablen durch

$$\underline{\tilde{t}}^{(k)} = \underline{q}^T \cdot \underline{t}^{(k)} \cdot \underline{q} \quad (4.5)$$

- die Funktion \underline{s} des Stoffgesetzes isotrop ist, d.h.

$$\underline{s}(\underline{q}^T \cdot \underline{t}^{(1)} \cdot \underline{q}, \underline{q}^T \cdot \underline{t}^{(2)} \cdot \underline{q}, \dots, \underline{q}^T \cdot \underline{t}^{(n)} \cdot \underline{q}) = \underline{s}(\underline{t}^{(1)}, \underline{t}^{(2)}, \dots, \underline{t}^{(n)}) \quad (4.6)$$

In den folgenden beiden Abschnitten werden zunächst objektive Variable zur Darstellung des Verformungs- und Spannungszustandes erläutert. Im Anschluß wird die allgemeine Form eines elasto-plastischen Stoffgesetzes abgeleitet, die die Isotropiebedingung nach Gl. (4.6) erfüllt.

4.2 Die Darstellung des Verformungszustandes

Wie bei dem Ansatz von GUDEHUS/KOLYMBAS sollen auch bei dem hier verwendeten inkrementellen Stoffgesetz eine Verformungsgeschwindigkeit und eine Verformungsbeschleunigung als variable Größen dienen. Bevor diese abgeleitet werden können, müssen zunächst einige Grundbegriffe kurz dargestellt werden. Ausführliche Darstellungen finden sich in jedem Lehrbuch der Kontinuumsmechanik.

Die Bewegung eines Körpers wird durch die Zuordnung von körperfesten Punkten zu raumfesten Punkten beschrieben. Ein körperfester Punkt läßt sich durch seine räumlichen Koordinaten $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ während eines Referenzzeitpunktes

$t = t_0$ kennzeichnen. Im Laufe der Bewegung nimmt er in Abhängigkeit von der Zeit t verschiedene raumfeste Punkte mit den räumlichen Koordinaten \underline{x} ein.

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{y}, t) \quad (4.7a)$$

Die Verformung der unmittelbaren Umgebung des körperfesten Punktes wird durch

$$d\underline{x} = \nabla \underline{x} \cdot d\underline{y} \quad (4.7b)$$

beschrieben. Darin ist der Tensor $\nabla \underline{x}$ mit den Komponenten $\partial x_j / \partial y_i$ der Verformungsgradient. Dieser gestattet die sogenannte Polarzerlegung

$$\nabla \underline{x} = \underline{r} \cdot \underline{u} \quad (4.8)$$

Darin ist \underline{r} ein orthogonaler Tensor und beschreibt eine reine Drehung. \underline{u} wird als rechter Streckungstensor bezeichnet und gibt die eigentliche Verformung an. Will man den Anteil der Drehung nicht berücksichtigen, so bildet man ein reines Längenmaß, z.B. die Länge ds des Differentials $d\underline{x}$:

$$ds^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} \quad (4.9)$$

Mit den Gln. (4.7b) und (4.8) und unter Berücksichtigung der Orthogonalität von \underline{r} , d.h. $\underline{r}^T \cdot \underline{r} = \underline{1}$, ergibt sich aus Gl. (4.9):

$$ds^2 = d\underline{y} \cdot \underline{u}^T \cdot \underline{u} \cdot d\underline{y} \quad (4.10a)$$

Das Produkt der rechten Streckungstensoren

$$\underline{c} = \underline{u}^T \cdot \underline{u} \quad (4.10b)$$

heißt Cauchy-Green Verformungstensor.

Im weiteren interessieren aber nicht die Verformungen, sondern deren Änderung. Man wählt dann zweckmäßigerweise den gegenwärtigen Zeitpunkt t als Referenzzeitpunkt und mißt die Zeit relativ zu t mit der Variablen τ . In diesem Zusammenhang ist auch der Begriff der materiellen Ableitung einzuführen. Die Größe A (Skalar, Vektor oder Tensor) sei auf einem körperfesten Punkt \underline{y} definiert. Dann ist die materielle Ableitung

$$\dot{A} = \frac{dA}{d\tau}$$

die Änderung von A bei festgehaltenem \underline{y} in Abhängigkeit von der Zeit τ . Die Verformungsänderung der unmittelbaren Umgebung eines körperfesten Punktes läßt sich durch die materielle Ableitung des Differential $d\underline{x}$ beschreiben.

Mit Gl. (4.7b) läßt sich zeigen:

$$\dot{d\underline{x}} = \nabla_{\underline{v}} \cdot d\underline{x} \quad (4.11)$$

Darin ist der Tensor $\nabla_{\underline{v}}$ mit den Komponenten $\partial v_i / \partial x_j$ der Geschwindigkeitsgradient. Ebenso wie der Verformungsgradient $\nabla_{\underline{x}}$ enthält auch der Geschwindigkeitsgradient einen Drehungsanteil. Will man diesen nicht berücksichtigen, so nimmt man wiederum die Länge ds und bildet deren materielle Ableitung als Maß der Verformungsgeschwindigkeit. Durch die Bildung materieller Ableitungen höherer Ordnung - man erhält dann zunächst eine Verformungsbeschleunigung - ergeben sich die sogenannten Rivlin-Ericksen Tensoren $\underline{e}^{(M)}$:

$$\frac{d^M(ds^2)}{d\tau^M} = d\underline{x} \cdot \underline{e}^{(M)} \cdot d\underline{x} \quad (4.12a)$$

Wegen Gl. (4.9) und (4.12a) ist $\underline{e}^{(0)} = \underline{1}$. $M = 1$ ergibt eine Verformungsgeschwindigkeit, $M = 2$ eine Verformungsbeschleunigung. Aus Gl. (4.12a) folgt:

$$d\underline{x} \cdot \underline{e}^{(M+1)} \cdot d\underline{x} = (d\underline{x} \cdot \dot{\underline{e}}^{(M)} \cdot d\underline{x})$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (4.11) folgende Rekursionsformel zur Berechnung der Rivlin-Ericksen Tensoren:

$$\underline{e}^{(M+1)} = \underline{\dot{e}}^{(M)} + \nabla \underline{v}^T \cdot \underline{e}^{(M)} + \underline{e}^{(M)} \cdot \nabla \underline{v}$$

Mit $\underline{e}^{(0)} = \underline{1}$ und $\underline{\dot{e}}^{(0)} = 0$ erhält man

$$\underline{e}^{(1)} = \nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v} \quad (4.12 \text{ b})$$

$$\underline{e}^{(2)} = (\nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v}) + \nabla \underline{v}^T (\nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v}) + (\nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v}) \nabla \underline{v} \quad (4.12 \text{ c})$$

usw.

ERINGEN zeigt in [22], Abschnitt 93, daß die Rivlin-Ericksen Tensoren objektiv sind, d.h. bei starren Bewegungen des räumlichen Koordinatensystems transformieren sie sich nach der Gl. (4.5).

Im folgenden wird ein Zusammenhang zwischen den Rivlin-Ericksen Tensoren und dem Cauchy-Green Verformungstensor abgeleitet. Mit den Gl. (4.10a, 4.10b) ist

$$ds^2 = d\underline{y} \cdot \underline{c} \cdot d\underline{y}$$

Da $d^M(d\underline{y})/d\tau^M = 0$ ist, ergibt sich

$$\frac{d^M(ds^2)}{d\tau^M} = d\underline{y} \cdot \frac{d^M \underline{c}}{d\tau^M} \cdot d\underline{y} \quad (4.13)$$

Im Referenzzeitpunkt $\tau = t$ ist $d\underline{x} = d\underline{y}$ und damit folgt aus Gl. (4.12a) und (4.13):

$$\underline{e}^{(M)} = \frac{d^M \underline{c}}{d\tau^M} \quad \text{für } \tau = t \quad (4.14)$$

Es zeigt sich, daß die Rivlin-Ericksen Tensoren und die materiellen Ableitungen des Gauchy-Green Verformungstensors im Referenzzustand gleich sind. Man kann diesen Zusammenhang statt der Gl. (4.12a) zur Definition der Rivlin-Ericksen Tensoren benutzen. Es folgt dann die Gl. (4.12a), und alles übrige, insbesondere die Gln. (4.12b,c) ergeben sich unverändert.

Eine solche Vorgehensweise, d. h. die Bildung einer Verformungsgeschwindigkeit und einer Verformungsbeschleunigung aus den materiellen Ableitungen eines finiten Verformungstensors, wird bei einer anderen Gruppe von Tensoren angewendet, die symbolisch mit $\underline{d}^{(M)}$ bezeichnet werden. Sie werden durch die materiellen Ableitungen des rechten Streckungstensors \underline{u} in der Referenzkonfiguration definiert, man vgl. TRUESDELL/NOLL [18] Abschnitt 24:

$$\underline{d}^{(M)} = \frac{d^M \underline{u}}{d\tau^M} \quad \text{für } \tau = t \quad (4.15)$$

$M = 1$ ergibt wieder eine Verformungsgeschwindigkeit, $M = 2$ eine Verformungsbeschleunigung. Zunächst wird $\underline{d}^{(1)}$ bestimmt. Hierzu wird auf die bekannten Tensoren der Verformungsrate

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) \quad \text{mit } d_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (4.16)$$

und der Rotationsrate

$$\underline{w} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T) \quad \text{mit } w_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \quad (4.17)$$

zurückgegriffen. Weiterhin werden die ersten zwei materiellen Ableitungen des Verformungsgradienten $\nabla \underline{x}$ benötigt:

$$(\dot{\nabla} \underline{x}) = \nabla \underline{v} \cdot \nabla \underline{x} \quad (4.18)$$

$$(\ddot{\nabla} \underline{x}) = [(\dot{\nabla} \underline{v}) + \nabla \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}] \cdot \nabla \underline{x} \quad (4.19)$$

Aus der Polarzerlegung Gl. (4.8) ergibt sich unter Berücksichtigung der Orthogonalität von \underline{r} , d. h. $\underline{r}^T \cdot \underline{r} = \underline{1}$, und der Symmetrie von \underline{u} zunächst

$$\nabla \underline{x}^T \cdot \nabla \underline{x} = \underline{u} \cdot \underline{u}.$$

Durch Bildung der materiellen Ableitung erhält man weiter

$$(\dot{\nabla} \underline{x}^T) \cdot \nabla \underline{x} + \nabla \underline{x}^T \cdot (\dot{\nabla} \underline{x}) = \dot{\underline{u}} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \dot{\underline{u}}. \quad (4.20 a)$$

Mit Gl. (4.18) folgt dann

$$\nabla \underline{x}^T \cdot \nabla \underline{v}^T \cdot \nabla \underline{x} + \nabla \underline{x}^T \cdot \nabla \underline{v} \cdot \nabla \underline{x} = \dot{\underline{u}} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \dot{\underline{u}}.$$

Insbesondere ergibt sich dann für den Referenzzustand, für den $\nabla \underline{x} = \underline{u} = \underline{1}$ ist:

$$\nabla \underline{v}^T + \nabla \underline{v} = 2\dot{\underline{u}} \quad \text{für } \tau = t. \quad (4.20 b)$$

Hieraus erhält man mit den Gln. (4.15) und (4.16):

$$\underline{d}^{(1)} = \underline{d}. \quad (4.21)$$

Zur Bestimmung der Verformungsbeschleunigung $\underline{d}^{(2)}$ wird zunächst die materielle Ableitung der Gl. (4.20a) gebildet:

$$(\ddot{\nabla} \underline{x}^T) \cdot \nabla \underline{x} + 2(\dot{\nabla} \underline{x}^T) \cdot (\dot{\nabla} \underline{x}) + \nabla \underline{x}^T \cdot (\ddot{\nabla} \underline{x}) = \ddot{\underline{u}} \cdot \underline{u} + 2\dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{u} \cdot \ddot{\underline{u}}.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (4.19) ergibt sich dann insbesondere für den Referenzzustand mit $\nabla \underline{x} = \underline{u} = \underline{1}$:

$$(\ddot{\nabla} \underline{v}^T) + \nabla \underline{v}^T \cdot \nabla \underline{v}^T + 2 \nabla \underline{v}^T \cdot \nabla \underline{v} + \nabla \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + (\ddot{\nabla} \underline{v}) = 2(\ddot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}} \cdot \dot{\underline{u}}) \quad \text{für } \tau = t.$$

Die Ausrechnung liefert dann mit den Gln. (4.16), (4.17) und (4.20b):

$$\ddot{\underline{u}} = \dot{\underline{d}} + \underline{d} \cdot \underline{d} + \underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} \quad \text{für } \tau = t$$

bzw.

$$\underline{d}^{(2)} = \dot{\underline{d}} + \underline{d} \cdot \underline{d} + \underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} \quad (4.22)$$

Die Verformungsgeschwindigkeit nach Gl. (4.21) und die Verformungsbeschleunigung nach (4.22) sind, wie von TRUESDELL/NOLL in [18], Abschnitt 25, gezeigt wird, objektiv; bei starren Bewegungen des räumlichen Koordinatensystems transformieren sie sich nach Gl. (4.5).

Der Vergleich der Tensoren $\underline{e}^{(1)}$ nach Gl. (4.12b) und $\underline{d}^{(1)}$ nach Gl. (4.21) zeigt unter Berücksichtigung von Gl. (4.16), daß die beiden Ansätze, die Rivlin-Ericksen Tensoren nach Gl. (4.14) und die Ableitung der Streckungstensoren nach Gl. (4.15), hinsichtlich der Verformungsgeschwindigkeit bis auf den Faktor 2 gleich sind, während sich die Verformungsbeschleunigungen $\underline{e}^{(2)}$ nach Gl. (4.12c) und $\underline{d}^{(2)}$ nach Gl. (4.22), sowie alle höheren Ableitungen unterschiedlich ergeben.

Beschreibt man ein physikalisches Phänomen alternativ mit beiden Typen der Verformungsbeschleunigung, so müßten jeweils verschiedene Stoffgesetze verwendet werden, um dieselben Ergebnisse zu erhalten. Die Frage, welcher Typ von Verformungsbeschleunigung welchem Stoffgesetz angemessen ist, ist bisher nirgends erörtert worden und muß auch hier offenbleiben. Die Verwendung der durch Gl. (4.22) definierten Verformungsbeschleunigung in den weiteren Überlegungen geschieht deshalb unter dem Gesichtspunkt, dem verwendeten Stoffgesetz eine möglichst einfache Form zu geben.

4.3 Die Darstellung des Spannungszustandes

Neben dem Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$ ist für ein inkrementelles Stoffgesetz eine Variable zur Darstellung der Spannungsänderung erforderlich. Zunächst liegt es nahe, hierfür die materielle Ableitung $\dot{\underline{\sigma}}$ des Cauchy-Spannungstensors zu wählen. Es zeigt sich aber, daß $\dot{\underline{\sigma}}$ nicht objektiv ist, man vergleiche z.B. MALVERN [21], Abschnitt 6.7. Man kann nun $\dot{\underline{\sigma}}$ in verschiedener Weise so modifizieren, daß ein objektiver Tensor $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$ als Maß der Spannungsänderung entsteht. Einige Möglichkeiten und ihre Urheber lauten

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^I &= \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} && \text{Jaumann} \\
 \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{II} &= \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma} && \text{Cotter / Rivlin} \\
 \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{III} &= \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma} && \text{Oldroyd} \\
 \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{IV} &= \dot{\underline{\sigma}} - \underline{\sigma} \cdot \nabla \underline{v} - \nabla \underline{v} \cdot \underline{\sigma} + \text{tr}(\nabla \underline{v}) \cdot \underline{\sigma} && \text{Truesdell}
 \end{aligned}
 \tag{4.23 a - d}$$

Darin ist $\nabla \underline{v}$ der Geschwindigkeitsgradient und \underline{w} die Rotationsrate nach Gl. (4.17). Grundsätzlich lassen sich beliebig viele Spannungsraten finden, die objektiv sind. Die genannten Definitionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie sich anschaulich deuten lassen, man vergleiche PRAGER [23], MASUR [24].

Darüberhinaus formuliert PRAGER in [23] ein Auswahlkriterium, dem nur noch der Vorschlag von JAUMANN genügt. Dies wird im folgenden dargestellt. Stoffgesetze für isotrope, plastische Stoffe nehmen Fließbedingungen zur Bestimmung des Verformungstyps und plastische Potentiale der Ableitung der Verformungsinkremente an. Fließbedingungen und Potentiale werden, sofern ein Eulersches Bezugssystem zugrundeliegt, aus den Invarianten

des Cauchy-Spannungstensors gebildet. Es ist dann offensichtlich sinnvoll zu fordern, daß die Spannungsinvarianten ihren Wert nicht verändern, solange Verformungsrate und Spannungsrate Null sind. Andernfalls können sich Fließflächen und plastische Potentiale verändern, ohne daß das Material eine Beanspruchung erfahren hätte.

Das Kriterium wird im folgenden angewendet. Die Spannungsinvarianten lauten

$$\begin{aligned} \text{I} &= \underline{\underline{g}} : \underline{\underline{1}} \\ \text{II} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{g}} : \underline{\underline{g}} - \text{I}^2) \\ \text{III} &= \det \underline{\underline{g}} \end{aligned} \tag{4.24 a - c}$$

Zur Durchführung einzelner Ableitungen ist der Übergang zur Komponentenschreibweise erforderlich:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \sigma_{ii} \\ \text{II} &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij} - \text{I}^2) \\ \text{III} &= \frac{1}{6} e_{ijs} e_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{sr} \end{aligned} \tag{4.25 a - c}$$

Darin ist e_{ijs} das Permutationssymbol, das die Werte -1, 0, 1 annimmt. Die Änderung der Spannungsinvarianten wird durch deren materielle Ableitung beschrieben. Diese lauten

$$\begin{aligned} \dot{\text{I}} &= \dot{\sigma}_{ii} \\ \dot{\text{II}} &= \sigma_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{ij} - \text{I} \cdot \dot{\text{I}} \\ \dot{\text{III}} &= -e_{ijs} e_{pqr} (\dot{\sigma}_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{sr} + \sigma_{ip} \dot{\sigma}_{jq} \sigma_{sr} + \sigma_{ip} \sigma_{jq} \dot{\sigma}_{sr}) \end{aligned} \tag{4.26 a - c}$$

Im folgenden wird gezeigt, daß die materiellen Ableitungen der Spannungsinvarianten zu Null werden, wenn die Jaumannsche Spannungsrate $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^I$ zu Null wird. Sie lautet in Komponentenschreibweise

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij}^I = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik} w_{kj} - w_{ik} \sigma_{kj}$$

Mit $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^I = 0$ ergibt sich

$$\dot{\sigma}_{ij} = -\sigma_{ik} w_{kj} + w_{ik} \sigma_{kj} \quad (4.27)$$

und

$$\dot{\sigma}_{ii} = -\sigma_{ik} w_{ki} + w_{ik} \sigma_{ki}$$

Wegen der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\sigma}$ und der Antimetrie der Rotationsrate \underline{w} ist dann mit Gl. (4.26a)

$$\dot{I} = \dot{\sigma}_{ii} = 2 w_{ik} \sigma_{ki} = 0 \quad (4.28)$$

Weiter folgt mit den Gl. (4.27) und (4.28) aus Gl. (4.26b):

$$\dot{II} = -\sigma_{ij} \sigma_{ik} w_{kj} + \sigma_{ij} w_{ik} \sigma_{kj}$$

Darin sind die Produkte $\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ik}$ und $\sigma_{ij} \cdot \sigma_{kj}$ der Komponenten von $\underline{\sigma}$ symmetrisch. Unter Berücksichtigung der Antimetrie von \underline{w} gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{II} &= w_{jk} (\sigma_{ji} \sigma_{ik}) + w_{ik} (\sigma_{ij} \sigma_{jk}) \\ &= 2 w_{ik} (\sigma_{ij} \sigma_{jk}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hinsichtlich der dritten Spannungsinvarianten läßt sich zeigen, daß das Produkt $e_{ijs} \cdot e_{pqr} \cdot \sigma_{ip} \cdot \sigma_{jq} \cdot \sigma_{sr}$ wieder aus einem symmetrischen und einem antimetrischen Anteil besteht, die dieselbe Summationsregel wie Gl. (4.28) haben. Dann ist auch $\dot{III} = 0$.

Man sieht, daß die gezeigte Eigenschaft der Spannungsinvarianten auf der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors $\underline{\sigma}$ und der Antimetrie der Rotationsrate \underline{w} beruhen. Da der Geschwindigkeitsgradient $\nabla \underline{x}$ nicht antimetrisch ist, führen die anderen Definitionen Gl. (4.23b - d) objektiver Spannungsraten nicht zu der gewünschten Eigenschaft, daß die Spannungsinvarianten konstant bleiben, wenn die jeweilige Spannungsrate zu Null wird. Für die weiteren Überlegungen wird deshalb die Jaumannsche Spannungsrate zugrundegelegt, die besondere Kennzeichnung durch einen Index entfällt.

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} \quad (4.29)$$

Im folgenden soll die anschauliche Bedeutung der Jaumannschen Spannungsrate erklärt werden. Die Bewegung eines körperfesten Punktes bzw. seiner unmittelbaren Umgebung läßt sich in eine reine Starrkörperbewegung und in die eigentliche Verformung aufspalten. Dies zeigt die Polarzerlegung des Verformungsgradienten $\nabla \underline{x}$ nach Gl. (4.8), worin der Tensor \underline{r} die Rotation des körperfesten Punktes und seiner unmittelbaren Umgebung von der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration darstellt. Dann läßt sich mit \underline{r} das raumfeste Koordinatensystem lokal in ein körperfestes Koordinatensystem transformieren, das der Rotation des körperfesten Punktes und seiner unmittelbaren Umgebung folgt. Die vom raumfesten in das körperfeste System transformierten Größen werden im folgenden durch ein Apostroph gekennzeichnet. Es ist

$$\underline{\sigma}' = \underline{r}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{r} \quad (4.30)$$

Die Spannungsänderung im körperfesten System ist durch die materielle Ableitung $\dot{\underline{\sigma}}'$ des transformierten Spannungstensors $\underline{\sigma}'$ gegeben. Aus Gl. (4.30) folgt

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \dot{\underline{r}}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{r} + \underline{r}^T \cdot \dot{\underline{\sigma}} \cdot \underline{r} + \underline{r}^T \cdot \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{r}} \quad (4.31)$$

Der im körperfesten System bestimmte Tensor $\dot{\underline{\sigma}}'$ hat nun auch eine Darstellung im raumfesten System. Diese erhält die Bezeichnung $\dot{\underline{\sigma}}^0$ und ergibt sich aus der Transformation von $\dot{\underline{\sigma}}'$ vom körperfesten in das raumfeste System. Die Transformationsregel lautet

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{r} \cdot \dot{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{r}^T \quad (4.32)$$

Unter Berücksichtigung der Orthogonalität von \underline{r} , d.h. es ist ($\underline{r}^T \cdot \underline{r} = \underline{r} \cdot \underline{r}^T = \underline{1}$), ergibt sich aus Gl. (4.31) und (4.32):

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{r} \cdot \dot{\underline{r}}^T \cdot \underline{\sigma} + \dot{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{r}} \cdot \underline{r}^T \quad (4.33)$$

Nimmt man nun die aktuelle Konfiguration als Referenzkonfiguration, dann fallen körperfestes und raumfestes System momentan zusammen. Dabei weist das körperfeste gegenüber dem raumfesten System eine Rotations- und Translationsgeschwindigkeit auf. Es ist dann

$$\underline{r} = \underline{r}^T = \underline{1}$$

und, wie z. B. von MALVERN in [21], Abschnitt 4.6, gezeigt:

$$\dot{\underline{r}} = -\dot{\underline{r}}^T = \underline{w}$$

Unter den oben genannten Voraussetzungen erhält man für die Gl. (4.33):

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = -\underline{w} \cdot \underline{\sigma} + \dot{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\sigma} \cdot \underline{w}$$

Dies entspricht der Jaumannschen Spannungsrate nach Gl. (4.29). Die dargestellten Zusammenhänge zeigen, daß diese die Spannungsänderung in einem Bezugssystem angibt, welches momentan der Starrkörperbewegung folgt.

4.4 Das Stoffgesetz

4.4.1 Allgemeiner Ansatz

Als objektive Variable des Stoffgesetzes werden der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$, die Jaumannsche Spannungsrate

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} + \underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} \quad (4.34 a)$$

nach Gl. (4.29), die Verformungsrate \underline{d} nach Gl. (4.16) und eine aus dem Tensor $\underline{d}^{(2)}$ nach Gl. (4.22) abgeleitete Verformungsbeschleunigung $\overset{\circ}{\underline{d}}$ verwendet. Diese lautet

$$\overset{\circ}{\underline{d}} = \dot{\underline{d}} + \underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} \quad (4.34 b)$$

und unterscheidet sich von $\underline{d}^{(2)}$ durch den Wegfall des in \underline{d} quadratischen Gliedes. Diese Vereinfachung ist physikalisch willkürlich und zunächst nur durch die Analogie zur Definition der Spannungsrate nach Gl. (4.34a) gerechtfertigt. Verformungsbeschleunigung und Spannungsrate sind damit formal gleich definiert und haben auch dieselben Eigenschaften:

- $\overset{\circ}{\underline{d}}$ ist objektiv,
- die Invarianten der Verformungsrate \underline{d} bleiben unverändert, wenn $\overset{\circ}{\underline{d}}$ zu Null wird,
- $\overset{\circ}{\underline{d}}$ ist die materielle Ableitung der Verformungsrate \underline{d} in einem (lokal) körperfesten Bezugssystem.

Hinzu kommt, daß der Wegfall des in \underline{d} quadratischen Gliedes später im numerischen Rechenverfahren zu Vereinfachungen führt.

In Anlehnung an den in Abschnitt 3 dargestellten Ansatz von GUDEHUS/KOLYMBAS wird die Spannungsrate $\underline{\dot{\sigma}}$ in einen geschwindigkeitsunabhängigen elasto-plastischen Anteil $\underline{\dot{\sigma}}_s$ und in einen geschwindigkeitsabhängigen viskosen Anteil $\underline{\dot{\sigma}}_v$ aufgeteilt, die unabhängig voneinander betrachtet werden:

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}}_s + \underline{\dot{\sigma}}_v \quad (4.35 \text{ a})$$

In gleicher Weise wird die Spannung aufgeteilt

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_v \quad (4.35 \text{ b})$$

Der Anteil $\underline{\dot{\sigma}}_s$ lautet in allgemeiner Form

$$\underline{\dot{\sigma}}_s = \underline{H}(\underline{\sigma}_s, \xi_1 \dots \xi_n) : \underline{d} \quad (4.36 \text{ a})$$

Darin ist \underline{H} ein elasto-plastischer Stofftensor 4.Stufe, der neben der Spannung $\underline{\sigma}_s$ noch von einer Reihe skalarer Verfestigungsparameter $\xi_1 \dots \xi_n$ abhängt. Der Tensor \underline{H} wird im folgenden Abschnitt für den Fall großer Verformungen aus den Postulaten der Plastizitätstheorie abgeleitet. Der Ansatz nach Gl. (4.36a) ist geschwindigkeitsunabhängig, da bei gegebenem Spannungs- und Verfestigungszustand Spannungsrate und Verformungsrate proportional zueinander sind.

Für den geschwindigkeitsabhängigen Anteil wird folgender Ansatz gewählt:

$$\underline{\dot{\sigma}}_v = \underline{G} : \underline{d} \quad (4.36 \text{ b})$$

Darin ist \underline{G} ein weiterer Stofftensor 4.Stufe, der in Abschnitt 4.4.4 näher erläutert wird.

Es bleibt die Frage, wie die Spannungen $\underline{\sigma}_s$ und $\underline{\sigma}_v$ zu bestimmen sind. Wie später in Abschnitt 4.5 dargestellt wird, erhält man $\underline{\sigma}$ durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit der Zeit t als unabhängiger Variabler. Der Integrationsprozeß wird schematisch dargestellt durch

$$\underline{\sigma} = \int \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}, \underline{\sigma}) dt \quad (4.37 a)$$

Mit den Ansätzen nach Gl. (4.35a, b) ist dann

$$\underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}, \underline{\sigma}) = \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_s + \underline{\dot{\sigma}}_v, \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_v) \quad (4.37 b)$$

Im folgenden wird sich zeigen (vgl. Abschnitt 4.5), daß folgender Zusammenhang gilt:

$$\underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_s + \underline{\dot{\sigma}}_v, \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_v) = \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_s, \underline{\sigma}_s) + \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_v, \underline{\sigma}_v) \quad (4.37 c)$$

Man kann dann schreiben

$$\underline{\sigma}_s = \int \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_s, \underline{\sigma}_s) dt$$

$$\underline{\sigma}_v = \int \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_v, \underline{\sigma}_v) dt$$

und die Spannungen $\underline{\sigma}_s$ und $\underline{\sigma}_v$ können unabhängig voneinander berechnet werden.

4.4.2 Die allgemeine Form des elasto-plastischen Anteils

Wie bereits in Abschnitt 2 erwähnt wurde, liefert das von LADE in [14] für Sand vorgeschlagene elasto-plastische Stoffgesetz gute Ergebnisse in numerischen Rechenverfahren, die das Füllen und beginnende Entleeren von Silos nachvollziehen. Es findet deshalb auch hier bei der Festlegung des Stofftensors \underline{H} Verwendung.

Zunächst wird aus den Annahmen der Plastizitätstheorie eine allgemeine Form von \underline{H} abgeleitet, die bei großen Verformungen angewendet werden kann. Die erste Annahme teilt die Verformungsrate \underline{d} in einen reversiblen elastischen Anteil und zwei irreversible plastische Anteile:

$$\underline{d} = \underline{d}_e + \underline{d}_p + \underline{d}_k \quad (4.38)$$

Für den elastischen Anteil \underline{d}_e gilt

$$\underline{d}_e = \underline{E}^{-1} : \underline{\dot{\sigma}}_s \quad (4.39 a)$$

mit einem Elastizitätstensor \underline{E} , der folgende Komponenten hat:

$$E_{ijrs}^{-1} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \delta_{ir} \delta_{js} - \nu \delta_{ij} \delta_{rs}] \quad (4.39 b)$$

Darin ist E der Elastizitätsmodul, der bei LADE spannungsabhängig ist, und ν die konstante Querdehnzahl.

In Gl. (4.38) bezeichnet \underline{d}_k den sogenannten plastisch-kontraktiven Anteil der Verformungsrate, das sind im wesentlichen Volumenkontraktionen infolge wachsenden hydrostatischen Druckes. \underline{d}_p bezeichnet den sogenannten plastisch-expansiven Anteil, das sind Verformungen infolge wachsender deviatorischer Spannungsanteile, die dann mit einer Volumenexpansion verbunden sind.

Die zweite Annahme der Plastizitätstheorie leitet die plastische Verformungsrate aus einer Potentialfunktion g ab. Wegen des Prinzips der Rauminvarianz kann die Funktion g bei Zugrundelegung eines Eulerschen Bezugssystems vom Spannungstensor $\underline{\sigma}_s$ nur in Form seiner Invarianten abhängen:

$$g = g(I_s, II_s, III_s)$$

Der Gradient \underline{m} der Potentialfunktion lautet:

$$\underline{m} = \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}_s} = \frac{\partial g}{\partial I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \underline{\sigma}_s} + \frac{\partial g}{\partial II_s} \frac{\partial II_s}{\partial \underline{\sigma}_s} + \frac{\partial g}{\partial III_s} \frac{\partial III_s}{\partial \underline{\sigma}_s}$$

Berechnet man die Ableitung der Invarianten nach den Spannungen, so ergibt sich

$$\underline{m} = \frac{\partial g}{\partial I_s} \cdot \underline{1} + \frac{\partial g}{\partial II_s} \cdot (\underline{\sigma}_s - I_s \cdot \underline{1}) + \frac{\partial g}{\partial III_s} \cdot (\underline{\sigma}_s \cdot \underline{\sigma}_s - I_s \cdot \underline{\sigma}_s - II_s \cdot \underline{1}) \quad (4.40)$$

Angewendet auf den plastisch expansiven Anteil lautet dann die zweite Annahme der Plastizitätstheorie

$$\underline{d}_p = \lambda_p \underline{m} \quad (4.41)$$

Darin ist λ_p ein zunächst unbekannter Skalar.

Die dritte Annahme der Plastizitätstheorie gibt an, wann plastische Verformungen auftreten. Dazu wird die Fließfunktion f_p eingeführt. Wie bei der Funktion g gilt

$$f_p = f_p(I_s, II_s, III_s)$$

Der Gradient \underline{n} der Fließfunktion ergibt sich wie bei Gl. (4.40):

$$\underline{n} = \frac{\partial f_p}{\partial I_s} \cdot \underline{1} + \frac{\partial f_p}{\partial II_s} \cdot (\underline{\sigma}_s - I_s \cdot \underline{1}) + \frac{\partial f_p}{\partial III_s} \cdot (\underline{\sigma}_s \cdot \underline{\sigma}_s - I_s \cdot \underline{\sigma}_s - II_s \cdot \underline{1}) \quad (4.42)$$

Im folgenden wird die materielle Ableitung der Fließfunktion benötigt:

$$\dot{f}_p = \frac{\partial f_p}{\partial I_s} \dot{I}_s + \frac{\partial f_p}{\partial II_s} \dot{II}_s + \frac{\partial f_p}{\partial III_s} \dot{III}_s \quad (4.43)$$

Für die materiellen Ableitungen der Invarianten ergeben sich mit dem Anteil $\underline{\dot{\sigma}}_s$ der Jaumannschen Spannungsrate $\underline{\dot{\sigma}}$ folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \dot{I}_s &= \underline{1} : \underline{\dot{\sigma}}_s \\ \dot{II}_s &= (\underline{\sigma}_s - I_s \underline{1}) : \underline{\dot{\sigma}}_s \\ \dot{III}_s &= (\underline{\sigma}_s \cdot \underline{\sigma}_s - I_s \underline{\sigma}_s - II_s \underline{1}) : \underline{\dot{\sigma}}_s \end{aligned} \quad (4.44 \text{ a-c})$$

Auf den Beweis wird der Kürze halber verzichtet. Man erhält insgesamt aus den Gl. (4.43) und (4.44a - c) unter Berücksichtigung von Gl. (4.42):

$$\dot{f}_p = \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}}_s \quad (4.45)$$

Angewendet auf den plastisch-expansiven Anteil lautet dann die dritte Annahme der Plastizitätstheorie:

$$\underline{d}_p \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_p(I_s, II_s, III_s) - h_p(\xi_1) = 0 \\ \text{und} \\ \dot{f}_p = \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}}_s > 0 \end{array} \right. \quad (4.46 \text{ a,b})$$

$$\underline{d}_p = 0 \quad \text{sonst}$$

Die Gl. (4.46a) ist die sogenannte Fließbedingung mit der Verfestigungsfunktion h_p und dem Verfestigungsparameter ξ_1 . Im Raum der Hauptspannungen bildet Gl. (4.46a) die sogenannte Fließfläche. Die Gl. (4.46a,b) besagen, daß plastische Verformungen auftreten, wenn der Spannungszustand in der Fließfläche liegt und wenn das Spannungsinkrement mit der Fließflächennormalen einen spitzen Winkel einschließt, d.h. in den Außenbereich der Fließfläche weist. Als Verfestigungsparameter wird hier die plastische Arbeit gewählt. Deren materielle Ableitung lautet für den plastischen expansiven Anteil:

$$\dot{W}_p = \underline{\sigma}_s : \underline{d}_p \quad (4.47)$$

Falls plastische Verformungen auftreten, ist eine Konsistenzbedingung zu erfüllen, d.h. nicht nur die Fließbedingung Gl. (4.46a), sondern auch ihre materielle Ableitung ist Null:

$$\dot{f}_p - \dot{h}_p = 0 \quad (4.48)$$

Mit $\xi_1 = W_p$ lautet die materielle Ableitung der Verfestigungsfunktion

$$\dot{h}_p = \frac{dh_p}{dW_p} \cdot \dot{W}_p \quad (4.49)$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (4.47) und (4.41) folgt dann:

$$\dot{h}_p = \lambda_p \cdot \frac{dh_p}{dW_p} \cdot \underline{\sigma}_s : \underline{m} \quad (4.50)$$

Hieraus wird der Anteil

$$A_p = \frac{dh_p}{dW_p} \cdot \underline{\sigma}_s : \underline{m} \quad (4.51)$$

als Verfestigungsparameter bezeichnet. Man erhält schließlich aus der Konsistenzbedingung Gl. (4.48) unter Berücksichtigung der Gln. (4.45), (4.50) und (4.51):

$$\lambda_p = \frac{1}{A_p} \cdot \underline{n} : \underline{\dot{\sigma}}_s \quad (4.52)$$

Damit ist auch der bisher unbekannte Faktor λ_p bestimmt.

Die Fließbedingung Gl. (4.46) und die Fließregel Gl. (4.41) in Verbindung mit der Gl. (4.52) für λ_p und (4.51) für A_p sind die wesentlichen Gleichungen zur Berechnung des plastisch-expansiven Anteils der Verformungsrate. Entsprechende Gleichungen ergeben sich für den plastisch-kontraktiven Anteil. Dieser hat eine assoziierte Fließregel, d.h. plastisches Potential und Fließfunktion sind identisch und durch

$$f_k = f_k(I_s, II_s, III_s)$$

gegeben. Der Gradient \underline{l} wird analog zu Gl. (4.40) gebildet:

$$\underline{l} = \frac{\partial f_k}{\partial I_s} \underline{1} + \frac{\partial f_k}{\partial II_s} (\underline{\sigma}_s - I_s \underline{1}) + \frac{\partial f_k}{\partial III_s} (\underline{\sigma}_s \cdot \underline{\sigma}_s - I_s \underline{\sigma}_s - II_s \underline{1}) \quad (4.53)$$

Die Fließbedingung lautet

$$\underline{d}_k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f_k(I_s, II_s, III_s) - h_k(W_k) = 0 \\ \text{und} \\ \dot{f}_k = \underline{l} : \underline{\dot{\sigma}}_s > 0 \end{array} \right. \quad (4.54 \text{ a,b})$$

$$\underline{d}_k = 0 \quad \text{sonst}$$

mit der Verfestigungsfunktion h_k und der Arbeit des plastisch-kontraktiven Anteils W_k als Verfestigungsparameter.

Die Fließregel ist

$$\underline{d}_k = \lambda_k \cdot \underline{l} . \quad (4.55)$$

Mit dem Verfestigungsparameter

$$A_k = \frac{dh_k}{dW_k} \cdot \underline{\sigma}_s : \underline{l} \quad (4.56)$$

berechnet sich der Faktor λ_k zu

$$\lambda_k = \frac{1}{A_k} \cdot \underline{l} : \underline{\dot{\sigma}}_s \quad (4.57)$$

Mit der Gl. (4.39a) des elastischen Anteils und den Gl. (4.41) und (4.55) für die plastischen Anteile ergibt sich aus dem Ansatz für die Verformungsrate nach Gl. (4.38):

$$\underline{d} = \underline{E}^{-1} : \underline{\dot{\sigma}}_s + \lambda_p \cdot \underline{m} + \lambda_k \cdot \underline{l} \quad (4.58)$$

Hieraus erhält man mit den Beziehungen für λ_p und λ_k nach Gl. (4.52) und (4.57) :

$$\underline{d} = \left(\underline{E}^{-1} + \frac{m n}{A_p} + \frac{l l}{A_k} \right) : \underline{\dot{\sigma}}_s \quad (4.59)$$

Für das numerische Rechenverfahren ist diese Form nicht geeignet, sie muß nach $\underline{\dot{\sigma}}_s$ aufgelöst werden. Dies geschieht im folgenden.

Zunächst wird die Gl. (4.58) mit dem Elastizitätstensor multipliziert:

$$\underline{E} : \underline{d} = \underline{\dot{\sigma}}_s + \lambda_p \cdot \underline{E} : \underline{m} + \lambda_k \cdot \underline{E} : \underline{l} \quad (4.60)$$

Diese Gleichung wird zum einen mit \underline{n} , zum anderen mit \underline{l} multipliziert. Man erhält so unter Berücksichtigung der Gln. (4.52) und (4.57):

$$\underline{n} : \underline{E} : \underline{d} = \lambda_p \cdot A_p + \lambda_p \cdot \underline{n} : \underline{E} : \underline{m} + \lambda_k \cdot \underline{n} : \underline{E} : \underline{l}$$

$$\underline{l} : \underline{E} : \underline{d} = \lambda_k \cdot A_k + \lambda_p \cdot \underline{l} : \underline{E} : \underline{m} + \lambda_k \cdot \underline{l} : \underline{E} : \underline{l}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach λ_p und λ_k liefert

$$\lambda_p = \frac{\underline{n} - \underline{\alpha}_k}{A_p + \underline{n} : \underline{E} : \underline{m} - \underline{\alpha}_k : \underline{E} : \underline{m}} : \underline{E} : \underline{d} \quad (4.61 a)$$

$$\lambda_k = \frac{\underline{l} - \underline{\alpha}_p}{A_k + \underline{l} : \underline{E} : \underline{l} - \underline{\alpha}_p : \underline{E} : \underline{l}} : \underline{E} : \underline{d} \quad (4.61 b)$$

Darin sind

$$\underline{\alpha}_p = \frac{\underline{l} : \underline{E} : \underline{m}}{A_p + \underline{n} : \underline{E} : \underline{m}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\alpha}_k = \frac{\underline{n} : \underline{E} : \underline{l}}{A_k + \underline{l} : \underline{E} : \underline{l}} \cdot \underline{l}$$

Mit den Gln. (4.61) erhält man schließlich aus Gl. (4.60):

$$\underline{\sigma}_s = \left(\underline{E} - \frac{\underline{E} : \underline{m} (\underline{n} - \underline{\alpha}_k) : \underline{E}}{A_p + \underline{n} : \underline{E} : \underline{m} - \underline{\alpha}_k : \underline{E} : \underline{m}} - \frac{\underline{E} : \underline{l} (\underline{l} - \underline{\alpha}_p) : \underline{E}}{A_k + \underline{l} : \underline{E} : \underline{l} - \underline{\alpha}_p : \underline{E} : \underline{l}} \right) : \underline{d} \quad (4.62)$$

Es zeigt sich an dieser Stelle, daß die Plastizitätstheorie im Falle mehrfacher plastischer Verformungsanteile und nicht assoziierter Fließregeln zu formal sehr aufwendigen Stoffgesetzen führt. Die Gl. (4.62) wird im folgenden durch

$$\underline{\dot{\sigma}}_s = \underline{H} : \underline{d} \quad (4.63)$$

abgekürzt. Es bleibt noch zu zeigen, daß das elasto-plastische Stoffgesetz nach Gl. (4.62) das Prinzip der Rauminvarianz erfüllt, d.h. isotrop im Sinne von Gl. (4.6) ist. Dies geschieht im Anhang C.

4.4.3 Eine spezielle Form des elasto-plastischen Anteils

Im folgenden werden die Fließfunktionen, plastischen Potentiale und Verfestigungsparameter dargestellt, wie sie von LADE für Sand experimentell in Triaxialversuchen bestimmt worden sind. Wegen der anderen Vorzeichenkonvention ergeben sich zur Originaldarstellung in [14] Vorzeichenunterschiede.

Danach bildet die Fließfunktion der plastisch kontraktiven Verformungsanteile im Raum der Hauptspannungen eine Kugel und hat die Gleichung

$$f_k = I_s^2 + 2 \cdot II_s \quad (4.64)$$

Der Gradient \underline{l} von f_k ergibt sich nach Gl. (4.53):

$$\underline{l} = 2 I_s \cdot \underline{1} + 2 (\underline{\sigma}_s - I_s \cdot \underline{1}) = 2 \underline{\sigma}_s \quad (4.65)$$

Im weiteren ist der Verfestigungsparameter A_k nach Gl. (4.56) zu bestimmen. Man erhält zunächst:

$$\underline{\sigma}_s : \underline{l} = 2 \underline{\sigma}_s : \underline{\sigma}_s$$

und unter Berücksichtigung der Gln. (4.24b) und (4.64):

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_s : \underline{l} &= 2 (2 II_s + I_s^2) \\ &= 2 f_k \end{aligned} \quad (4.66)$$

Zwischen der Arbeit W_k des plastisch-kontraktiven Anteils und der Fließfunktion f_k findet LADE experimentell folgenden Zusammenhang:

$$W_k = c_1 \cdot \left(\frac{f_k}{p^2}\right)^{c_2} \quad \text{bzw.} \quad f_k = p^2 \left(\frac{W_k}{c_1}\right)^{\frac{1}{c_2}}$$

Darin sind der Faktor c_1 und der Exponent c_2 Stoffkonstante, zur Dimensionskontrolle dient der Luftdruck p . Die Fließbedingung Gl. (4.54a) postuliert, daß die Fließfunktion und die Verfestigungsfunktion zahlenmäßig gleich sind. Dann ist

$$h_k = p^2 \left(\frac{W_k}{c_1}\right)^{\frac{1}{c_2}}$$

und

$$\frac{dh_k}{dW_k} = \frac{p^2}{c_1 c_2} \cdot \left(\frac{W_k}{c_1}\right)^{\frac{1}{c_2}-1} = \frac{p^2}{c_1 c_2} \cdot \left(\frac{f_k}{p^2}\right)^{1-c_2} \quad (4.67)$$

Damit ergibt sich der Verfestigungsparameter A_k nach Gl. (4.56) unter Berücksichtigung der Gln. (4.66) und (4.67) zu

$$A_k = \frac{2p^4}{c_1 c_2} \cdot \left(\frac{f_k}{p^2}\right)^{2-c_2} \quad (4.68)$$

Die Fließfunktion f_p und die Potentialfunktion g des plastisch-expansiven Anteils bilden im Raum der negativen Hauptspannungen (= Druckspannungen) Kegelflächen mit der Spitze im Ursprung. Die von LADE bestimmten Gleichungen lauten:

$$f_p = (I_s^3 / III_s - 27) \cdot (I_s / p)^{c_3} \quad (4.69)$$

$$g = -I_s^3 + [27 + \chi \cdot (p / I_s)^{c_3}] \cdot III_s \quad (4.70 a)$$

Darin ist der Exponent c_3 eine weitere Stoffkonstante und χ ein Parameter, der von der Fließfunktion und von einer Konsolidierungsspannung - im Triaxialversuch ist dies die Umfangsspannung $\sigma_2 = \sigma_3$, es wird hier die kleinste Hauptspannung σ_{s3} genommen - abhängt. LADE gibt folgenden Zusammenhang an:

$$\chi = c_4 \cdot f_p + c_5 \cdot \sqrt{\sigma_{s3}/p} + c_6 \quad (4.70 \text{ b})$$

Darin sind c_4 , c_5 und c_6 Stoffkonstanten. Der Gradient des plastischen Potentials ergibt sich nach Gl. (4.40) zu

$$\underline{m} = -[3I_s^2 + \chi c_3 (p/I_s)^{c_3+1} \cdot (III_s/p)] \cdot \underline{1} + [27 + \chi (p/I_s)^{c_3}] [\underline{\sigma_s} \cdot \underline{\sigma_s} - I_s \underline{\sigma_s} - II_s \underline{1}] \quad (4.71)$$

Im weiteren ist der Verfestigungsparameter A_p nach Gl. (4.51) zu bestimmen. Man erhält zunächst nach einigen Rechnungen:

$$\underline{\sigma_s} : \underline{m} = 3g - c_3 \cdot \chi \cdot (p/I_s)^{c_3} \cdot III_s \quad (4.72)$$

LADE gibt den folgenden, experimentell gefundenen Zusammenhang zwischen der Arbeit des plastisch expansiven Anteils und der Fließfunktion f_p , bzw. der Verfestigungsfunktion h_p an:

$$f_p = h_p = a \cdot \exp(-b \cdot W_p) \cdot (-W_p/p)^{\frac{1}{c}} \quad (4.73)$$

Die Koeffizienten a , b und c werden in Abhängigkeit von der Konsolidierungsspannung σ_{s3} und einem ausgezeichneten Wert W_{pmax} der plastischen Arbeit W_p angegeben. W_{pmax} ist die plastische Arbeit am Ende des Verfestigungsbereichs, bevor eine Entfestigung eintritt. Nach einigen Rechnungen ergibt sich dann aus Gl. (4.73) unter Berücksichtigung des Zusammenhangs für b :

$$\frac{dh_p}{dW_p} = \frac{f_p}{c} \cdot \left(\frac{1}{W_p} - \frac{1}{W_{pmax}} \right) \quad (4.74)$$

Mit den Gl. (4.72) und (4.74) ist der Verfestigungsparameter nach Gl. (4.51)

$$A_p = \frac{dh_p}{dW_p} \cdot \underline{\sigma_s} : \underline{m} ,$$

bestimmt. Es zeigt sich, daß wegen Gl. (4.74) für $W_p = W_{pmax}$ der Verfestigungsparameter zu Null wird, d.h. es tritt keine Verfestigung mehr ein. An dieser Stelle nimmt die Verfestigungsfunktion h_p ihren größten Wert h_{pmax} an. Dementsprechend gilt als Nebenbedingung der plastisch-expansiven Verfestigung:

$$f_p \cong h_{pmax} \quad (4.75)$$

Anschaulich bedeutet dies im Raum der Hauptspannungen, daß der Fließkegel des plastisch expansiven Anteils in seiner Ausdehnung beschränkt ist, und daß somit die deviatorischen Spannungen einen bestimmten Wert nicht überschreiten können.

Es verbleiben die Parameter des elastischen Verformungsanteils festzulegen. Der Elastizitätsmodul E im Elastizitätstensor E nach Gl. (4.39b) lautet nach LADE

$$E = c_7 \cdot (\sigma_{s3}/\rho)^{c_8} \quad (4.76)$$

Darin ist σ_{s3} die kleinste Hauptspannung des Spannungstensors σ_s und c_7, c_8 sind weitere Stoffkonstanten. Die Querdehnzahl wird als konstant angenommen.

Die Werte der Stoffkonstanten bestimmt LADE für Sand aus den Ergebnissen von Triaxialversuchen. Dabei zeigt sich, daß sie von der Lagerungsdichte der Probe abhängen. LADE ermittelt sie jeweils für eine lockere und eine dichte Probenpackung, ohne jedoch eine Gesetzmäßigkeit zwischen den Werten der Stoffkonstanten und der Lagerungsdichte anzugeben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Übertragung eines Stoffgesetzes, welches unter genau definierten Versuchsbedingungen abgeleitet wurde, auf allgemeine Fälle nicht unproblematisch ist:

- Das Stoffgesetz nach LADE ist nur für spezielle Verformungs- und Lastwege verifiziert. Das sind die, die sich überhaupt in Triaxialversuchen realisieren lassen.
- LADE stellt eine skalare Abhängigkeit der Potentialfunktion g (Gl. (4.70a,b)), sowie der Parameter h_p (Gl.(4.73)) und E (Gl. (4.76)) von einer Konsolidierungsspannung, das ist im Triaxialversuch die Umfangsspannung $\sigma_2 = \sigma_3$, fest. Eine direkte Übertragung auf allgemeine Fälle, indem als Konsolidierungsspannung die kleinste Hauptspannung σ_{s3} gewählt wird, verletzt bei Zugrundelegung eines Eulerschen Bezugssystems das Prinzip der Rauminvarianz. Dieses Prinzip impliziert, daß ein spannungsabhängiger Skalar eine Funktion der Spannungsinvarianten sein muß. Die Verletzung des Prinzips wird zunächst in Kauf genommen. Bei der weiteren Anwendung des Stoffgesetzes wäre zu prüfen, ob für die Konsolidierungsspannung nicht eine Funktion der Spannungsinvarianten genommen werden kann.

4.4.4 Der viskose Anteil

Die Ausführungen in Abschnitt 3 zeigen, daß hinsichtlich des geschwindigkeitsabhängigen bzw. viskosen Verhaltens granularer Schüttgüter keine allgemeingültigen und anwendbaren Gesetzmäßigkeiten bestehen. Empirisch und theoretisch gewonnene Ansätze sind entweder nur auf spezielle Fälle anwendbar oder in zu allgemeiner Form gegeben. Der Tensor \underline{G} des geschwindigkeitsabhängigen Anteils nach Gl. (4.36b),

$$\underline{\overset{\circ}{d}}_v = \underline{G} : \underline{\overset{\circ}{d}} \quad (4.77 a)$$

wird deshalb hier unter dem Gesichtspunkt festgelegt, eine möglichst einfache Form zu erhalten. In Analogie zum Stoffgesetz der Navier-Stokes'schen Flüssigkeit werden die Komponenten von \underline{G} wie folgt gewählt:

$$G_{ijrs} = 2\mu \cdot (\delta_{ir} \cdot \delta_{js} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \cdot \delta_{rs}) \quad (4.77 b)$$

Darin ist μ eine weitere Stoffkonstante, im folgenden hier Viskositätszahl genannt. Der Ansatz mit den Gl. (4.77a, b) ist isotrop im Sinne von Gl. (4.6) und erfüllt somit das Prinzip der Rauminvarianz. Neben seiner einfachen Form bietet er den Vorteil, nur einen Stoffparameter zu enthalten. Dem steht gegenüber, daß einige der Merkmale geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens, wie sie in Abschnitt 3 beschrieben sind, nicht erfaßt werden. Die Größenordnung des zunächst unbekanntes Wertes der Viskositätszahl wird später abgeschätzt, indem die mit dem Rechenverfahren ermittelten Fließgeschwindigkeiten in Silos mit tatsächlich auftretenden Fließgeschwindigkeiten verglichen werden.

4.5 Die Anwendung des Stoffgesetzes im Eulerschen Bezugssystem

Neben dem Spannungszustand in Form von \underline{g}_s gehen in den elasto-plastischen Anteil \underline{H} des Stoffgesetzes eine Reihe von Parametern ein, die den Verfestigungszustand des Materials beschreiben. Stellvertretend sei die Verfestigungsfunktion h_p des plastisch-expansiven Verhaltens betrachtet. Dies ist eine mit der Zeit t veränderliche Größe, die sich physikalisch sinnvoll zunächst nur auf körperfesten Punkten definieren läßt:

$$h_p = h_p(\underline{y}, t)$$

Durch Invertierung der Gl. (4.7a) läßt sich jedem raumfesten Punkt \underline{x} in Abhängigkeit von der Zeit t ein körperfester Punkt \underline{y} zuordnen:

$$\underline{y} = \underline{y}(\underline{x}, t)$$

Man erhält so die Funktion h_p in Abhängigkeit von raumfesten Punkten

$$h_p = h_p(\underline{y}(\underline{x}, t), t) = h_p(\underline{x}, t)$$

Es wird nun der Zeitpunkt $t = t^0$ betrachtet, zu dem sich im raumfesten Punkt \underline{x} der körperfeste Punkt \underline{y} befindet. Wie später noch ausführlicher erläutert wird, ist man bei der Festlegung des Verformungstyps gezwungen, nicht nur den aktuellen Wert der Verfestigungsfunktion

$$h_p(\underline{y}, t^0) = h_p(\underline{x}, t^0) \quad (4.78)$$

zu bestimmen, sondern auch deren Wert im körperfesten Punkt \underline{y} zum vorhergehenden Zeitpunkt $t = t^0 - dt$, das ist $h_p(\underline{y}, t^0 - dt)$, wobei

$$h_p(\underline{y}, t^0 - dt) \neq h_p(\underline{x}, t^0 - dt)$$

Es gelten nun folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} h_p(\underline{y}, t^0) &= h_p(\underline{y}, t^0 - dt) + \dot{h}_p \cdot dt \\ h_p(\underline{x}, t^0) &= h_p(\underline{x}, t^0 - dt) + \frac{\partial h_p}{\partial t} \cdot dt \end{aligned} \quad (4.79 \text{ a, b})$$

Darin ist \dot{h}_p die materielle und $\partial h_p / \partial t$ die örtliche Ableitung von h_p . Die örtliche Ableitung bezeichnet die Änderung von h_p in einem raumfesten Punkt \underline{x} in Abhängigkeit von der Zeit t . Mit dem Gradienten ∇h_p von h_p und der Geschwindigkeit \underline{v} gilt:

$$\dot{h}_p = \frac{\partial h_p}{\partial t} + \nabla_{\underline{h}_p} \cdot \underline{v} \quad (4.80)$$

Man erhält aus den Gl. (4.79 a, b) unter Berücksichtigung der Gl. (4.78) und (4.80):

$$h_p(\underline{y}, t^0 - dt) = h_p(\underline{x}, t^0 - dt) - \nabla_{\underline{h}_p} \cdot \underline{v} \cdot dt \quad (4.81)$$

Die Aussage der Gl. (4.81) lautet in Worten:

Befindet sich der körperfeste Punkt \underline{y} zum Zeitpunkt $t = t^0$ im raumfesten Punkt \underline{x} , so läßt sich bei bekanntem Geschwindigkeitsfeld der Wert der Verfestigungsfunktion h_p in \underline{y} zum Zeitpunkt $t = t^0 - dt$ aus dem Wert von h_p in \underline{x} zum gleichen Zeitpunkt und dem Gradienten $\nabla_{\underline{h}_p}$ bestimmen. Entsprechende Gleichungen gelten auch für die übrigen Materialparameter. Somit läßt sich, ausgehend von raumfesten Punkten, die "Geschichte" von Stoffparametern zurückverfolgen, wie es sich bei der Bestimmung des Verformungstyps des elasto-plastischen Verhaltens als erforderlich erweist.

Im weiteren sind am Stoffgesetz nach Gl. (4.35a) und (4.36a, b)

$$\underline{\overset{\circ}{\sigma}} = \underline{H} : \underline{\overset{\circ}{d}} + \underline{G} : \underline{\overset{\circ}{d}} \quad (4.82)$$

formale Modifikationen vorzunehmen. Wie bereits erläutert wurde, bezeichnen die Variablen $\underline{\overset{\circ}{\sigma}}$ bzw. $\underline{\overset{\circ}{d}}$ die Spannungsrate bzw. Verformungsbeschleunigung in einem körperfesten Bezugssystem. Nun sind bei Annahme eines raumfesten Bezugssystems die örtliche Spannungsrate $\partial \underline{\sigma} / \partial t$, bzw. die örtliche Verformungsbeschleunigung $\partial \underline{d} / \partial t$ zu bestimmen, die sich auf raumfeste Punkte beziehen. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der materiellen Ableitung ($\dot{\quad}$) und der örtlichen Ableitung $\partial(\quad) / \partial t$ von $\underline{\sigma}$ bzw. \underline{d} :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}} &= \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} + \nabla_{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v} \\ \underline{\dot{d}} &= \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \nabla_{\underline{d}} \cdot \underline{v} \end{aligned} \quad (4.83 a,b)$$

Darin ist $\nabla \underline{\sigma}$ der Gradient von $\underline{\sigma}$, ein Tensor 3. Stufe mit den Komponenten $\sigma_{ij,r}$. Entsprechendes gilt für $\nabla \underline{d}$. Der Zusammenhang zwischen den materiellen Ableitungen ($\dot{}$) und den Variablen der Form (0) ergibt sich nach den Gl. (4.34a, b):

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}} + \underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma}$$

$$\dot{\underline{d}} = \underline{\dot{d}} + \underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d}$$

Man erhält damit:

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \dot{\underline{\sigma}} - (\underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} + \nabla \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) \quad (4.84 \text{ a, b})$$

$$\dot{\underline{d}} = \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + (\underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} + \nabla \underline{d} \cdot \underline{v})$$

Die Gln. (4.82) und (4.84b) in Gl. (4.84a) eingesetzt ergeben:

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \underline{H} : \underline{d} + \underline{G} : \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} - (\underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} + \nabla \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) + \underline{G} : (\underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} + \nabla \underline{d} \cdot \underline{v}) \quad (4.85)$$

Hierin beschreiben die beiden ersten Anteile der rechten Seite das physikalische Verhalten des Materials, während sich die restlichen beiden Anteile aus der geometrischen Nichtlinearität ergeben.

Im Rechenverfahren wird der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$ durch die numerische Integration der örtlichen Spannungsrate bestimmt:

$$\underline{\sigma} = \int \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} dt \quad (4.86)$$

bzw. in Anlehnung an die Bezeichnungweise in Abschnitt 4.4.1, Gl. (4.37a)

$$\underline{\sigma} = \int \underline{\zeta}(\dot{\underline{\sigma}}, \underline{\sigma}) dt$$

Dabei ist mit Gl. (4.84a):

$$\underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}, \underline{\sigma}) = \underline{\dot{\sigma}} - (\underline{\sigma} \underline{w} - \underline{w} \underline{\sigma} + \nabla \underline{\sigma} \underline{v})$$

Mit der Aufteilung der Spannungsrate und der Spannung nach Gl. (4.35a, b)

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{\dot{\sigma}}_s + \underline{\dot{\sigma}}_v$$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_v$$

gilt dann offensichtlich:

$$\underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}, \underline{\sigma}) = \underline{\zeta}(\underline{\dot{\sigma}}_s + \underline{\dot{\sigma}}_v, \underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_v)$$

Damit ist nachgewiesen, daß die Gl. (4.37c) zutrifft, und die Voraussetzung der Aufteilung der Spannung nach Gl. (4.35a, b) gegeben ist.

5 Das numerische Rechenverfahren

5.1 Allgemeines

Neben dem Stoffgesetz nach Gl. (4.85) - das sind 6 Gleichungen mit 18 Unbekannten: jeweils 6 Komponenten von $\underline{\sigma}$ und \underline{d} , jeweils 3 Komponenten von \underline{w} und \underline{v} -, den Beziehungen zwischen der Verformungsrate \underline{d} und der Geschwindigkeit \underline{v} nach Gl. (4.16) bzw. zwischen der Rotationsrate \underline{w} und \underline{v} nach Gl. (4.17) - zusammen 9 Gleichungen - sind die Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen. Sie lauten im Eulerschen Bezugssystem:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho (\underline{b}_v - \dot{\underline{v}}) = 0 \quad (5.1)$$

Darin ist $\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma}$ das Tensorprodukt des Operators $\underline{\nabla}$ mit dem Cauchy-Spannungstensor $\underline{\sigma}$, es hat die Komponenten σ_{ij}, i . Weiterhin ist ρ die spezifische Masse, \underline{b}_v die Volumenkraft der Erdbeschleunigung und $\dot{\underline{v}}$ die materielle Ableitung der Geschwindigkeit, bzw. die Beschleunigung. Mit Gl. (5.1) ergeben sich drei weitere Gleichungen mit der zusätzlichen Unbekannten ρ . An dieser Stelle stehen 19 Unbekannte 18 Gleichungen gegenüber. Man kann zum Ausgleich die Bedingung der Massenkontinuität heranziehen, man vergleiche MALVERN [21], Abschnitt 5.2. Sie lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{tr}[\underline{\nabla}(\rho \underline{v})] = 0 \quad (5.2)$$

Die spezifische Masse ρ des granularen Schüttguts ist unmittelbar mit dessen Lagerungsdichte verbunden. Mißt man die Lagerungsdichte durch die in Abschnitt 3 eingeführte Volumenverteilungsfunktion ω , die den Festkörperanteil im Einheitsvolumen des Raumes angibt, so gilt folgender Zusammenhang:

$$\rho = \omega \cdot \gamma \quad (5.3)$$

Darin ist γ die spezifische Masse der festen Partikel, die als konstant angesehen werden kann. Man kann die räumlich und zeitlich veränderliche Lagerungsdichte des granularen Schüttguts mit Hilfe der Gl. (5.2) und (5.3) im numerischen Rechenverfahren berücksichtigen, wie z.B. bei CHUNG [25], Abschnitt 6, angegeben. Auf eine ausführliche Darstellung wird verzichtet. Um das Verfahren hier zu vereinfachen, wird die spezifische Masse ρ in den Gleichgewichtsbedingungen (5.1) als räumlich und zeitlich konstant angenommen und dem bekannten Anfangswert ρ_0 gleichgesetzt. Da bereits beim Stoffgesetz die veränderliche Lagerungsdichte nicht berücksichtigt wird, erscheint diese Vereinfachung bezüglich der Gleichgewichtsbedingungen zulässig.

An dieser Stelle reduziert sich das Problem auf 18 Unbekannte aus $\underline{\sigma}$, \underline{d} , \underline{w} , \underline{v} mit 18 Gleichungen. Dieser Gleichungssatz beinhaltet, abgesehen von der gerade getroffenen Annahme über ρ , keine einschränkenden Annahmen und kann auf beliebige Verformungen und Verformungsgeschwindigkeiten angewendet werden.

Für die Anwendung der Methode der Finiten Elemente muß die Gleichgewichtsbedingung (5.1) in eine Integralgleichung überführt werden. Dies wird im folgenden kurz beschrieben. Die Gl. (5.1) ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\int_V [\underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho (\underline{b}_v - \dot{\underline{v}})] \cdot \delta \underline{v} \, dV = 0 \quad (5.4)$$

Man beachte, daß sich das Integrationsgebiet V wegen der Annahme eines Eulerschen Bezugssystems nicht auf einen materiellen Körper sondern auf den Raum bezieht, und zwar auf denjenigen Teil des Raumes, der vom Körper eingenommen wird. In Gl. (5.4) ist $\delta \underline{v}$ eine beliebige, von Null verschiedene "Testfunktion", die im allgemeinen als eine Variation des

Geschwindigkeitsfeldes interpretiert wird. Unter der Voraussetzung, daß die zur Lösung zugelassenen Geschwindigkeitsfelder die kinematischen Randbedingungen, die auf dem Rand S_v vorgeschrieben sind, erfüllen, können die Testfunktionen dort zu Null gesetzt werden.

$$\underline{\delta v} = 0 \quad \text{auf } S_v \quad (5.5)$$

Die partielle Integration des ersten Teils von Gl. (5.4) liefert:

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\delta v} \, dV = - \int_V \underline{\sigma} : \delta(\underline{\nabla v}) \, dV + \int_S \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_t \cdot \underline{\delta v} \, dS \quad (5.6)$$

Darin ist $\underline{\nabla v}$ der Geschwindigkeitsgradient, S der gesamte Rand des Körpers, \underline{n}_t die Normale zum Rand und $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_t = \underline{b}_t$ die Randspannung. Die Randspannung ist auf dem Rand $S_t = S - S_v$ vorgeschrieben. Mit Gl. (5.5) gilt dann:

$$\int_S \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_t \cdot \underline{\delta v} \, dS = \int_{S_t} \underline{b}_t \cdot \underline{\delta v} \, dS \quad (5.7)$$

Es bleibt noch das Volumenintegral der rechten Seite von Gl. (5.6) umzuformen. Aus der Symmetrie des Spannungstensors $\underline{\sigma}$ folgt mit der Verformungsrate $\underline{d} = 1/2 (\underline{\nabla v} + \underline{\nabla v}^T)$:

$$\underline{\sigma} : \delta(\underline{\nabla v}) = \underline{\sigma} : \delta \underline{d} \quad (5.8)$$

Mit den Gln. (5.7) und (5.8) ergibt sich aus Gl. (5.6):

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\delta v} \, dV = - \int_V \underline{\sigma} : \delta \underline{d} \, dV + \int_{S_t} \underline{b}_t \cdot \underline{\delta v} \, dS$$

Damit läßt sich die den Gleichgewichtsbedingungen äquivalente Integralgleichung (5.4) wie folgt schreiben:

$$\int_V \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{d}} \, dV + \int_V \dot{\underline{\underline{v}}} \cdot \delta \underline{\underline{v}} \, \rho \, dV = \int_V \underline{\underline{b}}_v \cdot \delta \underline{\underline{v}} \, \rho \, dV + \int_{S_f} \underline{\underline{b}}_f \cdot \delta \underline{\underline{v}} \, dS \quad (5.9)$$

Dies ist das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Für die weitere Anwendung ist noch eine Beziehung zwischen der Beschleunigung $\dot{\underline{\underline{v}}}$ und der örtlichen, auf den raumfesten Punkt bezogenen Geschwindigkeitsableitung $\partial \underline{\underline{v}} / \partial t$ anzugeben. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\dot{\underline{\underline{v}}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \nabla \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}} \quad (5.10)$$

In der Gl. (5.9) sind die Integrationsgebiete V und S_f diejenigen Gebiete des Raumes, die der materielle Körper einnimmt und hängen somit von der Bewegung des Körpers im Raum ab. Die ist zunächst unbekannt und folgt, in Zusammenhang mit einem Stoffgesetz, erst als Ergebnis aus Gl. (5.9). Es ist daher i.a. unzweckmäßig, Randwertprobleme bei Festkörpern mit großen Verformungen auf der Grundlage der Gl. (5.9) zu behandeln. Im vorliegenden Fall löst sich das Problem jedoch insofern, als die äußere Geometrie des betrachteten Körpers, das ist granulares Füllgut, durch einen Behälter vorgegeben ist, dessen eigene Verformungen im allgemeinen vernachlässigt werden können.

5.2 Räumliche und zeitliche Diskretisierung

5.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

An dieser Stelle muß aus Zweckmäßigkeitsgründen die Schreibweise der verwendeten physikalischen Größen teilweise modifiziert werden. Die Koordinaten $\underline{\underline{x}}$ und Geschwindigkeiten $\underline{\underline{v}}$ sind wie bisher als Vektoren aufzufassen. Die Tensoren 2. Stufe, das sind die Cauchy-Spannung $\underline{\underline{\sigma}}$, die Jaumannsche Spannungsrate $\overset{\circ}{\underline{\underline{\sigma}}}$,

die Verformungsrate \underline{d} , die Verformungsbeschleunigung $\overset{\circ}{\underline{d}}$ und die Rotationsrate \underline{w} werden als Vektoren, die Gradienten $\nabla \underline{v}$, $\nabla \underline{\sigma}$ und $\nabla \underline{d}$ als Matrizen und die Tensoren 4. Stufe \underline{H} und \underline{G} ebenfalls als Matrizen geschrieben. Die in dem Stoffgesetz nach Gl. (4.85) auftretenden Anteile $(\underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma})$ bzw. $(\underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d})$ werden als Produkt einer Matrix $\Omega_{\underline{\sigma}}$ bzw. $\Omega_{\underline{d}}$, die als Komponenten Linearkombinationen von σ_{ij} bzw. d_{ij} enthält, mit dem Vektor \underline{w} geschrieben. Die genaue Darstellung der modifizierten Schreibweise findet sich im Anhang B. Als Rechenregeln werden die Regeln der Matrizenalgebra angewendet. Die Gleichgewichtsbedingungen nach Gl. (5.9) schreiben sich unter Berücksichtigung von Gl. (5.10) jetzt wie folgt:

$$\int_V \delta \underline{d}^T \cdot \underline{\sigma} \, dV + \int_V \delta \underline{v}^T \cdot \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \underline{v} \cdot \underline{v} \right) \rho \, dV = \int_V \delta \underline{v}^T \cdot \underline{b}_v \rho \, dV + \int_{S_f} \delta \underline{v}^T \cdot \underline{b}_t \, dS \quad (5.11)$$

Im folgenden werden, soweit hier für die Anwendung erforderlich, die Grundzüge der Methode der Finiten Elemente mit Verschiebungsansätzen erläutert. Ausführliche Darstellungen findet man u.a. bei BATHE [26], BREBBIA/FERRANTE [27], ZIENKIEWICZ [28].

Zur Bestimmung von Näherungslösungen wird das räumlich und zeitlich veränderliche Geschwindigkeitsfeld $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$ durch einen Ansatz der Form

$$\underline{v} = \underline{N}(\underline{x}) \cdot \underline{a}(t) \quad (5.12)$$

approximiert. Dabei ist $\underline{N}(\underline{x})$ die Matrix der Formfunktionen, die nur von den räumlichen Koordinaten \underline{x} abhängen, und $\underline{a}(t)$ ist ein Vektor, dessen Komponenten die Geschwindigkeiten in festen räumlichen Punkten sind und nur von der Zeit t abhängen. Es wird vorausgesetzt, daß der Ansatz nach Gl. (5.12) die kinematischen Randbedingungen erfüllt.

Aus Gl. (5.12) ergeben sich Approximationen für die Verformungsrate und die Rotationsrate

$$\begin{aligned}\underline{d} &= \underline{B}(\underline{x}) \cdot \underline{a}(t) \\ \underline{w} &= \underline{R}(\underline{x}) \cdot \underline{a}(t)\end{aligned}\tag{5.13 a,b}$$

Die Matrizen \underline{B} und \underline{R} enthalten Linearkombinationen der partiellen Ableitungen der Formfunktionen nach den räumlichen Koordinaten. Mit den Gln. (5.12) und (5.13a) folgt aus Gl. (5.11):

$$\begin{aligned}\delta \underline{a}^T \cdot \left(\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{N} \rho \, dV \cdot \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + \int_V \underline{N}^T \cdot \nabla \underline{v} \cdot \underline{N} \rho \, dV \cdot \underline{a} + \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{g} \, dV \right) &= \\ &= \delta \underline{a}^T \cdot \left(\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{b}_v \rho \, dV + \int_{S_f} \underline{N}^T \cdot \underline{b}_f \, dS \right)\end{aligned}\tag{5.14}$$

Die Gl. (5.14) muß für beliebige Werte $\delta \underline{a}^T$ gelten. Mit den Abkürzungen

$$\underline{M} = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{N} \rho \, dV \quad \text{Massenmatrix} \tag{5.15}$$

$$\underline{M}_\nabla = \int_V \underline{N}^T \cdot \nabla \underline{v} \cdot \underline{N} \rho \, dV \quad \text{konvektive Massenmatrix} \tag{5.16}$$

$$\underline{k} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{g} \, dV \quad \text{Vektor der inneren Knotenkräfte} \tag{5.17}$$

$$\underline{p} = \int_V \underline{N}^T \cdot \underline{b}_v \rho \, dV + \int_{S_f} \underline{N}^T \cdot \underline{b}_f \, dS \quad \text{Vektor der Lastknotenkräfte} \tag{5.18}$$

ergibt sich aus Gl. (5.14):

$$\underline{M} \cdot \frac{\partial \underline{a}}{\partial t} + \underline{M}_\nabla \cdot \underline{a} + \underline{k} = \underline{p} \tag{5.19}$$

Darin ist die Massenmatrix \underline{M} konstant, die konvektive Massenmatrix hängt über den Geschwindigkeitsgradienten $\nabla \underline{v}$ von den Knotengeschwindigkeiten \underline{a} ab, ebenso die inneren Knotenkräfte \underline{k} mittels Stoffgesetz und Geschwindigkeitsfeld. Darüberhinaus sind im vorliegenden Problem die Spannungen auf dem Rand S_t nicht konservativ, da die Reibungskräfte zwischen Füllgut und Behälterwand vom inneren Spannungszustand und somit von den Verformungen des Füllgutes abhängen. Die Gl. (5.19) läßt sich in folgende Form umschreiben:

$$\frac{\partial \underline{a}}{\partial t} = \underline{f}(\underline{a}, t) \quad (5.20 a)$$

mit

$$\underline{f}(\underline{a}, t) = \underline{M}^{-1} \cdot [\underline{p}(\underline{a}, t) - \underline{k}(\underline{a}) - \underline{M}_{\nabla}(\underline{a}) \cdot \underline{a}] \quad (5.20 b)$$

Die Gl. (5.20a,b) sind ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Knotengeschwindigkeiten \underline{a} in Abhängigkeit von der Zeit t . Es kann als Anfangswertproblem näherungsweise mit Differenzenverfahren numerisch gelöst werden. Eine kurze Darstellung dieser Verfahren findet sich in Anhang D. Im vorliegenden Problem wird ein Einschrittverfahren angewendet. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{a}^i &= \underline{a}(t^i) \\ \underline{f}^i &= \underline{f}(\underline{a}^i, t^i) \end{aligned} \quad (5.21 a, b)$$

lassen sich diese Verfahren in allgemeiner Form wie folgt darstellen:

$$\underline{a}^{n+1} = \underline{a}^n + \Delta t \cdot [(1 - \alpha) \cdot \underline{f}^n + \alpha \cdot \underline{f}^{n+1}] \quad (5.22)$$

Darin ist α ein Integrationsparameter und $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Bei Vorgabe eines Anfangswertes \underline{a}^0 können mit Gl. (5.21) sukzessive die folgenden Werte $\underline{a}^1, \underline{a}^2 \dots$ usw. ermittelt werden. Der Integrationsparameter kann im Bereich $0 < \alpha < 1$ beliebig gewählt werden, nimmt aber Einfluß auf die Genauigkeit und Stabilität des Verfahrens. Außerdem ist die Gl. (5.22) für $\alpha > 0$ i.a. ein nichtlineares Gleichungssystem, da \underline{f}^{n+1} die Unbekannte \underline{a}^{n+1} in nichtlinearer Form enthalten kann. Unter gewissen Voraussetzungen, die im Anhang D erläutert werden, ist das Verfahren nach Gl. (5.22) für $\alpha > 1/2$ unbeschränkt stabil, d.h. die Fehler der Näherungslösung werden für beliebig große Δt bei fortschreitendem Index n nicht akkumuliert. Für alle weiteren Überlegungen wird $\alpha = 1$ gesetzt. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \underline{p}^i &= \underline{p}(\underline{a}^i, t^i) \\ \underline{k}^i &= \underline{k}(\underline{a}^i) \\ \underline{M}_{\nabla}^i &= \underline{M}_{\nabla}(\underline{a}^i) \end{aligned} \tag{5.23 a - c}$$

ergibt sich aus der Gl. (5.20b):

$$\underline{f}^{n+1} = \underline{M}^{-1} \cdot (\underline{p}^{n+1} - \underline{k}^{n+1} - \underline{M}_{\nabla}^{n+1} \cdot \underline{a}^{n+1})$$

Dies in Gl. (5.22) eingesetzt liefert mit $\alpha = 1$:

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \underline{M}_{\nabla}^{n+1} \right) \cdot \underline{a}^{n+1} + \underline{k}^{n+1} = \underline{p}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t} \underline{M} \cdot \underline{a}^n \tag{5.24}$$

Hierin sind die inneren Knotenkräfte \underline{k}^{n+1} zunächst noch nicht bestimmt. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

5.2.2 Stoffgesetz

Die inneren Knotenkräfte ergeben sich nach Gl. (5.17). Zum Zeitpunkt $t = t^{n+1}$ mit der dazugehörigen Spannung $\underline{\sigma}^{n+1}$ erhält man

$$\underline{k}^{n+1} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma}^{n+1} dV \quad (5.25)$$

Darin ist die Matrix \underline{B} konstant. Die räumlich und zeitlich veränderliche Spannung $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ ist durch das Stoffgesetz bestimmt, das durch Gl. (4.85) in Form eines Systems nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung gegeben ist. In der eingangs dieses Abschnitts eingeführten Schreibweise ergibt sich das Stoffgesetz wie folgt:

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \underline{H} \cdot \underline{d} + \underline{G} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} - (\underline{\Omega} \underline{\sigma} \cdot \underline{w} + \nabla \underline{\sigma} \cdot \underline{v}) + \underline{G} \cdot (\underline{\Omega} \underline{d} \cdot \underline{w} + \nabla \underline{d} \cdot \underline{v}) \quad (5.26 a)$$

Die geometrisch nichtlinearen Anteile, das sind der 3. und 4. Summand der rechten Seite, werden in einem Vektor \underline{z} zusammengefaßt:

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial t} = \underline{H} \cdot \underline{d} + \underline{G} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \underline{z} \quad (5.26 b)$$

Zur näherungsweisen Lösung dieser Differentialgleichung wird wieder ein Einschrittverfahren verwendet. Die sinngemäße Übertragung der Gl. (5.22) liefert mit $\alpha = 1$:

$$\underline{\sigma}^{n+1} = \underline{\sigma}^n + \Delta t \cdot \left(\underline{H}^{n+1} \cdot \underline{d}^{n+1} + \underline{G} \cdot \frac{\partial \underline{d}^{n+1}}{\partial t} + \underline{z}^{n+1} \right) \quad (5.27)$$

Diese Gleichung läßt sich weiter vereinfachen, indem man das Einschrittverfahren Gl. (5.22) mit $\alpha = 1$ auf die Verformungsrate anwendet:

$$\frac{\partial \underline{d}^{n+1}}{\partial t} = \frac{\underline{d}^{n+1} - \underline{d}^n}{\Delta t} \quad (5.28)$$

Hiermit folgt dann aus Gl. (5.27):

$$\underline{d}^{n+1} = \underline{d}^n + \Delta t \cdot (\underline{H}^{n+1} \cdot \underline{d}^{n+1} + \underline{z}^{n+1}) + \underline{G} \cdot (\underline{d}^{n+1} - \underline{d}^n) \quad (5.29)$$

Bei der expliziten Berechnung des elasto-plastischen Stofftensors \underline{H}^{n+1} ist zu beachten, daß zunächst für den Zeitpunkt t^{n+1} ein Verformungstyp (d.h. elastisch oder plastisch expansiv oder plastisch kontraktiv, bzw. Kombinationen) festzulegen ist. Es bleibt zu klären, nach welchen Regeln der Verformungstyp des elasto-plastischen Stoffverhaltens bestimmt werden soll, da sich die Fließbedingungen nach den Gln. (4.46a, b) bzw. (4.54a, b) nicht unmittelbar auf diskrete Zeitpunkte übertragen lassen. Bezeichnet \underline{d} die plastische Verformungsrate, dann lauten die Fließbedingungen (einschl. Konsistenzbedingung) mit einer Fließfunktion f und einer Verfestigungsfunktion h :

$$\underline{d} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f - h = 0 \quad \text{und} \\ \dot{f} > 0 \quad \text{und} \\ (\dot{f} - \dot{h}) = 0 \end{array} \right. \quad (5.30 \text{ a-c})$$

$$\underline{d} = 0 \quad \text{sonst}$$

Fließ- und Verfestigungsfunktionen sind auf körperfesten Punkten \underline{y} definiert und mit der Zeit t veränderlich:

$$f = f(\underline{y}, t)$$

$$h = h(\underline{y}, t)$$

Es sei angenommen, daß der körperfeste Punkt \underline{y} die Fließbedingung zum Zeitpunkt t erfüllt. Es folgt dann aus den Gln. (5.30a, b) unter Berücksichtigung der Gl. (5.30c)

$$\underline{d} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{y}, t) = h(\underline{y}, t) \quad \text{und} \\ \dot{h}(\underline{y}, t) > 0 \end{array} \right. \quad (5.31 \text{ a,b})$$

Außerdem gilt:

$$h(\underline{y}, t) = h(\underline{y}, t - dt) + \dot{h}(\underline{y}, t) \cdot dt$$

Damit lassen sich die Gl. (5.31a, b) durch

$$\underline{d} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{y}, t) = h(\underline{y}, t) \quad \text{und} \\ f(\underline{y}, t) > h(\underline{y}, t - dt) \end{array} \right. \quad (5.32 \text{ a,b})$$

ersetzen. Diese Form läßt sich direkt auf diskrete Zeitpunkte übertragen:

$$\underline{d}^{n+1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{y}, t^{n+1}) = h(\underline{y}, t^{n+1}) \quad \text{und} \\ f(\underline{y}, t^{n+1}) > h(\underline{y}, t^n) \end{array} \right. \quad (5.33 \text{ a,b})$$

Der körperfeste Punkt \underline{y} befindet sich zum Zeitpunkt $t = t^{n+1}$ im raumfesten Punkt \underline{x} . Dann ist

$$f(\underline{y}, t^{n+1}) = f(\underline{x}, t^{n+1})$$

$$h(\underline{y}, t^{n+1}) = h(\underline{x}, t^{n+1})$$

und mit Gl. (4.81)

$$h(\underline{y}, t^n) \approx h(\underline{x}, t^n) - \nabla h \cdot \underline{v} \cdot \Delta t$$

Insgesamt lautet dann die Fließbedingung für diskrete Zeitpunkte im Eulerschen Bezugssystem:

$$\underline{d}^{n+1} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\underline{x}, t^{n+1}) = h(\underline{x}, t^{n+1}) \quad \text{und} \\ f(\underline{x}, t^{n+1}) > h(\underline{x}, t^n) - \nabla h \cdot \underline{v} \cdot \Delta t \end{array} \right. \quad (5.34 \text{ a, b})$$

$$\underline{d}^{n+1} = 0 \quad \text{sonst}$$

5.2.3 Die Kombination von Gleichgewichtsbedingungen und Stoffgesetz

Mit der Approximation der Verformungsrate gemäß Gl. (5.13a) zum Zeitpunkt $t = t^{n+1}$

$$\underline{d}^{n+1} = \underline{B} \cdot \underline{a}^{n+1}$$

den Spannungen zum Zeitpunkt $t = t^{n+1}$ nach Gl. (5.29) und den Abkürzungen

$$\underline{K}_T^{n+1} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{H}^{n+1} \cdot \underline{B} \, dV \quad \text{tangente Steifigkeitsmatrix} \quad (5.35)$$

$$\underline{C} = \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{G} \cdot \underline{B} \, dV \quad \text{Viskositätsmatrix} \quad (5.36)$$

$$\underline{K}_N^{n+1} = \int_V \underline{B}^T \underline{z}^{n+1} \, dV \quad \begin{array}{l} \text{innere Knotenkräfte aus} \\ \text{geometrischer Nichtlinearität} \end{array} \quad (5.37)$$

lassen sich die inneren Knotenkräfte \underline{k}^{n+1} nach Gl. (5.25) wie folgt schreiben:

$$\underline{k}^{n+1} = \underline{k}^n + \Delta t \cdot \underline{K}_T^{n+1} \cdot \underline{a}^{n+1} + \underline{C} \cdot (\underline{a}^{n+1} - \underline{a}^n) + \Delta t \cdot \underline{k}_N^{n+1} \quad (5.38)$$

Hieraus läßt sich mit der Gl. (5.24) ein Gleichungssystem ableiten, welches Gleichgewicht und Stoffgesetz miteinander verbindet:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \underline{M}_V^{n+1} + \underline{C} + \Delta t \cdot \underline{K}_T^{n+1} \right) \cdot \underline{a}^{n+1} + \Delta t \cdot \underline{k}_N^{n+1} &= \\ &= \underline{p}^{n+1} - \underline{k}^n + \left(\frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \underline{C} \right) \cdot \underline{a}^n \end{aligned} \quad (5.39)$$

In diesem Gleichungssystem sind die Massenmatrix \underline{M} und die Viskositätsmatrix \underline{C} konstant. Die konvektive Massenmatrix \underline{M}_V hängt über den Geschwindigkeitsgradienten \underline{V}_V von den Knotengeschwindigkeiten \underline{a} , die tangentielle Steifigkeitsmatrix \underline{K}_T nach Festlegung eines Verformungstyps über den Stofftensor \underline{H} vom Spannungszustand, und der Vektor der "geometrisch nichtlinearen" Knotenkräfte \underline{k}_N vom Spannungs- und Verformungszustand ab. Der Spannungszustand wiederum ist über das Stoffgesetz nach Gl. (5.29) an den Verformungszustand und damit an die Knotengeschwindigkeiten \underline{a} gekoppelt.

Bei Vorgabe eines Anfangswertes der Knotengeschwindigkeiten \underline{a}^0 und eines Anfangsspannungszustands $\underline{\sigma}^0$ können aus dem Gleichungssystem Gl. (5.39) bei gegebenen Lastvektoren $\underline{p}^1, \underline{p}^2 \dots$ usw. sukzessive die Knotengeschwindigkeiten $\underline{a}^1, \underline{a}^2 \dots$ usw. ermittelt werden. Dabei ist eine iterative Vorgehensweise erforderlich, da wegen der gerade genannten Abhängigkeiten die Unbekannte \underline{a} direkt oder indirekt in $\underline{M}_V, \underline{K}_T$ und \underline{k}_N eingeht. Darüberhinaus sind folgende Nebenbedingungen zu beachten:

- Es dürfen, da es sich um ein granulares Schüttgut handelt, keine Zugspannungen auftreten.
- Die Spannungen unterliegen, wie in Abschnitt 4.4.3 erläutert wurde, hinsichtlich ihrer deviatorischen Anteile einer Grenzbedingung.

5.3 Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

Eine ausführliche Darstellung der Lösungsmethoden nichtlinearer Gleichungssysteme findet man u.a. bei ORTEGA/RHEINBOLDT [29]. Zur Lösung des Gleichungssystems (5.39) wird hier eine Methode in Anlehnung an das Verfahren von Newton-Raphson verwendet. Als Ausgangspunkt dienen die den Gln. (5.39) äquivalenten Gl. (5.24), die mit

$$\underline{M}_{\nabla}^{n+1} = \underline{M}_{\nabla}$$

$$\underline{a}^{n+1} = \underline{a}$$

$$\underline{k}^{n+1} = \underline{k}$$

$$\underline{p}^{n+1} = \underline{p}$$

in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \underline{\psi} &= \underline{p} + \frac{1}{\Delta t} \underline{M} \cdot (\underline{a}^n - \underline{a}) - \underline{M}_{\nabla} \cdot \underline{a} - \underline{k} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Es wird vorausgesetzt, daß die Knotengeschwindigkeiten \underline{a}^n zum Zeitpunkt $t = t^n$, damit auch \underline{v}^n , \underline{d}^n , \underline{w}^n sowie der Spannungszustand $\underline{\sigma}^n$ bekannt sind. Unter Berücksichtigung des Stoffgesetzes Gl. (5.29) ist dann

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}(\underline{a})$$

Im folgenden soll eine Iterationsvorschrift zur Lösung der nichtlinearen Gl. (5.40) abgeleitet werden. Dazu wird die Gl. (5.40) durch Multiplikation mit der Inversen einer beliebigen nichtsingulären Matrix \underline{A} und durch gleichzeitiges Subtrahieren und Addieren der Unbekannten \underline{a} in folgende Form überführt:

$$\underline{a} = \underline{a} + \underline{A}^{-1} \cdot \underline{\psi} \quad (5.41)$$

Hieraus kann man eine Iterationsvorschrift ableiten,

$${}^{i+1}\underline{a} = {}^i\underline{a} + \underline{A}^{-1} \cdot \underline{\psi}({}^i\underline{a}) \quad (5.42)$$

die sich wie folgt beschreiben läßt:

Man nehme eine Näherungslösung ${}^i\underline{a}$ der Gleichung $\underline{\psi}(\underline{a}) = 0$. Es ist $\underline{\psi}({}^i\underline{a}) \neq 0$. Der Fehler $\underline{\psi}({}^i\underline{a})$ wird durch die Matrix \underline{A}^{-1} in einen Korrekturwert transformiert, mit dem ${}^i\underline{a}$ modifiziert wird, um eine verbesserte Näherungslösung ${}^{i+1}\underline{a}$ zu erhalten.

Die Iterationsvorschrift ergibt eine Folge von Werten ${}^k\underline{a}$, die bei geeigneter Wahl von \underline{A} und ${}^0\underline{a}$ gegen einen Grenzwert ${}^*\underline{a}$ konvergieren. Dieser Grenzwert ist Lösung der Gl. (5.40).

Aus Gl. (5.42) leiten sich einige bekannte Verfahren ab, so die Methode von Newton-Raphson. Diese Methode setzt \underline{A} als Funktionalmatrix \underline{J} des Fehlervektors $\underline{\psi}$ und nimmt den Wert von \underline{J} an der Stelle ${}^i\underline{a}$:

$$\underline{A} = - \left. \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{a}} \right|_{\underline{a} = {}^i\underline{a}} = - \underline{J}({}^i\underline{a}) \quad (5.43)$$

Hierbei ist \underline{A} in jedem Iterationsschritt neu aufzustellen und zu invertieren. Um diesen Aufwand zu vermeiden, setzt die modifizierte Methode von Newton-Raphson:

$$\underline{A} = - \left. \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial \underline{a}} \right|_{\underline{a} = \underline{a}^n} = - \underline{J}(\underline{a}^n) \quad (5.44)$$

Darin ist \underline{a}^n das bekannte Ergebnis des vorhergehenden Rechenschritts. \underline{A} wird einmalig zu Beginn der Iteration aufgestellt und invertiert. Die Wahl der Funktionalmatrix von $\underline{\psi}$ für \underline{A} ist nicht zwingend, man kann z.B. auch $\underline{A} = \alpha \cdot \underline{1}$ mit der Einheitsmatrix $\underline{1}$ und einem geeigneten Faktor α wählen. Dann entfällt der Aufwand für das Aufstellen und Invertieren von \underline{A} . Das Problem besteht darin, \underline{A} so zu wählen, daß das Iterationsverfahren konvergiert. Hierzu finden sich Überlegungen bei TÖRNIG [30], Abschnitt 4. Dort wird gezeigt, daß die Methode von Newton-Raphson konvergent ist, sofern der Startwert o_a der Iteration innerhalb einer jeweils im Einzelfall zu bestimmenden Umgebung der Lösung *a liegt. Praktisch läßt sich immer Konvergenz erreichen, wenn der Startwert nahe genug an der Lösung liegt. Weitergehende Überlegungen zeigen, daß die Methode relativ schnell konvergiert, i.a. sind nur wenige Iterationen erforderlich, um eine Lösung mit vorgegebener Genauigkeit zu ermitteln. Dem steht der große Aufwand beim Aufstellen und Invertieren der Matrix \underline{J} gegenüber. Die weniger aufwendige modifizierte Methode von Newton-Raphson konvergiert ebenfalls, wenn das Ergebnis \underline{a}^n des letzten Zeitschrittes nahe genug an der Lösung *a des aktuellen Zeitschrittes liegt. Der Aufwand in jeder Iteration ist wesentlich geringer als bei der Methode von Newton-Raphson, dafür sind mehr Iterationen erforderlich.

Die Matrix \underline{A} wird hier zur Lösung des Gleichungssystems (5.40) in Anlehnung an die modifizierte Methode von Newton-Raphson gewählt. Zunächst ergibt sich aus Gl. (5.40):

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} = -\frac{\partial p}{\partial \underline{a}} + \frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \frac{\partial \underline{M}_{\nabla}}{\partial \underline{a}} \cdot \underline{a} + \underline{M}_{\nabla} + \frac{\partial \underline{k}}{\partial \underline{a}}$$

Mit

$$\underline{k}^{n+1} = \underline{k}$$

$$\underline{k}_N^{n+1} = \underline{k}_N$$

$$\underline{K}_T^{n+1} = \underline{K}_T$$

erhält man aus der Gl. (5.38) für die inneren Knotenkräfte:

$$\frac{\partial \underline{k}}{\partial \underline{a}} = \Delta t \frac{\partial \underline{K}_T}{\partial \underline{a}} \cdot \underline{a} + \Delta t \underline{K}_T + \underline{C} + \Delta t \frac{\partial \underline{k}_N}{\partial \underline{a}}$$

Vernachlässigt man die Anteile $\partial p / \partial \underline{a}$, $\partial \underline{M}_{\nabla} / \partial \underline{a}$, $\partial \underline{K}_T / \partial \underline{a}$ und $\partial \underline{k}_N / \partial \underline{a}$, so verbleibt

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} \approx \frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \underline{M}_{\nabla} + \underline{C} + \Delta t \underline{K}_T$$

Die Matrix \underline{A} wird dann hier wie folgt gewählt:

$$\underline{A} = \frac{1}{\Delta t} \underline{M} + \underline{M}_{\nabla}^n + \underline{C} + \Delta t \underline{K}_T^n \quad (5.45)$$

Darin sind \underline{M}_{∇}^n bzw. \underline{K}_T^n die mit dem Ergebnis \underline{a}^n des letzten Zeitschrittes ermittelte konvektive Massenmatrix bzw. die tangentielle Steifigkeitsmatrix. Als Startwert der Iteration wird $\underline{a}^0 = 0$ gewählt. Die mit diesen Festlegungen durchgeführten Rechnungen erweisen sich später bei der Anwendung immer als konvergent.

Damit sind an dieser Stelle alle wesentlichen Gleichungen abgeleitet. Der Ablauf des numerischen Rechenverfahrens ist schematisch im Bild 5.1 dargestellt. Zu diesem Diagramm sind folgende Anmerkungen zu machen.

- Zur Stelle (1):

Die elasto-plastische Stoffmatrix $i_{\underline{H}}^n$ und die geometrisch nichtlinearen Spannungszinkremente $i_{\underline{z}}^n$ hängen vom Spannungszustand $i_{\underline{\sigma}}^n$, der erst im folgenden Rechenschritt bestimmt wird, ab. An dieser Stelle ist deshalb eine weitere Iteration erforderlich, wobei mit dem Spannungswert $i_{\underline{\sigma}}^n$ zur Berechnung von $i_{\underline{H}}^n$ und $i_{\underline{z}}^n$ zurückgegangen wird. Dies geschieht so lange, bis angenommener und berechneter Spannungswert übereinstimmen. Um dieses aufwendige Vorgehen zu vermeiden, wird das Verfahren noch modifiziert. Darauf wird später eingegangen.

- Zur Stelle (2):

Die inneren Knotenkräfte werden durch eine numerische Integration bestimmt. Dafür sind im vorhergehenden Schritt die Spannungen in den Stützstellen der Integration zu bestimmen. Wegen der Annahme eines Eulerschen Bezugssystems liegt das FE-Netz und damit auch die Lage der Stützstellen während der gesamten Rechnungen fest und verändert sich nicht. Bei allen übrigen Integrationen wird gleich verfahren.

- Zur Stelle (3):

Zwischen Schüttgut und dem Behälter entstehen Reibungskräfte, die tangential zur Behälterwand wirken. Diese Reibungskräfte sind als äußere Lasten anzusetzen. Es wird angenommen, daß sie von dem Schüttgutdruck an der Behälterwand abhängen, der wiederum erst ein Ergebnis der Rechnung ist. Somit sind auch die Lastknotenkräfte hinsichtlich der Randspannungsanteile in den Iterationsvorgang mit einzubeziehen.

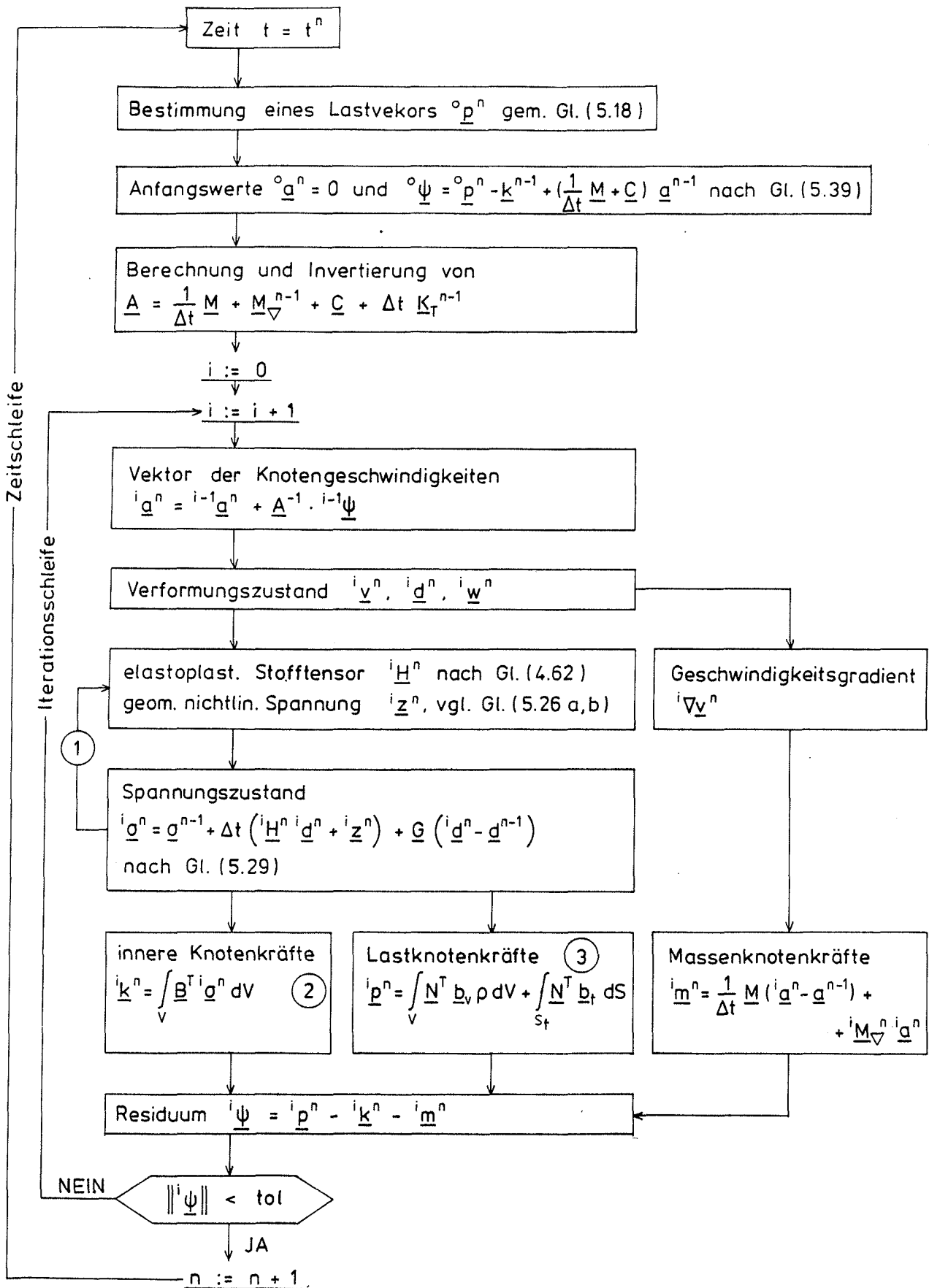


Bild 5.1: Schema des numerischen Rechenverfahrens

5.4 Die Anwendung des Rechenverfahrens

5.4.1 Spannungsberechnung

Bei der Spannungsberechnung sind aus physikalischen Gründen folgende Restriktionen einzuführen:

- Im Füllgut dürfen keine Zugspannungen auftreten.
- Wie die experimentellen Untersuchungen von LADE an granularen Stoffen zeigen, kann das Schüttgut deviatorische Spannungsanteile nur beschränkt aufnehmen. Dies äußert sich im hier verwendeten Stoffgesetz, indem die Verfestigungsfunktion h_p einen oberen Grenzwert h_{pmax} nicht überschreiten darf (vgl. Abschnitt 4.4.3). Man hat als Nebenbedingung für die Fließfunktion f_p die Gl. (4.75)

$$f_p \leq h_{pmax},$$

wobei die Identität im Raum der Hauptspannungen einen Grenzkegel bildet und alle Spannungspunkte müssen sich innerhalb oder auf dieser Fläche befinden. Wegen der speziellen Form des Grenzkegels bedeutet dies, daß die Länge des deviatorischen Spannungsvektors im Hauptspannungsraum einen bestimmten Wert, der in Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungsvektor und der Richtung des deviatorischen Spannungsvektors bestimmt wird, nicht überschreiten darf.

Die beiden Restriktionen sind im Rechenverfahren, wie es durch Bild 5.1 gegeben ist, noch nicht berücksichtigt.

Das kann geschehen, indem ein berechneter Spannungszustand \underline{i}_σ^n zunächst daraufhin überprüft wird, ob er die Restriktionen erfüllt. Trifft dies nicht zu, so ist \underline{i}_σ^n zu modifizieren.

Die Modifikation wird wie folgt vorgenommen:

- Zugspannungen werden zu Null gesetzt.
- Bei einer Überschreitung des Grenzwertes h_{pmax} wird die Länge des deviatorischen Spannungsvektors so reduziert, daß die modifizierte Spannung die Bedingung $f_p = h_{pmax}$ erfüllt, wobei der hydrostatische Spannungsvektor und die Richtung des deviatorischen Spannungsvektors beibehalten werden.

Die mit dem modifizierten Spannungszustand berechneten inneren Knotenkräfte i_k^n werden i.a. betragsmäßig kleiner ausfallen und der Betrag des Fehlervektors i_ψ wird größer. Somit werden im darauffolgenden Iterationsschritt zusätzliche Verformungen mobilisiert, um das Gleichgewichtsdefizit aufzufangen. Dieses Verfahren wird in der Literatur mit "Stress Transfer Method" oder "Initial Stress Method" bezeichnet, man vergleiche z.B. ZIENKIEWICZ et al. [31], [32].

Die Verwendung der "Stress Transfer Method" im Rechenschema nach Bild 5.1 zeigt nun einen unerwünschten Effekt. Das durch die Modifikation des Spannungszustands erzeugte Gleichgewichtsdefizit führt in den betroffenen Bereichen zu größeren Verformungen:

$$|{}^{i+1}\underline{d}^n| > |{}^i\underline{d}^n|$$

Das Verfahren nach Diagramm 5.1 liefert dann i.a. auch größere Spannungen:

$$|{}^{i+1}\underline{\sigma}^n| > |{}^i\underline{\sigma}^n|$$

Das Ergebnis steht im Gegensatz zur eingangs angestrebten Spannungsmodifikation. Die Ursache ist darin zu sehen, daß bei dem Verfahren nach Bild 5.1 in der Iterationsstufe i die Ergebnisse der vorhergehenden Iterationen unberücksichtigt bleiben und damit auch eventuelle Modifikationen dieser Ergebnisse. Es zeigt sich, daß die gewünschte Spannungsmodifikation im Rahmen der iterativen Spannungsberechnung (Schleife (1) in Bild 5.1) nicht möglich ist. Die Spannungsberechnung wird deshalb linearisiert. Zur Berechnung der elasto-plastischen Stoffmatrix ${}^i\underline{H}^n$ und der geometrisch nichtlinearen Spannungen ${}^i\underline{z}^n$ in der i -ten Iteration werden nicht mehr die Spannungen ${}^{i-1}\underline{\sigma}^n$ der vorhergehenden Iteration, sondern die Spannungen $\underline{\sigma}^{n-1}$ des vorhergehenden Zeitschritts zugrundegelegt. Dann kann die iterative Spannungsberechnung entfallen. Außerdem kann die Spannungsdifferenz ${}^i\underline{\sigma}^n - \underline{\sigma}^{n-1}$ in eine Summe aufgespalten werden

$${}^i\underline{\sigma}^n - \underline{\sigma}^{n-1} = {}^i\underline{\Delta}\underline{\sigma} + {}^{i-1}\underline{\Delta}\underline{\sigma} + \dots + {}^1\underline{\Delta}\underline{\sigma} \quad (5.46)$$

$${}^k\underline{\Delta}\underline{\sigma} = {}^k\underline{\sigma}^n - {}^{k-1}\underline{\sigma}^n \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{\sigma}^n = \underline{\sigma}^{n-1}$$

wobei sich jeder Spannungsanteil ${}^k\underline{\Delta}\underline{\sigma}$ nur aus dem Korrekturwert ${}^k\underline{\Delta}\underline{a} = {}^k\underline{a}^n - {}^{k-1}\underline{a}^n$ der Knotengeschwindigkeiten bestimmt. Die eingangs beschriebene Modifikation des Spannungszustandes zur Einhaltung der Restriktionen kann dann gegebenenfalls in jeder Iteration k an ${}^k\underline{\Delta}\underline{\sigma}$ vorgenommen werden und wegen Gl. (5.46) erfüllt auch der Spannungszustand ${}^i\underline{\sigma}^n$ die Restriktionen.

Darüberhinaus bringt diese Art der Spannungsberechnung erhebliche Rechenzeiteinsparungen, da die elasto-plastische Stoffmatrix \underline{H} nur noch einmal pro Zeitschritt aufgestellt werden muß.

5.4.2 Anfangs- und Randbedingungen

Das Bild 5.2 zeigt die schematische Darstellung eines Silo-
behälters, wie er neben anderen bei den numerischen Rechnun-
gen angenommen wurde. Die Anfangsbedingungen für das Entlee-
ren des Behälters ergeben sich aus den Bedingungen des Füll-
zustandes. Der Füllzustand wird als Sonderfall des

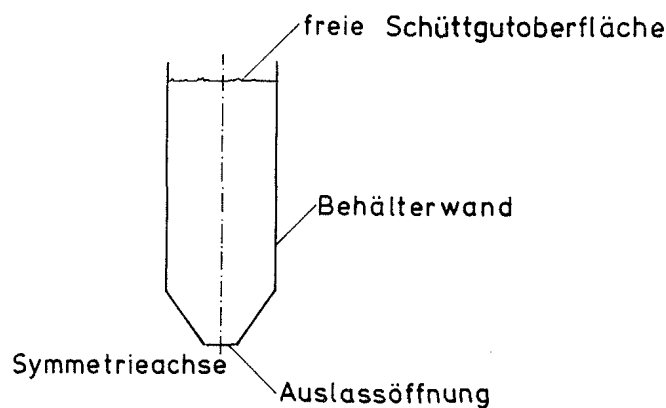


Bild 5.2: Schema einer Silozelle

Rechenverfahrens aufgefaßt. Dabei wird wie folgt vorgegan-
gen:

- Die Verformungen des Schüttgutes in der Auslaßöffnung werden durch Vorgabe entsprechender kinematischer Randbedingungen ausgeschlossen.
- Die Last aus dem Eigengewicht des Füllgutes wird inkrementell in einer bestimmten Zahl von Zeitschritten aufgebracht, wobei die Länge des Zeitschrittes Δt so groß gewählt wird, daß die Trägheitsanteile und viskosen Einflüsse vernachlässigt werden können; man vergleiche dazu das endgültige Gleichungssystem (5.39) des Rechenverfahrens.

- Weitere kinematische Randbedingungen für das Füllen sind: Die Verformungen der Behälterwände werden, wie auch später während des Entleerens, vernachlässigt; an der Behälterwand sind nur tangentielle Verformungen des Schüttgutes möglich; die Verformung der freien Schüttgutoberfläche wird ebenfalls vernachlässigt. Damit ist die äußere Geometrie des Schüttgutes vor Beginn der Rechnung festgelegt und die Voraussetzung zur Annahme des Eulerschen Bezugssystems für das Lösungsverfahren geschaffen.
- Als Kräfte- und Randbedingungen sind die Reibungskräfte zwischen dem Füllgut und der Behälterwand zu berücksichtigen. Die Randschubspannungen τ_w der Reibungskräfte ergeben sich aus den Wandnormalspannungen σ_w und dem Wandreibungsbeiwert $\tan \eta$:

$$\tau_w = \tan \eta \cdot \sigma_w \quad (5.47)$$

Im globalen Koordinatensystem ergibt sich aus den Randschubspannungen der Vektor \underline{b}_t der Randspannungen und weiter die Lastknotenkräfte

$$\underline{p}_t = \int_{S_t} \underline{N}^T \cdot \underline{b}_t \, dS$$

Nun sind die Wandnormalspannungen σ_w ein Ergebnis der Rechnung und die Knotenkräfte \underline{p}_t sind noch unbekannt. Die Vorgehensweise ist deshalb so, daß die Schubspannungen zunächst geschätzt werden, z.B. durch die Extrapolation der Schubspannungen der vorhergehenden Zeitschritte. Man erhält so einen ersten Näherungswert ${}^0 \underline{p}_t^n$ der Lastknotenkräfte. Dieser Wert dient als Eingangswert im Lastvektor ${}^0 \underline{\psi}$ des Rechenschemas nach Bild 5.1. Am Ende jeder Iteration werden die Lastknotenkräfte durch

$$\underline{p}_f^n = \int_{S_f} \underline{N}^T \cdot \underline{b}_f^n dS$$

neu berechnet, in der folgenden Iteration im Fehlervektor $i+1 \underline{y}$ berücksichtigt und als Endergebnis der Iteration mit den übrigen Knotenkräften ins Gleichgewicht gebracht. Zum Ende der Iteration ist im Rahmen der Toleranz $i \underline{\sigma}^n = i-1 \underline{\sigma}^n$, somit ist auch das Reibungsgesetz nach Gl. (5.47) erfüllt. Mit diesem Verfahren können auch nichtlineare Reibungsgesetze $\tau_w = \tau_w(\sigma_w)$ berücksichtigt werden.

Die Endergebnisse des Füllzustandes sind die Anfangswerte für das Entleeren des Behälters. Beim Entleeren werden Trägheitsanteile und viskose Einflüsse nicht mehr vernachlässigt und die Zeit t wird zum physikalischen Parameter. Die kinematischen Randbedingungen an den seitlichen Behälterwänden und die Berücksichtigung der Reibungskräfte bleiben gegenüber dem Füllen unverändert. Das Entleeren des Behälters wird durch die sog. Öffnungsphase eingeleitet. Sie umfaßt folgende Schritte:

- Die kinematischen Randbedingungen in der Auslaßöffnung werden in Kräfte- randbedingungen umgewandelt. Die Verschiebungen werden freigegeben, stattdessen werden die Auflagerkräfte des Füllzustandes angesetzt. Dadurch ist das physikalische Modell zunächst noch unbeeinflusst.
- Die Auflagerkräfte in der Auslaßöffnung werden schrittweise verringert, bis sie zu Null werden.

Die Änderung der Randbedingungen in der Öffnungsphase wird in kleinen Schritten vollzogen, um einen kontinuierlichen Übergang vom Füllzustand in das unbehinderte Entleeren zu erhalten. Die oben beschriebene Vorgehensweise führt zwei

neue Parameter in das Rechenverfahren ein: die zeitliche Dauer der Öffnungsphase und die Zahl der Öffnungsschritte. Wie in dem späteren Abschnitt 6.3 gezeigt wird, haben diese Parameter nur einen geringen Einfluß auf die Ergebnisse.

Während des Entleerens ist die Geometrie des Schüttguts an der freien Oberfläche und in der Auslaßöffnung zunächst unbestimmt. Es werden deshalb folgende Festlegungen getroffen:

- Es wird die horizontale Ebene durch die Auslaßöffnung als Schüttgutbegrenzung angenommen.

- Die Veränderlichkeit der freien Schüttgutoberfläche während des Entleerens wird berücksichtigt, indem in jedem Zeitschritt die dort auftretenden Verschiebungen berechnet werden und im folgenden bei den Geometriedaten der freien Oberfläche (und nur dort) berücksichtigt werden. Da sich die durchgeführten Rechnungen, ausgehend vom Beginn des Entleerens, zunächst nur über einen geringen Zeitraum erstrecken, sind die berechneten Verformungen an der Füllgutoberfläche klein gegenüber den Behälterabmessungen und von geringem Einfluß auf die Ergebnisse.

6 Numerische Untersuchungen

6.1 Programmablauf

Zur Anwendung des in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Rechenverfahrens wurde ein Programm in FORTRAN IV erstellt. Die Rechnungen erfolgten auf einer PRIME 400.

Im Bild 6.1 ist der Programmablauf dargestellt. Die wesentlichen Rechenschritte sind bereits im Bild 5.1 gezeigt worden. Für das eigentliche Programm wurde insofern eine Veränderung gegenüber dem Bild 5.1 vorgenommen, als aus den in Abschnitt 5.4.1 erwähnten Gründen die Berechnung der für einen Zeitschritt maßgebenden elasto-plastischen Stoffmatrix \underline{H} und der geometrisch nichtlinearen Spannungen \underline{z} mit den Spannungswerten des vorhergehenden Zeitschrittes erfolgt.

Für die räumliche Diskretisierung nach der Methode der Finiten Elemente wurden zunächst Dreieckselemente mit 3 Knoten und linearem Geschwindigkeitsansatz gewählt. Diese liefern elementweise konstante Spannungen und Verformungsraten, aus denen sich die beim Stoffgesetz nach Gl. (5.26) benötigten Gradienten $\nabla \underline{\sigma}$ bzw. $\nabla \underline{d}$ zunächst nicht berechnen lassen. Diese müssen indirekt bestimmt werden. Dazu wird die Spannung in jedem Knotenpunkt des FE-Netzes als Mittelwert der Elementspannungen der anliegenden Elemente berechnet. Aus den Werten in den Knotenpunkten wird durch Interpolation ein elementweise linear verlaufendes Spannungsfeld gewonnen, woraus sich ein Spannungsgradient berechnen läßt. In entsprechender Weise wird der Gradient der Verformungsrate berechnet.

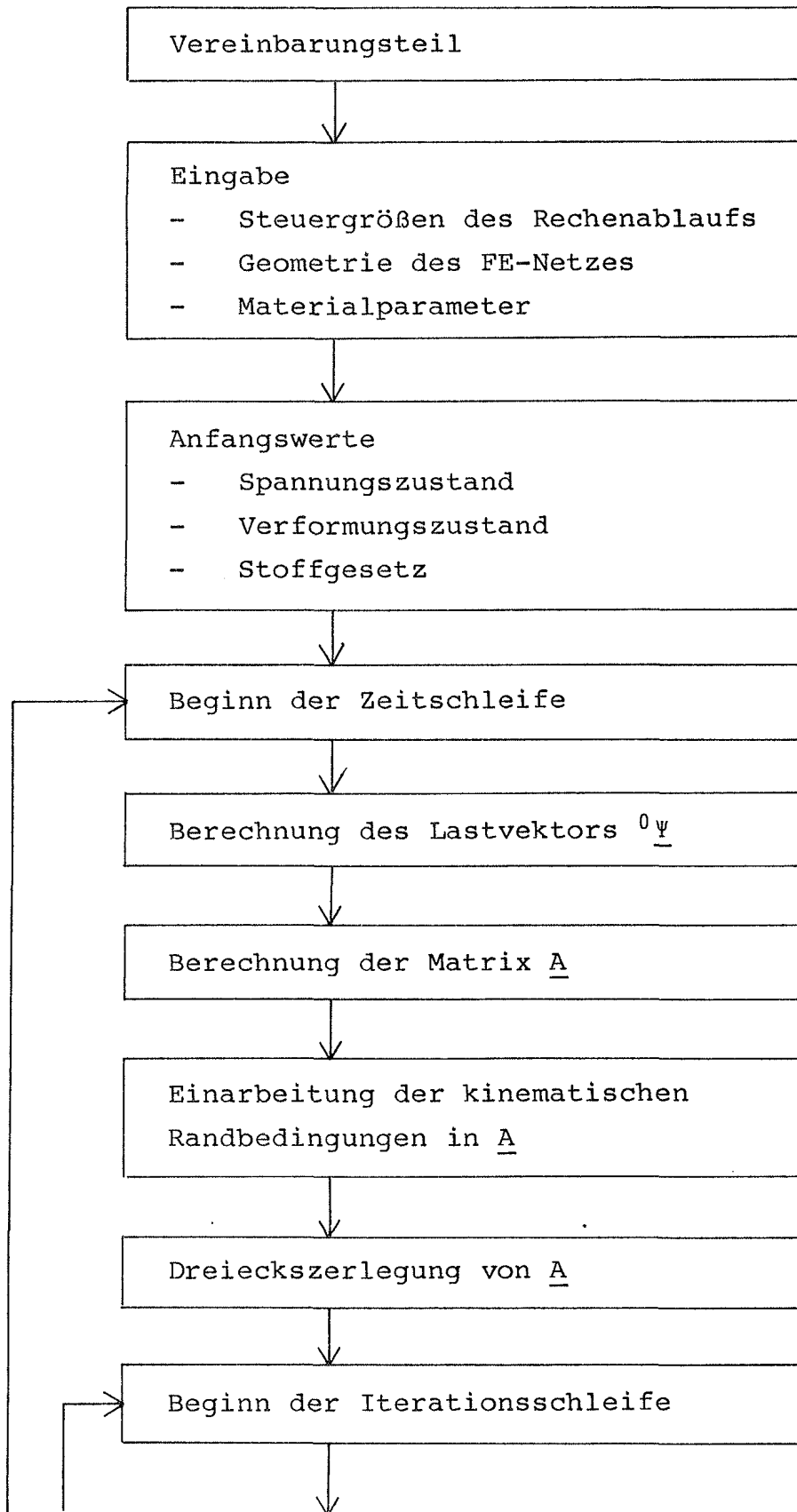


Bild 6.1-1: Programmablauf

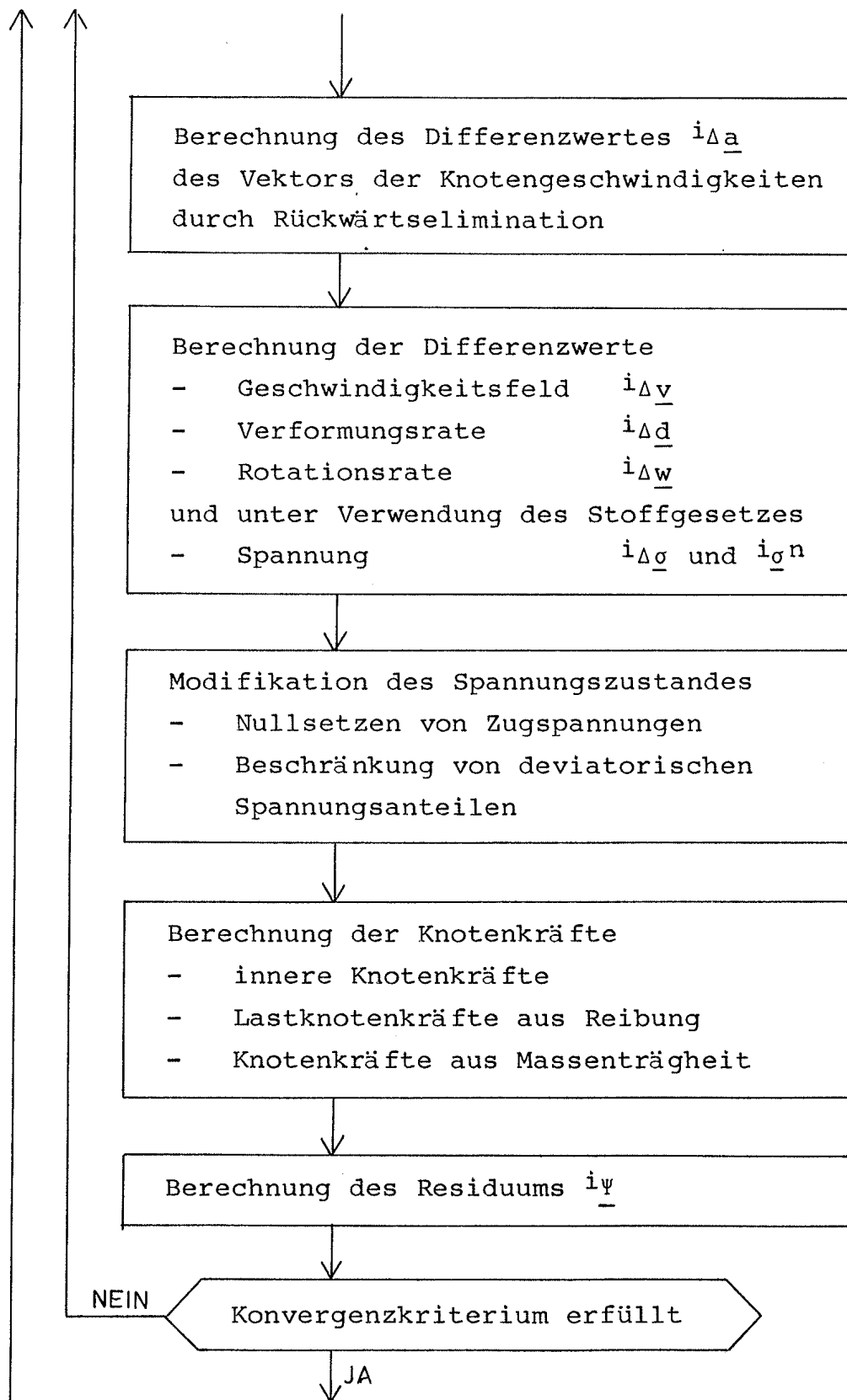


Bild 6.1-2: Programmablauf

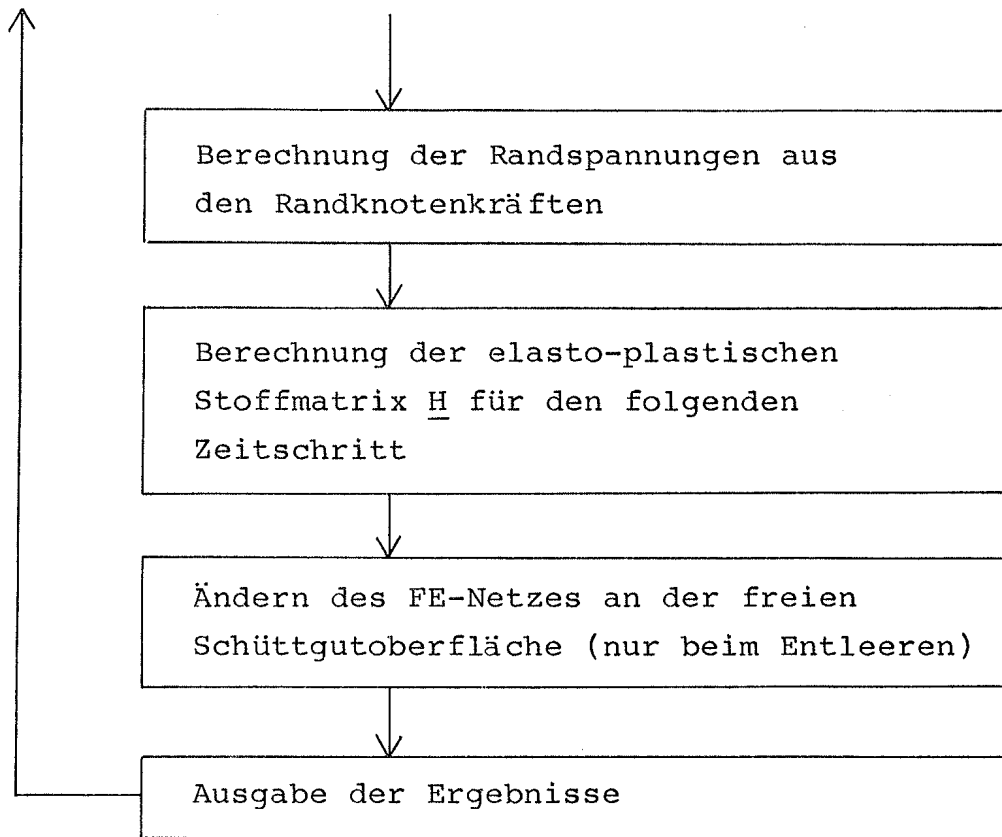


Bild 6.1-3: Programmablauf

6.2 Allgemeine Ergebnisse

Im folgenden sollen die Ergebnisse dargestellt werden, die sich für alle im Rahmen dieser Arbeit rechnerisch untersuchten Fälle qualitativ gleich ergeben. Dies geschieht anhand eines Beispiels, welches hier als "Standardfall" bezeichnet wird. Es handelt sich um einen Behälter mit rechteckigem Querschnitt und ebenem Verformungszustand, die Auslaßöffnung ist als zentraler Schlitz angeordnet. Das Bild 6.2 zeigt die Geometrie, das FE-Netz und die kinematischen Randbedingungen für das Entleeren. Da der Behälter symmetrisch ist, braucht nur die Hälfte erfaßt zu werden.

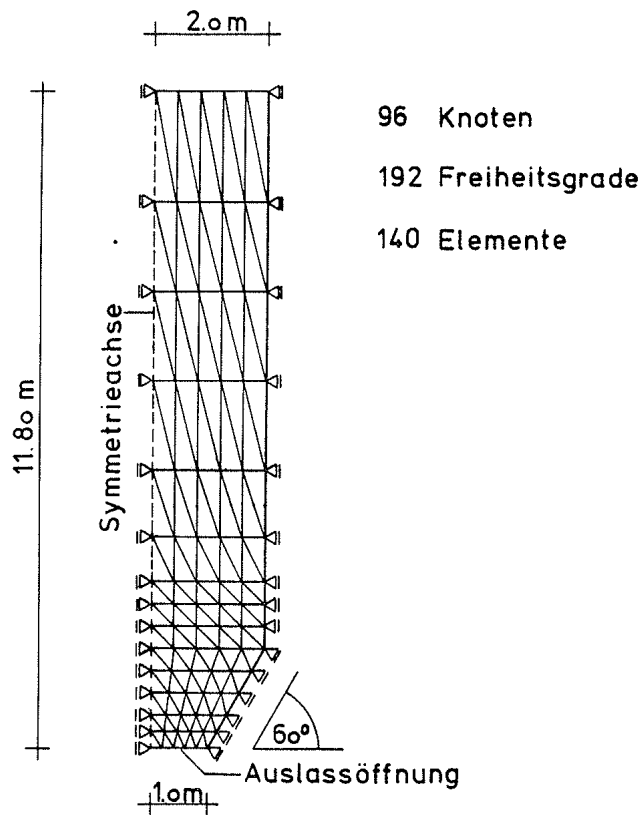


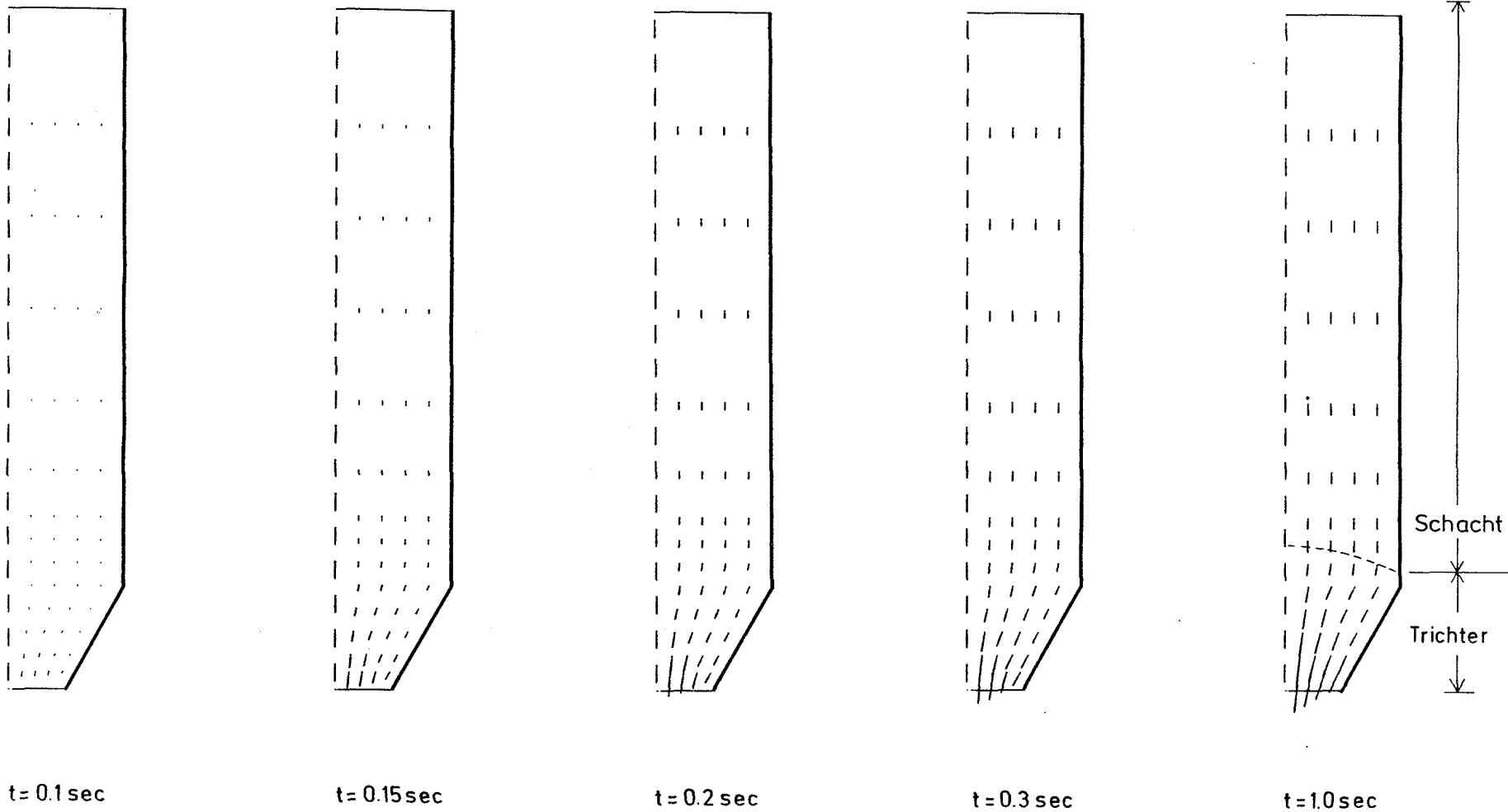
Bild 6.2: Geometrie, FE-Netz und kinematische Randbedingungen (Entleeren) des Standardfalls

Als Füllgut wird ein trockener, kohäsionsloser Sand gewählt. Dabei handelt es sich um sogenannten "Sacramento River Sand", bestehend aus Feldspat und Quarz mit einer Körnung von 0,297 - 0,149 mm. Die Stoffparameter dieses Sandes für das in den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 dargestellte elasto-plastische Stoffgesetz werden von LADE in [14] angegeben, eine ausführliche Darstellung seiner Eigenschaften findet man bei LEE/SEED [33]. Neben den Stoffparametern des Sacramento River Sand werden für den Standardfall folgende Parameter angenommen:

Ausgangsporenziffer	$e = 0,87$
Spez. Masse	$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$
Viskositätszahl	$\mu = 1000 \text{ Nsec/m}^2$
Reibungsbeiwert zwischen Füllgut und Behälterwand	$\tan\eta = 0,4$
Länge des Zeitschritts beim Entleeren	$\Delta t = 0,002 \text{ sec}$

Die angenommene Viskositätszahl ergibt, wie noch im Abschnitt 6.4 gezeigt wird, Fließgeschwindigkeiten in einer realistischen Größenordnung. Die Länge des gewählten Zeitschritts resultiert aus einer Konvergenzuntersuchung, die im folgenden Abschnitt 6.3 dargestellt ist. Da in jedem einzelnen Zeitschritt ein erheblicher Rechenaufwand zu bewältigen ist, konnte aus rechnerbedingten Kapazitätsgründen für das Entleeren zunächst nur der Zeitraum von 1 sec betrachtet werden.

Das Bild 6.3 zeigt das errechnete Geschwindigkeitsfeld zu verschiedenen Zeitpunkten nach Beginn des Entleerens. Es entwickelt sich ein Massenfluß, der sich in zwei Bereiche unterteilen läßt. Innerhalb des ersten Bereiches, im folgenden Schacht genannt, ist die Fließgeschwindigkeit des Schüttguts räumlich annähernd konstant, es bewegt sich dort weitgehend wie ein starrer Körper. Die Grenze zu dem zweiten Bereich, im folgenden Trichter genannt, ist in Bild 6.3 für $t = 1,0 \text{ sec}$ angedeutet. Beginnend von dieser Grenze nimmt die Fließgeschwindigkeit zur Auslaßöffnung hin zu. Dabei tritt eine größere Beschleunigung in der Behälterachse als an den Behälterwänden auf. Innerhalb des Trichters bewegt sich das Füllgut annähernd auf radialen Strahlen.



t = 0.1 sec

t = 0.15 sec

t = 0.2 sec

t = 0.3 sec

t = 1.0 sec

┆ ≅ 10 m/sec

Bild 6.3 : Geschwindigkeitsfeld für verschiedene Zeitpunkte t nach Beginn des Entleerens

In Bild 6.4 sind Fließgeschwindigkeiten in der Behälterachse und an der Behälterwand in Abhängigkeit von der Trichterhöhe aufgetragen. Die größte Fließgeschwindigkeit tritt in der Achse der Auslaßöffnung auf und hat den Wert $v_1 = 2,14 \text{ m/sec}$. Sie ist damit um den Faktor 4,5 größer als die Fließgeschwindigkeit von $v_0 = 0,47 \text{ m/sec}$ im Schacht.

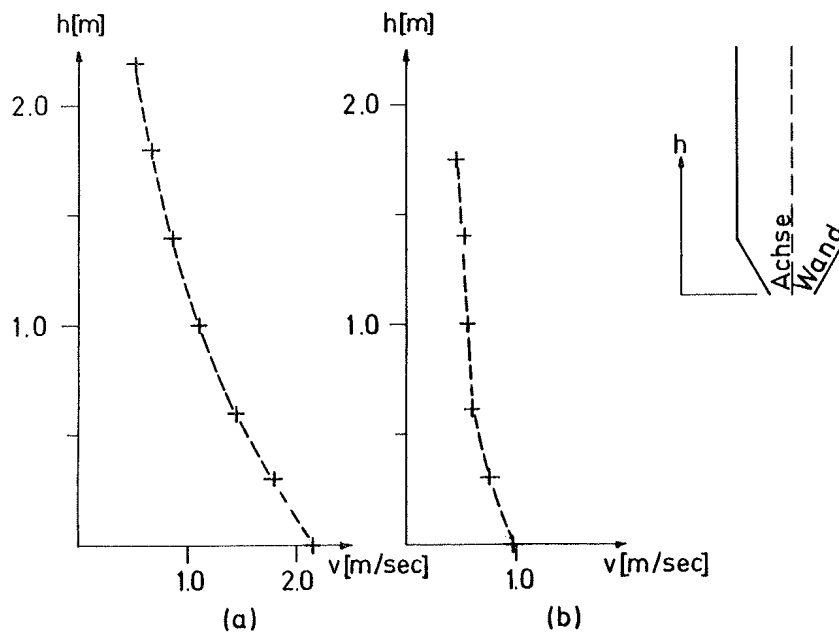


Bild 6.4: Fließgeschwindigkeit v für $t = 1,0 \text{ sec}$ über der Trichterhöhe h
 (a) in der Siloachse
 (b) an der Silowand

Nimmt man für die entsprechenden räumlichen Stellen denselben Massendurchfluß an, so läßt sich folgende Bedingung aufstellen:

$$S_1 \cdot v_1 \cdot \omega_1 = S_0 \cdot v_0 \cdot \omega_0 \quad (6.1)$$

Darin ist S eine Querschnittsfläche, v die Fließgeschwindigkeit und ω die Volumenverteilungsfunktion, die den Festkörperanteil am Gesamtvolumen angibt. Wegen der starren Bewegung des Füllguts im Schacht bleibt dort die Ausgangsporenziffer erhalten. Es ist $e_0 = 0,87$ und somit

$$\omega_0 = 1 / (1 + e_0) = 0.53$$

Wegen der Querschnittsverengung vom Schacht zur Auslaßöffnung auf die Hälfte wird $S_1/S_0 = 0,5$ angenommen. Man erhält dann aus Gl. (6.1)

$$\omega_1 = \omega_0 \cdot (A_0 v_0) / (A_1 v_1) = 0.24$$

Dies entspricht einer Porenziffer in der Achse der Auslaßöffnung von

$$e_1 = (1 - \omega_1) / \omega_1 = 3.17$$

Am Rand der Auslaßöffnung ist die Fließgeschwindigkeit $v_2 = 0,88$ m/sec. Damit erhält man dort mit den gleichen Annahmen wie eben eine Porenziffer von $e_2 = 0,77$. Insgesamt zeigt sich, daß im Bereich der Achse der Auslaßöffnung eine starke Auflockerung des Schüttgutes stattfindet. Dies steht im Gegensatz zu der in Abschnitt 5.1 getroffenen Annahme, daß die spezifische Masse ρ und damit auch die Porenziffer e räumlich konstant ist.

Das Bild 6.5 zeigt das Geschwindigkeitsprofil in einem horizontalen Schnitt durch den Trichter. Qualitativ ähnliche Geschwindigkeitsprofile ergeben sich für alle horizontalen Schnitte durch den Trichter.

Während die letzten Angaben sich alle auf den Zeitpunkt $t = 1,0$ sec beziehen, zeigt das Bild 6.6 die Fließgeschwin-

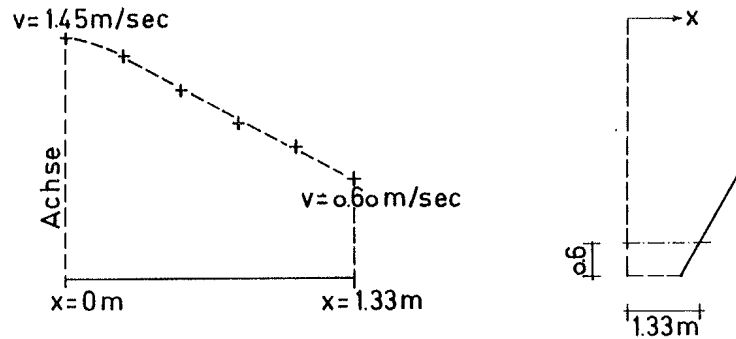


Bild 6.5: Profil der Fließgeschwindigkeit v in einer horizontalen Ebene $0,6 \text{ m}$ über der Auslaßöffnung für $t = 1,0 \text{ sec}$.

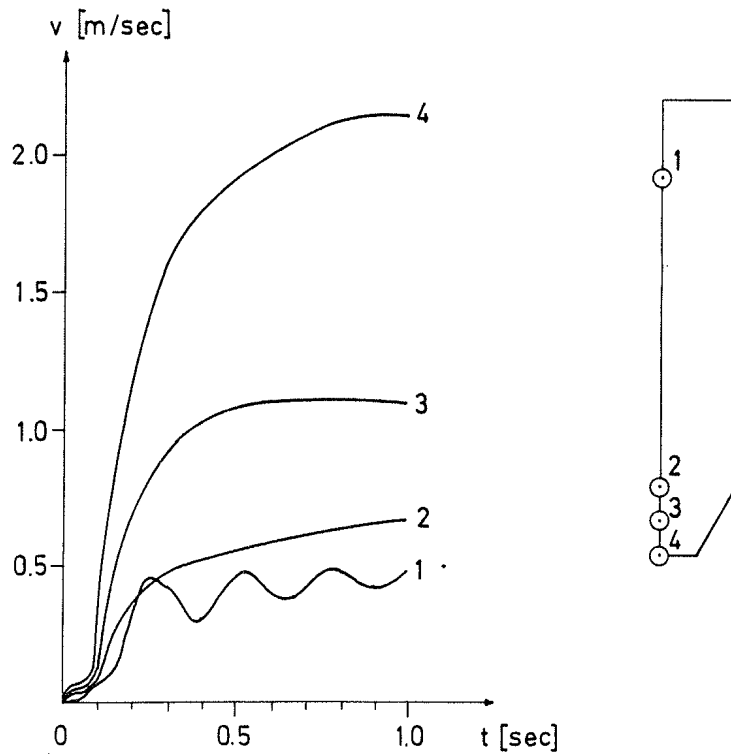
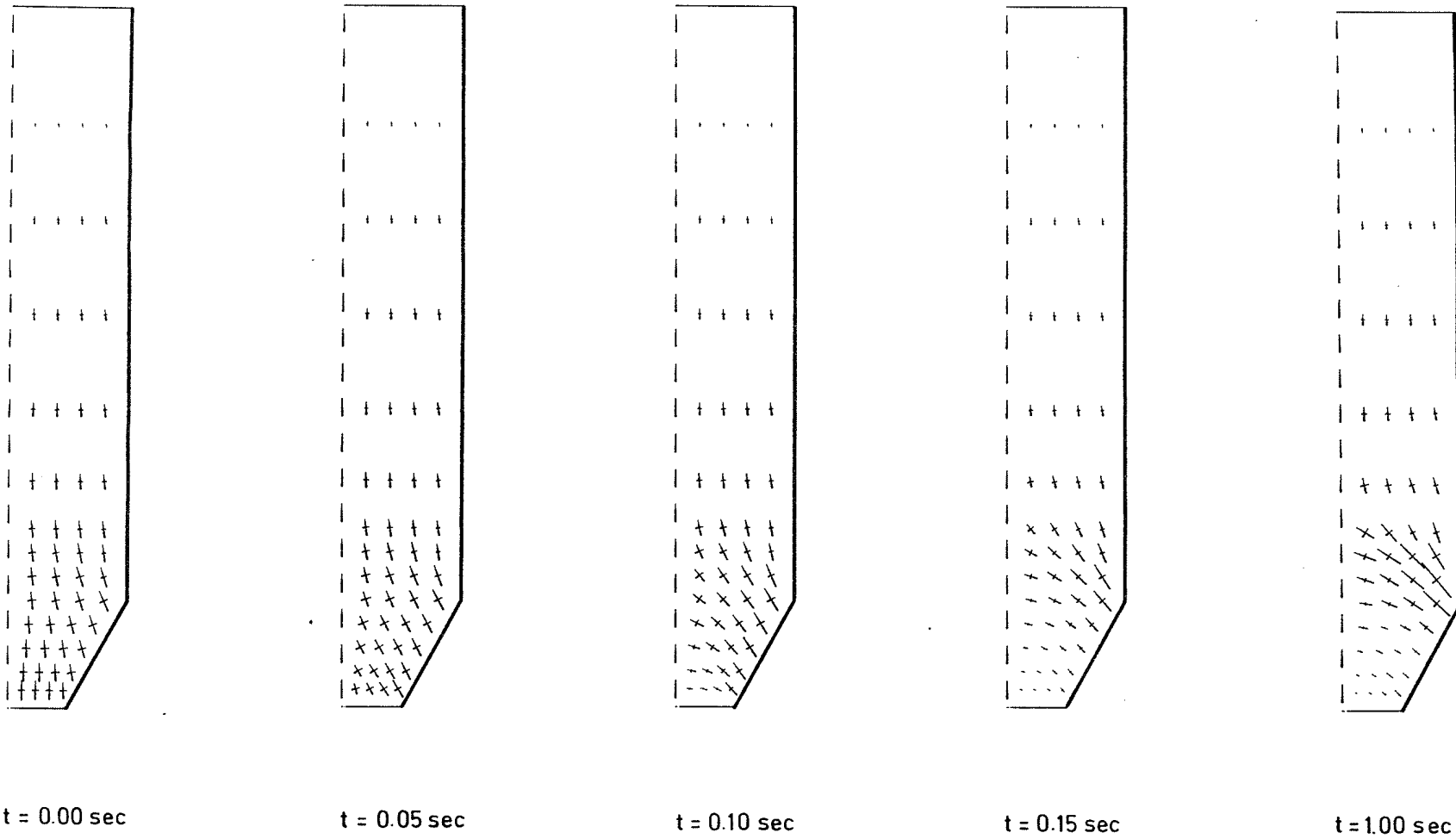


Bild 6.6: Vertikale Fließgeschwindigkeiten v_y in festen räumlichen Punkten in Abhängigkeit von der Zeit t

digkeit des Schüttgutes in Abhängigkeit von der Zeit t . Dabei werden feste räumliche Punkte betrachtet und die in diesen Punkten auftretenden Geschwindigkeiten sind über den gesamten berechneten Zeitraum aufgetragen.

Mit Öffnungsphase ist jener Zeitraum benannt, in dem die Auflagerkräfte in der Auslaßöffnung schrittweise abgebaut und schließlich Null werden. Im Schacht (vgl. Bild 6.6, Punkt 1) ist ein leichtes Oszillieren der Fließgeschwindigkeit erkennbar, das später erklärt wird. Hiervon abgesehen deutet sich zum Ende des Berechnungszeitraums an, daß hinsichtlich der Fließgeschwindigkeiten ein stationärer Zustand eingetreten ist. Dabei scheint der dann erreichte Maximalwert von über 2 m/sec bemerkenswert groß zu sein. Eine überschlägige Kontrolle dieses Wertes wird ebenfalls später durchgeführt.

Das Bild 6.7 zeigt die Hauptspannungsfelder im Füllzustand ($t = 0$ sec) und zu verschiedenen Zeitpunkten des Entleerens. Mit Beginn des Entleerens läßt sich eine Drehung der Hauptspannungsrichtungen im Trichter erkennen, die vertikale Orientierung der größeren Hauptspannung im Füllzustand geht in eine horizontale Orientierung über. Dies tritt besonders deutlich nahe der Behälterachse in Erscheinung, während die Hauptspannungen an der Behälterwand mit dem vorgeschriebenen Reibungsgesetz nach Gl. (5.47) einer weitgehend gleichbleibenden Kräfte- und Randbedingung unterliegen und sich richtungsmäßig weniger verändern. Im weiteren Verlauf nimmt das Spannungsniveau direkt oberhalb der Auslaßöffnung ab (dies wird dort durch die Kräfte- und Randbedingung erzwungen) und im Übergangsbereich zwischen Schacht und Trichter zu. Das Spannungsbild zeigt dort eine Art Gewölbewirkung, das Füllgut stützt sich seitlich zu den Trichterschrägen hin ab, da die vertikale Stützung in der Auslaßöffnung entzogen ist. Im Vergleich zu den Spannungen im Trichter verändern sich die Hauptspannungen im Schacht nur wenig.



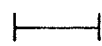
 $\hat{=} 0.5 \text{ N/mm}^2$

Bild 6.7 : Hauptspannungsfeld im Füllzustand und zu verschiedenen Zeitpunkten t nach Beginn des Entleerens

Die Normalspannungen an der Behälterwand sind im Bild 6.8 dargestellt, die Wandschubspannungen ergeben sich hieraus entsprechend dem Reibungsgesetz nach Gl. (5.47).

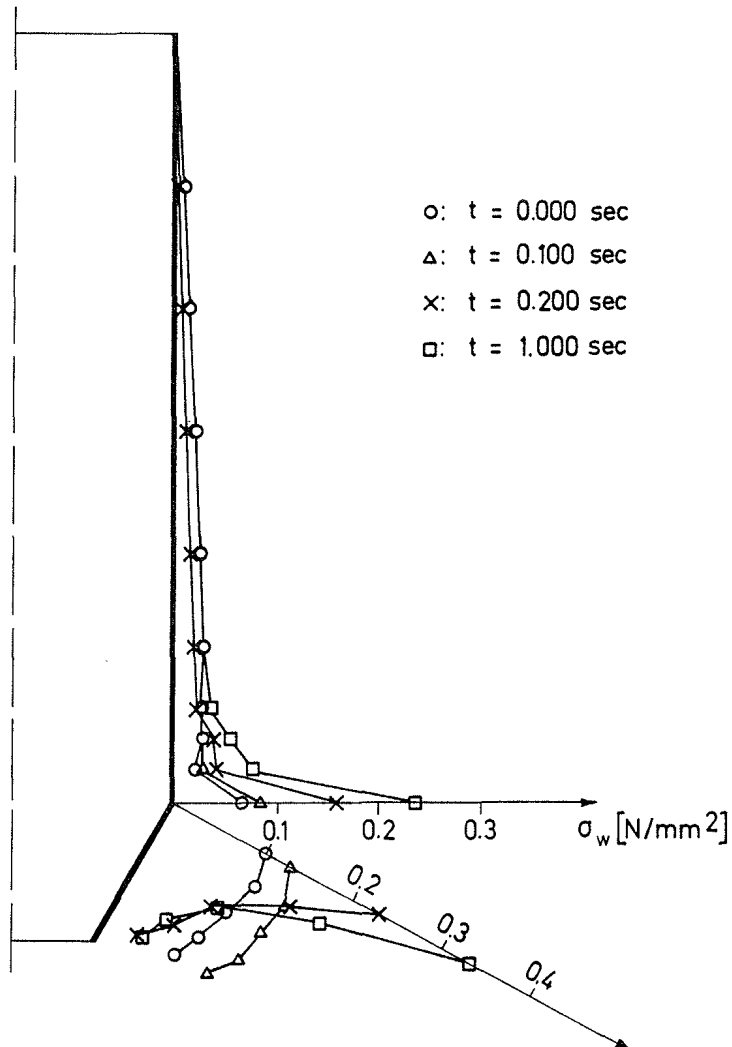


Bild 6.8: Randnormalspannungen σ_w

Man erkennt, daß die Randspannungen mit Beginn des Entleerens gegenüber dem Füllzustand zunächst gleichmäßig ansteigen. Danach tritt ein Abfall in der Nähe der Auslaßöffnung

und ein starker Anstieg im Übergangsbereich zwischen Schacht und Trichter auf. Unabhängig vom hier verwendeten Lösungsverfahren zeigen die bereits erwähnten theoretischen Arbeiten von JENIKE, WALTERS und ENSTADT ein ähnliches Ergebnis hinsichtlich der Spannungsspitze im Eckbereich, resultierend aus dem Übergang des Schüttguts vom aktiven in den passiven Spannungszustand.

Das Bild 6.9 zeigt die Vertikalspannungen in festen räumlichen Punkten während des gesamten berechneten Entleerungszeitraums.

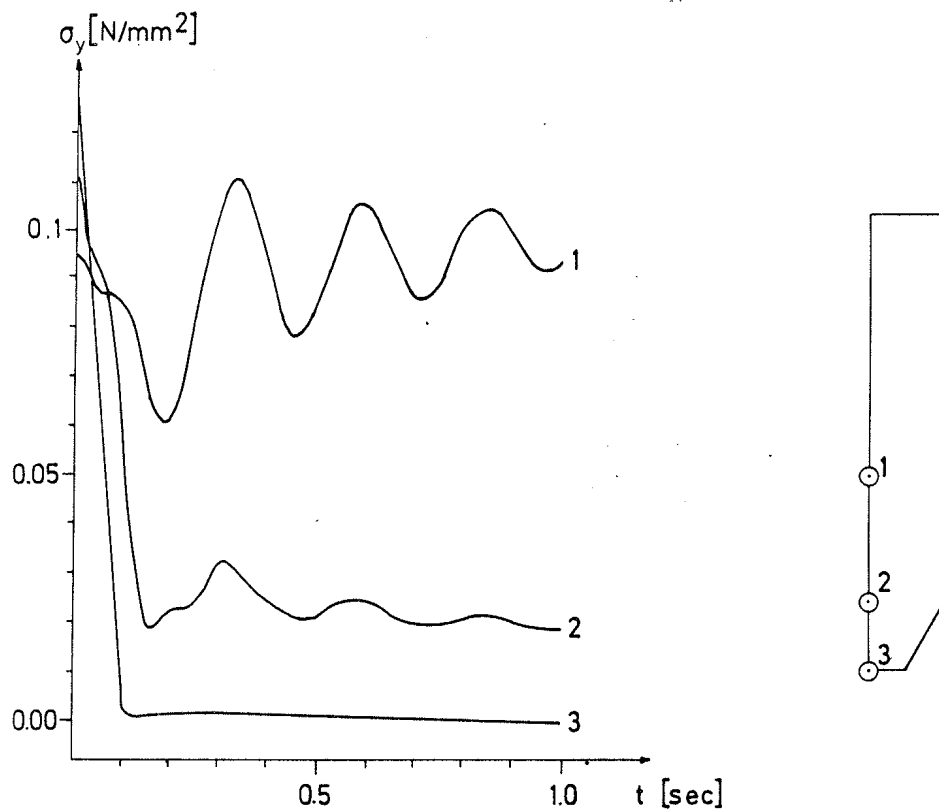


Bild 6.9: Vertikale Normalspannungen σ_y in festen räumlichen Punkten in Abhängigkeit von der Zeit t .

Direkt oberhalb der Auslaßöffnung nehmen die Vertikalspannungen während der Öffnungsphase gleichmäßig ab und bleiben dann weitgehend konstant. In der Auslaßöffnung werden sie entsprechend der vorgegebenen Kräfte- randbedingung nach der Öffnungsphase annähernd zu Null.

Mit den Zahlenwerten aus Bild 6.9 ergibt sich für das gewählte Beispiel bei einer Trichterhöhe von 1,8 m der Gradient der Vertikalspannung in der Trichterachse in erster Näherung zu

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cong \frac{0.02}{1800} = 1.1 \cdot 10^{-5} \text{ N/mm}^3. \quad (6.2)$$

Für die folgenden Überlegungen wird angenommen, daß dieser Wert räumlich und zeitlich konstant ist. Vernachlässigt man die Schubspannungen, so kann man mit der Gleichgewichtsbedingung der vertikalen y -Richtung

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho (b_{vy} - \dot{v}_y) = 0$$

eine Abschätzung für die Beschleunigung \dot{v}_y vornehmen. Mit der Erdbeschleunigung $b_{vy} \cong 10 \text{ m/sec}^2$, der angenommenen spez. Masse $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ und dem Spannungsgradienten nach Gl. (6.2) ergibt sich:

$$\dot{v}_y \cong 17 \text{ m/sec}^2.$$

Dieser Wert liegt über der Erdbeschleunigung, da im Trichter die Druckspannungen von oben nach unten abnehmen und somit eine zusätzliche Beschleunigung bewirken. Mit den oben getroffenen Annahmen wirkt die berechnete Beschleunigung auf ein Schüttgutpartikel während des gesamten Durchlaufs durch die Trichterachse ein. Mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und einer Trichterhöhe $h_t = 1,8 \text{ m}$ beträgt dann die Laufzeit im Trichter

$$t_d = \sqrt{\frac{2h_t}{\dot{v}_y}} = 0.45 \text{ sec} \quad (6.3a)$$

und die Partikelgeschwindigkeit in der Auslaßöffnung

$$v_{y_d} = \sqrt{2v_y \cdot h_t} \approx 5.5 \text{ m/sec.} \quad (6.3b)$$

Die tatsächlichen Verhältnisse liegen insofern anders, als die oben vernachlässigten Schubspannungen einen bremsenden Einfluß haben. Damit ist die Laufzeit nach Gl. (6.3a) als unterer und die Geschwindigkeit nach Gl. (6.3b) als oberer Grenzwert zu sehen. Wie dem Bild 6.9 zu entnehmen ist, wurde im vorliegenden Fall als tatsächliche maximale Fließgeschwindigkeit ca. 2,2 m/sec nach ca. 1 sec berechnet.

Im weiteren bleibt anzumerken, daß die oben durchgeführte Überlegung unter den genannten Voraussetzungen sowohl für den Zustand beginnenden Fließens als auch für den stationären Fließzustand gültig ist. Berücksichtigt man nur die vertikale Fließgeschwindigkeit v_y , so gilt mit Gl. (5.10)

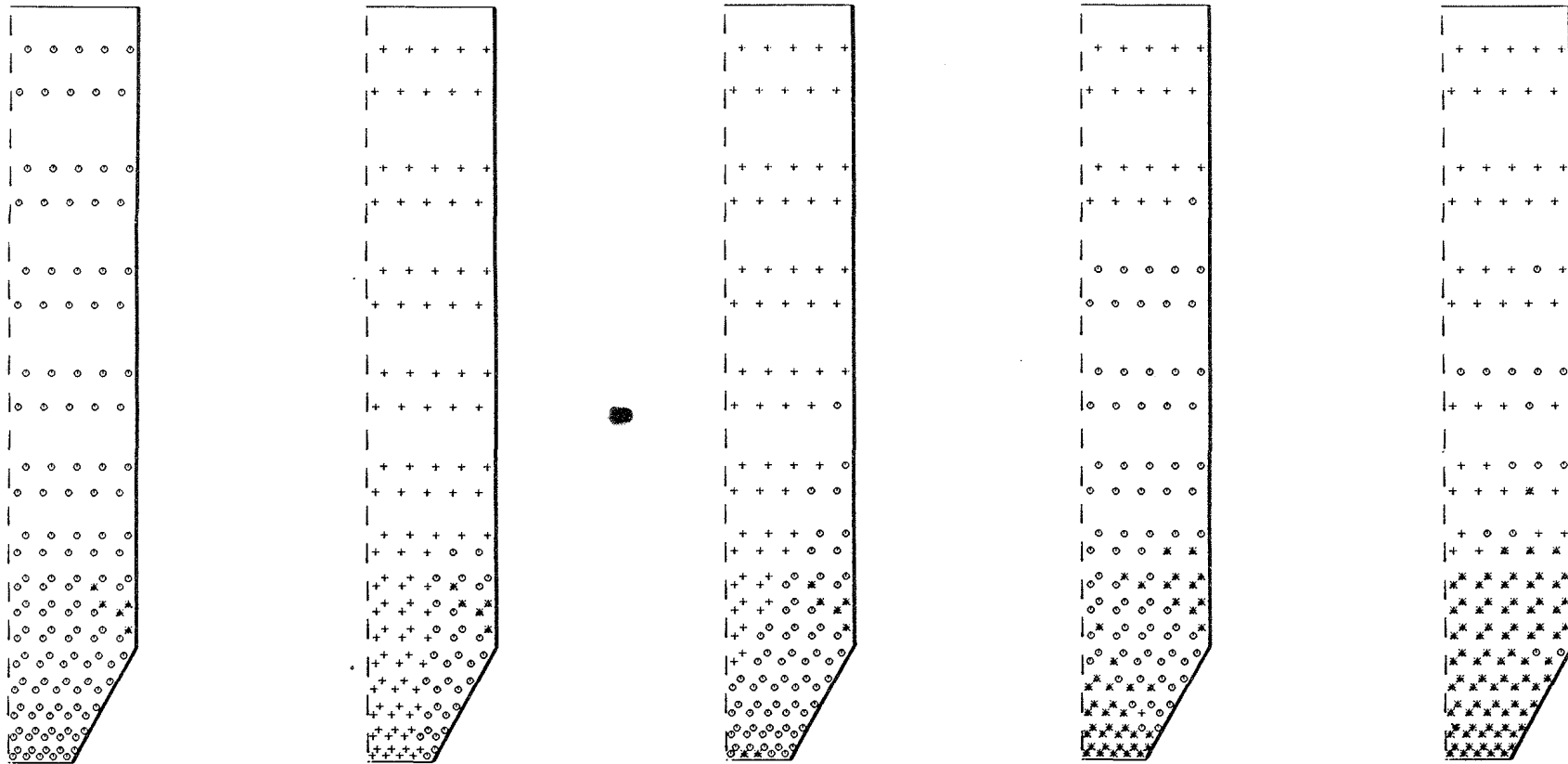
$$\dot{v}_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y$$

Der stationäre Fließzustand ist durch $\partial v_y / \partial t = 0$ gekennzeichnet, während $\partial v_y / \partial t$ beim beginnenden Fließen beliebige Werte annehmen kann.

Zurück zur Erläuterung des Bildes 6.9. Im oberen Silobereich zeigen die Vertikalspannungen ein leichtes Oszillieren, wobei das Spannungsniveau erhalten bleibt. Das Oszillieren der Spannungen und der Fließgeschwindigkeiten im Schacht (vgl. Bild 6.6, Punkt 1) läßt sich folgendermaßen erklären: Während der Öffnungsphase verringern sich die Vertikalspannungen im Füllgut, da das vertikale Auflager in der Auslaßöffnung entfällt. Damit werden deviatorische Spannungszustände abgebaut.

Dies entspricht hinsichtlich der Fließbedingung des elastoplastischen Stoffgesetzes einer Entlastung und in der Folge wird zunächst ein elastisches Stoffverhalten angenommen. Dies ist die Voraussetzung eines Schwingungsvorgangs, der eingeleitet wird, indem sich das Füllgut während der Öffnungsphase im unteren Behälterbereich früher in Bewegung setzt als im oberen Behälterbereich.

Das Bild 6.10 zeigt die Typen des Stoffverhaltens, wie sie sich für den Füllzustand und verschiedene Zeitpunkte des Entleerens aufgrund der Fließbedingungen ergeben. Dabei sind unter der Bezeichnung Grenzzustände diejenigen plastischen Zustände gesondert aufgeführt, die die Grenzbedingung der plastisch expansiven Verfestigung erfüllen, in denen die deviatorischen Spannungsanteile somit den größtmöglichen Wert haben (vgl. Abschnitt 4.4.3). In Bild 6.10 ist zu erkennen, daß im Füllzustand $t = 0$ sec ein Band von Grenzzuständen entsteht, das dem Übergangsbereich zwischen schrägen und vertikalen Behälterwänden entspringt. Dieser Bereich ist durch eine hohe deviatorische Beanspruchung des Füllgutes gekennzeichnet. Mit Beginn der Öffnungsphase treten im oberen Behälterbereich und in einem inneren Trichterbereich infolge der vertikalen Entlastung elastische Zustände auf. Diese werden im oberen Bereich während des berechneten Zeitraums auch weitgehend beibehalten. Die vorher beschriebenen Spannungsumlagerungen im Trichter führen dort im weiteren zu Spannungszuständen, die die Fließbedingung erneut erfüllen und am Ende des berechneten Zeitraumes in Grenzzustände übergehen.



t = 0,00 sec

t = 0,05 sec

t = 0,10 sec

t = 0,30 sec

t = 1,00 sec

+ : elastisch

O : plastisch

* : plastisch im Grenzzustand

Bild 6.10: Typen des Stoffverhaltens im Füllzustand und zu verschiedenen Zeitpunkten t nach Beginn des Entleerens

6.3 Der Einfluß von Diskretisierungsparametern

Das numerische Rechenverfahren umfaßt eine Reihe von Parametern, die sich in physikalische und Diskretisierungsparameter aufteilen lassen. Physikalische Parameter sind:

- Materialkonstanten, Ausgangslagerungsdichte des Füllgutes, Reibungsgesetz zwischen Füllgut und Behälterwand, Behältergeometrie.

Zu den Diskretisierungsparametern gehören:

- Einteilung des FE-Netzes, Länge des Zeitschrittes, Dauer der Öffnungsphase.

Die beiden ersten Diskretisierungsparameter resultieren aus der Anwendung mathematischer Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichungen des Problems. Dagegen ergibt sich der Parameter "Dauer der Öffnungsphase" aus der einfachen Simulation eines i.a. komplexen Öffnungsvorgangs. Das im Rechenverfahren angewendete Modell der stufenweisen Reduzierung von Auflagerkräften in der Auslaßöffnung entspricht offensichtlich nicht realistischen Öffnungsmechanismen, wie z.B. dem seitlichen Wegziehen eines Schiebers im Auslaß. Diese lassen sich aber schwer in einem Modell simulieren, weshalb das einfache Verfahren angewendet wird.

Eine notwendige Bedingung für die Brauchbarkeit des numerischen Rechenverfahrens besteht darin, daß die Ergebnisse von den Diskretisierungsparametern unabhängig sind. In der Terminologie der numerischen Mathematik hieße dies, die Konvergenz des numerischen Verfahrens nachzuweisen. Angesichts der komplizierten Struktur der zugrundeliegenden Differentialgleichungen, insbesondere derjenigen des Stoffgesetzes, die dann in der Hintereinanderschaltung mehrerer numerischer Verfahren gelöst werden, kann der strenge Nachweis der Konvergenz im Rahmen dieser Arbeit nicht geführt werden. Hier soll zunächst nur dargestellt werden, wie sich die Annahme verschiedener FE-Netze und Zeitschritte auf die Ergebnisse des Rechenverfahrens auswirken.

Dabei wird von dem in Abschnitt 6.2 beschriebenen Standardfall ausgegangen, dessen physikalische Parameter beibehalten werden. Die Silogeometrie und die untersuchten FE-Netze zeigt das Bild 6.11.

In der Tabelle 6.1 sind die FE-Netze mit den jeweils angenommenen Zeitschritten aufgeführt. In dieser Tabelle wird jeder Kombination eine Nummer zugewiesen, die in den weiteren Tabellen und Bildern als abkürzende Bezeichnung dient.

FE-Netz	Δt [sec]		
	0,002	0,001	0,0005
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Tabelle 6.1: Verzeichnis der Kombinationen der Diskretisierungsparameter

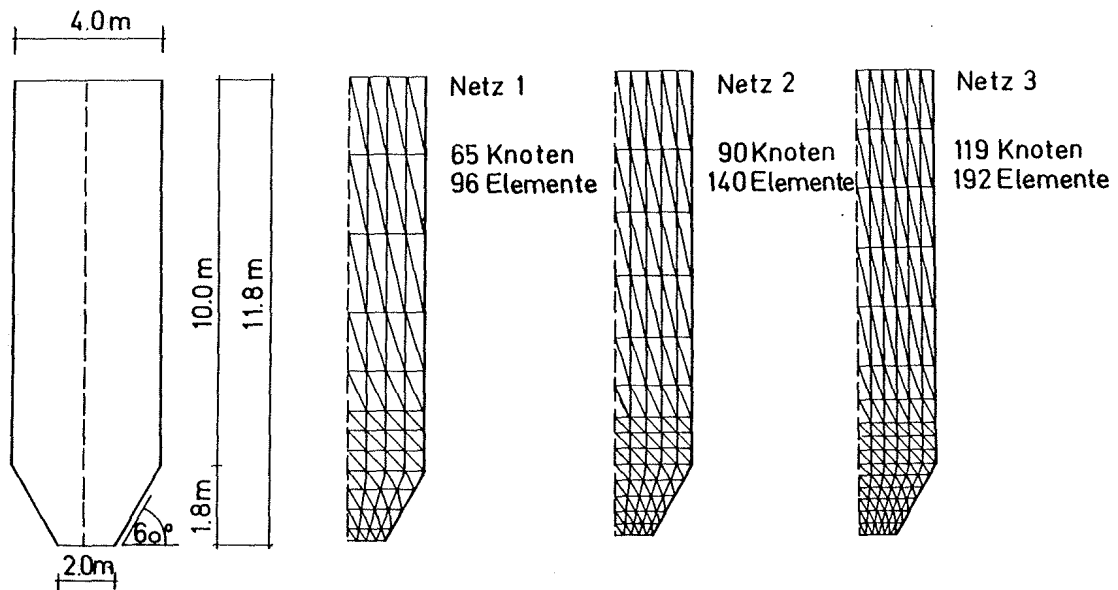


Bild 6.11: Silogeometrie und verwendete FE-Netze

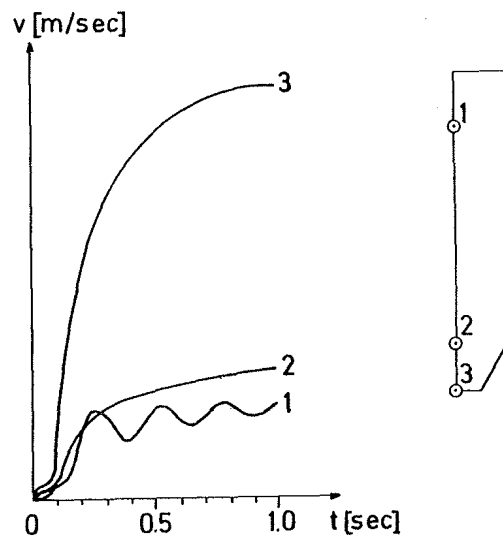


Bild 6.12: Qualitativer Verlauf der vertikalen Fließgeschwindigkeiten v_y in festen räumlichen Punkten in Abhängigkeit von der Zeit t

Es werden zunächst die Fließgeschwindigkeiten betrachtet. Das Bild 6.12 zeigt den qualitativen Verlauf von Fließgeschwindigkeiten in festen räumlichen Punkten über den gesamten berechneten Zeitraum. Dieser qualitative Verlauf ist für alle Kombinationen nach Tabelle 6.1 gleich.

Die Tabelle 6.2 gibt die Geschwindigkeiten v_y in den in Bild 6.12 angegebenen Punkten für alle Kombinationen zum Zeitpunkt $t = 1,0$ sec an.

Parameter- kombinationen	Punkt		
	1	2	3
11	0,47	0,70	2,26
12	0,53	0,80	2,43
13	0,50	0,78	2,35
21	0,47	0,67	2,15
22	0,58	0,84	2,58
23	0,53	0,73	2,36
31	0,34	0,43	1,55
32	0,42	0,51	1,72
33	0,50	0,64	2,16

Tabelle 6.2: Fließgeschwindigkeiten v_y in [m/sec]
für $t = 1,0$ sec

Eine größere Abweichung zeigen die Werte der Kombination 31, das ist die feinste räumliche Diskretisierung mit dem längsten Zeitschritt. Dagegen zeigen die Werte der Kombinationen mit dem kürzesten Zeitschritt annähernd Übereinstimmung.

Im weiteren werden die Spannungen betrachtet. Zunächst ist im Bild 6.13 der qualitative Verlauf von vertikalen Normalspannungen in zwei festen räumlichen Punkten angegeben. Das leichte Schwingungsverhalten ist deutlich erkennbar.

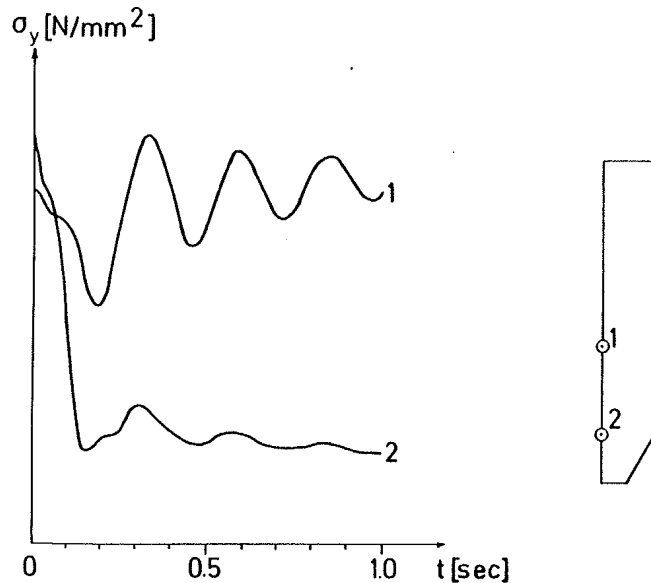


Bild 6.13: Qualitativer Verlauf der vertikalen Normalspannung σ_y in festen räumlichen Punkten in Abhängigkeit von der Zeit t

Die Rechenergebnisse zeigen, daß die Spannungsverläufe der verschiedenen Kombinationen untereinander praktisch keine Phasenverschiebung aufweisen, wogegen aber Unterschiede in den Schwingungsamplituden auftreten. Die Amplitudenunterschiede sind etwa zum Zeitpunkt $t = 0,3$ sec am größten und nehmen dann wieder ab. Die Tabelle 6.3 gibt für alle Kombinationen nach Tabelle 6.1 die Spannungen σ_y in den in Bild 6.13 angegebenen Punkten zum Zeitpunkt $t = 0,3$ sec an. Im oberen Punkt sind die Unterschiede in den berechneten Werten gering, während für den unteren Punkt zwischen den verschiedenen räumlichen Diskretisierungen größere Differenzen auftreten.

Parameter- kombinationen	Punkt	
	1	2
11	0,0974	0,0266
12	0,0927	0,0248
13	0,0912	0,0260
21	0,0955	0,0326
22	0,0885	0,0281
23	0,0916	0,0306
31	0,1016	0,0365
32	0,1031	0,0380
33	0,0954	0,0344

Tabelle 6.3: Spannungen σ_y in $[N/mm^2]$ für $t = 0,3$ sec

Im weiteren wird der Einfluß der verschiedenen Parameterkombinationen auf die Randspannungen dargestellt. Dazu ist zu bemerken, daß die Randspannungen nicht direkt aus dem Spannungszustand im Füllgut, sondern aus den sich infolge der FE-Diskretisierung ergebenden Knotenkräften am Rand bestimmt werden. Die Tabelle 6.4 zeigt für die Parameterkombinationen 21, 22, 23 (das ist das FE-Netz 2 mit 3 verschiedenen Zeitschritten) die Spannungen σ_w in den Randknoten des Trichters für drei Zeitpunkte, wobei statt der Knotenbezeichnungen die Höhe h über der Auslaßöffnung angegeben ist.

Man sieht, daß die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Zeitschritte i.a. gering sind. Dies zeigt sich jeweils auch innerhalb der beiden anderen FE-Netze. Man kann deshalb die Randspannungen eines Zeitschritts als repräsentativ für ein FE-Netz annehmen.

Parameter- kombinationen	h[m]				
	0,3	0,6	1,0	1,4	1,8
	t = 0,1 sec				
21	0,1077	0,1287	0,1348	0,1438	0,1286
22	0,1073	0,1280	0,1343	0,1435	0,1285
23	0,1072	0,1278	0,1342	0,1435	0,1284
	t = 0,2 sec				
21	0,0308	0,0554	0,0805	0,1495	0,2303
22	0,0349	0,0541	0,0798	0,1491	0,2321
23	0,0347	0,0548	0,0801	0,1491	0,1284
	t = 1,0 sec				
21	0,0351	0,0482	0,0841	0,1816	0,3317
22	0,0417	0,0524	0,0838	0,1756	0,3415
23	0,0417	0,0524	0,0863	0,1814	0,3320

Tabelle 6.4: Randnormalspannungen σ_w in $[N/mm^2]$ über der Trichterhöhe h für die Parameterkombinationen 21, 22, 23

Für einen Vergleich der räumlichen Diskretisierungen werden deshalb die Parameterkombinationen 11, 21 und 31 herausgegriffen. Das Bild 6.14 zeigt deren Randspannungen σ_w für verschiedene Zeitpunkte. Dabei wird zwischen den Knotenwerten der Spannungen linear interpoliert.

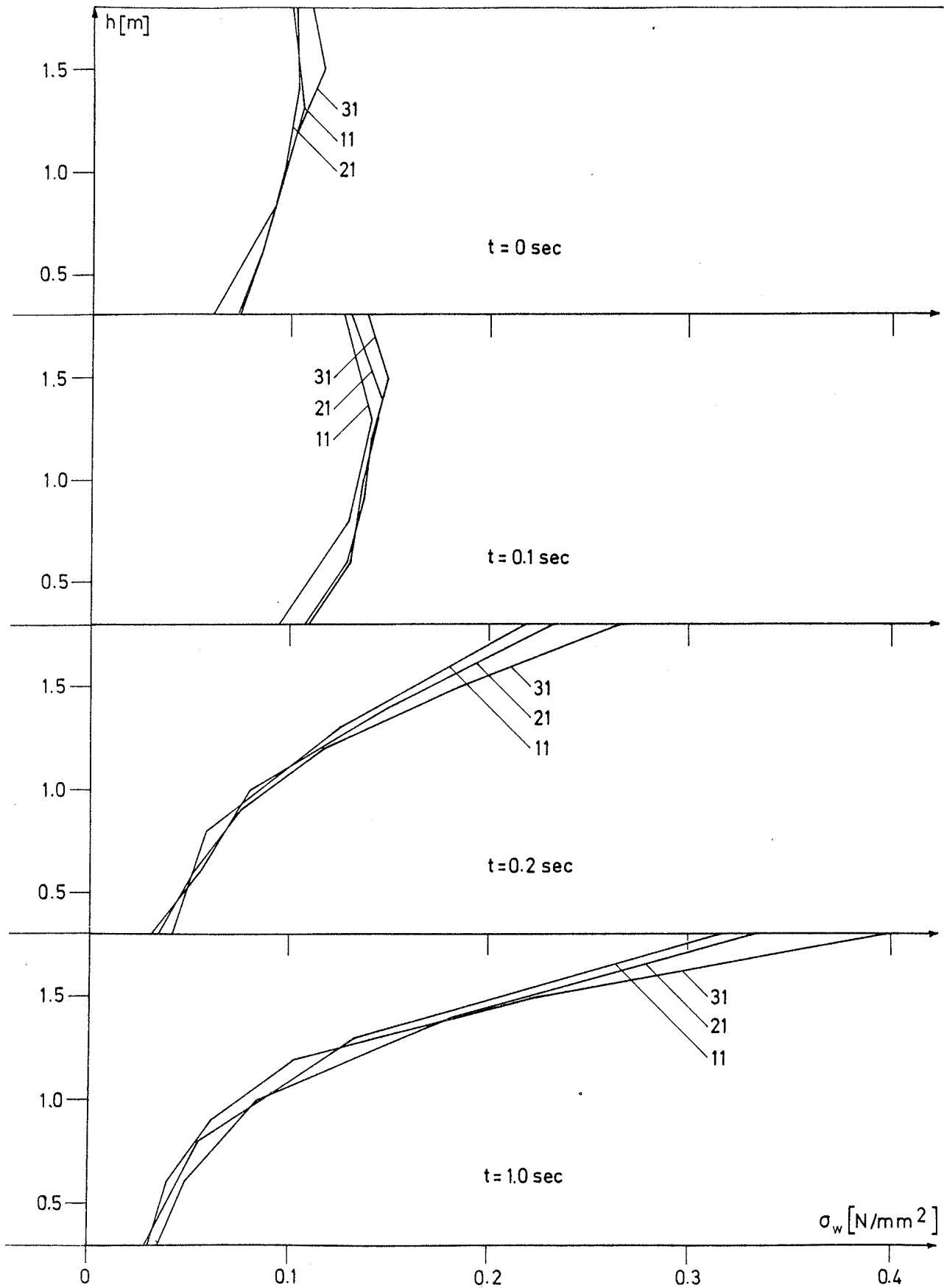


Bild 6.14: Randnormalspannungen σ_w über der Trichterhöhe h für die Parameterkombinationen 11, 21, 31

Insgesamt zeigen die ermittelten Werte noch kein einheitliches Bild. Während bei den Fließgeschwindigkeiten vereinzelt Unterschiede um den Faktor 2 und bei den inneren Spannungen im Trichterbereich um den Faktor 1,5 auftreten, ist ansonsten eine relativ gute Übereinstimmung gegeben. Eine weitere Erörterung dieses Problemkreises wird hier nicht vorgenommen.

Die dargestellten Ergebnisse sind mit einer festen Kombination physikalischer Parameter berechnet worden. Im weiteren wird angenommen, daß sich bei anderen physikalischen Parametern, sofern diese nicht zu stark von den hier gewählten abweichen, ein ähnliches Bild ergibt. Um den Rechenaufwand in tragbaren Grenzen zu halten, werden die in den folgenden Abschnitten durchgeführten Untersuchungen über den Einfluß der physikalischen Parameter mit einer weitgehend festen Kombination der Diskretisierungsparameter durchgeführt. Es wird hierfür das FE-Netz 2 (vgl. Bild 6.11) mit einem Zeitschritt $\Delta t = 0,002$ sec gewählt.

Für die Untersuchung verschiedener Behältergeometrien werden am FE-Netz geringfügige Modifikationen vorgenommen.

Es bleibt noch der Einfluß der Öffnungsphasendauer darzustellen. Die entsprechenden Rechnungen wurden ebenfalls mit dem FE-Netz 2, dem Zeitschritt $\Delta t = 0,002$ sec und den physikalischen Parametern des Standardfalls vorgenommen. Das Bild 6.15 zeigt Fließgeschwindigkeiten v_y über einen kleineren Zeitraum für verschiedene Öffnungszeiten t_a . Dabei ist der Nullpunkt der Zeitachse nicht in den Beginn, sondern in das Ende der Öffnungsphase gelegt, d.h. der Anfangszeitpunkt liegt dort, wo die Auflagerkräfte in der Auslaßöffnung gerade zu Null werden.

Eine entsprechende Darstellung von Normalspannungen σ_y zeigt das Bild 6.16. Es wird deutlich, daß von dem gewählten Anfangszeitpunkt ab nur geringe Unterschiede in den Fließgeschwindigkeiten und Spannungen auftreten.

Damit kann der Einfluß der Öffnungszeit t_a auf die der Öffnungsphase folgenden Vorgänge vernachlässigt werden. Für alle weiteren Rechnungen wird $t_a = 0,1$ sec angenommen.

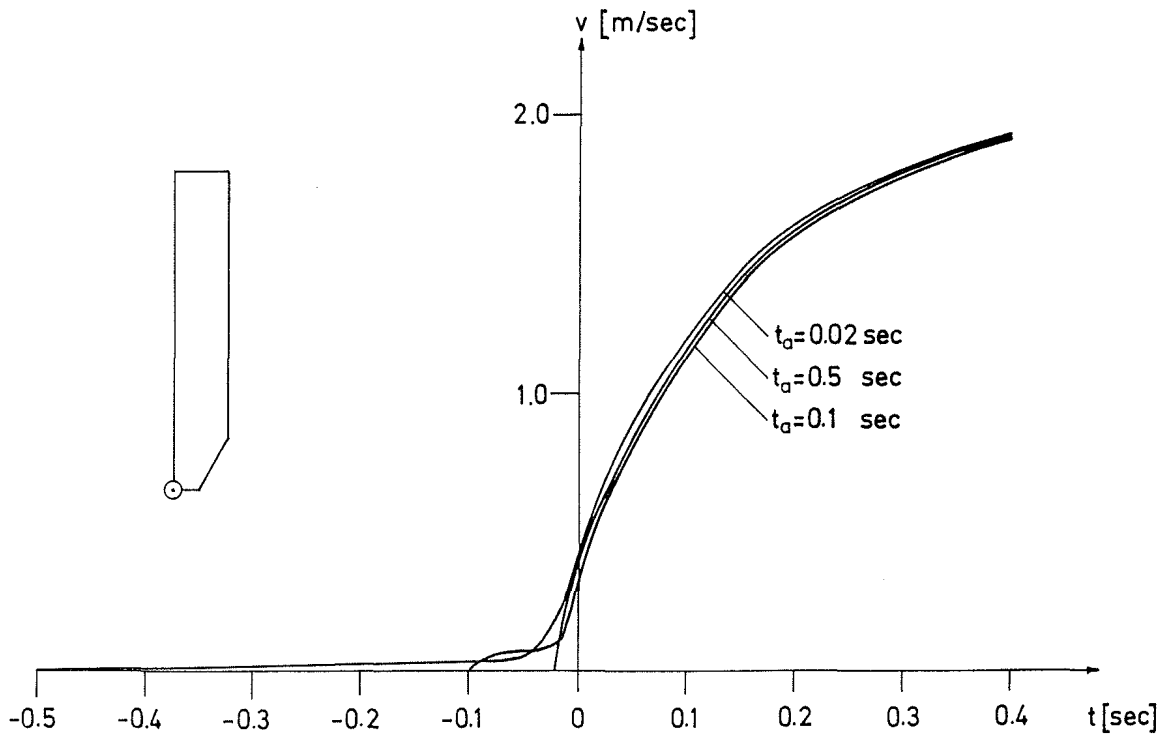


Bild 6.15: Vertikale Fließgeschwindigkeiten v_y in der Auslaßöffnung in Abhängigkeit von der Zeit t für verschiedene Öffnungszeiten t_a

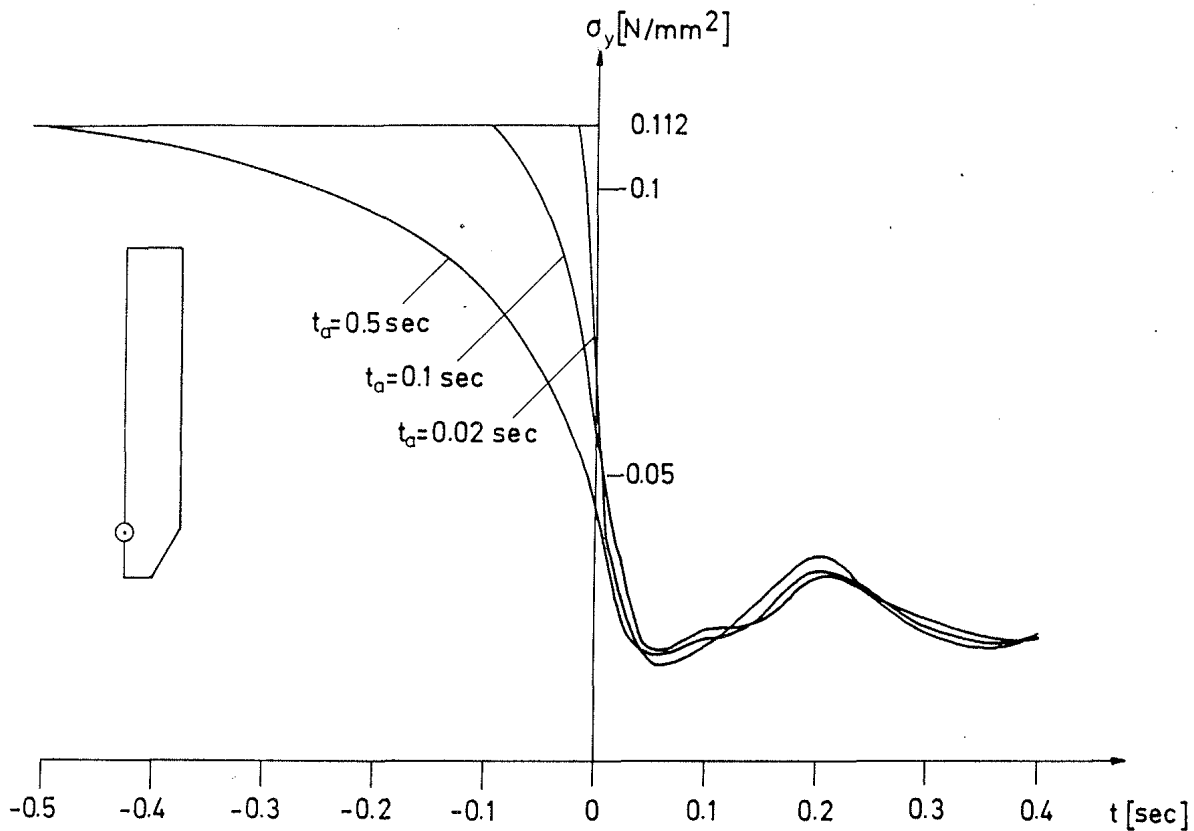


Bild 6.16: Vertikale Normalspannungen σ_y im Trichter in Abhängigkeit von der Zeit t für verschiedene Öffnungszeiten t_a

6.4 Der Einfluß der Viskositätszahl

Für den geschwindigkeitsabhängigen viskosen Anteil des Stoffgesetzes wurde im Abschnitt 4.4.4 als Stoffparameter eine Viskositätszahl μ eingeführt, deren Wert in den ersten Rechnungen willkürlich festgesetzt wurde. Im folgenden wird zunächst dargestellt, welchen Einfluß die Viskositätszahl auf die Rechenergebnisse nimmt. Es wird wiederum der in Abschnitt 6.2 dargestellte Standardfall angenommen, wobei die Viskositätszahl variiert wird und alle übrigen Parameter beibehalten werden. Das Bild 6.17 zeigt für verschiedene

Werte der Viskositätszahl μ die Fließgeschwindigkeiten des Schüttguts in der Achse der Auslaßöffnung und im Schacht, in dem sich das Schüttgut (abgesehen von geringen elastischen Verformungen) wie ein starrer Körper bewegt. Man sieht, daß mit abnehmender Viskositätszahl die Fließgeschwindigkeiten überproportional zunehmen. Im Bild 6.18 sind die Randspannungen σ_w an der Trichterwand zu verschiedenen Zeitpunkten angegeben, wobei die Viskositätszahl μ als Parameter dient. Hiernach ist der Einfluß von μ auf die Spannungen gering.

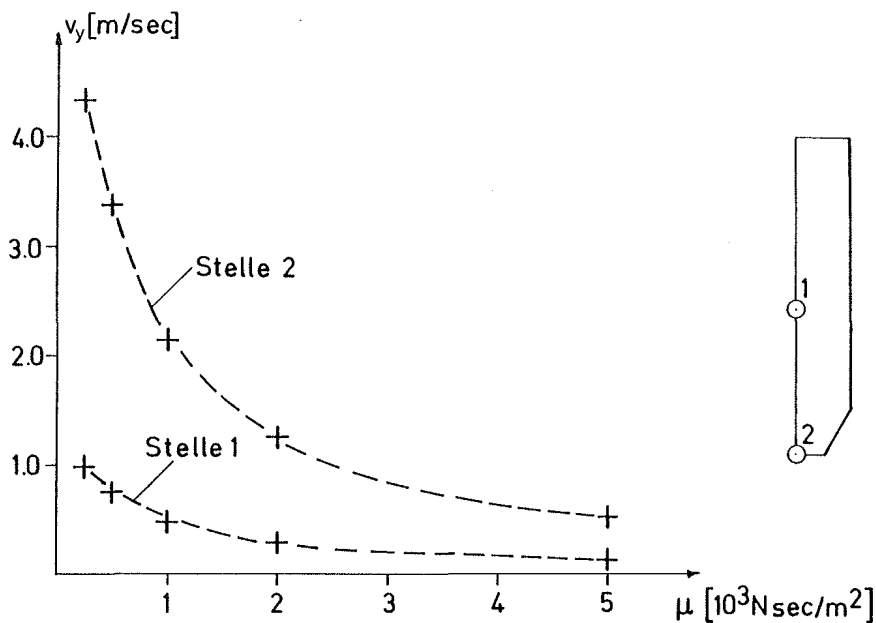


Bild 6.17: Vertikale Fließgeschwindigkeit v_y in Abhängigkeit von der Viskositätszahl μ für $t = 1,0 \text{ sec}$

Für die weiteren Rechnungen muß für die Viskositätszahl ein halbwegs sinnvoller Wert angenommen werden. SCHWEDES gibt in [34] an, daß die mittlere Fließgeschwindigkeit \bar{v} im Auslaß geöffneter Silos in erster Näherung mit

$$\bar{v} \approx \frac{1}{2} \sqrt{G \cdot D} \quad (6.4)$$

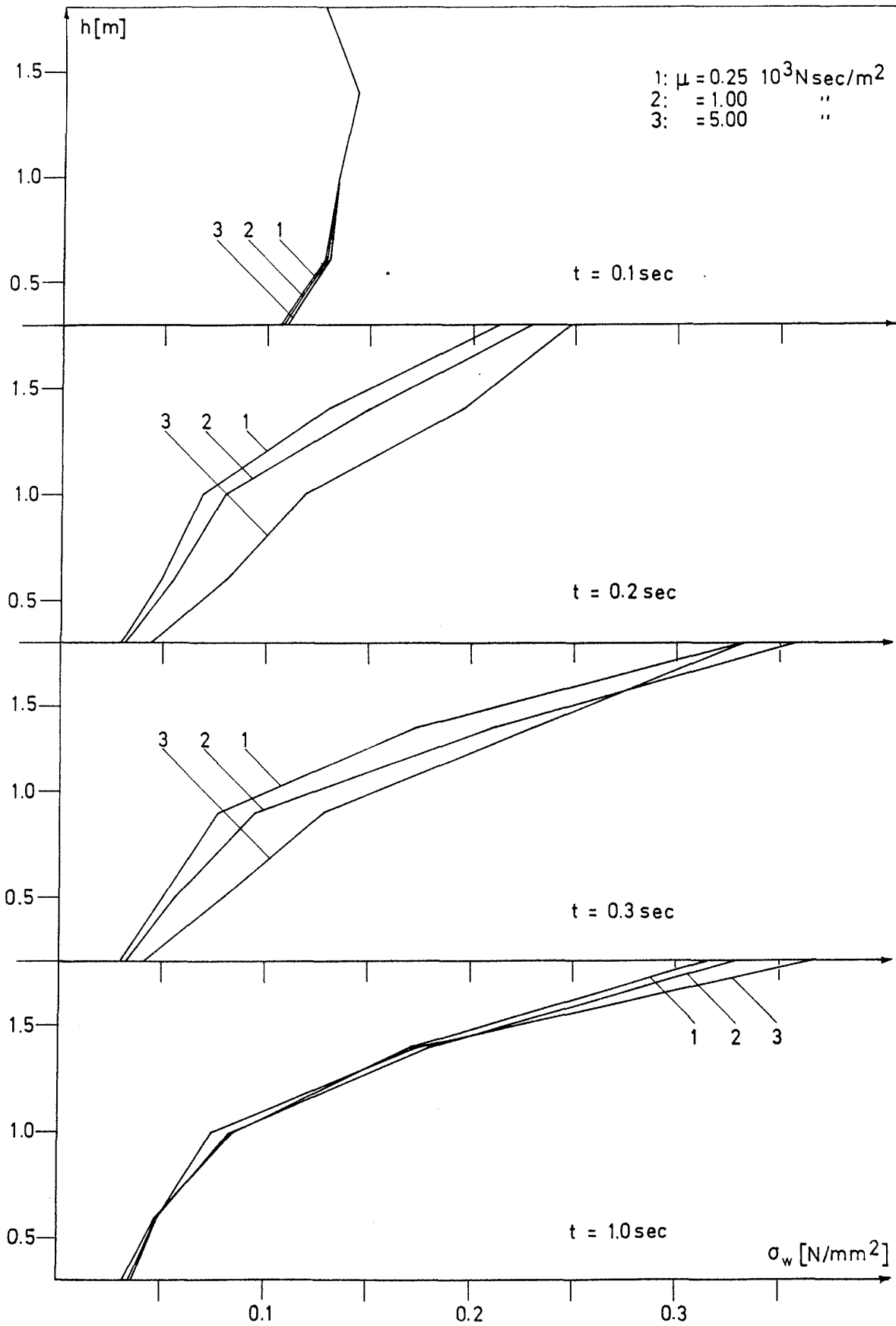


Bild 6.18: Randnormalspannungen σ_w über der Trichterhöhe h für verschiedene Werte der Viskositätszahl μ

bestimmt werden kann. Darin ist G die Erdbeschleunigung und D die Breite der Auslaßöffnung. Mit der hier angenommenen Öffnungsbreite $D = 2,0$ m ergibt sich:

$$\bar{v} \approx 2.2 \text{ m/sec}$$

Dem entspricht nach Bild 6.17 eine Viskositätszahl von

$$\mu \approx 10^3 \text{ Nsec/m}^2$$

Dieser Wert wurde für die weiteren Berechnungen angenommen. Zum Vergleich sind die dynamischen Viskositäten anderer Stoffe angegeben. Dabei ist zu beachten, daß die dynamische Viskosität und die hier eingeführte Viskositätszahl jeweils in Stoffgesetzen unterschiedlichen Typs auftreten (die Viskositätszahl in Zusammenhang mit einer Spannungsrate und einer Verformungsbeschleunigung, die dynamische Viskosität in Zusammenhang mit der Spannung und der Verformungsrate), eine unmittelbare Vergleichbarkeit somit nur beschränkt möglich ist. CAMBEFORT gibt in [35] die dynamischen Viskositäten verschiedener Stoffe wie folgt an:

Glas unter dem Erweichungspunkt	10^{12} Nsec/m ²
Kristalliner Fels	10^9 Nsec/m ²
Verarbeitbares Glas	10^3 Nsec/m ²
Glas auf dem Schmelzpunkt	10^1 Nsec/m ²
Wasser bei 20°C	10^{-3} Nsec/m ² .

Im weiteren bleibt festzuhalten, daß die empirisch und theoretisch untermauerte Näherungsformel zur Bestimmung der mittleren Fließgeschwindigkeit in der Auslaßöffnung \bar{v} nach Gl. (6.4) den hier berechneten Ergebnissen in einigen Punkten widerspricht. Zunächst geht in Gl. (6.4) die Breite D der Auslaßöffnung als einzige variable Größe ein, wogegen nach SCHWEDES die Eigenschaften des Füllgutes gegenüber D von

geringerem Einfluß und deshalb in Gl. (6.4) nicht berücksichtigt sind. Dagegen zeigen die hier berechneten Fließgeschwindigkeiten in der Auslaßöffnung im Bereich $\mu < 1 \cdot 10^3 \text{ Nsec/m}^2$ eine starke Abhängigkeit von der Viskositätszahl. Außerdem ist durch Gl. (6.4) ein exponentieller Zusammenhang zwischen \bar{v} und D mit dem Exponenten 0,5 festgelegt. Die hier in Abhängigkeit von D bestimmten Fließgeschwindigkeiten zeigen eine andere Charakteristik. Der Verlauf nach Gl. (6.4) und einige mit den Parametern des Standardfalls berechnete Werte sind im Bild 6.19 gegenübergestellt.

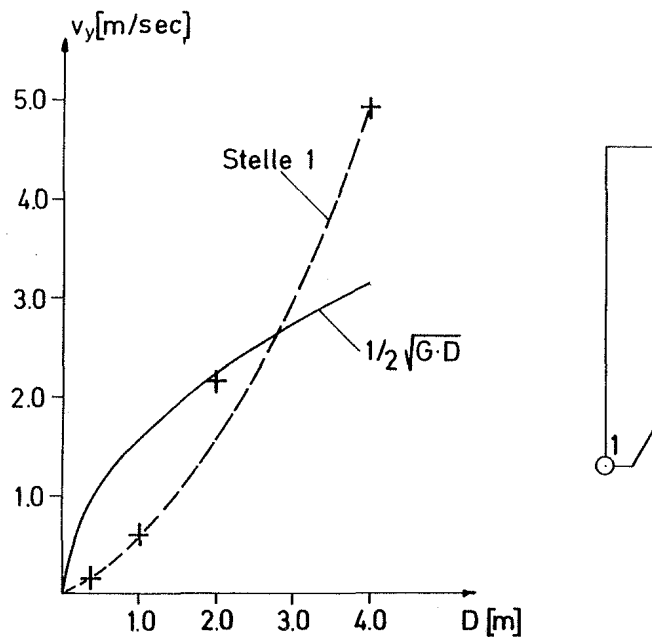


Bild 6.19: Vertikale Fließgeschwindigkeit v_y in Abhängigkeit von der Auslaßbreite D für $t = 1,0 \text{ sec}$

Insgesamt zeigt sich, daß der hier gewählte Ansatz nach den Gln. (4.77a, b) für den geschwindigkeitsabhängigen viskosen Anteil des Stoffgesetzes sich nur gering auf die

berechneten Spannungen auswirkt, andererseits aber wesentlichem Einfluß auf die Fließgeschwindigkeiten nimmt. Die Widersprüche zu den von SCHWEDES angegebenen Zusammenhängen bedürfen einer weiteren Klärung. Darauf wird hier wegen der damit verbundenen umfangreichen Überlegungen zunächst verzichtet.

6.5 Wandreibung und Trichterneigung

Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente gestattet es, beliebige Silogeometrien anzunehmen. Hier werden drei Behälter mit verschiedenen Trichterneigungen untersucht. Die Abmessungen zeigt das Bild 6.20. Die angenommenen Parameter des Behälters 2 sind diejenigen des in Abschnitt 6.2 beschriebenen Standardfalls. Das dazugehörige FE-Netz zeigt das Bild 6.2. Für die Behälter 1 und 3 werden ähnliche FE-Netze angenommen, wobei die Unterschiede aus der veränderten Trichterhöhe und -neigung resultieren. Die übrigen Parameter des Standardfalls werden auch hierfür übernommen.

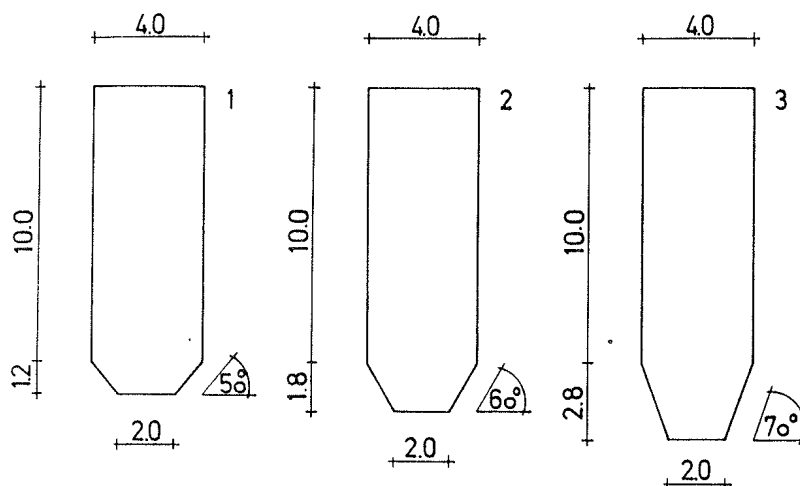


Bild 6.20: Silogeometrien mit verschiedenen Trichterneigungen, Maßangaben in [m]

Die berechneten Geschwindigkeitsfelder zeigen für alle drei Fälle dasselbe qualitative Verhalten mit Werten ähnlicher Größe, wie es bereits im Abschnitt 6.2 beschrieben wurde. Auch der Behälter 1 mit der flachsten Trichterneigung weist Massenfluß auf; dabei ist der Geschwindigkeitsgradient im Trichter größer als bei den anderen beiden Fällen, d.h. an der Trichterwand treten geringere und in der Trichterachse größere Fließgeschwindigkeiten auf. Gleiches zeigt sich im Vergleich der mittleren zur steilen Trichterneigung.

Im Bild 6.21 sind für alle drei Fälle die berechneten Hauptspannungen im Trichter und im angrenzenden Vertikalbereich für den Füllzustand ($t = 0$ sec) und für das Entleeren zum Zeitpunkt $t = 1,0$ sec dargestellt.

Es ist erkennbar, daß beim Entleeren mit größerer Trichterneigung das "Gewölbe" der Hauptspannungen flacher wird, so daß für den steilen Trichter größere Wanddrücke zu erwarten sind. Daß dies nur bedingt eintritt, zeigt das Bild 6.22, in dem die Randspannungen σ_w für die drei Trichterneigungen dargestellt sind. Die Werte sind beim steilen Trichter nur wenig größer, erstrecken sich aber über einen höheren Bereich, so daß die Resultierende der Randspannungen beim steilen Trichter wesentlich größer ist.

An den Trichterwänden ist ein linearer Zusammenhang zwischen der Normalspannung σ_w und der Schubspannung τ_w mit einem Reibungsbeiwert $\tan \alpha$ als Kräfte- und Randbedingung vorgegeben worden. Im folgenden soll dargestellt werden, wie sich unterschiedliche Reibungsbeiwerte auf die Rechenergebnisse auswirken, wobei die übrigen Parameter wie beim Standardfall gewählt werden. Bei den berechneten Geschwindigkeitsfeldern ist eine ähnliche Erscheinung wie gerade beschrieben festzustellen: Höhere Reibungsbeiwerte führen zu größeren Geschwindigkeitsgradienten im Trichter, wobei sich die

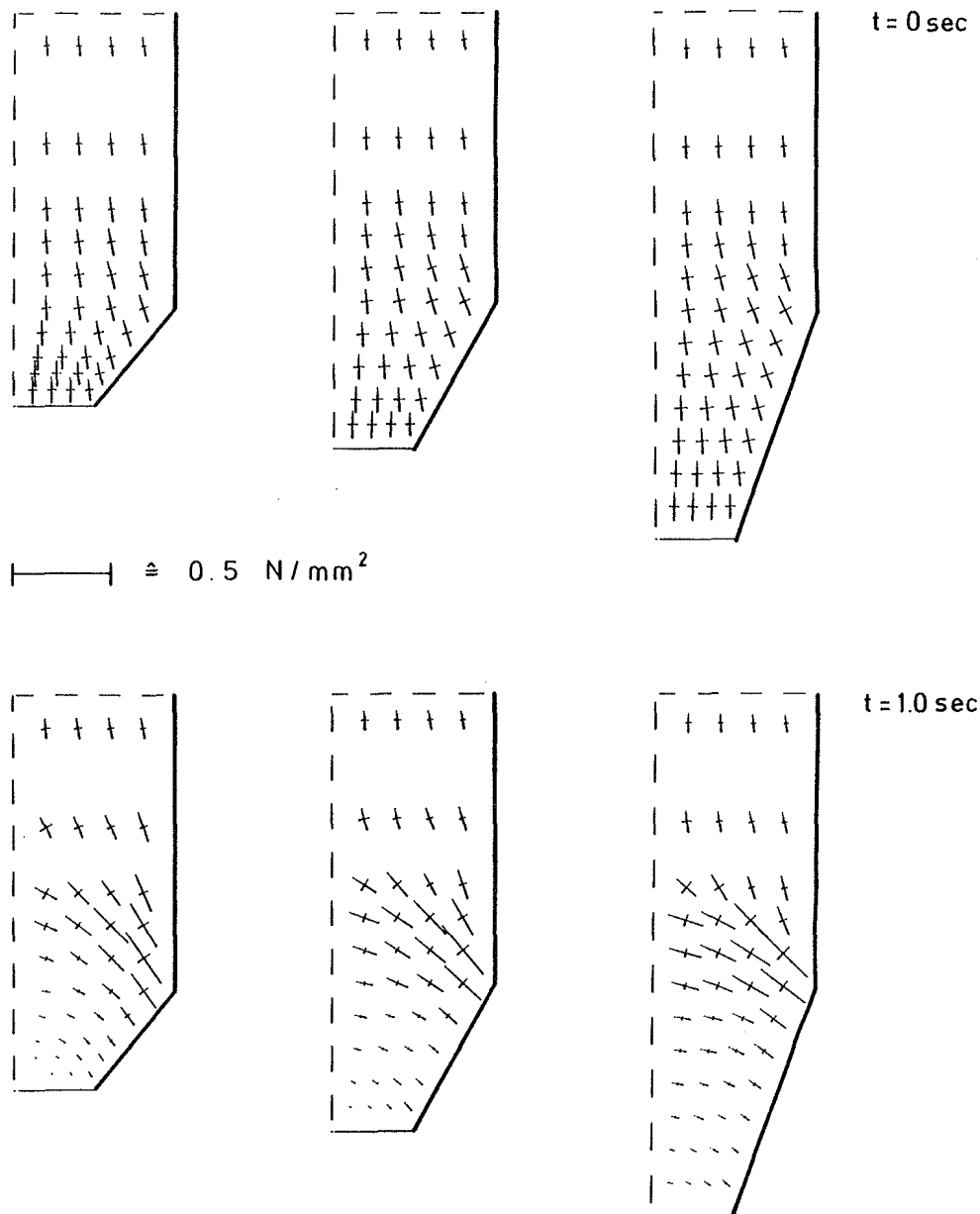


Bild 6.21: Hauptspannungsfelder bei verschiedenen Trichterneigungen für $t = 0 \text{ sec}$ und $t = 1 \text{ sec}$

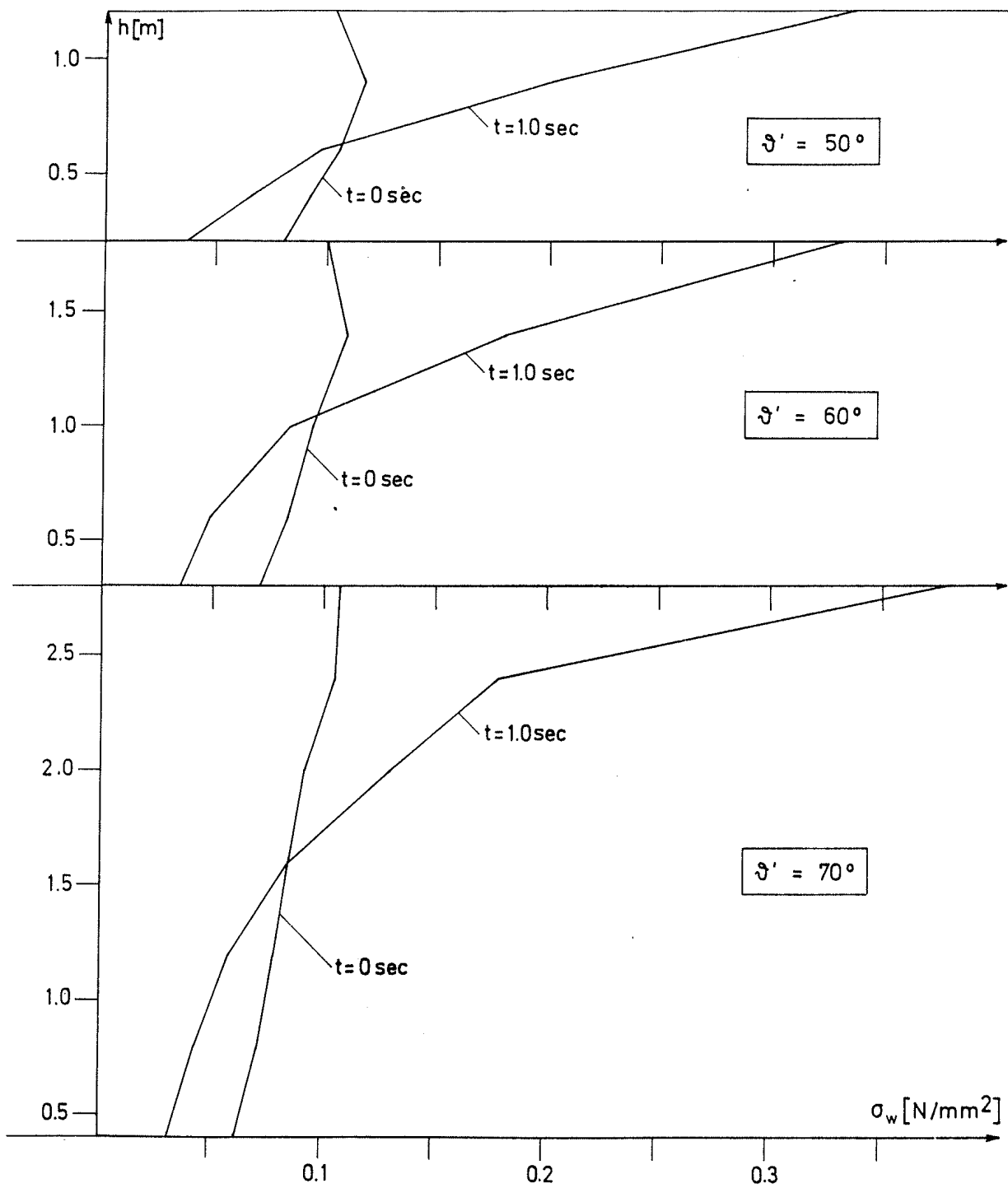


Bild 6.22: Randnormalspannungen σ_w über der Trichterhöhe h für verschiedene Trichterneigungen

die Fließgeschwindigkeiten an den Behälterwänden geringfügig verringern und in der Trichterachse erhöhen. Es zeigt sich weiter, daß das Spannungsniveau im unteren Silobereich bei höheren Reibungsbeiwerten geringer ausfällt. Dies ist auch im Bild 6.23 ersichtlich, in dem die berechneten Hauptspannungen für zwei Reibungsbeiwerte im Trichter und im angrenzenden Schacht für den Füllzustand ($t = 0 \text{ sec}$) und für das Entleeren zum Zeitpunkt $t = 1,0 \text{ sec}$ dargestellt sind.

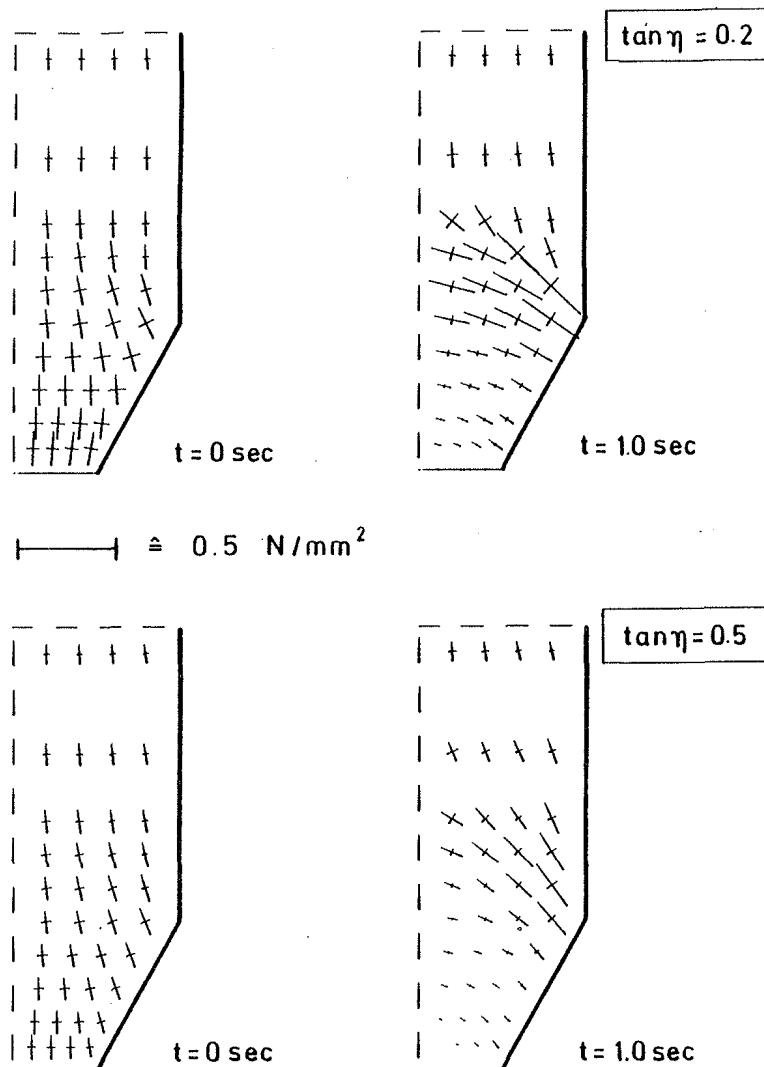


Bild 6.23: Hauptspannungsfelder für $t = 0 \text{ sec}$ und $t = 1,0 \text{ sec}$ bei verschiedenen Reibungsbeiwerten

Man erkennt deutliche Unterschiede in der Orientierung und Größe der Hauptspannungen. Entsprechende Auswirkungen zeigen sich auch bei den Randspannungen, die bei dem kleineren Reibungsbeiwert wesentlich größer ausfallen. Eine Darstellung der Randspannungen σ_w ist mit dem Bild 6.24 gegeben. Die Ursache für das geringere Spannungsniveau bei höheren Reibungsbeiwerten ist darin zu sehen, daß ein größerer Teil des Füllgewichts bereits im oberen Behälterbereich über die Wandreibung in die Behälterwände eingeleitet wird.

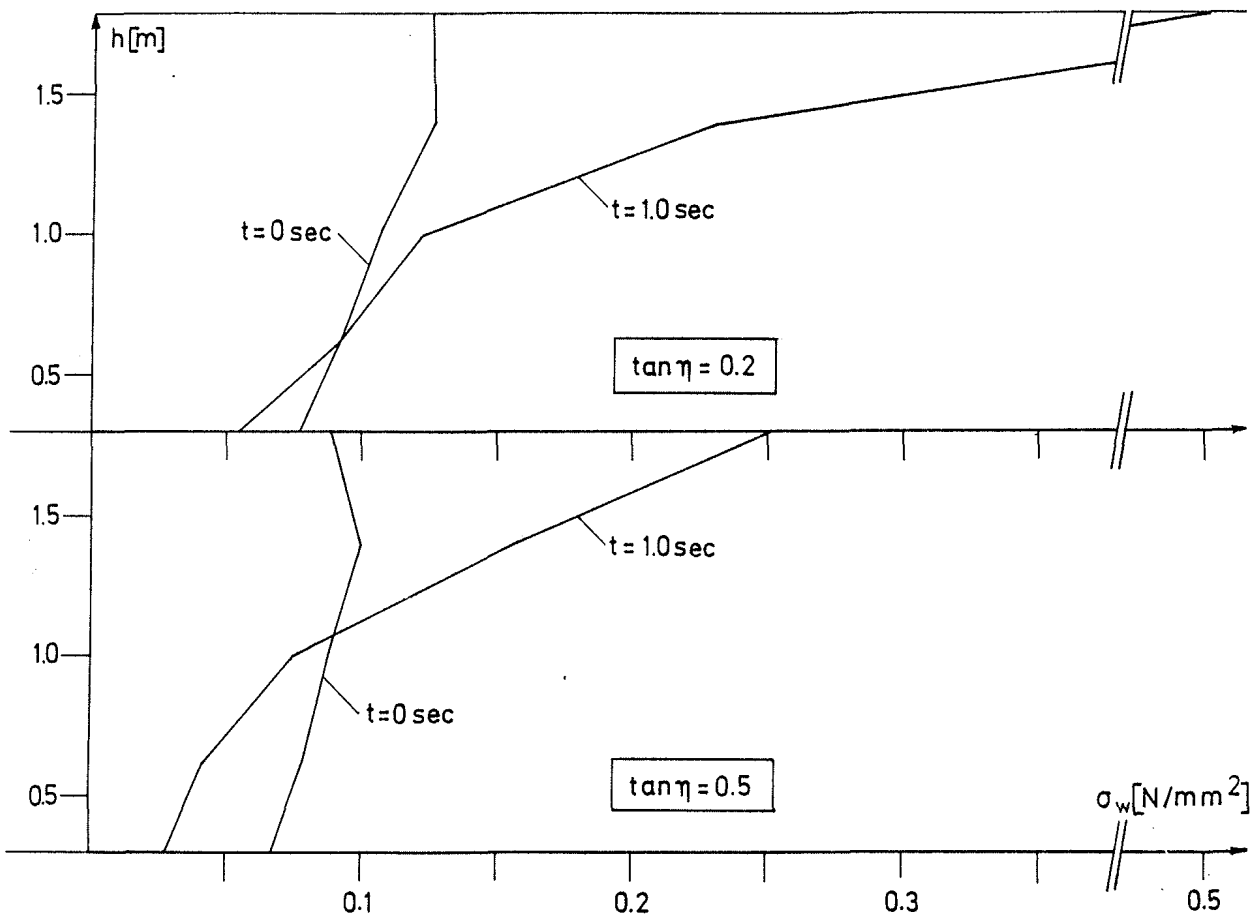


Bild 6.24: Randnormalspannungen σ_w über der Trichterhöhe h bei verschiedenen Wandreibungsbeiwerten

Nach dieser Erläuterung der rechnerischen Untersuchungen sollen die dabei gewonnenen mechanischen Erkenntnisse im folgenden Abschnitt durch den Vergleich mit anderen Rechenverfahren und Versuchsergebnissen geprüft werden.

7 Diskussion der Erkenntnisse

7.1 Ein Vergleich mit anderen Rechenverfahren

Im folgenden werden anhand eines Beispiels die Ergebnisse des hier entwickelten numerischen Rechenverfahrens den Ergebnissen der in Abschnitt 2 beschriebenen Rechenverfahren von JENIKE, WALTERS und ENSTADT gegenübergestellt. Als Füllgut wird der bereits im Standardfall verwendete und in Abschnitt 6.2 beschriebene "Sacramento River Sand" mit einer Ausgangsporenziffer von $e = 0,87$ angenommen. Dessen innerer Reibungswinkel wurde von LEE/SEED [33] mit $\varphi = 34^\circ$ bestimmt. Die Silogeometrie und die Parameter des Füllguts sind im Bild 7.1 angegeben. Es wird ein ebener Verformungszustand vorausgesetzt.

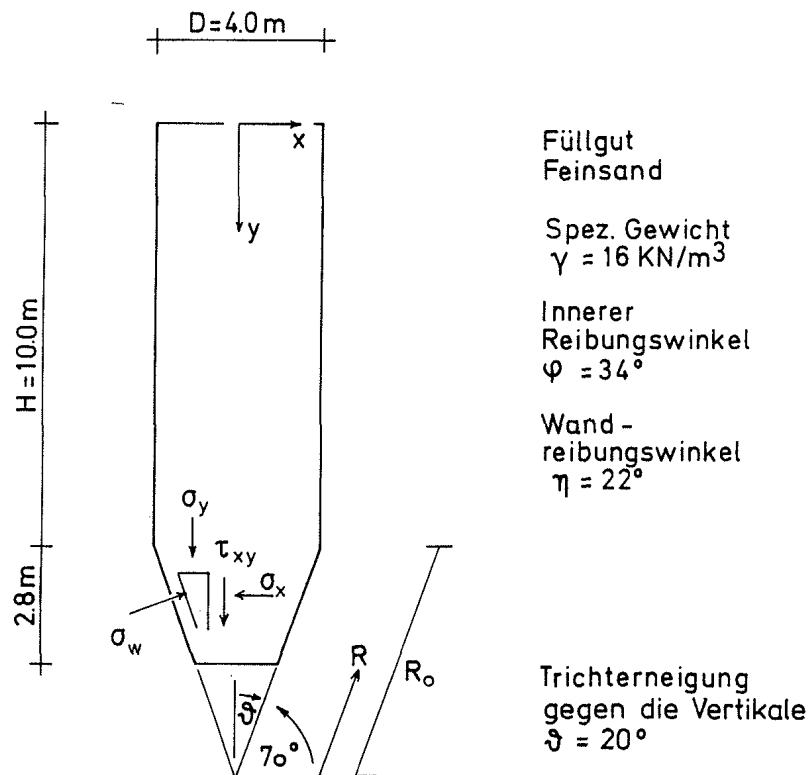


Bild 7.1: Silogeometrie, Bezeichnungen und Füllgutparameter der vergleichenden Rechnung

Für das eigene Rechenverfahren wurden die Parameter des Standardfalls gewählt (vgl. Abschnitt 6.2), wobei die Geometrie und das FE-Netz entsprechend der steileren Trichter- neigung modifiziert wurden. Die damit berechneten Randspan- nungen σ_w sind für den Zeitpunkt $t = 1,0$ sec im Bild 7.2, Kurve FEM, aufgetragen. Ab etwa $t = 0,5$ sec sind die Verän- derungen der Randspannungen in Abhängigkeit von der Zeit gering, sodaß $t = 1,0$ sec als repräsentativ angesehen wer- den kann.

Im folgenden wird jeweils kurz dargestellt, wie im angenom- menen Beispiel die Randspannungen nach den Rechenverfahren der oben genannten Autoren zu bestimmen sind.

(1) JENIKE

Es wird das in [6] dargestellte Rechenverfahren angewendet. Die Randnormalspannungen σ_w im Schacht werden nach JANSSEN bestimmt:

$$\sigma_w = \frac{\gamma R_h}{\tan \eta} [1 - \exp(-\tan \eta \cdot K \cdot y / R_h)] \quad (7.1)$$

Darin sind

$R_h = S/U$	Hydraulischer Radius, hier $R_h = D/2$
$K = \sigma_x / \sigma_y$	Verhältnis von Horizontalspannung zu Vertikalspannung

Jenike schlägt aufgrund seiner empirischen Beobachtungen $K = 0,4$ vor. Die Randspannungen im Trichter werden in zwei Anteile aufgespalten.

Der erste Anteil erfaßt das Füllgut im Trichter ohne Berück- sichtigung der Auflast und verläuft, ausgehend vom Wert Null in der gedachten Trichterspitze, linear zum Wert

$$\sigma_w' = b_1 \cdot \gamma \cdot D$$

am oberen Trichterrand. Der Beiwert b_1 wird von JENIKE in Abhängigkeit vom Trichterneigungswinkel ϑ , dem Wandreibungswinkel η und dem inneren Reibungswinkel φ in Form von Diagrammen angegeben. Im hier angenommenen Beispiel ist $b_1 = 0,52$.

Der zweite Anteil berücksichtigt die Auflast aus dem Füllgut im Schacht, indem zusätzliche Randspannungen unterhalb des oberen Trichterrandes in einem dreieckförmigen Verlauf mit einer Höhe von $0,3 D$ angenommen werden. Der Wert am oberen Trichterrand beträgt

$$\sigma_w'' = 3,3 \cdot \frac{(\sigma_y)_H - b_2 \cdot \gamma \cdot D}{\sin \vartheta + \cos \vartheta \cdot \tan \eta}$$

Darin ist $(\sigma_y)_H$ die Auflast auf den Trichter, die nach JANSSEN bestimmt werden kann. Der Beiwert b_2 ergibt sich wiederum in Abhängigkeit von ϑ , η , φ und ist hier $b_2 = 0,20$. Die berechneten Randspannungen sind im Bild 7.2, Kurve J, aufgetragen.

(2) WALTERS

Das von WALTERS in [7] und [8] angegebene Rechenverfahren bezieht sich auf rotationssymmetrische Fälle, läßt sich aber leicht auf den ebenen Verformungszustand übertragen. Die in [7] und [8] angegebenen Gleichungen zur Bestimmung der verschiedenen Beiwerte und der Lösungen werden hier nach entsprechender Modifikation angewendet.

Mit Bezug auf einen horizontalen Schnitt wird von einer mittleren vertikalen Normalspannung $\bar{\sigma}_y$ ausgegangen. Unter den in Abschnitt 2 beschriebenen Voraussetzungen kann man die Schubspannung an der Behälterwand $(\tau_{xy})_w$ in Abhängigkeit von

der vertikalen Normalspannung an der Wand $(\sigma_y)_w$, und weiter $(\sigma_y)_w$ in Abhängigkeit von $\bar{\sigma}_y$ ausdrücken:

$$(\tau_{xy})_w = B \cdot (\sigma_y)_w$$

$$(\sigma_y)_w = C \bar{\sigma}_y$$

Die Beiwerte B und C werden in Abhängigkeit von φ , η und ϑ berechnet. Hier ergibt sich im Schacht bei Annahme eines aktiven Spannungszustandes $B = 0,1258$, $C = 0,9503$ und im Trichter für einen passiven Spannungszustand $B = 0,4775$, $C = 1,8292$.

Nach einer Gleichgewichtsbetrachtung an horizontalen Schnitten ergeben sich zunächst Lösungen für $\bar{\sigma}_y$ in Abhängigkeit von y und daraus lassen sich Randspannungen σ_w bestimmen. Man erhält für den Schacht

$$\sigma_w = \gamma \cdot D \frac{1}{2 \tan \eta} [1 - \exp(-2B \cdot C \cdot y / H)]$$

und für den Trichter

$$\sigma_w = \gamma \cdot D \frac{F \cdot C}{2 \tan \eta} \left\{ \frac{1 - 2 \tan \vartheta \cdot y / H}{2(L-1) \cdot \tan \vartheta} [1 - (1 - 2 \tan \vartheta \cdot y / H)^{L-1}] + (\sigma_y)_H \cdot (1 - 2 \tan \vartheta \cdot y / H)^L \right\}$$

Darin sind die Beiwerte F und L wiederum in Abhängigkeit von φ , η und ϑ zu bestimmen. Es ist $F = 0,4427$ und $L = 3,2280$. Die berechneten Randspannungen sind im Bild 7.2, Kurve W, aufgetragen.

(3) ENSTADT

Die Darstellung dieses Rechenverfahrens findet sich in [9]. Unter der Voraussetzung, daß der Spannungszustand an der Behälterwand die Mohr-Coulombsche Grenzbedingung und die Kräfte- randbedingung der Wandreibung erfüllt, läßt sich der Winkel β bestimmen, den die größere Hauptspannung mit der Wandnormalen einschließt:

$$\beta = \frac{1}{2} [\eta + \sin^{-1}(\sin \eta / \sin \varphi)]$$

Hieraus ergeben sich zwei Werte für β , jeweils einer für den aktiven und passiven Spannungszustand. Im vorliegenden Fall ergibt sich $\beta_a = 80^\circ$ und $\beta_p = 32^\circ$.

Aus den Hauptspannungsrichtungen ergibt sich auch das Verhältnis der Horizontal- zur Vertikalspannung an der Wand

$$K = (\sigma_x)_w / (\sigma_y)_w:$$

$$K = \frac{1 + \sin \varphi \cdot \cos 2\beta}{1 - \sin \varphi \cdot \cos 2\beta}$$

Bei Annahme des aktiven Spannungszustands ist $K = 0,31$. Dieser Wert wird für die Ermittlung der Randspannung σ_w im Schacht nach der Janssengleichung (7.1) genommen.

Für den hydrostatischen Druck $\sigma = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$ im Trichter erhält ENSTADT mit einer Gleichgewichtsbetrachtung an kreisförmigen Ausschnitten folgende Lösung:

$$\sigma(R) = \frac{\gamma \cdot \gamma}{X-1} \cdot R + \left(\sigma(R_0) - \frac{\gamma \cdot \gamma}{X-1} \cdot R_0 \right) \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^X$$

Die Beiwerte X, Y werden in Abhängigkeit von φ , η und ϑ bestimmt und ergeben sich hier für den passiven Spannungszustand zu $X = 4,9577$ und $Y = 2,6600$.

$\sigma(R_0)$ ist der hydrostatische Druck an der Oberkante des Trichters und ergibt sich aus den Janssengleichungen des Schachtes. Es zeigt sich, daß die Übergangsbedingung hinsichtlich σ nur in der Ecke zwischen Trichter und vertikaler Wand, aber nicht mehr im Inneren erfüllt werden kann.

Unter den bereits genannten Voraussetzungen ergeben sich die Randspannungen im Trichter durch

$$\sigma_w = \sigma \cdot (1 + \sin \varphi \cdot \cos 2\beta_p)$$

Die berechneten Randspannungen sind im Bild 7.2, Kurve E, aufgetragen.

Zu Bild 7.2 sind folgende Bemerkungen zu machen:

- Die FE-Methode liefert wegen der stetigen Geschwindigkeitsansätze auch stetige Spannungsfelder¹⁾. Der Sprung in den nach der FE-Methode berechneten Randspannungen in der Ecke zwischen Trichter und vertikaler Wand ergibt sich bei unverändertem Spannungstensor aus der veränderten Orientierung der Bezugsebene für die Randspannung. Demgegenüber haben die übrigen Spannungsverläufe an dieser Stelle echte Diskontinuitäten.

¹⁾ Dies gilt zunächst nicht für lineare Geschwindigkeitsansätze, jedoch lassen sich dann über die Spannungsknotenwerte stetige Spannungsfelder konstruieren.

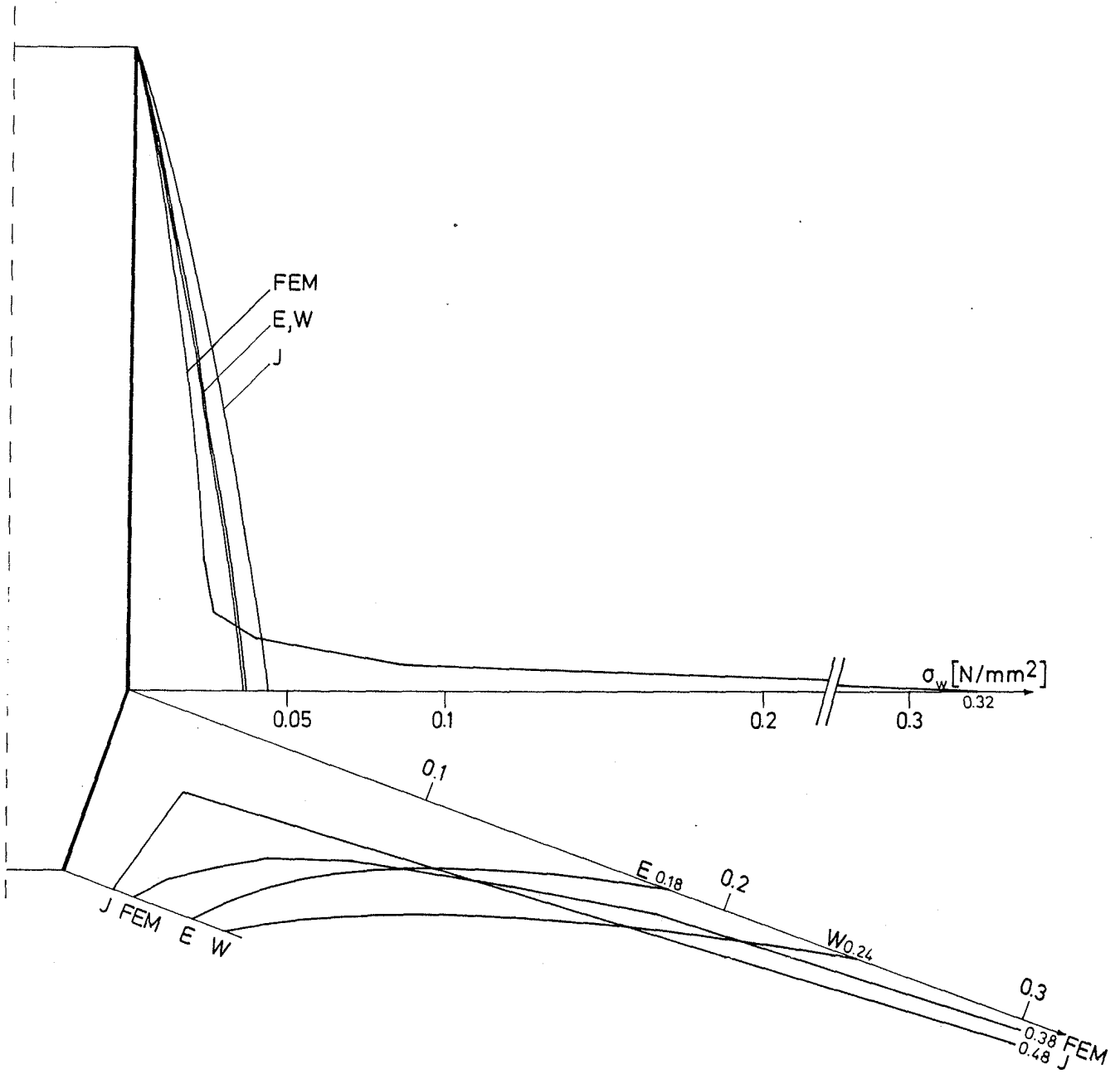


Bild 7.2: Randnormalspannungen σ_w nach verschiedenen Rechenverfahren

- Um eine bessere Vergleichbarkeit zwischen den verschiedenen Verfahren zu schaffen, kann man die Resultierende aus den Randnormalspannungen σ_w bilden. Dies wird für die vertikale Wand ($\rightarrow P_{w1}$) und die Trichterwand ($\rightarrow P_{w2}$), sowie für die obere Hälfte der Trichterwand ($\rightarrow P_{w3}$) getrennt durchgeführt. Nimmt man das Füllgutgewicht von $V_y = 774$ [kN/lfdm Behältertiefe] als Bezugswert, so ergibt sich nach den verschiedenen Verfahren:

	JENIKE	WALTERS	ENSTADT	FE-Methode
P_{w1} / V_y	0,32	0,26	0,26	0,32
P_{w2} / V_y	0,44	0,51	0,36	0,40
P_{w3} / V_y	0,40	0,34	0,23	0,30

Für den Bereich des Trichters zeigen sich erhebliche Unterschiede. Die Resultierende des oberen Trichterbereiches unterscheiden sich bei den Verfahren von JENIKE und ENSTADT um den Faktor 1,7, während die entsprechenden Werte nach dem Verfahren von WALTERS und der FE-Methode etwa in der Mitte dazwischenliegen.

- Aus den gesamten Randspannungen ergibt sich eine vertikale Resultierende P_y . Nimmt man wiederum $V_y = 774$ [kN/lfdm Behältertiefe] als Bezugswert, so ergibt sich

	JENIKE	WALTERS	ENSTADT	FE-Methode
P_y / V_y	0,86	0,94	0,73	0,86

Die Verfahren von JENIKE, WALTERS und ENSTADT vernachlässigen Trägheitskräfte, und es sollte sich dann $P_y / V_y = 1$ ergeben, da das gesamte Füllgutgewicht über die Randspannungen getragen werden muß. Die Differenzen erklären sich wie folgt:

Bei JENIKE ist P_Y stark von der Annahme über die Breite der dreieckförmigen Zusatzspannung am oberen Trichter- rand abhängig. Eine Erhöhung von $0,3 D$ auf $0,4 D$ führt bereits auf $P_Y/V_Y > 1$. WALTERS setzt bei seiner Theorie einen Trichter mit vollständiger Spitze voraus, von der im vorliegenden Beispiel die untere Hälfte abgeschnitten ist. So hätte der abgeschnittene Teil noch einen nennenswerten Anteil der auf den Trichter wirkenden Auflasten mitzutragen, und dies bleibt hier unberücksichtigt. In der Theorie von ENSTADT sind, wie bereits in Abschnitt 2 erläutert wurde, die Gleichgewichtsbedingungen zwischen dem Trichter und dem Schacht nicht erfüllt und entsprechend ist auch $P_Y \neq V_Y$. Bei der Anwendung der FE-Methode sind die Gleichgewichtsbedingungen im globalen Sinne immer erfüllt. Da hier bei der Anwendung der FE-Methode die Massenträgheit des Schüttgutes berücksichtigt wurde, wird auch ein Teil des Schüttgutgewichts durch Trägheitskräfte getragen. Dies erklärt, daß bei der FE-Methode $P_Y < V_Y$ ist.

7.2 Ein Vergleich mit experimentellen Untersuchungen

Experimentelle Untersuchungen wurden überwiegend unter Laborbedingungen an Modellsilos durchgeführt. Trotzdem ergibt sich bei den Ergebnissen verschiedener Untersuchungen häufig kein einheitliches Bild, hin und wieder treten sogar Widersprüche auf. Selbst die Reproduzierung von Versuchsergebnissen unter unveränderten Bedingungen bereitet Probleme. Darüberhinaus ist fraglich, ob die Verhältnisse an Modellsilos unmittelbar auf Großsilos übertragen werden können, man vergleiche hierzu CRAIG/WRIGHT [36], NIELSEN/ASKEGAARD [37] und JOHANSON [38]. Unter diesen Gesichtspunkten geschieht der Vergleich der Rechenergebnisse mit experimentellen Untersuchungen auf qualitativer Ebene.

Hinsichtlich des Geschwindigkeitsfeldes lassen sich die wesentlichen Ergebnisse des numerischen Rechenverfahrens wie folgt zusammenfassen:

- Im Schacht bewegt sich das Füllgut weitgehend wie ein starrer Körper.
- In einem Übergangsbereich zwischen dem Trichter und dem Schacht beginnt eine Beschleunigung des Füllgutes, die bis zum Austritt aus dem Behälter andauert.
- Im Trichter bewegt sich das Füllgut auf radialen Strahlen.
- Im Trichter tritt eine Auflockerung des Füllguts ein.

Diese Ergebnisse werden, soweit es Massenflußsilos betrifft, im wesentlichen durch experimentelle Untersuchungen bestätigt.

BLAIR-FISH/BRANSBY [39] plazieren im Schüttgut während des Füllens von Modellsilos sogenannte "Marken" in vertikalen Ebenen. Die Bewegung der Marken, und damit auch des Schüttguts, während des Entleerens wird durch Röntgenaufnahmen des Behälters festgehalten. Neben der Position der Marken läßt sich auf den Röntgenaufnahmen grob die Lagerungsdichte des Schüttguts feststellen, da aufgelockerte Bereiche gegenüber den Röntgenstrahlen eine erhöhte Durchlässigkeit aufweisen. Mit Beginn des Entleerens wird eine Auflockerung des Füllguts direkt oberhalb der Auslaßöffnung festgestellt, die sich im weiteren nach oben ausdehnt. Ausgehend von der Ecke zwischen Trichter und vertikalen Wänden entstehen zusätzlich schmale Bänder aufgelockerter Zonen. Es handelt sich offensichtlich um Dilatanzerscheinungen infolge hoher Schubbeanspruchung. Diese Bänder verschmelzen dann mit dem Auflocke-

rungsbereich, der von der Öffnung ausgeht und schließlich den gesamten Trichter umfaßt. Im Schacht zeigen alle Marken die gleiche Bewegung. Das Füllgut gleitet dort entlang den Wänden wie ein starrer Körper abwärts. Im Trichter bewegen sich die Marken entlang radialer Strahlen. Aussagen über die Größe der Geschwindigkeiten liegen nicht vor.

KOTCHANOVA [40] untersucht Fließgeschwindigkeiten in Modellsilos mit flachen Böden. Das Füllgut wird während des Füllens mit optischen Marken durchsetzt, deren Bewegung entlang einer durchsichtigen Behälterwand während des Entleerens über Filmaufnahmen festgehalten wird. Dabei werden die Bedingungen des ebenen Verformungszustandes simuliert. Eine schematische Darstellung der Filmaufnahmen zeigt Bild 7.3a.

Danach können 4 Bereiche unterschieden werden:

- eine Zone I gleichförmiger Bewegung des Füllguts,
- eine Übergangszone II mit beginnender Beschleunigung und Relativverformung des Füllguts,
- eine Zone III hoher Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsgradienten,
- eine Zone IV ruhenden Schüttguts, das einen inneren Trichter bildet.

Das Bild 7.3b zeigt die in den Versuchen ermittelten Geschwindigkeitsprofile in vertikalen und horizontalen Schritten. Man vergleiche dazu die berechneten Geschwindigkeitsprofile in den Bildern 6.4 und 6.5.

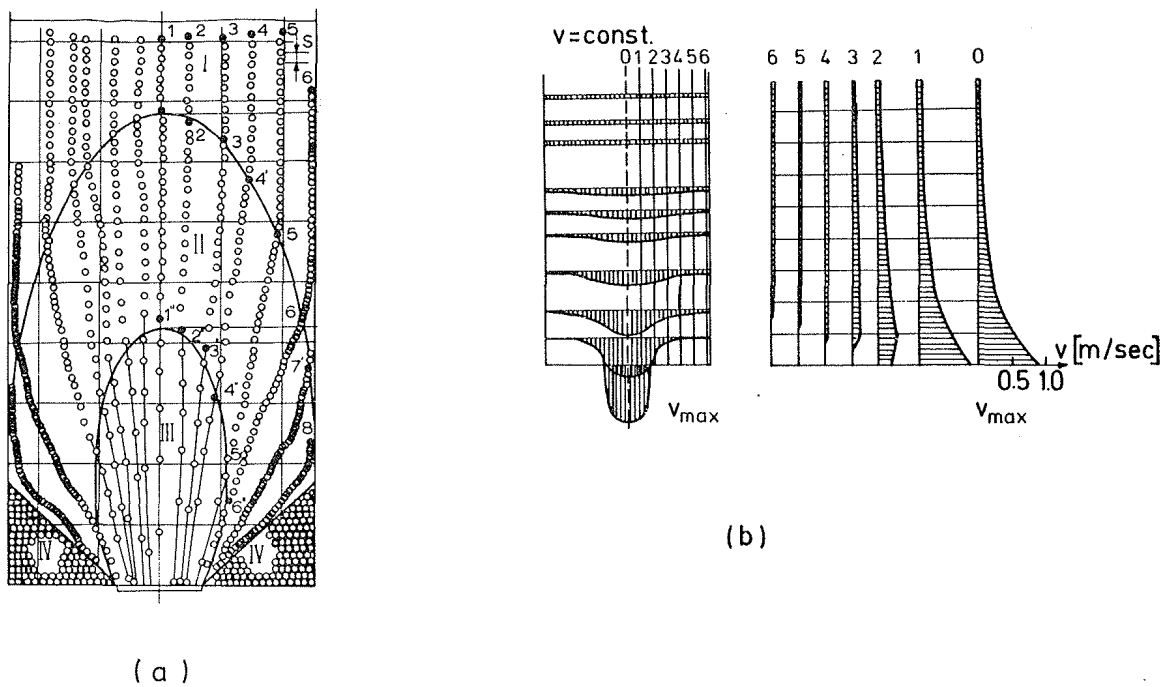


Bild 7.3: Fließgeschwindigkeiten während des Entleerens nach KOTCHANOVA [40]

(a) Trajektorien der Schüttgutpartikel

(b) Geschwindigkeitsprofile

Eine ähnliche Methode verwenden LEVINSON/SHMUTTER/RESNICK [41], wobei die Bewegung der optischen Marken bzw. des Schüttguts an der durchsichtigen Behälterwand mit einer Fotokamera jeweils alle 0,3 sec aufgenommen wird. Grundsätzlich ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie bereits bei KOTCHANOVA beschrieben. Darüberhinaus wird festgestellt, daß nach einer kurzen Anlaufphase, deren Dauer etwa im Bereich einer Sekunde liegt, ein quasistationärer Fließzustand entsteht. Nimmt man zur Bestimmung der Fließgeschwindigkeit einen Zeitraum von mehreren Sekunden an, so ist der Fließzustand stationär. Dagegen zeigen sich beim Zugrundelegen des kürzeren Zeitraums von 0,3 sec veränderliche Fließgeschwindigkeiten.

Sogenannte Radiosonden werden von PERRY/ROTHWELL/WOODFIN [42], [43] verwendet. Es handelt sich hierbei um kleine Sender (Abmessungen von ca. 1 - 2 cm) von Funksignalen, die beim Füllen im Schüttgut eingesetzt werden. Die Lage der Radiosonde während des Entleerens wird indirekt aus der Intensität der Funksignale bestimmt, die gleichzeitig von mehreren außerhalb des Modellsilos angeordneten Empfängern aufgenommen werden. Da offensichtlich davon ausgegangen werden kann, daß sich die Sonde weitgehend wie das sie umgebende Schüttgut bewegt (auf eine Darstellung der Gründe wird hier verzichtet), ist damit auch die Bewegung des Schüttguts bestimmt.

Dies gilt wegen der Trägheit der Radiosonde und nicht exakten Ortungsmöglichkeiten nur eingeschränkt für kleine und schnelle Schwankungen der Fließgeschwindigkeit. Die Ergebnisse zeigen ein ähnliches Bild, wie es bereits oben beschrieben wurde. Im vertikalen Behälterteil werden räumlich und zeitlich konstante Fließgeschwindigkeiten gemessen. Im Trichterbereich nimmt die Geschwindigkeit in Richtung auf die Auslaßöffnung hin zu, wobei die Beschleunigung in der Behälterachse größer als am Rande ist. Eine quantitative Auswertung der Meßergebnisse für einen Trichter von 70° Neigung gegen die Horizontale ist im Bild 7.4 dargestellt. Das Bild 7.4a zeigt Kurven gleicher Fließgeschwindigkeiten und Bild 7.4b Geschwindigkeitsprofile in radialen Schnitten. Dabei sind Unstetigkeiten des Geschwindigkeitsgradienten in der Nähe der Behälterachse erkennbar.

ROTHWELL und WOODFIN führen auch Untersuchungen über die Lagerungsdichte des Füllguts im Trichter während des Entleerens durch. Ohne nähere Erläuterungen teilen sie in [43] als Ergebnis mit, daß die Lagerungsdichte vom Rand zur Behälterachse hin und mit Annäherung an die Auslaßöffnung abnimmt.

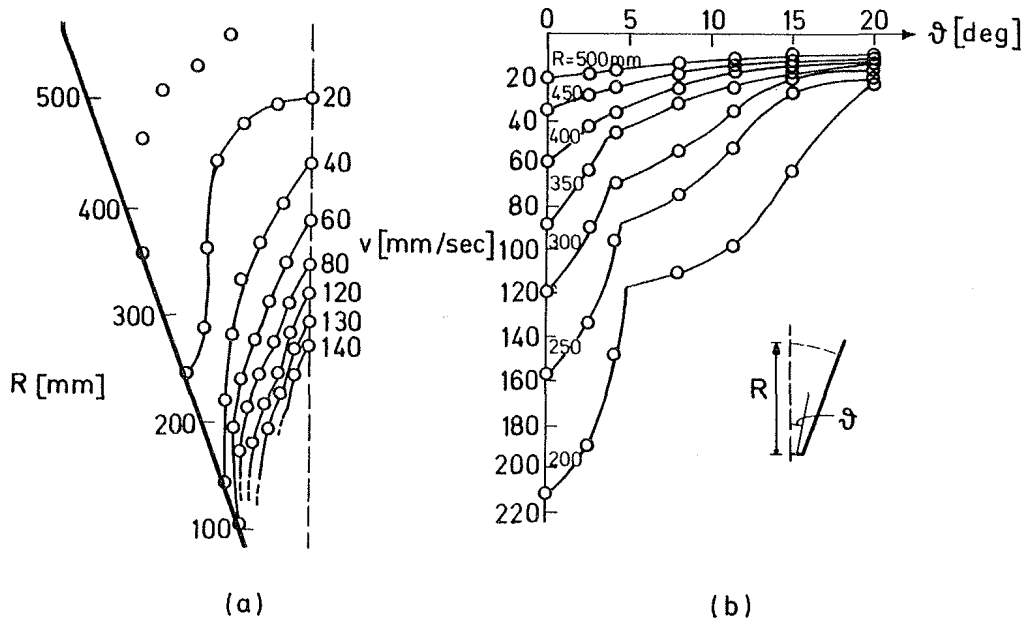


Bild 7.4: Fließgeschwindigkeiten während des Entleerens nach PERRY/ROTHWELL/WOODFIN [43]
 (a) Kurven gleicher Fließgeschwindigkeit v
 (b) Geschwindigkeitsprofile in radialen Schnitten

Neben den hier beschriebenen gibt es eine Vielzahl weiterer Untersuchungen über die Fließgeschwindigkeiten von Schüttgütern in Massenflusssilos während des Entleerens, die überwiegend ähnliche Ergebnisse ergeben und deshalb hier nicht dargestellt werden. Insgesamt decken sich die Rechenergebnisse, wie sie in Abschnitt 6.2 dargestellt sind, in qualitativer Hinsicht mit den experimentellen Untersuchungen. Vereinzelt zeigen sich Abweichungen, so bei der gerade dargestellten Diskontinuität des Geschwindigkeitsgradienten, und es bleiben offene Problemkreise, und zwar hinsichtlich der bei den numerischen Rechnungen festgestellten Geschwindigkeitsschwankungen im oberen Behälterbereich. Im weiteren sollen die Ergebnisse einiger experimenteller Untersuchungen

über die Spannungsverhältnisse in Modellsilos während des Entleerens dargestellt werden.

Ursprünglich wurde die gerade beschriebene Radiosonde von PERRY/JANGDA [44] für Druckmessungen verwendet. Dazu ist ein Druckaufnehmer an einer der flachen Seiten der zylinderförmigen Sonde eingebaut, der seine Meßwerte über Funksignale an einen Empfänger überträgt. Zur Messung von Vertikaldrücken wird die Sonde während des Füllens in vertikaler Lage und für Horizontaldrücke in horizontaler Lage angeordnet. Man geht davon aus, daß sich die Sonde während des Entleerens wie das sie umgebende Füllgut bewegt. Es erscheint jedoch fraglich, ob die vorgegebene Orientierung der Sondenlängsachse im Bereich von Geschwindigkeitsgradienten, wie sie im Trichter auftreten, beibehalten wird, so daß die Bestimmung der Druckrichtung unsicher ist. Dabei ist insbesondere die horizontale Lage instabiler als die vertikale Lage.

Das Bild 7.5 zeigt typische Meßergebnisse für die Vertikaldrücke. Auf der Abszisse ist die Zeit bis zum Austritt der Sonde aus dem Behälter aufgetragen. Die direkte Zuordnung der Drücke zu räumlichen Punkten ist nicht möglich, da die Sonde während des Entleerens nicht genau geortet werden kann.

Die Markierung I bezeichnet den Füllzustand bzw. den Beginn des Entleerens. Es zeigt sich, daß dort ein deutlicher Anstieg der Vertikaldrücke auftritt. Andererseits geben PERRY/JANGDA an, daß sich die statischen Drücke durch mechanisches Verdichten des Füllguts auf das Niveau der dynamischen Drücke heben lassen, die ihrerseits vom vorhergehenden Verdichtungszustand unabhängig sind. Hinsichtlich der dynamischen Drücke zeigt sich folgendes:

- Im Bereich nahe der Behälterachse nehmen die gemessenen Vertikaldrücke, ausgehend von einem zunächst annähernd

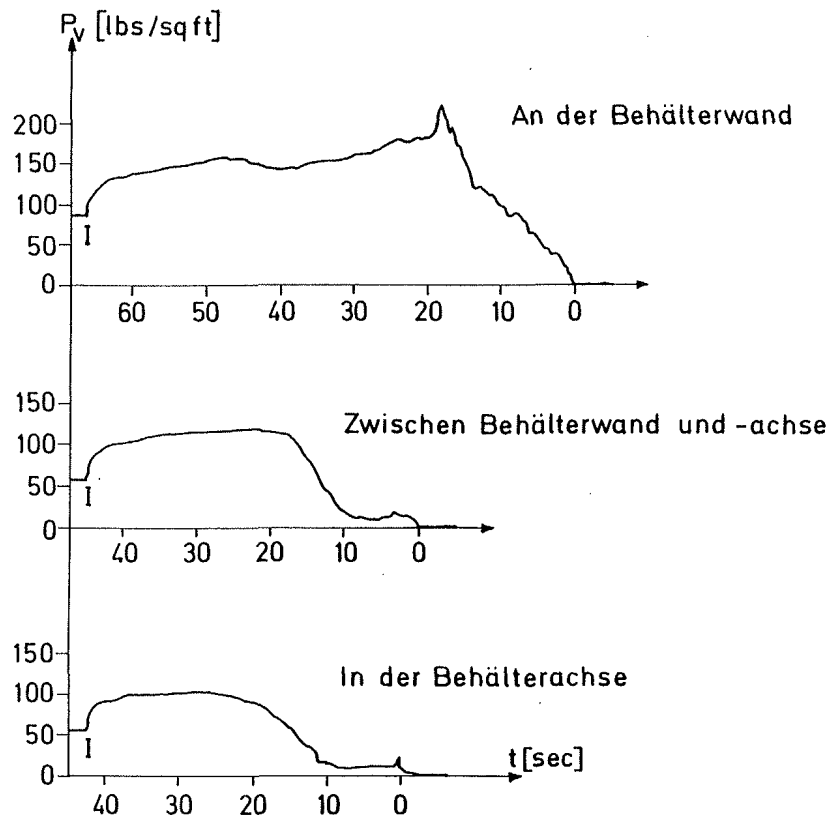


Bild 7.5: Vertikaldrücke p_v in Abhängigkeit von der Zeit t bis zum Austritt der Sonde nach PERRY/JANGDA [44]

konstanten Verlauf, nach einer gewissen Zeit relativ schnell ab, um dann bis zum Austritt auf geringem Niveau zu verbleiben. Zum Vergleich ist in Bild 7.6 die mit dem numerischen Rechenverfahren für den Standardfall ermittelte Vertikalspannung σ_y über der Behälterhöhe aufgetragen.

- In der Nähe der Behälterwand ergibt sich aus den Messungen zunächst wieder ein annähernd gleichmäßiger Verlauf mit anschließender Druckspitze und danach ein fast gleichmäßiger Abfall. Die berechneten Normalspannungen des Standardfalls nahe der Behälterwand zeigt Bild 7.7.

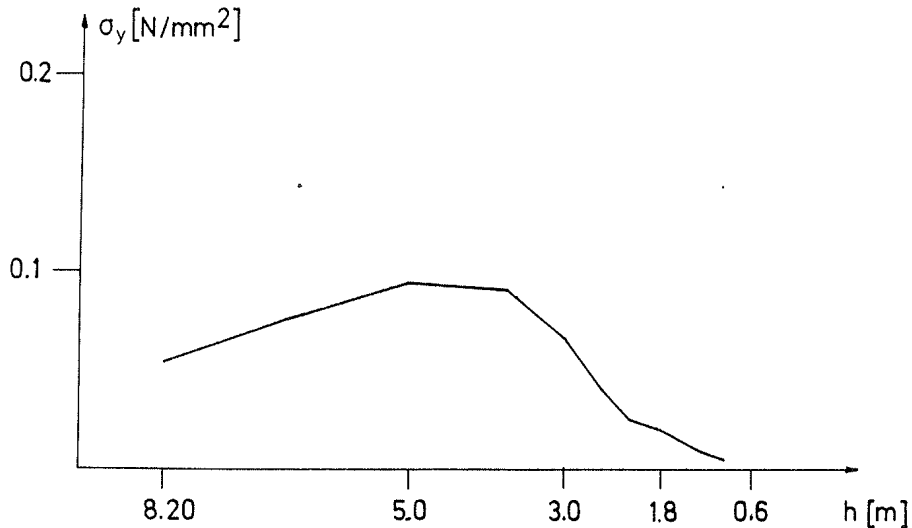


Bild 7.6: Vertikale Normalspannung σ_y in der Behälterachse in Abhängigkeit von der Höhe h über der Auslaßöffnung nach FEM-Rechnung für $t = 1,0$ sec

- Die Zeit zwischen dem Beginn des Entleerens und dem Austritt der Sonde aus dem Behälter ist an der Wand größer als in der Achse. Dies entspricht den unterschiedlichen Fließgeschwindigkeiten.

Das Bild 7.8 zeigt die Meßergebnisse für die Horizontaldrücke. Wegen der bereits erwähnten Instabilität der horizontalen Lage der Radiosonde und der damit verbundenen Unsicherheit hinsichtlich der Richtung des Druckes sind diese Ergebnisse vorsichtig zu interpretieren. Festzuhalten sind deutliche Druckerhöhungen an einer Stelle, die etwa dem Übergang in den Trichter entsprechen dürfte.

Die Radiosonden lassen sich auch für Druckmessungen an der Behälterwand verwenden, indem man sie in Bohrungen in der Wand einfügt. Die Bilder 7.9a - c zeigen die von PERRY/

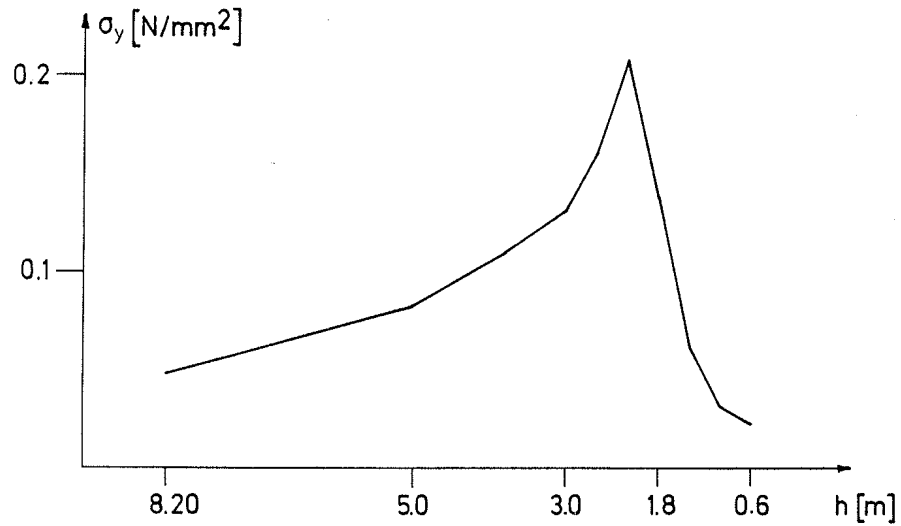


Bild 7.7: Vertikale Normalspannung σ_y an der Behälterwand in Abhängigkeit von der Höhe h über der Auslaßöffnung nach FEM-Rechnung für $t = 1,0$ sec

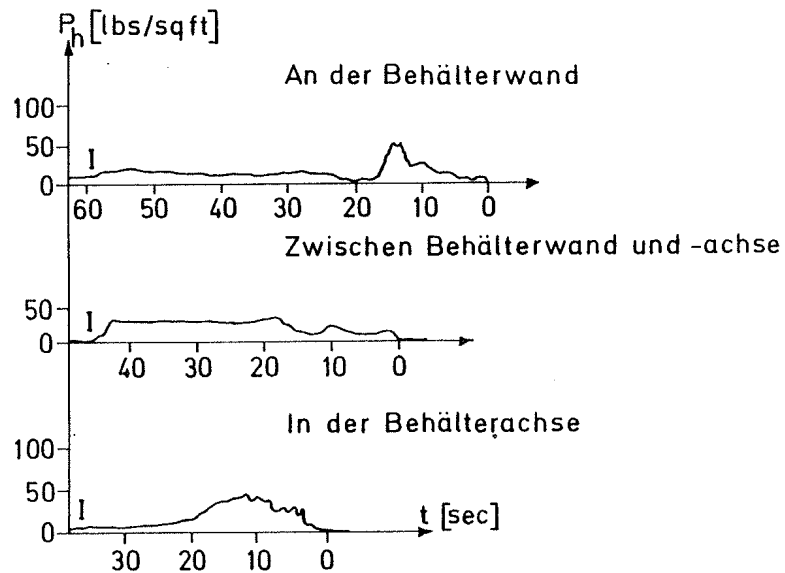


Bild 7.8: Horizontaldrücke p_h in Abhängigkeit von der Zeit t bis zum Austritt der Sonde nach PERRY/JANGDA

JANGDA gemessenen Wanddrücke für zwei runde Modellsilos mit kegelförmigen Trichtern verschiedener Neigung und für einen rechteckigen Modell-silo mit keilförmigem Trichter. Die dargestellten Kurven für das Entleeren sind das Mittel aus Meßwerten der ersten 12 Sekunden des Entleerens, wobei in diesem Zeitraum unregelmäßige Schwankungen in einer Größe von ca. 20 % auftreten.

Als Alternative zur führungslosen Sonde mit drahtloser Meßwertübertragung verwenden EISENHART ROTHE/NATAU [45] die starr geführte Sonde mit Druckaufnehmer. Sie wird an einem vertikalen Rohr befestigt, welches oberhalb der Einfüllöffnung des Modellsilos geführt und vertikal beweglich ist, so daß die Sonde während des Entleerens von dem sie umgebenden Schüttgut "mitgenommen" wird. Das Rohr dient auch zur Aufnahme der Meßkabel und zur Weganzeige. Somit ist eine direkte Zuordnung der Drücke zu räumlichen Punkten im Behälter möglich. Durch die Befestigung der Sonde an der Führung liegt außerdem, im Gegensatz zur führungslosen Sonde, die vorgegebene Meßrichtung fest. Das Bild 7.10 zeigt die gemessenen Vertikal- und Horizontaldrücke über der Behältertiefe. Zum qualitativen Vergleich sind die entsprechenden Werte aus den Rechenergebnissen in Bild 7.11 dargestellt.

Insgesamt stimmen die Ergebnisse des numerischen Rechenverfahrens mit den Meßergebnissen, soweit solche bezüglich der Spannungen innerhalb des Schüttguts vorliegen, in qualitativer Hinsicht überein. Experimentell ungeklärt bleiben die bei den Rechnungen festgestellten Schwingungen der Spannungswerte im oberen Behälterbereich. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die im Standardfall berechnete Schwingdauer bei etwa 0,3 sec liegt und bei Rechnungen mit Behältern in der Größenordnung der Modellsilos noch wesentlich kleiner ausfällt. Es bleibt offen, ob die verwendeten Meßverfahren bzw. Aufzeichnungsmethoden zur Aufnahme solcher Spannungsschwingungen geeignet sind.

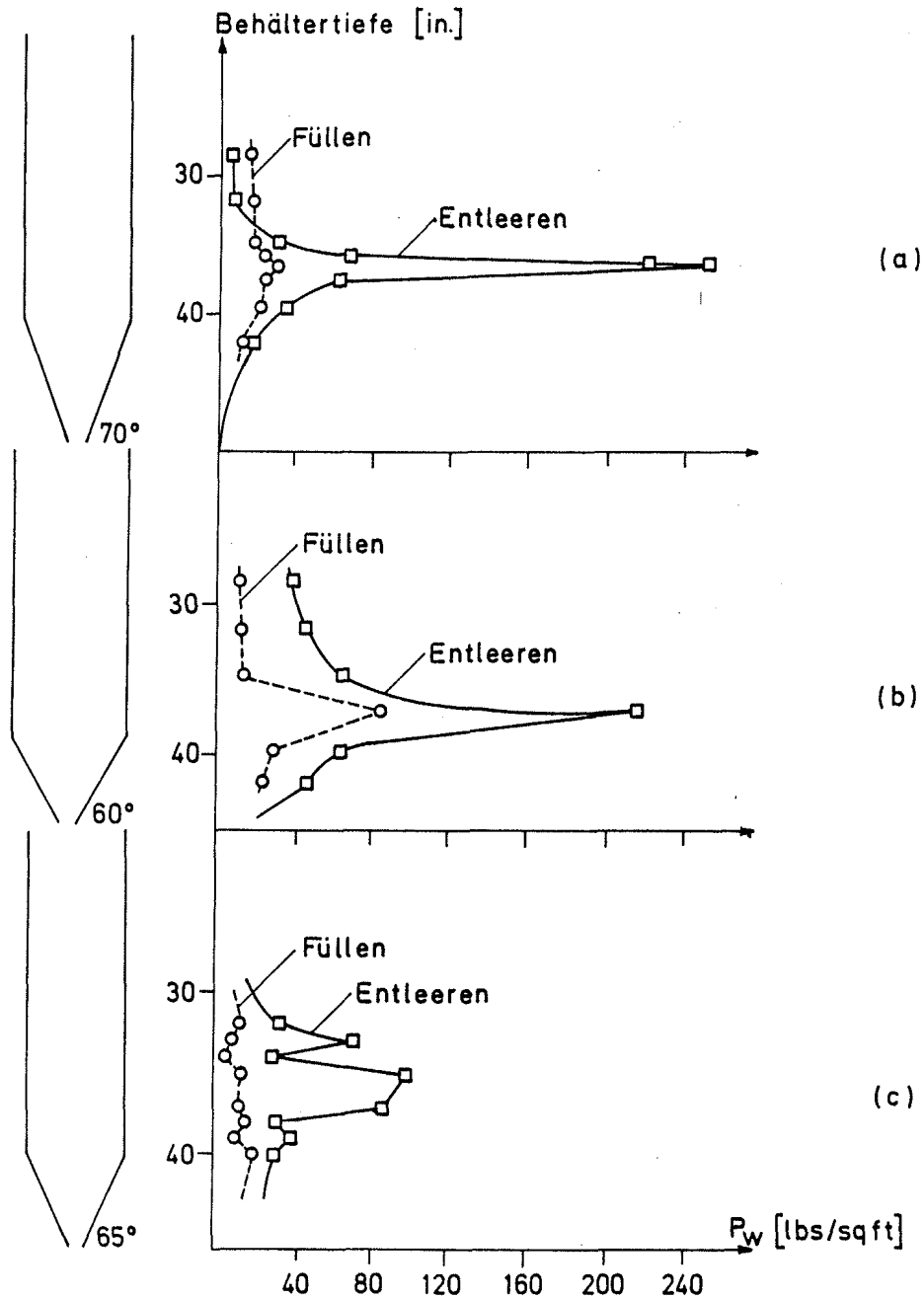


Bild 7.9: Wanddrücke p_w nach PERRY/JANGDA [44]

- (a) Behälter mit kegelförmigem Trichter, Neigung 70°
- (b) Behälter mit kegelförmigem Trichter, Neigung 60°
- (c) Behälter mit keilförmigem Trichter, Neigung 65°

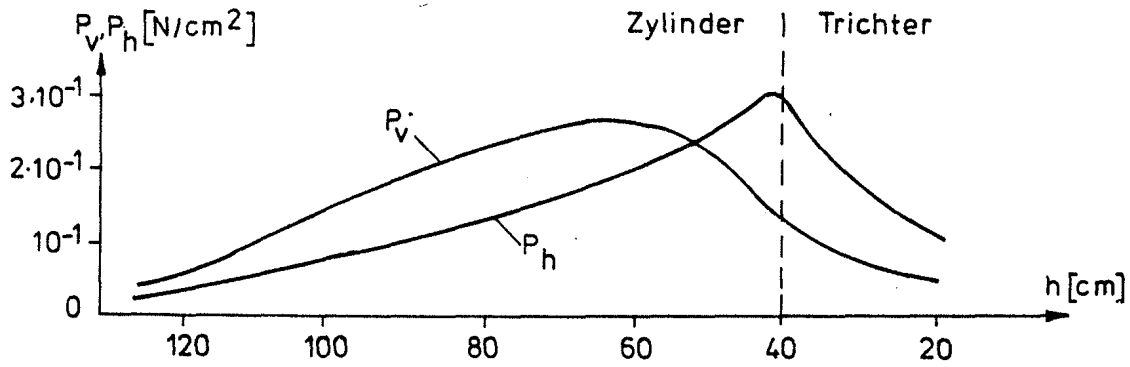


Bild 7.10: Horizontaldrücke p_h und Vertikaldrücke p_v in der Behälterachse über der Behälterhöhe h nach EISENHART ROTHE/NATAU [45]

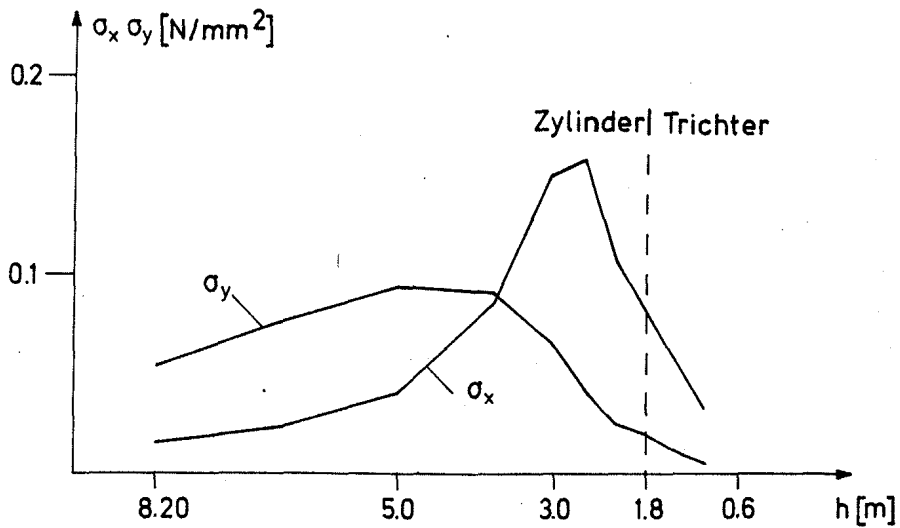


Bild 7.11: Horizontale und vertikale Normalspannungen σ_x und σ_y über der Behälterhöhe h nach FEM-Rechnung für $t = 1,0$ sec

Neben den oben beschriebenen Versuchen und denen von LAKSHMAN RAO/VENKATESWARLU [46], die wie PERRY/JANGDA eine Radiosonde verwenden, sind dem Verfasser keine weiteren experimentellen Untersuchungen über den inneren Spannungszustand in Schüttgütern während des Entleerens bekannt. Eine größere Zahl von Arbeiten befaßt sich mit den Spannungen an den Silowänden, hier genügen einfachere Meßmethoden und die versuchstechnischen Probleme sind geringer. Dabei sind eine Vielzahl verschiedener Schüttgüter und Silogeometrien mit unterschiedlichen Methoden untersucht worden. Es zeigt sich bis auf die Beobachtung, daß bei Massenflußsilos mit Beginn des Entleerens im Übergangsbereich zwischen Trichtern und vertikalen Behälterwänden Druck erhöhungen stattfinden, kein gemeinsames Bild.

So stellen z.B. BLAIR-FISH/BRANSBY [39] sehr unregelmäßige Druckverläufe über die Zeit mit Schwankungen um den Faktor 2 fest. LAKSHMAN RAO/VENKATESWARLU [47] und PERRY/JANGDA [44] messen ebenfalls Schwankungen der Drücke, die jedoch wesentlich geringer ausfallen, und deren Perioden um Größenordnungen kleiner sind. Neben dem zeitlichen Ablauf ist die Frage nach der Größe der Randspannungen während des Entleerens entscheidend, wobei man diese wegen der besseren Vergleichbarkeit auf die entsprechenden Werte im Füllzustand bezieht. Hinsichtlich der maximalen Werte reichen die Angaben von nur geringfügigen Erhöhungen, z.B. um einen Faktor von ca. 1,3 bei MOTZKUS [2], bis zu immensen Steigerungen, z.B. um einen Faktor 10 - 15 bei PERRY/JANGDA [44], jeweils an Silos mit Trichtern einer Neigung von 70° gegen die Horizontale und Sand als Füllmaterial gemessen. Dabei zeigt der Verlauf über der Trichterhöhe bei MOTZKUS eine fast geradlinige Form, während bei PERRY/JANGDA stark gekrümmte Kurven mit ausgeprägten Spitzen auftreten. Wegen der offensichtlichen Unsicherheiten bei der experimentellen Bestimmung von Spannungen an Silowänden wird auf einen Vergleich mit den Ergebnissen des Rechenverfahrens hier verzichtet.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Bisher bestehen keine befriedigenden Verfahren zur Berechnung der Spannungen in Schüttgütern beim Entleeren von Silos. Die Methoden von JENIKE, WALTERS und ENSTADT basieren jeweils auf einer Reihe von Annahmen und Vereinfachungen, die nur beschränkt zutreffen, und liefern bei der Anwendung unterschiedliche Ergebnisse.

Im Rahmen dieser Arbeit wird, aufbauend auf der Methode der Finiten Elemente, ein numerisches Rechenverfahren entwickelt, das sich durch folgende Punkte auszeichnet:

- Es bietet eine vollständige Einsicht in das mechanische Verhalten des Schüttguts während des Entleerens. Es können damit Fließgeschwindigkeiten und Spannungen für jeden Zeitpunkt und jede Stelle im Schüttgut berechnet werden.
- Abgesehen von der Nichtberücksichtigung thermischer Einflüsse und der Annahme einer konstanten Lagerungsdichte entfallen alle Vereinfachungen. Insbesondere sind die Massenträgheit des Schüttgutes und die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. Damit können große und schnelle Verformungen des Schüttgutes erfaßt werden.
- Es bietet die Möglichkeit einer vielseitigen Anwendung. Grundsätzlich bestehen keine Beschränkungen hinsichtlich der Behältergeometrie und der Anfangs- und Randbedingungen. Das Stoffverhalten des Schüttguts kann in differenzierter Form, und nicht nur pauschal über den Winkel der inneren Reibung, erfaßt werden.

Zunächst wird ein Stoffgesetz für ein granulares, kohäsionsloses Material formuliert, das sich aus einem elasto-plastischen und einem viskosen Anteil zusammensetzt. Der elasto-

plastische Anteil wird in Anlehnung an das Stoffgesetz von LADE [14] angenommen, das in dieser oder ähnlicher Form in einer Reihe von Anwendungen gute Ergebnisse gezeigt hat. Der viskose Anteil wird in Analogie zum Stoffgesetz inkompressibler Newtonscher Flüssigkeiten gewählt. Neben dem Stoffgesetz läßt sich mit den Bedingungen des dynamischen Gleichgewichts und den Geschwindigkeits-Verzerrungs-Beziehungen ein vollständiger Satz partieller Differentialgleichungen formulieren, wobei ein Eulersches Bezugssystem zugrundegelegt wird. Zur näherungsweise Lösung dieser Gleichungen finden numerische Verfahren Verwendung, die Methode der Finiten Elemente zur räumlichen Diskretisierung und ein Differenzenverfahren zur zeitlichen Diskretisierung. Die Diskretisierung führt auf nichtlineare algebraische Gleichungssysteme, die iterativ in Anlehnung an die Methode von Newton-Raphson gelöst werden.

Sofern die Bedingungen des Massenflusses gegeben sind, zeigen die Ergebnisse in allen berechneten Fällen folgende charakteristische Eigenschaften:

- Das Feld der Fließgeschwindigkeiten des Schüttguts weist zwei unterschiedliche Bereiche aus. Zwischen den vertikalen Silowänden bewegt sich das Schüttgut, von geringen elastischen Verformungen abgesehen, wie ein starrer Körper. Dagegen treten in Trichtern horizontal und vertikal große Fließgeschwindigkeitsgradienten auf, die in Teilbereichen mit einer starken Auflockerung des Schüttgutes verbunden sind.

- Mit Beginn des Entleerens geht im Trichter zunächst die vertikale Orientierung der größeren Hauptspannung über in eine horizontale Orientierung. Dann nimmt das Spannungsniveau direkt oberhalb der Auslaßöffnung ab und im Übergangsbereich zwischen Trichter und vertikalen Wänden zu. Es bildet sich dort ein Spannungsgewölbe mit hohen Spannungsspitzen in den Eckbereichen.

- Die Randspannungen entwickeln sich entsprechend den inneren Spannungen. Mit Beginn des Entleerens nehmen die Spannungen an der Trichterwand zunächst gleichmäßig zu, um dann im unteren Trichterbereich abzunehmen und im oberen Trichterbereich sehr stark zuzunehmen. Im Übergang zwischen Trichter und vertikalen Wänden tritt eine ausgeprägte Spannungsspitze auf.

Es wird gezeigt, daß sich die Diskretisierungsparameter des Rechenverfahrens, das sind im wesentlichen die Geometrie des FE-Netzes und die Zeitschrittlänge beim Differenzenverfahren, von Ausnahmen abgesehen, nur gering auf die Rechenergebnisse auswirken. Im weiteren wird der Einfluß der Viskositätszahl untersucht, die als Stoffparameter mit zunächst offenem Wert im viskosen Anteil des Stoffgesetzes auftritt. Es stellt sich heraus, daß die Viskositätszahl großen Einfluß auf die Größe der Fließgeschwindigkeiten nimmt, während der Einfluß auf die Spannungen gering ist. Ihr Wert wird anhand eines Vergleiches von berechneten zu empirisch ermittelten Fließgeschwindigkeiten abgeschätzt. Schließlich wird das numerische Rechenverfahren auf symmetrische Silos mit verschiedener Größe, sowie mit verschiedenen Trichterneigungen und Wandreibungsbeiwerten angewendet. Hierbei zeigt sich, daß der gewählte Ansatz für den viskosen Anteil des Stoffgesetzes einer weiteren Untersuchung bedarf, da Widersprüche zu gewissen, empirisch ermittelten Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich der Fließgeschwindigkeiten auftreten. Davon

abgesehen zeigen die Rechenergebnisse mit experimentell gewonnenen Ergebnissen, sofern letzteren ein einheitliches Bild abgewonnen werden kann, weitgehende Übereinstimmung.

Als Gegenstand weiterer Forschungen scheinen folgende Punkte relevant:

- Der elasto-plastische Anteil des Stoffgesetzes ist formal sehr aufwendig. Im Hinblick auf kürzere Rechenzeiten sind Vereinfachungen anzustreben. Der viskose Anteil bedarf aus den dargestellten Gründen weiterer Untersuchungen. Darüberhinaus sollten alternative Formen von Stoffgesetzen für granulare Schüttgüter verwendet werden. Das hier entwickelte Rechenverfahren ermöglicht dies ohne grundsätzliche Schwierigkeiten.
- Für die gebräuchlichen Schüttgüter sind die Parameter des verwendeten Stoffgesetzes zu bestimmen.
- Sofern anwendbare Stoffgesetze vorliegen, die den Einfluß der Lagerungsdichte berücksichtigen und diese in irgendeiner Form als Variable enthalten, sollte die veränderliche Lagerungsdichte des Schüttgutes im numerischen Rechenverfahren berücksichtigt werden.
- Die Anwendung der Methode der Finiten Elemente mit Verschiebungsansätzen erzwingt eine stetige Lösung für das Geschwindigkeitsfeld. Nun deuten einige Untersuchungen, z.B. von BLAIR-FISH/BRANSBY [39] oder DONG/CLEARY [48], auf das Auftreten sogenannter "slip lines" hin. Das sind Flächen im Schüttgut, an denen die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten unstetig sind. Die Frage, ob und wie solche "Unstetigkeiten" in einem Rechenmodell berücksichtigt werden sollen, bedarf einer Klärung.

- Der hier berechnete Zeitraum des Entleerens umfaßt 1 Sekunde, die für die Anwendung des Differenzenverfahrens in der Regel in 500 Zeitschritte aufgeteilt wird. In jedem Zeitschritt ist eine vollständige, nichtlineare FE-Rechnung durchzuführen. Die wünschenswerte Berechnung längerer Entleerungszeiträume verbot sich im Hinblick auf eine Begrenzung der Rechenzeit. Eine wesentliche Erweiterung läßt sich nur bei einer Vereinfachung des numerischen Rechenverfahrens und Einführung einer variablen Zeitschrittlänge erreichen. Hierzu sind weitere Untersuchungen erforderlich.

Und als eigentliches Ziel aller Bemühungen

- die Durchführung von Parameterstudien mit verschiedenen Silogeometrien (z.B. mit exzentrischen Auslaßöffnungen, Einbauten usw.) und Schüttgütern.

Anhang A

Schreibweise I für Tensoren

Die Komponenten der hier eingeführten Größen und Tensoren werden zur Vereinfachung in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Tensoren 1.- und 2.Stufe werden durch unterstrichene Kleinbuchstaben, Tensoren 4.Stufe durch unterstrichene Großbuchstaben symbolisiert.

Es sei a ein Tensor 1.Stufe mit den Komponenten a_j , $i = 1, 2, 3$, b und c Tensoren 2.Stufe mit den Komponenten b_{ij} und c_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, sowie A und B Tensoren 4.Stufe mit den Komponenten A_{ijrs} und B_{ijrs} , $i, j, r, s = 1, 2, 3$. Man kann hieraus verschiedene Produkte bilden. Die Ergebnisse sind wiederum Tensoren. Im einzelnen gelten folgende Regeln, wobei jeweils über gleiche Indices zu summieren ist:

<u>b</u> · <u>a</u>	hat die Komponenten	$b_{ij} \cdot a_j$	und ist ein Tensor	1. Stufe
<u>b</u> <u>c</u>	"	$b_{ij} \cdot c_{rs}$	"	4. "
<u>b</u> · <u>c</u>	"	$b_{ir} \cdot c_{rj}$	"	2. "
<u>b</u> : <u>c</u>	"	$b_{ij} \cdot c_{ij}$	"	0. " (Skalar)
<u>A</u> : <u>b</u>	"	$A_{ijrs} \cdot b_{rs}$	"	2. "
<u>b</u> : <u>A</u>	"	$b_{rs} \cdot A_{rsij}$	"	2. "
<u>A</u> : <u>B</u>	"	$A_{ijrs} \cdot B_{rskl}$	"	4. "

Gleiche Zusammenhänge gelten für alle Tensoren entsprechender Stufe. Neben den hier angegebenen lassen sich eine Reihe

weiterer Produkte bilden, die aber im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt werden. Bei Hintereinanderschaltung der Produkte gilt das Assoziativgesetz.

Neben der Produktbildung lassen sich durch die Bildung von Gradienten aus gegebenen Tensoren wiederum Tensoren ableiten. So ist $\nabla \underline{a}$ ein Tensor 2. Stufe, dessen Komponenten $a_{i,j}$ im kartesischen Koordinatensystem die partiellen Ableitungen von a_j nach den raumfesten Koordinaten x_j sind. Entsprechend ergibt $\nabla \underline{b}$ einen Tensor 3. Stufe mit den Komponenten $b_{ij,r}$. Im Zusammenhang mit den Tensoren 3. Stufe wird das folgende Tensorprodukt eingeführt:

$\nabla \underline{b} \cdot \underline{a}$ hat die Komponenten $b_{ij,r} \cdot a_r$ und ist ein Tensor 2. Stufe.

Anhang B

Schreibweise II für Tensoren

Zur Formulierung des numerischen Rechenverfahrens ist es zweckmäßig, die Komponenten von Tensoren in Vektoren oder Matrizen anzuordnen. Für ebene und rotationssymmetrische Fälle gelten dabei die im folgenden aufgeführten Regelungen:

Tensoren 1. Stufe werden als Vektoren geschrieben:

Geschwindigkeit $\underline{v} = (v_1, v_2)^T$

Volumenkraft $\underline{b}_v = (b_{v1}, b_{v2})^T$

Randspannung $\underline{b}_t = (b_{t1}, b_{t2})^T$

Tensoren 2. Stufe werden als Vektoren geschrieben:

Spannung $\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33})^T$

Verformungsrate $\underline{d} = (d_{11}, d_{22}, 2d_{12}, d_{33})^T$

Rotationsrate $\underline{w} = (w_{12})$

Gradienten, das sind Tensoren 2.- und 3.Stufe, werden als Matrizen geschrieben:

Geschwindigkeitsgradient $\nabla \underline{v} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{bmatrix}$

Spannungsgradient $\nabla \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1} & \sigma_{11,2} \\ \sigma_{22,1} & \sigma_{22,2} \\ \sigma_{12,1} & \sigma_{12,2} \\ \sigma_{33,1} & \sigma_{33,2} \end{bmatrix}$

Gradient der Verformungsrate

$$\underline{\nabla d} = \begin{bmatrix} d_{11,1} & d_{11,2} \\ d_{22,1} & d_{22,2} \\ d_{12,1} & d_{12,2} \\ d_{33,1} & d_{33,2} \end{bmatrix}$$

Tensoren 4. Stufe werden als Matrizen geschrieben:

Elastoplast. Stofftensor

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & H_{1112} & H_{1133} \\ H_{2211} & H_{2222} & H_{2212} & H_{2233} \\ H_{1211} & H_{1222} & H_{1212} & H_{1233} \\ H_{3311} & H_{3322} & H_{3312} & H_{3333} \end{bmatrix}$$

Viskoser Stofftensor

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G_{1111} & G_{1122} & G_{1112} & G_{1133} \\ G_{2211} & G_{2222} & G_{2212} & G_{2233} \\ G_{1211} & G_{1222} & G_{1212} & G_{1233} \\ G_{3311} & G_{3322} & G_{3312} & G_{3333} \end{bmatrix}$$

Das Produkt $\underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma}$ ist ein Tensor 2. Stufe mit den Komponenten $\sigma_{ir} \cdot w_{rj} - w_{ir} \cdot \sigma_{rj}$. Es wird als Produkt einer Matrix $\underline{\Omega\sigma}$ mit dem Vektor \underline{w} geschrieben, so daß sich als Ergebnis ein Vektor ergibt. Für den ebenen Fall degenerieren diese zu

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\Omega\sigma} \cdot \underline{w} = \begin{bmatrix} 2\sigma_{12} \\ -2\sigma_{12} \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} \end{bmatrix} \cdot (w_{12})$$

In gleicher Weise ergibt sich

$$\underline{d} \cdot \underline{w} - \underline{w} \cdot \underline{d} = \Omega \underline{d} \cdot \underline{w} = \begin{bmatrix} 2 d_{12} \\ -2 d_{12} \\ d_{22} - d_{11} \end{bmatrix} \cdot (w_{12})$$

Auf die so definierten Vektoren und Matrizen können die Rechenregeln der Matrizenalgebra angewendet werden. Die für den ebenen Fall getroffenen Regelungen lassen sich auf den dreidimensionalen Fall übertragen.

Anhang C

Die Rauminvarianz des elastoplastischen Stoffgesetzes

Im folgenden wird gezeigt, daß der elasto-plastische Anteil des Stoffgesetzes

$$\underline{\overset{\circ}{\sigma}}_{(s)} = \underline{H} : \underline{d} .$$

wie er in Abschnitt 4.4.2 abgeleitet wurde, die Transformationsregel nach Gl. (4.6) erfüllt und somit dem Prinzip der Rauminvarianz genügt. Dazu muß die Komponentenschreibweise benutzt werden. Das elasto-plastische Stoffgesetz lautet dann in seiner allgemeinen Form

$$\overset{\circ}{\sigma}_{(s)ij} = H_{ijrs} \cdot d_{rs} \tag{C 1}$$

Im weiteren wird häufiger die Orthogonalität des in Abschnitt 4.1 erklärten Transformationstensors \underline{q} ausgenutzt. Die Orthogonalitätsbedingung nach Gl. (4.2) lautet in Komponentenschreibweise:

$$q_{ri} \cdot q_{rj} = q_{ir} \cdot q_{jr} = \delta_{ij} \tag{C 2}$$

Zunächst werden die Variablen des Stoffgesetzes betrachtet. Der Anteil $\underline{\overset{\circ}{\sigma}}_s$ der Jaumannschen Spannungsrate, der Anteil $\underline{\sigma}_s$ des Cauchy Spannungstensors¹⁾ und die Verformungsrate \underline{d} sind objektiv. Bei einer starren Bewegung des Koordinatensystems transformieren sie sich nach Gl. (4.5):

$$\tilde{\overset{\circ}{\sigma}}_{ij} = q_{ri} \cdot \overset{\circ}{\sigma}_{rs} \cdot q_{sj}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = q_{ri} \cdot \sigma_{rs} \cdot q_{sj} \tag{C 3a - c}$$

$$\tilde{d}_{ij} = q_{ri} \cdot d_{rs} \cdot q_{sj}$$

¹⁾ Die unteren s-Indices bei $\underline{\overset{\circ}{\sigma}}_s$ und $\underline{\sigma}_s$ werden im folgenden weggelassen.

Die Anteile \underline{d}_e , \underline{d}_p und \underline{d}_k von \underline{d} transformieren sich ebenfalls nach Gl. (C3c). Weiterhin hat der elasto-plastische Stofftensor \underline{H} als Parameter die plastischen Arbeiten W_p und W_k . Die materielle Ableitung von W_p lautet

$$\dot{W}_p = \sigma_{ij} \cdot d_{(p)ij}$$

Im transformierten Koordinatensystem ist

$$\tilde{\dot{W}}_p = \tilde{\sigma}_{ij} \cdot \tilde{d}_{(p)ij}$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsregeln für $\underline{\sigma}$ und \underline{d}_p nach Gl. (C3b,c), sowie der Orthogonalität von \underline{q} nach Gl. (C2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\dot{W}}_p &= q_{ri} \cdot \sigma_{rs} \cdot q_{sj} \cdot q_{ki} \cdot d_{(p)kl} \cdot q_{lj} \\ &= \delta_{rk} \cdot \delta_{sl} \cdot \sigma_{rs} \cdot d_{(p)kl} \\ &= \sigma_{rs} \cdot d_{(p)rs} \end{aligned}$$

Es ist dann $\dot{W}_p = \tilde{\dot{W}}_p$. Die gleiche Überlegung gilt bezüglich W_k . Damit behalten auch die plastischen Arbeiten ihren Wert bei einer starren Bewegung des Koordinatensystems bei und brauchen bei den folgenden Überlegungen nicht berücksichtigt zu werden.

Im weiteren wird der elasto-plastische Stofftensor \underline{H} untersucht. Er ist durch Gl. (4.62) gegeben und seine Komponenten lauten

$$H_{ijrs} = E_{ijrs} - \frac{E_{ijkl} m_{kl} (n_{mn} - \alpha_{(k)mn}) E_{mnrst}}{A_{(p)} + (n_{pq} - \alpha_{(k)pq}) E_{pqtu} m_{tu}} - \frac{E_{ijkl} l_{kl} (l_{mn} - \alpha_{(p)mn}) E_{mnrst}}{A_{(k)} + (l_{pq} - \alpha_{(p)pq}) E_{pqtu} l_{tu}} \quad (C4)$$

Hieraus wird zunächst der Elastizitätstensor \underline{E} betrachtet.

Es ist

$$E_{ijrs} = 2\mu \cdot \delta_{ir} \cdot \delta_{js} + \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{rs}$$

mit den Lamé'schen Konstanten λ und μ . Man kann unter Ausnutzung der Orthogonalität von \underline{q} leicht zeigen, daß folgende Beziehung gilt:

$$E_{ijrs} = q_{ki} \cdot q_{lj} \cdot E_{kluv} \cdot q_{ur} \cdot q_{vs} \quad (C5)$$

Die Gradienten des plastischen Potentials und der Fließfunktionen \underline{m} , \underline{n} und \underline{l} hängen nur von der Spannungsrate ab.

$$m_{ij} = m_{ij}(\sigma_{ij})$$

$$n_{ij} = n_{ij}(\sigma_{ij})$$

$$l_{ij} = l_{ij}(\sigma_{ij})$$

Berücksichtigt man, daß \underline{m} , \underline{n} und \underline{l} jeweils Polynome von $\underline{\sigma}$ sind (vgl. Gl. (4.40), (4.42), (4.53)), so ergibt sich bei einer Transformation der Spannungen nach Gl. (C3b) unter Ausnutzung der Orthogonalität von \underline{q} :

$$m_{ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) = q_{ri} \cdot m_{rs}(\sigma_{rs}) \cdot q_{sj}$$

$$n_{ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) = q_{ri} \cdot n_{rs}(\sigma_{rs}) \cdot q_{sj} \quad (C6 a - c)$$

$$l_{ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) = q_{ri} \cdot l_{rs}(\sigma_{rs}) \cdot q_{sj}$$

Mit den Gln. (C5) und (C6) läßt sich dann weiter zeigen, daß bei einer starren Bewegung des Koordinatensystems mit dem Transformationstensor \underline{q} folgendes gilt:

- die Verfestigungsparameter A_k und A_p bleiben unverändert,
- die Tensoren $\underline{\alpha}_p$ und $\underline{\alpha}_k$ transformieren sich wie die Gradienten der Potentiale und der Fließfunktionen:

$$\alpha_{p|ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) = q_{ri} \cdot \alpha_{p|rs}(\sigma_{rs}) \cdot q_{sj} \quad (C7 a, b)$$

$$\alpha_{k|ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) = q_{ri} \cdot \alpha_{k|rs}(\sigma_{rs}) \cdot q_{sj}$$

Die Gl. (C5), (C6) und (C7) werden benötigt, um festzustellen, wie sich die starre Bewegung des Koordinatensystems mit einer Transformation der Spannungen nach Gl. (C3b) auf den elasto-plastischen Stofftensor $\underline{H}(\underline{\sigma})$ auswirkt.

Es werden zunächst die Nenner von $\underline{H}(\underline{\sigma})$ betrachtet (siehe Gl. (C4)), wobei der Anteil $n_{pq} \cdot E_{pqtu} \cdot m_{tu}$ herausgegriffen wird. Da über alle Indices summiert wird, können sie umbenannt werden. Es gilt mit den Gln. (C5) und (C6a, b) unter Berücksichtigung der Gl. (C2):

$$\begin{aligned} n_{ij}(\tilde{\sigma}_{ij}) \cdot E_{ijrs} \cdot m_{rs}(\tilde{\sigma}_{rs}) \\ &= q_{pi} \cdot n_{pq}(\sigma_{pq}) \cdot q_{qj} \cdot \\ &\quad \cdot q_{ki} \cdot q_{lj} \cdot E_{kluv} \cdot q_{ur} \cdot q_{vs} \cdot \\ &\quad \cdot q_{mr} \cdot m_{mn}(\sigma_{mn}) \cdot q_{ns} \\ &= \delta_{pk} \cdot \delta_{ql} \cdot \delta_{um} \cdot \delta_{vn} \cdot n_{pq}(\sigma_{pq}) \cdot E_{kluv} \cdot m_{mn}(\sigma_{mn}) \\ &= n_{kl}(\sigma_{kl}) \cdot E_{kluv} \cdot m_{uv}(\sigma_{uv}) \end{aligned}$$

Gleiches gilt dann auch für die übrigen Anteile der Nenner. Somit bleiben die Nenner des elasto-plastischen Stofftensors bei einer starren Bewegung des Koordinatensystems unverändert.

Im weiteren werden die Zähler von $\underline{H}(\underline{\sigma})$ betrachtet. Es wird der Anteil $E_{ijkl} \cdot m_{kl} \cdot n_{mn} \cdot E_{mnrs}$ herausgegriffen. Man erhält mit Gl. (C5) und (C6a, b) unter Berücksichtigung von Gl. (C2):

$$\begin{aligned}
 & E_{ijkl} \cdot m_{kl}(\tilde{\sigma}_{kl}) \cdot n_{mn}(\tilde{\sigma}_{mn}) \cdot E_{mnrst} \\
 &= q_{pi} \cdot q_{qj} \cdot E_{pquv} \cdot q_{uk} \cdot q_{vl} \\
 &\quad q_{tk} \cdot m_{tw}(\sigma_{tw}) \cdot q_{wl} \cdot q_{am} \cdot n_{ab}(\sigma_{ab}) \cdot q_{bn} \\
 &\quad q_{cm} \cdot q_{dn} \cdot E_{cdef} \cdot q_{er} \cdot q_{fs} \\
 &= q_{pi} \cdot q_{qj} \cdot \\
 &\quad \cdot \delta_{ut} \cdot \delta_{vw} \cdot \delta_{ac} \cdot \delta_{bd} \cdot E_{pquv} \cdot m_{tw}(\sigma_{tw}) \cdot n_{ab}(\sigma_{ab}) \cdot E_{cdef} \cdot \\
 &\quad \cdot q_{er} \cdot q_{fs} \\
 &= q_{pi} \cdot q_{qj} \cdot E_{pquv} \cdot m_{uv}(\sigma_{uv}) \cdot n_{cd}(\sigma_{cd}) \cdot E_{cdef} \cdot q_{er} \cdot q_{fs}
 \end{aligned}$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Anteile der Zähler. Unter Berücksichtigung der Gl. (C5) ergibt sich dann insgesamt:

$$\tilde{H}_{ijrs} = q_{ki} \cdot q_{lj} \cdot H_{klmn} \cdot q_{mr} \cdot q_{ns} \quad (C8)$$

Mit den Gln. (C3a, c) und (C8) läßt sich dann nachweisen, daß das elasto-plastische Stoffgesetz gemäß Gl. (4.3) geschrieben in der Form

$$\overset{\circ}{\sigma}_{kl} - H_{klmn} \cdot d_{mn} = 0 \quad (C9)$$

auch die Gleichung

$$\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{H}_{ijrs} \cdot \tilde{d}_{rs} \stackrel{!}{=} 0 \quad (C10)$$

erfüllt und somit nach Gl. (4.4) dem Prinzip der Rauminvarianz genügt.

Zunächst erhält man durch Invertierung der Transformationsgleichungen (C3a, c) für die Spannungsrate und die Verformungsrate:

$$\tilde{\sigma}_{kl} = q_{km} \cdot \tilde{\sigma}_{mn} \cdot q_{ln}$$

$$d_{mn} = q_{mr} \cdot \tilde{d}_{rs} \cdot q_{ns}$$

Dies in Gl. (C9) eingesetzt ergibt

$$q_{km} \cdot \tilde{\sigma}_{mn} \cdot q_{ln} - H_{klmn} \cdot q_{mr} \cdot \tilde{d}_{rs} \cdot q_{ns} = 0$$

Mit $q_{ki} \cdot q_{km} = \delta_{im}$ und $q_{ln} \cdot q_{lj} = \delta_{nj}$ folgt weiter

$$\tilde{\sigma}_{ij} - q_{ki} \cdot q_{lj} \cdot H_{klmn} \cdot q_{mr} \cdot q_{ns} \cdot \tilde{d}_{rs} = 0$$

Mit der Gl. (C8) ergibt sich hieraus die Gl. (C10).

Anhang D

Differenzenverfahren zur Lösung von Systemen nichtlinearer
gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung -
lineare Mehrschrittverfahren

D1 Allgemeines

Im folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften der linearen Mehrschrittverfahren zusammengestellt, soweit sie im Rahmen dieser Arbeit relevant sind. Genauere Ausführungen finden sich z.B. bei LAMBERT [49].

Ein System nichtlinearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen hat die Form

$$\frac{d\underline{a}}{dt} = \underline{f}(\underline{a}, t) \quad (D1)$$

mit dem Vektor $\underline{a} = \underline{a}(t)$ als abhängiger und dem Skalar t als unabhängiger Variabler. Es wird vorausgesetzt, daß die Gl. (D1) bei Vorgabe einer Anfangsbedingung

$$\underline{a}(0) = \underline{a}_0 \quad (D2)$$

genau eine Lösung besitzt. Es soll eine Näherungslösung für die Stelle $t^s = s \cdot \Delta t$, $s = 1, 2, 3, \dots$, $\Delta t = \text{const.}$, bestimmt werden. Hierfür wird ein Ansatz gewählt aus einer linearen Kombination von Werten \underline{a}^i , das sind die Näherungslösungen in den Stellen t^i , und von den Werten $\underline{f}^i = \underline{f}(\underline{a}^i, t^i)$, das sind mit Gl. (D1) Näherungswerte der Ableitungen von \underline{a} in den Stellen t^i :

$$\sum_{j=0}^k \alpha^j \cdot \underline{a}^{n+j} = \Delta t \cdot \sum_{j=0}^k \beta^j \cdot \underline{f}^{n+j} \quad \text{mit } n + k = s \quad (D3)$$

Darin sind α^j und β^j feste Koeffizienten. Gibt man diese vor, so läßt sich mit Gl. (D3) der Wert $\underline{a}^s = \underline{a}^{n+k}$ bestimmen, wenn die Werte \underline{a}^{n+j} , $j < k$, aus den vorhergehenden Rechenschritten bekannt sind. Die Berechnungsmethode heißt lineares Mehrschrittverfahren der Ordnung k . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\alpha^k = 1$ setzen. Die restlichen Koeffizienten α^j und β^j müssen so festgelegt werden, daß bei gegebener Schrittweite Δt die Näherungslösung \underline{a}^s möglichst gut mit der exakten Lösung $\underline{a}(t^s)$ übereinstimmt.

In diesem Zusammenhang ist der Begriff Konvergenz von Bedeutung. Ein lineares Mehrschrittverfahren nach Gl. (D3) heißt konvergent, wenn mit einer geeigneten Vektornorm II.II folgende Bedingung gilt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0, s \rightarrow \infty} \|\underline{a}^s - \underline{a}(t^s)\| = 0 \quad (D4)$$

Man kann zeigen, daß eine lineare Mehrschrittmethode genau dann konvergent ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha^j = 0 \quad (D5)$$

$$(2) \quad \sum_{j=0}^k j \cdot \alpha^j = \sum_{j=0}^k \beta^j \quad (D6)$$

(3) Die Nullstellen der Gleichung

$$\sum_{j=0}^k \alpha^j \cdot \xi^{(j)} = 0 \quad 1) \quad (D7a)$$

sind ξ_s , $s = 1 \dots k$. Mit Gl. (D5) ist $\xi_1 = 1$.

Für die übrigen Nullstellen muß gelten

$$|\xi_s| < 1, \quad s = 2 \dots k \quad (D7b)$$

1) $\xi^{(j)}$ ist ξ zur Potenz j erhoben. α^j und β^j sind indizierte Größen

Die Bedingungen (1) und (2), die als Konsistenz bezeichnet werden, bestimmen die Größe des Fehlers, der bei einmaliger Anwendung des linearen Mehrschrittverfahrens entsteht, während die Bedingung (3), auch als Nullstabilität bezeichnet, die Fehlerfortpflanzung im Verlauf mehrmaliger Anwendung bestimmt.

Der Begriff der Konvergenz nach Gl. (D4) ist im strengen Sinn nur dann relevant, wenn die Schrittweite Δt gegen Null geht. Dies trifft bei Anwendungen nicht zu, dort hat die Schrittweite immer einen endlich großen Wert. Man kann die Konvergenz aber als notwendiges Kriterium für die Brauchbarkeit eines linearen Mehrschrittverfahrens benutzen: Verfahren, die nicht konvergent sind, liefern auch bei endlich großer Schrittweite keine brauchbaren Näherungslösungen.

Für endlich große Schrittweiten sollte eine Fehlerabschätzung

$$\| \underline{a}^s - \underline{a}(t^s) \| < R$$

mit

$$R = R(\Delta t, \alpha^j, \beta^j, s, \underline{f}) \quad (D8)$$

vorgenommen werden. In dieser strengen Form ist eine Fehlerabschätzung bei Systemen nichtlinearer Differentialgleichungen (D1) häufig nicht durchführbar. Man versucht dann Aussagen darüber zu treffen, wie sich der Fehler bezüglich eines Bezugswertes verhält, bzw. wie groß der relative Fehler ist. Man spricht in diesem Zusammenhang von der numerischen Stabilität des Verfahrens.

Der Fehler \underline{e} an der Stelle $t = t^s$ lautet

$$\underline{e}^s = \underline{a}(s \cdot \Delta t) - \underline{a}^s \quad (D9)$$

Man kann zeigen, daß nach einer Transformation des Fehlervektors auf $\tilde{\underline{e}}^s$ folgender Zusammenhang für dessen Komponenten ${}^i\tilde{e}^s$ gilt:

$${}^i\tilde{e}^s = \sum_{p=1}^k c_p \cdot r_p^{(s)} - {}^i l / (\Delta t \cdot {}^i \lambda \cdot \sum_{q=0}^k \beta^q) \quad (D10)$$

Darin ist der Vektor \underline{l} mit den Komponenten ${}^i l$ ein Maß für den Fehler bei einmaliger Anwendung des Verfahrens. Der Vektor $\underline{\lambda}$ mit den Komponenten ${}^i \lambda$ enthält die Eigenwerte der Matrix $\underline{J} = \partial \underline{f} / \partial \underline{a}$, das ist der Gradient des Vektors \underline{f} bezüglich des Vektors \underline{a} . Die Werte c_p sind konstante Koeffizienten, die von den Anfangsbedingungen nach Gl. (D2) abhängen, und die Werte r_p sind die Nullstellen des sogenannten Stabilitätspolynoms π

$$\pi(r, \Delta t \cdot {}^i \lambda) = \sum_{j=0}^k (\alpha^j - \Delta t \cdot {}^i \lambda \cdot \beta^j) \cdot r^{(j)} \quad (D11)$$

Die Lösung (D10) gilt für den Fall, daß die Nullstellen r_p von π alle voneinander verschieden sind. Bei mehrfachen Nullstellen erhält man leicht modifizierte Lösungen.

Es zeigt sich, daß der mit Gl. (D10) bestimmte Fehler des linearen Mehrschrittverfahrens aus zwei Anteilen besteht. Dabei ist der zweite Anteil konstant, während sich der erste Anteil bei fortlaufender Anwendung des Verfahrens, d.h. mit wachsendem s , verändert. Somit ist die Fehlerentwicklung durch die Nullstellen des Stabilitätspolynoms bestimmt, die bei fortlaufender Anwendung potenziert werden. Im günstigsten Fall ist $|r_p| < 1$, so daß der Fehler abnimmt.

D2 Einschrittverfahren

Für das im Rahmen dieser Arbeit behandelte Problem soll ein einfacher Sonderfall der linearen Mehrschrittverfahren ange-

wendet werden. Dies sind die Einschrittverfahren, die sich aus Gl. (D3) ergeben, indem man $k = 1$ setzt:

$$\alpha^0 \cdot \underline{a}^n + \alpha^1 \cdot \underline{a}^{n+1} = \Delta t \cdot (\beta^0 \cdot \underline{f}^n + \beta^1 \cdot \underline{f}^{n+1}) \quad (D12)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\alpha^1 = 1$ setzen. Aus Gl. (D12) ergibt sich nach Anwendung der Konvergenzbedingungen Gl. (D5) und (D6) mit $0 < \beta = \beta^1 < 1$:

$$\underline{a}^{n+1} = \underline{a}^n + \Delta t \cdot [(1 - \beta) \cdot \underline{f}^n + \beta \cdot \underline{f}^{n+1}] \quad (D13)$$

Die 3. Konvergenzbedingung ist bei Einschrittverfahren nicht relevant, da das 1. charakteristische Polynom nur eine Nullstelle hat. Einschrittverfahren mit $\beta = 0$ heißen explizit, andernfalls implizit. Implizite Verfahren ergeben wegen $\underline{f}^{n+1} = \underline{f}(\underline{a}^{n+1}, t^{n+1})$ i. a. nichtlineare Gleichungen (D13).

Mit den durch die Konvergenzbedingungen bestimmten Koeffizienten α^j und β^j lautet das Stabilitätspolynom nach Gl. (D11) für Einschrittverfahren:

$$\pi = [-1 - \Delta t \cdot \lambda \cdot (1 - \beta)] + [1 - \Delta t \cdot \lambda \cdot \beta] \cdot r$$

Die einzige Nullstelle ist

$$r_1 = \frac{1 + \Delta t \cdot \lambda \cdot (1 - \beta)}{1 - \Delta t \cdot \lambda \cdot \beta} \quad (D14)$$

Numerische Stabilität, d. h. keine Fehlerakkumulierung bei fortlaufender Anwendung des Einschrittverfahrens, ist gegeben für $|r_1| < 1$. Im weiteren wird vorausgesetzt, daß $\lambda < 0$ ist. Unter welchen Bedingungen diese Voraussetzung erfüllt ist, wird im Abschnitt D3 erläutert. Damit gilt für den Zähler der Nullstelle r_1 :

$$1 + \Delta t \cdot \lambda \cdot (1 - \beta) \leq 1$$

und für den Nenner

$$1 - \Delta t \cdot i \lambda \cdot \beta \cong 1$$

Die Bedingung $|r_1| < 1$ ist für beliebige $\Delta t \cdot i \lambda$ erfüllt, wenn $\beta \geq 0,5$ ist. Solche Verfahren sind uneingeschränkt stabil, da bei beliebiger Schrittweite Δt bei fortlaufender Anwendung keine Fehlerakkumulierung stattfindet.

Für $\beta < 0,5$ ist $|r_1| < 1$, wenn

$$\Delta t \cdot i \lambda > -2 / (1 - 2\beta)$$

Solche Verfahren sind bedingt stabil, da zur Vermeidung der Fehlerakkumulierung eine von $i \lambda$ abhängige Begrenzung der Schrittweite Δt erforderlich ist. Es bleibt noch zu erwähnen, daß die numerische Stabilität nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Brauchbarkeit eines linearen Ein- oder Mehrschrittverfahrens ist.

D3 Betrachtung der Eigenwerte

Nach Abschnitt 5.2.1 hat der Vektor \underline{f} bei dem im Rahmen dieser Arbeit behandelten Problem folgende Form:

$$\underline{f} = \underline{M}^{-1} \cdot (\underline{p} - \underline{k} - \underline{M}_{\nabla} \cdot \underline{a}) \cdot$$

Darin ist \underline{M} die Massenmatrix, \underline{p} der Lastvektor, \underline{k} der Vektor der inneren Knotenkräfte und \underline{M}_{∇} die konvektive Massenmatrix. Damit erhält man

$$\underline{J} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{a}} = \underline{M}^{-1} \cdot \left(\frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{a}} - \frac{\partial \underline{k}}{\partial \underline{a}} - \frac{\partial \underline{M}_{\nabla}}{\partial \underline{a}} \cdot \underline{a} - \underline{M}_{\nabla} \right)$$

An dieser Stelle sind weitere Aussagen nur unter folgenden Voraussetzungen möglich:

- Nichtkonservative Lasten werden vernachlässigt: damit entfällt $\partial \underline{p} / \partial \underline{a}$.
- Geometrische Nichtlinearitäten werden vernachlässigt: damit entfallen die konvektiven Massenanteile und die geometrischen Nichtlinearitäten in den inneren Knotenkräften.
- Die verbleibenden "physikalischen Anteile", zusammengefaßt in der tangentialen Steifigkeitsmatrix $\underline{K} = \partial \underline{k} / \partial \underline{a}$ sind symmetrisch und positiv definit.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich zunächst

$$\underline{J} = - \underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}$$

mit der Eigenwertgleichung

$$(- \underline{M}^{-1} \cdot \underline{K} - \lambda \cdot \underline{1}) \cdot \underline{a} = 0$$

bzw.

$$[\underline{K} - (-\lambda) \cdot \underline{M}] \cdot \underline{a} = 0 \quad (D 15)$$

Gl. (D15) ist ein verallgemeinertes Eigenwertproblem. Wie z. B. bei ZURMÜHL [50], Abschnitt 15.5, gezeigt wird, sind die Eigenwerte $(-\lambda^i)$ bei symmetrischer, positiv definiten Steifigkeitsmatrix \underline{K} und Massenmatrix \underline{M} alle reell und positiv. Dann sind die Eigenwerte λ^i der Matrix \underline{J} alle reell und negativ.

Es zeigt sich, daß eine allgemeine Aussage über das Vorzeichen der Eigenwerte λ^i der Funktionalmatrix \underline{J} nur unter einschränkenden Bedingungen möglich ist, die i.a. nur bei linearen Problemen gegeben sind. Dies schließt nicht aus, daß auch bei nichtlinearen Problemen im Einzelfall $\lambda^i < 0$ ist. In diesem Sinne können die im Abschnitt D2 angegebenen Stabilitätskriterien nur als notwendige, und nicht als hinreichende Bedingungen für die Fehlerakkumulierung bei fortlaufender Anwendung der Einschrittverfahren angesehen werden.

Bezeichnungen

Sofern nicht ausdrücklich andere Bedeutungen in den einzelnen Abschnitten eingeführt worden sind, gelten die folgenden Bezeichnungen:

A_p, A_k	Verfestigungsparameter des plastischen Verformungsanteils
\underline{B}	Matrix mit partiellen Ableitungen der Formfunktionen
\underline{C}	Viskositätsmatrix
D	Behälterbreite
\underline{E}	Elastizitätstensor
\underline{G}	Tensor des geschwindigkeitsabhängigen Stoffverhaltens
\underline{H}	Tensor des elasto-plastischen Stoffverhaltens
I, II, III	Invarianten des Cauchy Spannungstensors $\underline{\sigma}$
I_s, II_s, III_s	Invarianten des Spannungstensors $\underline{\sigma}_s$
I_d, II_d, III_d	Invarianten der Verformungsrate \underline{d}
\underline{J}	Funktionalmatrix
\underline{K}_T	tangentiale Steifigkeitsmatrix
\underline{M}	Massenmatrix
\underline{M}_V	konvektive Massenmatrix
\underline{N}	Matrix der Formfunktionen
R	Radius
S	Oberfläche, Querschnitt
U	Umfang
V	Volumen
W_p, W_k	plastische Arbeiten

\underline{a}	Vektor der Knotengeschwindigkeiten
\underline{b}_t	Randspannungen
\underline{b}_v	Volumenkräfte
\underline{c}	Cauchy-Green Verformungstensor
\underline{d}	Verformungsrate
$\underline{\overset{\circ}{d}}$	objektive Verformungsbeschleunigung
$\underline{d}^{(M)}$	materielle Ableitungen der rechten Streckungstensoren
\underline{d}_e	elastischer Anteil der Verformungsrate
\underline{d}_p	plastisch-expansiver Anteil der Verformungsrate
\underline{d}_k	plastisch-kontraktiver Anteil der Verformungsrate
$\underline{e}^{(M)}$	Rivlin-Ericksen Tensoren
f_p, f_k	Fließfunktionen
g	plastisches Potential
h_p, h_k	Verfestigungsfunktionen
\underline{k}	Vektor der inneren Knotenkräfte
\underline{k}_N	Vektor der inneren Knotenkräfte aus geometrischer Nichtlinearität
\underline{l}	Gradient der Fließfunktion f_k
\underline{m}	Gradient des plastischen Potentials f_p
\underline{n}	Gradient der Fließfunktion g
\underline{p}	Vektor der Lastknotenkräfte
\underline{p}_t	Vektor der Lastknotenkräfte aus Randspannungen
\underline{q}	Transformationstensor einer Starrkörperbewegung
\underline{r}	Rotationstensor

\underline{s}	Funktion des Stoffgesetzes
t	Zeit
\underline{u}	rechter Streckungstensor
\underline{v}	Geschwindigkeit
\underline{w}	Rotationsrate
\underline{x}	Koordinaten eines raumfesten Punktes
\underline{y}	Koordinaten eines körperfesten Punktes
\underline{z}	Spannungen aus geometrischer Nichtlinearität
$\underline{\alpha}_p, \underline{\alpha}_k$	Kopplungstensoren des elasto-plastischen Stoffverhaltens
γ	spez. Gewicht des Füllgutes
δ_{ij}	Kronecker Symbol
ζ	örtliche Ableitung der Spannung nach der Zeit
η	Winkel der Reibung zwischen Schüttgut und Behälterwand
ϑ, ϑ'	Trichterneigungen
λ_p, λ_k	Beträge der plastischen Verformungen
μ	Viskositätszahl
ρ	spezifische Masse des Füllgutes
$\underline{\sigma}$	Cauchy Spannungstensor
$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}$	Jaumannsche Spannungsrate
$\underline{\sigma}_s$	elasto-plastischer Anteil der Cauchy Spannung
$\underline{\sigma}_v$	geschwindigkeitsabhängiger Anteil der Cauchy Spannung
$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}_s$	Jaumannsche Spannungsrate von $\underline{\sigma}_s$
$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}_v$	Jaumannsche Spannungsrate von $\underline{\sigma}_v$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Spannungskomponenten im ebenen Fall
σ_w, τ_w	Randspannungskomponenten, normal und tangential zum Rand
φ	Winkel der inneren Reibung des Schüttgutes
$\underline{\psi}$	Vektor eines Residuums
ω	Volumenverteilungsfunktion
(\cdot)	materielle Ableitung von $()$ nach der Zeit t
$\partial()/\partial t$	örtliche Ableitung von $()$ nach der Zeit t
$(\cdot)_{,i}$	partielle Ableitung von $()$ nach der räumlichen Koordinate x_i
$\partial()/\partial y_i$	partielle Ableitung von $()$ nach der körperfesten Koordinate y_i
$(\cdot)^T$	Transponierte eines Vektors, einer Matrix oder eines Tensors 2.Stufe $()$
$\delta()$	Variation eines Vektors $()$
$\text{tr}()$	Spur eines Tensors 2.Stufe $()$
$\det()$	Determinante eines Tensors 2.Stufe $()$
$\nabla()$	Gradient von $()$ mit den Komponenten $(\cdot)_{,i}$
$\Omega()$	Matrix einer Linearkombination der Komponenten von $()$
$\underline{1}$	Einheitstensor mit der Komponenten δ_{ij}

Anmerkung zur Vorzeichenkonvention:

Bei der Darstellung der Grundlagen und der Ableitung des Rechenverfahrens in den Abschnitten 3 - 5 wird für die Spannung die in der Kontinuumsmechanik gebräuchliche Vorzeichenkonvention (Zug positiv, Druck negativ) benutzt. Bei der Darstellung und Diskussion der Ergebnisse in den Abschnitten 6, 7 wird die Vorzeichenkonvention der Siloliteratur (Zug negativ, Druck positiv) benutzt. Eine entsprechende Regelung gilt für die Verformungsrate.

Literaturverzeichnis

- [1] JANSSEN, H.A. "Versuche über Getreidedruck in Silozellen"
VDI-Zeitschrift 39 (1895), S. 1045
- [2] MOTZKUS, U. "Belastung von Siloböden und Auslauftrichtern durch körnige Schüttgüter"
Dissertation TU Braunschweig (1974)
- [3] WALKER, D.M. "An Approximate Theory for Pressures and Arching in Hoppers"
Chemical Engineering Science 21 (1966), S. 975
- [4] JENIKE, A.W. "Storage and Flow of Solids"
Bulletin 123, Utah Engineering Experiment Station, University of Utah (1964)
- [5] JENIKE, A.W. "Bin Loads"
JOHANSON, J.R. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94 (1968), ST4, S. 1011
- [6] JENIKE, A.W. "Bin Loads - Part 2: Concepts"
JOHANSON, J.R. "Bin Loads - Part 3: Mass-flow Bins"
CARSON, J.W. Journal of Engineering for Industry, ASME, Series B, Vol. 95 (1973), S. 1
- [7] WALTERS, J.K. "A Theoretical Analysis of Stresses in Silos with Vertical Walls"
Chemical Engineering Science 28 (1973), S. 13
- [8] WALTERS, J.K. "A Theoretical Analysis of Stresses in Axially-Symmetric Hoppers and Bunkers"
Chemical Engineering Science 28 (1973), S. 779

- [9] ENSTADT, G. "On the Theory of Arching in Mass Flow Hoppers"
Chemical Engineering Science 30
(1975), S. 1273
- [10] HORNE, R.M. "Analysis of Stress Distributions in
NEDDERMAN, R.M. Two-Dimensional Bins by the Method of
Characteristics"
Powder Technology 14 (1976), S. 93
- [11] HORNE, R.M. "Stress Distributions in Hoppers"
NEDDERMAN, R.M. Powder Technology 19 (1978), S. 243
- [12] HORNE, R.M. "An Analysis of Switch Stresses in
NEDDERMAN, R.M. Two-Dimensional Bunkers"
Powder Technology 19 (1978), S. 235
- [13] LANDAHL, H. "Berechnung der Druckverhältnisse in
zylindrischen Silozellen mit nichtli-
nearem Stoffgesetz für den Füllzu-
stand und beim Entleerungsbeginn"
Dissertation Universität Dortmund
(1982)
- [14] LADE, P.V. "Elasto-Plastic Stress-Strain Theory
for Cohesionless Soil with Curved
Yield Surfaces"
International Journal of Solids and
Structures 13 (1977), S. 1019
- [15] GUDEHUS, G. "Stoffgesetze der Bodenmechanik"
Grundbau Taschenbuch Teil 1,
2. Auflage (1980)

- [16] BAGNOLD, R.A. "Experiments on a Gravity-Free Dispersion a Large Solid Spheres in an Newtonian Fluid Under Shear" Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 225 (1954), S. 49
- [17] SAVAGE, S.B. "Gravity Flow of Cohesionless Granular Materials in Chutes and Channels" Journal of Fluid Mechanics 92 (1979), S. 53
- [18] TRUESDELL. C.
NOLL, W. "The Non-Linear Field Theories of Mechanics" Handbuch der Physik, Band III/3, Berlin/Heidelberg/New York (1965)
- [19] GUDEHUS, G.
KOLYMBAS, D. "A Constitutive Law of the Rate Type for Soils" Proc. 3rd Int. Conf. Num. Methods in Geomechanics, Aachen (1979), S. 319
- [20] KOLYMBAS, D. "Ein nichtlineares viskoplastisches Stoffgesetz für Böden" Dissertation Universität Karlsruhe (1978)
- [21] MALVERN, L.E. "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium" Englewood Cliffs, New Jersey (1969)
- [22] ERINGEN, A.C. "Nonlinear Theory of Continuous Media" New York (1962)

- [23] PRAGER, W. "An Elementary Discussion of Definitions of Stress Rate"
Quarterly of Applied Mathematics 18
(1961), S. 403
- [24] MASUR, E.F. "On the Definition of Stress Rate"
Quarterly of Applied Mathematics 19
(1961), S. 160
- [25] CHUNG, T.J. "Finite Element Analysis in Fluid
Dynamics"
New York (1968)
- [26] BATHE, K.J. "Finite Element Procedures in Engi-
neering Analysis"
Englewood Cliffs, New Jersey (1982)
- [27] BREBBIA, C.A. "Computational Methods for the Solu-
FERRANTE, A.J. tion of Engineering Problems"
Plymouth (1978)
- [28] ZIENKIEWICZ, O.C. "The Finite Element Method"
3. Auflage, London (1977)
- [29] ORTEGA, J.M. "Iterative Solution of Nonlinear
RHEINBOLDT, W.C. Equations in Several Variables"
New York (1970)
- [30] TÖRNIG "Numerische Mathematik für Physiker
und Ingenieure, Bd. 1"
Berlin/Heidelberg/New York (1979)

- [31] ZIENKIEWICZ, O.C. "Stress Analysis of Rock as a 'No
VALLIAPAN, S. Tension' Material"
KING, I.P. Géotechnique 18 (1968), S. 56
- [32] ZIENKIEWICZ, O.C. "Elasto-Plastic Solutions of Engi-
VALLIAPAN, S. 'neering Problems, 'Initial Stress',
KING, I.P. Finite Element Approach"
International Journal of Numerical
Methods in Engineering 1 (1969),
S. 75
- [33] LEE, K.L. "Drained Strength Characteristics of
SEED, H.B. Sands"
Journal of the Soil Mechanics and
Foundations Division, ASCE, Vol. 93
(1967), SM6, S. 117
- [34] SCHWEDES, J. "Fließverhalten von Schüttgütern in
Bunkern"
Weinheim (1968)
- [35] CAMBEFORT, H. "Bodeninjektionstechnik"
Wiesbaden/Berlin (1969)
- [36] CRAIG, W.H. "Centrifugal Modelling in Flow Pre-
WRIGHT, A.C.S. diction Studies for Granular
Materials"
Particle Technology, The Institution
of Chemical Engineers Symposium
Series, No. 63 (1981)
- [37] NIELSEN, J. "Scale Errors in Model Tests on Gra-
ASKEGAARD, V. nular Media with Special Reference to
Silo Models"
Powder Technology 16 (1977), S. 123

- [38] JOHANSON, J.R. "Modelling Flow of Bulk Solids"
Powder Technology 5 (1971/72), S. 93
- [39] BLAIR-FISH, P.M. "Flow Patterns and Wall Stresses in a
BRANSBY, P.L. Mass-Flow Bunker"
Journal of Engineering for Industry,
ASME, Vo. 95 (1973), S. 17
- [40] KOTCHANOVA, I.I. "Experimental and Theoretical
Investigations on the Discharge of
Granular Materials from Bins"
Powder Technology 4 (1970/71), S. 32
- [41] LEVINSON, H. "Displacement and Velocity Fields in
SHMUTTER, B. Hoppers"
RESNICK, W. Powder Technology 16 (1977), S. 29
- [42] PERRY, M.G. "Model Studies of Mass-Flow Bunkers.
ROTHWELL, E. I. Development of the Radio Pill
WOODFIN, W.T. Technique for Dynamic Pressure and
Velocity Measurements"
Powder Technology 12 (1975), S. 51
- [43] PERRY, M.G. "Model Studies of Mass-Flow Bunkers
ROTHWELL, E. II. Velocity Distributions on the
WOODFIN, W.T. Discharge of Solids from Mass-Flow
Bunkers"
Powder Technology 14 (1976), S. 81
- [44] PERRY, M.G. "Pressures in Flowing and Static Sand
JANGDA, H.A.S. in Model Bunkers"
Powder Technology 4 (1970/71), S. 89
- [45] EISENHART ROTHE, "Problematik und Anwendung eines neuen
M.V. Meßverfahrens zur Bestimmung der
NATAU, O. Fließspannungen in Schüttgütern"
Powder Technology 12 (1975), S. 1

- [46] LAKSHMAN RAO, V. "Internal Pressures in Flowing
VENKATESWARLU, D. Granular Materials from Mass Flow
 Hoppers"
 Powder Technology 11 (1975), S. 133
- [47] LAKSHMAN RAO, V. "Static and Dynamic Wall Pressures
VENKARTESWARLU, D. in Experimental Mass Flow Hoppers"
 Powder Technology 10 (1974), S. 143
- [48] DONG, J.L. "Analysis of Deformation and Failure
CLEARY, M.P. in Geological Materials"
 Reports of Research in Mechanics and
 Materials, Dep. of Mechanical
 Engineering, Massachusetts Institute
 of Technology, Cambridge (1980)
- [49] LAMBERT, J.D. "Computational Methods in Ordinary
 Differential Equations"
 London (1972)
- [50] ZURMÜHL, R. "Matrizen und ihre technischen An-
 wendungen"
 4. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg
 (1964)