

Sicherheitstheoretische Untersuchungen
an druckbelasteten GFK-Bauteilen unter
Berücksichtigung des Kriechens

T 1554

T 1554

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

Abschlußbericht
für das Forschungsvorhaben

"Sicherheitstheoretische Untersuchungen an druckbelasteten GFK-Bauteilen unter Berücksichtigung des Kriechens"

Gesch.Z.: IV/1-5-202/80

Zusammenfassung

Die Belastung der Tragwerke setzt sich aus den dauernd wirkenden Lasten, die vom Eigengewicht und der als dauernd wirkend anzusehenden Verkehrslast herrühren, den vorübergehend wirkenden Lasten, wie der Schneebelastung und schließlich der Kurzzeitbelastung, wie die Windbelastung und die restliche Verkehrsbelastung, zusammen. Bei den GFK-Bauteilen interessiert besonders, wie sich die Kriechverformungen infolge der zeitweise wirkenden Schneebelastungen akkumulieren. Bei den druckbeanspruchten GFK-Bauteilen kommt zu der Betrachtung nach Theorie 1. Ordnung (Gleichgewicht an der unverformten Konstruktion) noch die Knickbiegung (Theorie 2. Ordnung) hinzu. Da durch das Anwachsen der Ausbiegungen die Momente infolge der Knickbiegung zunehmen, ist hierbei eine erhöhte Kriechtendenz zu erwarten. Anhand von zwei linearen Werkstoffmodellen wird gezeigt, daß sich bei sinnvollem Vorgehen die Überlagerungsgesetze für zeitweise konstante Beanspruchung (Theorie 1. Ordnung) auch auf den Fall der Theorie 2. Ordnung übertragen lassen. Dazu werden die Vergrößerungsfunktionen, d. h. das Verhältnis der Knickverformungen unter Einschluß der Knickbiegung zu den elastischen Verformungen bzw. der zugehörigen Momente zu denjenigen im elastischen Falle als Kriechfunktionen eingeführt. Maßgebender Parameter ist dabei das Verhältnis der Druckkräfte zur jeweiligen Knickkraft. Es zeigt sich, daß bei höheren Druckbeanspruchungen die Kriechverformungen während des Winters infolge der Dauerlast und des Schnees immer mehr diejenigen im Sommer aus Dauerlast allein überwiegen. Neben den allgemeinen Beziehungen werden noch vereinfachte für niedere Druckbeanspruchungen angegeben.

Der Bericht enthält 49 Seiten.


(Prof. Dr.-Ing. E. Giencke)

Inhaltsverzeichnis		Seite
1.	Einleitung	3
2.	Werkstoffmodell und Kriechfunktionen	6
2.1	Modell nach Burgers	6
2.2	Versuche	8
2.3	Erweitertes Maxwell-Modell	11
3.	Zyklische Beanspruchung mit abschnittsweise konstanten Spannungen (Theorie 1. Ordnung)	14
4.	Lösung für Probleme nach Theorie 2. Ordnung	20
4.1	Lösung für das Burgers-Modell	20
4.2	Verallgemeinertes Maxwell-Modell	29
5.	Zyklische Beanspruchung nach Theorie 2. Ordnung	32
5.1	Modell nach Burgers	32
5.1.1	Vorverformung w_0	32
5.1.2	Abschnittsweise konstante Querbelastrung p_1 und p_2	38
5.2	Verallgemeinertes Maxwell-Modell	43
6.	Vereinfachung für die Anwendung in der Baupraxis	45
7.	Literatur	49

1. Einleitung

Für die Beurteilung der Tragfähigkeit einer GFK-Konstruktion ist die Frage zu klären, wie sich Kriechverformungen infolge von Dauerlasten und zeitweise wirkenden Lasten akkumulieren. Die Dauerbelastung rührt im wesentlichen vom Eigengewicht sowie dem als dauernd wirkend anzusehenden Anteil der Verkehrslast her. Eine typisch zeitweise wirkende Belastung ist die Schneelast mit einer Zykluszeit von einem Jahr, sodaß bei einer Lebensdauer von 40 Jahren mit 40 Be- und Entlastungen zu rechnen ist. Für die Be- und Entladung von Silos ist es kaum möglich Zykluszeiten anzugeben. Eine Ausnahme bilden die Gärfuttersilos, die auch eine Lastperiode von einem Jahr haben und durch die hier vorgenommenen Untersuchungen für Schneebelastungen abgedeckt werden. Bei den restlichen Verkehrslasten und den Windlasten ist die Lastdauer so kurz, daß das Kriechen dabei vernachlässigt werden darf.

Die Rechnungen sind über der Zeit mit der idealisierten Lastgeschichte nach Bild 1 vorzunehmen und daraus dann sinnvolle Überlagerungsgesetze abzuleiten. Die Ergebnisse aus Untersuchungen nach Theorie 1. Ordnung, d. h. mit konstanten Schnittkräften in den einzelnen Zeitabschnitten können nicht auf druckbelastete Bauteile, die nach der Theorie 2. Ordnung zu rechnen sind, übertragen werden, da das Problem aufgrund der Theorie 2. Ordnung nichtlinear wird. Denn das Kriechen hängt sehr stark vom Verhältnis der jeweiligen Druckkraft zur Kriechknick- bzw. Kriechbeullast ab. Dieses Verhältnis ist wiederum unterschiedlich, ob die Dauerlast allein oder die Summe aus Dauer- und zyklischer Last wirkt. D. h. in der stark belasteten Phase ergeben sich aufgrund der Theorie 2. Ordnung relativ große zusätzliche Kriechverformungen, nicht aber in der schwach belasteten Phase.

Neben dem Fall der Querb Belastung ist bei druckbeanspruchten Konstruktionen auch das Wachsen einer Vorbeule zu untersuchen.

Zur Erfassung des Kriechverhaltens werden zwei lineare Werkstoffmodelle untersucht, und zwar das Modell nach Burgers, das aus zwei elastischen und zwei Dämpfergliedern mit konstanter Charakteristik besteht und ein erweitertes Maxwell-Modell, das nur ein elastisches und ein Dämpferglied enthält, jedoch mit zeitlich veränderlicher

Charakteristik. Aufgrund der veränderlichen Charakteristik ist es möglich, die gemessenen Kriechfunktionen mit abnehmender Kriechtendenz bei fortschreitender Zeit in der Rechnung zu erfassen. Beim Werkstoffmodell nach Burgers bleibt die Kriechrate auch für große Zeiten konstant und hat keine abnehmende Tendenz.

Die zugehörigen Differentialgleichungen sind schon bei den Balkenproblemen partiell, da sich die Schnittkräfte sowohl über die Balkenlänge als auch mit der Zeit verändern. Solche Gleichungen lassen sich in einfacher Weise lösen, wenn man einen Produktansatz für die Schnittkräfte und die Belastung wählen kann. Als Ersatzsystem für alle Tragwerke werden die gelenkig gelagerten Systeme, bei denen sich der Verlauf der Ausbiegung in Längsrichtung durch einen Sinusansatz darstellen läßt, gewählt.

Aus den genaueren Lösungen der Differentialgleichungen sollen einfache Überlagerungsregeln zur Erfassung der zeitweise wirkenden Lasten aufgestellt werden. Insbesondere geht es darum, für druckbelastete Teile den Einfluß der Theorie 2. Ordnung bei zyklischen Lasten durch Näherungen so gut zu erfassen, daß die Beziehungen zur Berechnung der Teilsicherheitsbeiwerte nach der Stufe 1 und 2 verwandt werden können. Als Maß für das Kriechen wird das Endkriechmaß, wie es für Matten- und Wirrfaserlamine in dem Normenentwurf für Bauteile aus textilglasverstärkten Reaktionsharzen vorgesehen ist, eingeführt.

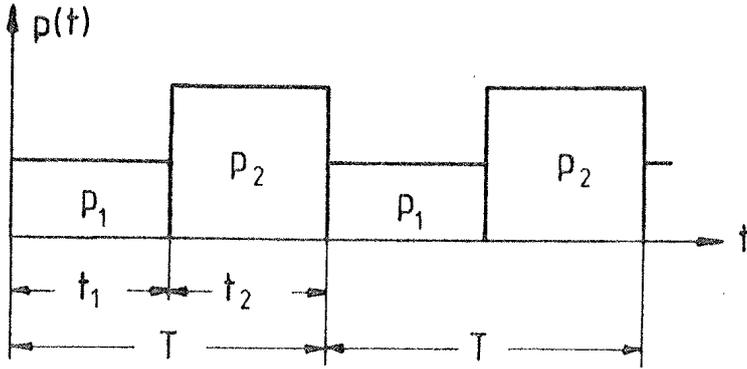


Bild 1: Idealisierte Last-Zeit-Geschichte

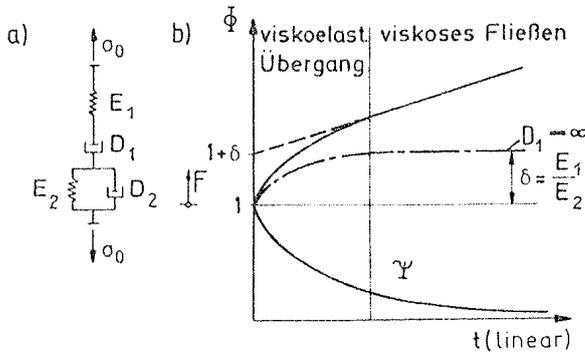


Bild 2: Werkstoffmodell nach Burgers

a) Werkstoffmodell

b) Kriechfunktion Φ und Relaxationsfunktion Ψ

— vollständige Kriechfunktion, -.- viskoelastischer Anteil,
 --- Näherung für Zeitabschnitte von einigen Monaten.

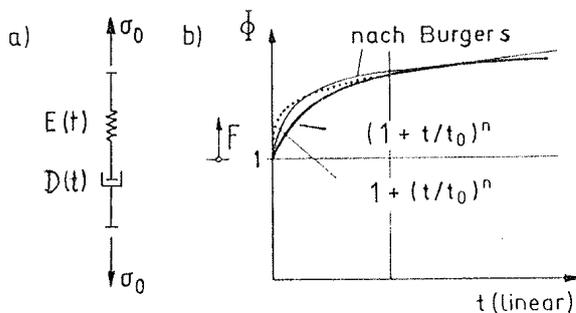


Bild 3: Erweitertes Maxwell-Modell

a) Werkstoffmodell

b) Kriechfunktion

— gemessene Kriechfunktion von GF-UP der Form $(1 + t/t_c)^n$
 ... Kriechfunktion der Form $1 + (t/t_0)^n$
 — Kriechfunktion nach Burgers

2. Werkstoffmodelle und Kriechfunktionen

Zur Erfassung des viskoelastischen Verhaltens kann entweder ein Werkstoffmodell eingeführt werden (Bild 2a) oder die zugehörige Kriechfunktion $\phi(t)$ für die Verzerrung (Bild 2b) bzw. die zugehörige Relaxationsfunktion $\psi(t)$ für die Spannungen angegeben werden. Normalerweise beschränkt man sich auf die Angabe der Kriechfunktion $\phi(t)$, da sie sich am einfachsten als Verzerrungsgeschichte bei festgehaltener Spannung versuchsmäßig ermitteln läßt. Kriechfunktionen haben meistens eine viskoelastische und eine viskose Phase. Unmittelbar nach Aufbringen der Last entsteht die elastische Verzerrung $\epsilon(0) = \epsilon_0$. Der danach einsetzende Kriechprozeß ist zunächst stärker ausgeprägt und verlangsamt sich immer mehr. Die erste Phase ist im wesentlichen eine rein viskoelastische, die bei Entlastung relativ schnell wieder völlig zurückgeht. Danach dominiert die viskose Phase, die als plastisches Fließen, irreversibel ist. Diese Kriechfunktionen gelten nur für den Fall der Theorie 1. Ordnung, nämlich bei konstanter Spannung. Um die Theorie 2. Ordnung, d. h. das Anwachsen der Schnittkräfte mit dem Anwachsen der Kriechverformungen zu erfassen ist es sinnvoller von den zu den Werkstoffmodellen gehörigen Differentialgleichungen auszugehen. Wir beschränken uns auf lineare Modelle und zwar auf das Modell nach Burgers, bei dem die Elemente eine zeitlich konstante Charakteristik haben und auf ein Maxwell-Modell mit Elementen von zeitlich veränderlicher Charakteristik.

2.1 Modell nach Burgers (Bild 2)

Die Angabe eines viskoelastischen Modells oder der zugehörigen Kriechfunktion sind völlig gleichwertige Aussagen, da alle Modellparameter in der Kriechfunktion enthalten sind, was sich am einfachsten beim Burgers-Modell zeigen läßt (Bild 2a). Das Burgers-Modell besteht aus parallel- und hintereinandergeschalteten Feder- und Dämpferelementen, und zwar aus dem Maxwell-Modell mit einem hintereinandergeschalteten Feder- und Dämpferelement (E_1, D_1) und dem danach geschalteten Voigt-Modell mit einem parallelgeschalteten Feder- und Dämpferelement (E_2, D_2), wobei die Dämpferelemente geschwindigkeitsproportional sind. Für die einzelnen Elemente gelten die Materialgesetze /1/

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i}, \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{\dot{\sigma}_i}{D_i} \quad (1)$$

Bei dem Maxwell-Modell mit den hintereinander geschalteten Elementen sind die beiden Spannungen gleich und addieren sich die Dehnungen $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12}$, sodaß für die Dehngeschwindigkeit des Maxwell-Körpers

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{D_1} \quad (2)$$

gilt. Beim Voigt-Modell mit den parallel geschalteten Elementen addieren sich die "Kräfte" zu dem Materialgesetz

$$\sigma_2 = \sigma_{21} + \sigma_{22} = E_2 \varepsilon_2 + D_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (3)$$

Aus der Gesamtdehnung des kombinierten Maxwell- und Voigt-Modells

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_2 \quad (4)$$

läßt sich die Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_2$ des Voigt-Modells unter Verwendung der Gleichung (2) durch die Dehngeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}$ und die Spannung σ darstellen

$$\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} - \frac{\sigma}{D_1} \quad (4a)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Verhältnis E_2/D_2 und addiert die nochmals abgeleitete Gleichung (4a), so ergibt sich daraus schließlich unter Beachtung der Gleichung (3) für den Voigt-Körper die Differentialgleichung des Burgers-Modells

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_2}{D_2} \dot{\varepsilon} = \frac{\ddot{\sigma}}{E_1} + \left(1 + \frac{D_1}{D_2} + \frac{D_1 E_2}{D_2 E_1}\right) \frac{\dot{\sigma}}{D_1} + \frac{E_2}{D_1 D_2} \sigma \quad (5)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung wird sehr einfach, wenn die Spannung σ wie in einem statisch bestimmt gelagerten Zugstab (ohne Zwängung) konstant ist. Dafür lautet die Lösung

$$\varepsilon = A + \frac{\sigma}{D_1} t + B e^{-E_2 t/D_2} \quad (6)$$

oder, wenn man die Anfangsbedingung

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma}{E_1} = \varepsilon_0, \quad \dot{\varepsilon}(0) = \dot{\varepsilon}_1(0) + \dot{\varepsilon}_2(0) = \frac{\sigma}{D_1} + \frac{\sigma}{D_2}$$

einsetzt und das Verhältnis der Dehnungen zur elastischen Dehnung bildet

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{E_1}{D_1} t + \frac{E_1}{E_2} (1 - e^{-E_2 t/D_2}) \quad (7)$$

oder mit den Modellparametern

$$\lambda_i = \frac{E_i}{D_i}, \quad \delta = \frac{E_1}{E_2} \quad (8)$$

in der übersichtlichen Form

$$\Phi(t) = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \lambda_1 t + \delta(1 - e^{-\lambda_2 t}) \quad (9)$$

Diese Beziehung ist auch zugleich die bekannte Kriechfunktion $\Phi(t)$ des Burgers-Modells. Sie besteht aus dem elastischen Wert 1 und dem linearen plastischen Kriechanteil $E_1 t/D_1$ sowie dem viskoelastischen Anteil (Bild 2b)

$$\varepsilon_2 = \delta(1 - e^{-\lambda_2 t}) \quad (10)$$

der vom Voigt-Modell herrührt und relativ schnell den Grenzwert δ annimmt und bei Entlastung wieder völlig zurückgeht. Für Vorgänge mit größeren Belastungszeiten kann daher häufig die vereinfachte Näherung

$$\Phi(t) \sim 1 + \delta + \lambda_1 t \quad (9a)$$

die in Bild 2 als gestrichelte Linie eingetragen ist, angesetzt werden.

2.2 Versuche

In den Versuchen werden normalerweise die Kriechfunktionen ermittelt, da sie sich am einfachsten an Zugproben messen lassen, indem man für eine konstante Spannung die Deformationsgeschichte aufnimmt. Um den Kriechanteil deutlich zu machen, ist es sinnvoll, auf die elastischen Dehnungen zu beziehen, so daß alle Kriechfunktionen mit dem Wert 1 beginnen. Solange das viskoelastische Verhalten linear ist, werden dann bei einem Laminat oder einer Reinharzprobe alle Kriechfunktionen durch eine Kurve, unabhängig vom Spannungsniveau wiedergegeben. Abweichungen ergeben sich erst bei nichtlinearem viskoelastischem Verhalten, und zwar vergrößern sich die Kriechfunktionen dann mit wachsendem Spannungsniveau. Bei einer solchen Auftragung wird unmittelbar deutlich, von welcher Spannung an nichtlinear gerechnet werden muß.

Langzeitversuche sind sowohl an Harzen als auch an roving- und matenverstärkten Laminaten durchgeführt worden (Bild 3,5). Da praktisch nur die Harze kriechen und Kriechdeformationen nur dann zu erwarten sind, wenn die Gesamtkraft oder ein Teil der Kraft über das Harz geleitet wird, muß sich die Kriechfunktion von Laminaten aus der des Harzes ableiten lassen. Um die gemessenen Kriechfunktionen einer Rechnung besser zugänglich zu machen, werden sie häufig durch

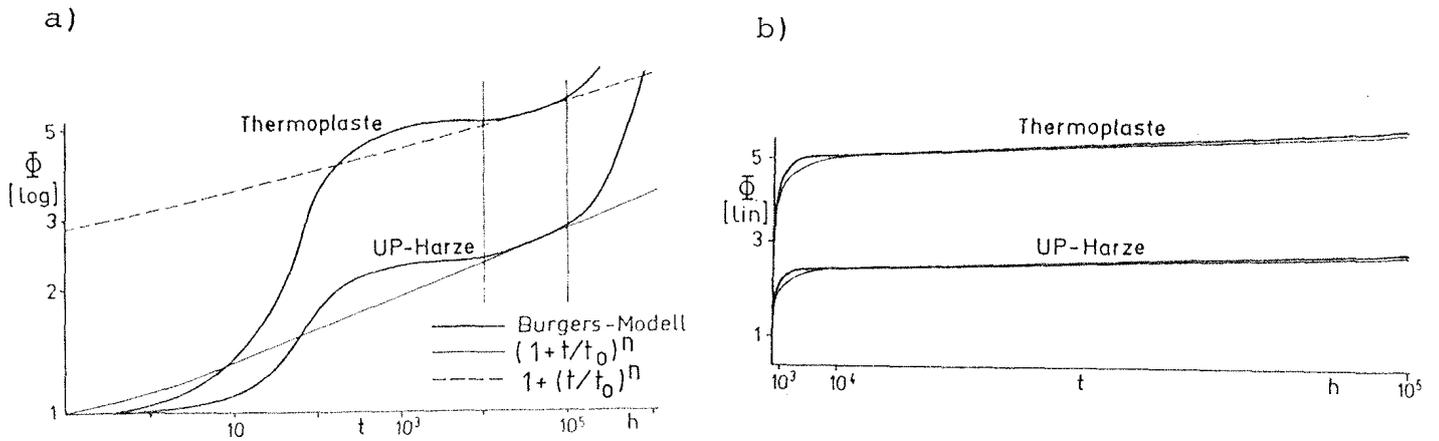


Bild 4: Darstellung der Kriechfunktion
 a) doppelt logarithmisch, b) halb logarithmisch

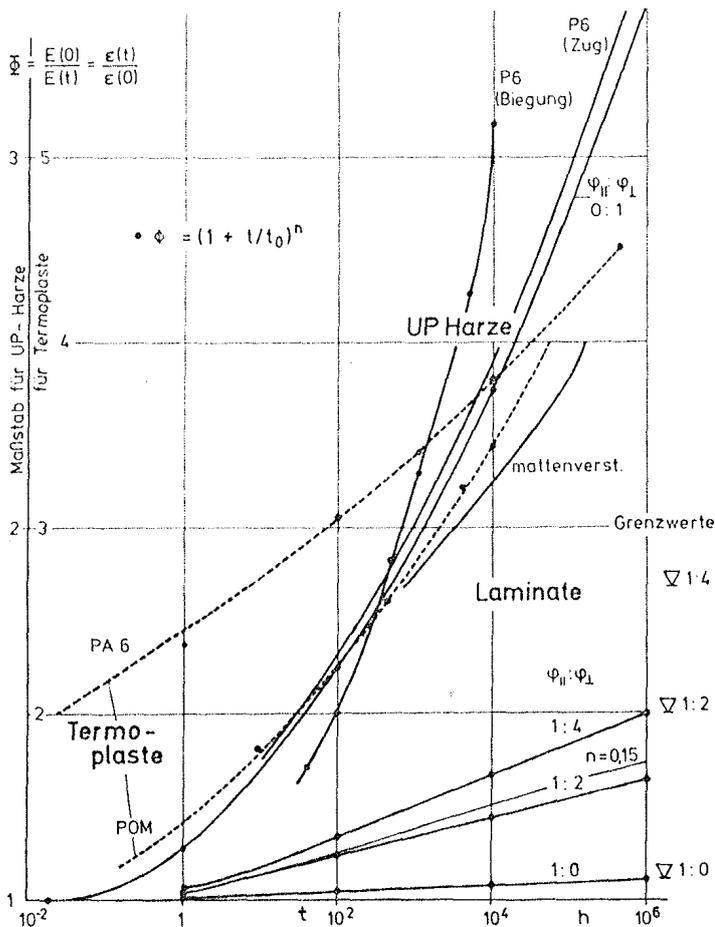


Bild 5: Gemessene Kriechfunktion Φ für UP-Harze, Thermoplaste und GF-UP-Laminat

---, — Meßwerte, ● Potenzgesetz nach Gleichung (11b)
 ∇ Grenzwerte bei völliger Entlastung des Harzes

analytische Kriechfunktionen dargestellt, und zwar entweder durch die des Burgers-Modells (9) oder durch Potenzgesetze der Form

$$\phi(t) = 1 + (t/t_0)^n \quad (11a)$$

oder

$$\phi(t) = (1 + t/t_0)^n \quad (11b)$$

Diese Potenzgesetze beginnen wie gewünscht mit dem Wert 1 und gehen für große Zeiten in ein reines Potenzgesetz $(t/t_0)^n$ über. Sie unterscheiden sich besonders in der Anfangsphase. Das erste Gesetz (11a) - gepunktete Linie in Bild 3b - hat einen wesentlich stärkeren Anstieg ($\phi'(0) = \infty$) als das zweite - dicke Linie in Bild 3b. Die Versuchsergebnisse für Harze und auch für Thermoplaste (Bild 4a) lassen sich sehr gut durch die Beziehung (11b) darstellen. Die Auftragung erfolgt normalerweise in doppelt-logarithmischem Papier (Bild 4a), wobei alle Kurven, die sich durch ein reines Potenzgesetz darstellen lassen, einen geraden Verlauf annehmen, was für die Gesetze (11) nach einer gewissen Anfangsphase zutrifft. Daneben sind aber noch halb-logarithmische Auftragungen mit logarithmischem Zeit- und linearem Dehnungsmaßstab (Bild 4b) und schließlich auch doppelt-lineare Auftragungen (Bild 2,3) möglich. Hierbei muß man besonders darauf achten, daß sich der Verlauf der Kriechfunktionen bei Übergang vom linearen zum logarithmischen Zeitstab sehr stark verändert, da bei der logarithmischen Auftragung der Bereich kleiner Zeiten sehr stark auseinandergezogen wird.

Der Unterschied zwischen der Beschreibung der Meßwerte nach dem Burgers-Gesetz und den Potenzgesetzen wird besonders in der anfänglichen, viskoelastischen Phase und später auch in der viskosen Phase deutlich (Bild 3b). Der anfängliche Anstieg in der viskoelastischen Phase liegt beim Burgers-Modell in etwa zwischen denen der Potenzgesetze (11a) und (11b). In der viskosen Phase nimmt die Kriechrate beim Potenzgesetz mit zunehmender Zeit immer mehr ab, während sie beim Burgers-Modell konstant bleibt, so daß sich bei großen Zeiten ein sehr starkes Zunehmen der Deformationen nach dem Burgers-Modell ergibt. Bei einer halb-logarithmischen Auftragung haben sowohl das Potenzgesetz als auch die Kriechfunktionen nach dem Burgers-Modell im Bereich des viskosen Fließens gekrümmte Verläufe, nur ist der Anstieg bei dem Potenzgesetz bei großen Zeiten wesentlich geringer als beim Burgers-Modell (Bild 4b). Da sich das Kriechver-

halten in einem besonders interessierenden Zeitraum praktisch immer durch ein Burgers-Modell beschreiben läßt, z. B. von 10^4 bis 10^5 h in Bild 4b, ist es für die Nachprüfung von Näherungslösungen sinnvoll das Burgers-Modell zu verwenden, zumal sich dafür analytische Lösungen angeben lassen.

In Bild 5 sind einige gemessene normierte Kriechfunktionen ϕ (ausgezogene Linien) für Harze, für rovingverstärkte Lamine mit unterschiedlichen Verstärkungsgraden parallel (\parallel) und senkrecht (\perp) zur Beanspruchungsrichtung sowie für mattenverstärkte Lamine angegeben. Außerdem sind noch die Werte nach einem Potenzgesetz der Form (11b) als Punkte eingetragen. Die Messungen sind bei den UP-Harzen und den Laminen bis 10^3 Stunden durchgeführt /2/ und nach einem Potenzgesetz auf größere Zeiten extrapoliert. Mit zunehmender Verstärkung nimmt die Kriechneigung der Lamine immer mehr ab, insbesondere, wenn die Verstärkung in die Beanspruchungsrichtung gelegt wird. Bei den rovingverstärkten Harzen müssen die Kriechfunktionen für sehr große Zeiten die rechnerischen Grenzwerte (∇), bei dem die gesamte Kraft nur noch von den Glasfäden parallel zur Kraft-richtung übernommen wird, annehmen. Das Einschwenken auf diesen Grenzwert wird bei den weniger kriechenden UP-Harzen in dem Zeitbereich bis 10^6 Stunden noch kaum bemerkt, vorausgesetzt, daß das Potenzgesetz in diesem Bereich noch gilt. Bei den mattenverstärkten Laminen und bei den querbeanspruchten UP-Lagen (Verstärkungsgrad 0 : 1) ergeben sich wieder stark konvex gekrümmte Kurven ähnlich wie beim Reinharz. Die Kriechfunktionen für solche Lamine können keinen Grenzwert annehmen, da es zu keiner Zeit einen Kraftweg gibt, der nur über Glasfäden führt.

Diese kurze Zusammenstellung zeigt, daß das Kriechverhalten der Lamine noch keineswegs völlig abgeklärt ist. Es ist vor allen Dingen nicht bekannt, insbesondere bei den Potenzgesetzen, wie sie sich aus dem plastischen und dem viskoelastischen Anteil der bei Entlastung völlig zurückgeht, zusammensetzen.

2.3 Erweitertes Maxwell-Modell (Bild 3)

Da das Burgers-Modell die abnehmende Kriechtendenz mit zunehmender Zeit nicht richtig wiedergibt, soll noch ein Werkstoffmodell eingeführt werden, das sich dem veränderlichen viskoplastischen Verhalten

anpassen läßt. Das einfachstmögliche Werkstoffmodell ist das Maxwell-Modell, bei dem das Federglied das elastische Verhalten und der Dämpfer das plastische Verhalten wiedergeben kann. Ein solches vereinfachtes Modell ist vor allen Dingen sinnvoll, wenn man grössere Belastungs- und Entlastungszeiten hat, etwa wie bei der Schneebelastung mit Be- und Entlastungszeiten von einem halben Jahr, bei denen die viskoelastische Phase jeweils ihre Grenzwerte erreicht hat. Um sich an alle möglichen Kriechfunktionen anpassen zu können und um auch zwischen dem viskosen Anteil und dem viskoelastischen Anteil unterscheiden zu können, müssen die Feder- und Dämpfercharakteristiken zeitlich veränderlich gewählt werden. Man könnte zwar schon alle möglichen Kriechfunktionen nachfahren, wenn nur die Dämpfernachgiebigkeit zeitlich veränderlich ist. Es läßt sich dann aber nicht mehr zwischen dem viskoelastischen Verhalten und dem viskosen Fließen unterscheiden, was insbesondere bei Rechnungen nach der Theorie 2. Ordnung unbedingt notwendig ist. Durch die Einführung eines Federlementes mit zeitlich veränderlicher Steifigkeit wird die Rechnung praktisch nicht erschwert. Die Kriechfunktion muß also in drei Teile aufgespalten werden (Bild 3b)

$$\phi = 1 + F_1(t) + F_2(t) \quad , \quad (12)$$

nämlich dem elastischen Anteil der durch die 1 wiedergegeben wird, dem viskosen Anteil $F_1(t)$ und dem viskoelastischen Anteil $F_2(t)$. Der viskoelastische Anteil wird durch das Federelement erfaßt (Bild 3a), wenn die Feder einen zeitlich veränderlichen Elastizitätsmodul hat

$$E(t) = E_0 / (1 + F_2(t)) \quad , \quad (13)$$

der nach kurzer Zeit in den Grenzwert $E_0 / (1 + \delta)$ übergeht (Bild 2b). Das viskose Verhalten muß durch den Dämpfer beschrieben werden, dazu wird die Dämpfernachgiebigkeit proportional der Ableitung \dot{F}_1 gesetzt. Zur Herleitung der Differentialgleichung zwischen den Verzerrungen und den Spannungen muß formuliert werden, daß sich analog zu Gleichung (2) die zeitliche Dehnungszunahme aus der des Federelementes und des Dämpferelementes zusammensetzt

$$E_0 \dot{\epsilon} = [(1 + F_2)\dot{\sigma}] + \dot{F}_1 \sigma = (1 + F_2)\dot{\sigma} + (F_1 + F_2)\dot{\sigma} \quad . \quad (14)$$

Wenn man durch $1 + F_2$ dividiert und die Abkürzung

$$f = \frac{(F_1 + F_2)\dot{\sigma}}{1 + F_2} \quad (15)$$

einführt, lautet schließlich die Differentialgleichung des erweiterten Maxwell-Modells /3/

$$E(t)\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + \underline{f}(t)\sigma \quad . \quad (16)$$

Bei konstanter Spannung σ ergibt sich die Kriechfunktion (12).

Dieses Modell hat zwei Vorteile, die Differentialgleichung (16) ist gegenüber der des Burgers-Modells (5) um eine Ordnung niedriger, wodurch die Lösungen wesentlich einfacher werden, sodaß man selbst in komplizierten Fällen noch zu einfachen analytischen Lösungen gelangt und sich eine numerische Lösung erübrigt.

Außerdem ist es nicht notwendig, die gemessene Kriechfunktion durch analytische Funktionen wie die Potenzgesetze (11) zu approximieren, da man die gemessene Kriechfunktion unmittelbar in die Gleichungen einführen kann, nachdem man sie in den viskoelastischen Anteil F_2 und dem viskoplastischen Anteil F_1 zerlegt hat. Diese Zerlegung ist zur Zeit noch problematisch, weil dafür noch keine Versuchsergebnisse vorliegen. Da in den Vorschriften das Kriechverhalten nur durch ein angenähertes Kriechmaß nach 40 Jahren berücksichtigt wird, genügt es einen Anteil, z.B. von einem Drittel dieses Wertes, als viskoelastischen Anteil zu erklären und den Rest als viskoplastisch anzusehen.

3: Zyklische Beanspruchung mit abschnittsweise konstanten Spannungen (Theorie 1. Ordnung)

Um später den Einfluß der Theorie 2. Ordnung aufzeigen zu können, müssen zunächst noch die Ergebnisse nach der Theorie 1. Ordnung zusammengestellt werden. Bei der Berechnung nach der Theorie 1. Ordnung, d. h. bei den üblichen Lasten ohne Stabilitätsglieder, kann man davon ausgehen, daß sich die Beanspruchung durch das Kriechen nicht verändert. Das ist erfüllt, wenn die Konstruktionen statisch bestimmt sind oder wenn bei statisch unbestimmten Konstruktionen alle Bauelemente die gleiche Kriechfunktion haben und es damit zu keiner Kraftumlagerung durch das Kriechen kommt. Sind dagegen die Elemente vom Kriechen her unterschiedlich oder haben sie mit anderen Worten unterschiedliche Kriechfunktionen, so ist mit einer Kraftumlagerung zu rechnen. Die stark kriechenden Teile entlasten sich auf Kosten der weniger stark kriechenden. Wenn man trotzdem dafür konstante Spannungen annimmt, bleibt man für die stark kriechenden Teile auf der sicheren Seite.

Wenn die Kriechverformungen linear mit der Beanspruchung zunehmen, kann man die Kriechverformung aus den einzelnen Be- und Entlastungszyklen überlagern. Eine abschnittsweise Belastung wird durch die Zeitdauer t_1 der Belastung und die Periode T (die Wiederkehr der Belastung von einem Jahr) beschrieben. Außerdem geht noch die Lebensdauer von 40 Jahren in Form von m Lastzyklen ein.

Bevor die Superposition im einzelnen vorgenommen wird, betrachten wir zunächst den Einfluß einer Laststufe beim Burgers-Modell Bild 6. Der Spannungswert kann wegen des linearen Verhaltens zu 1 gesetzt werden. Für den zeitlichen Verlauf der Verformungen gilt die Kriechfunktion [(9), Bild 7]. Wenn man nach der Zeit t_1 die Last wegnimmt, kann das beim linearen System durch Aufbringung einer zusätzlichen negativen Last der gleichen Größe erfolgen (Bild 6b), d. h. indem man die zeitlich versetzte Kriechfunktion (Bild 6c)

$$\phi(t') = 1 + \lambda_1 t' + \delta(1 - e^{-\lambda_2 t'}) \quad (9a)$$

abzieht, wobei t' vom Zeitpunkt der Entlastung aus gezählt wird. Nach der Entlastung ($t \geq t_1$) bleibt die Differenz der beiden Kriechfunktionen (9) und (9a) übrig (Bild 7)

$$\phi_2(t) = \phi(t) - \phi(t') = \lambda_1 t_1 + \delta(e^{-\lambda_2 t'} - e^{-\lambda_2 t}) = \lambda_1 t_1 + \delta(1 - e^{-\lambda_2 t_1}) e^{-\lambda_2 t'} \quad (17)$$

Sie setzt sich aus dem konstanten plastischen Kriechbeitrag $\lambda_1 t_1$ und dem abklingenden viskoelastischen Beitrag

$$\delta(1 - e^{-\lambda_2 t_1}) e^{-\lambda_2 t'} \quad (18)$$

zusammen. Bei den üblichen Erholungspausen von ungefähr einem halben Jahr oder $0,45 \cdot 10^4 h$ ist dieser Anteil abgeklungen, sodaß zu Beginn des nächsten Belastungszyklus in der Regel nur noch der plastische Anteil übrig bleibt. Am Ende der nächsten Periode $2T$ ist der viskoelastische Anteil (18) mit Sicherheit abgeklungen.

Daraus ergibt sich die Überlagerungsregel, daß die plastischen Kriechbeiträge $\lambda_1 t_i$ der einzelnen Lastabschnitte linear zu überlagern sind und am Ende des letzten Lastabschnittes noch der viskoelastische Endwert $1 + \delta$ bei Einschluß der elastischen Verformungen oder δ , wenn man nur die Kriechverformungen allein betrachtet, hinzuzufügen ist. Dabei ist angenommen, daß das viskoelastische Endkriechmaß $\delta(1 - e^{-\lambda_2 t_2}) \rightarrow \delta$ im letzten Lastabschnitt erreicht ist, was bei den meisten Laminaten der Fall ist. Wird die Konstruktion am Sommeranfang in Dienst gestellt, ergibt sich die in Bild 8 dargestellte Belastung. Sie besteht aus $m = 40$ Lastschritten mit der kleineren Belastung p_1 (Sommerlast) und der Zeitdauer t_1 , die der Dauerbelastung entspricht und 40 Lastabschnitten mit der Querbelastung p_2 (Winterlast), die um die Schneebelastung größer ist als die Dauerbelastung und die Lastdauer t_2 hat. Die Summe der beiden Lastdauern t_i ist gleich der Periode T von einem Jahr. Wenn man die Endverformung am Ende des $m = 40$. Winters auf die zur Winterbelastung p_2 gehörigen elastischen Verformungen $w_{2,el}$ bezieht, beträgt das Verformungsverhältnis infolge der Winterlasten

$$\phi_{22} = \frac{w_2}{w_{2,el}} = 1 + \delta + m\lambda_1 t_1 \quad , \quad (19a)$$

wozu noch der viskoplastische Anteil aus den Sommerlasten p_1 hinzukommt

$$\phi_{21} = \frac{p_1}{p_2} m\lambda_1 t_2 \quad . \quad (19b)$$

Um dieser Beziehung eine größere Allgemeingültigkeit zu geben, ist es sinnvoll, die allgemeinere Form (12) der Kriechfunktion einzuführen, d. h. sie in den viskoplastischen Anteil F_1 und den viskoelastische Anteil F_2 , der bei Belastungsdauern von 5 bis 7 Monaten normalerweise den Endwert

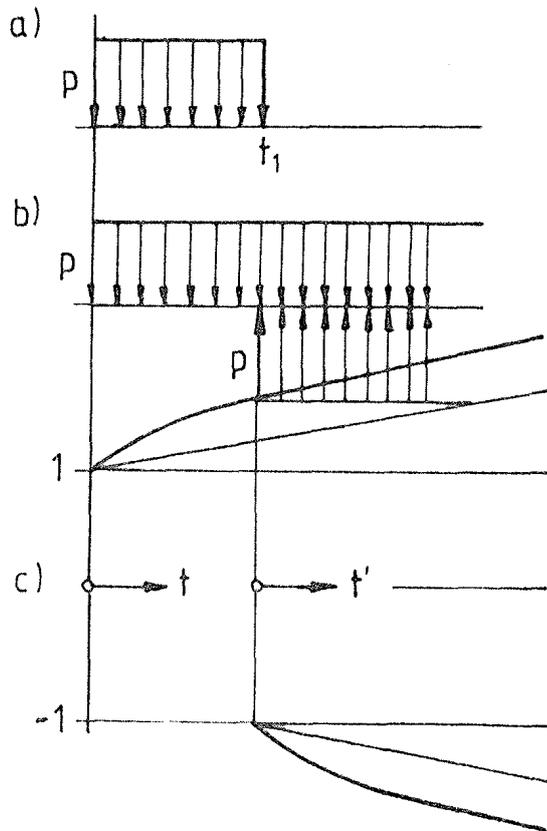


Bild 6: Superposition der Kriechdeformationen bei den einzelnen Belastungsschritten (Burgers-Modell)
 a) Belastungsschritt, b) zur Superposition, c) Kriechfunktionen $\phi(t)$ und $\phi(t')$

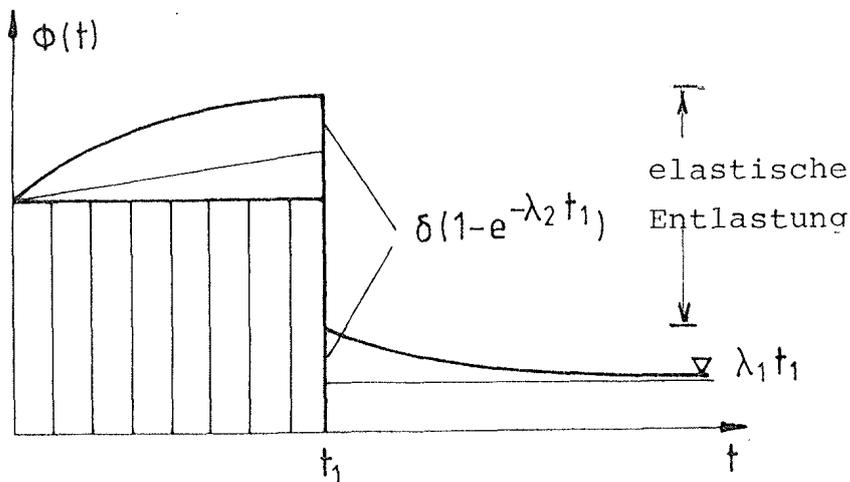


Bild 7: Darstellung der Ergebnisse nach dem Burgers-Modell für einen Belastungszyklus
 — vollständige Verformung, — viskoplastischer Anteil

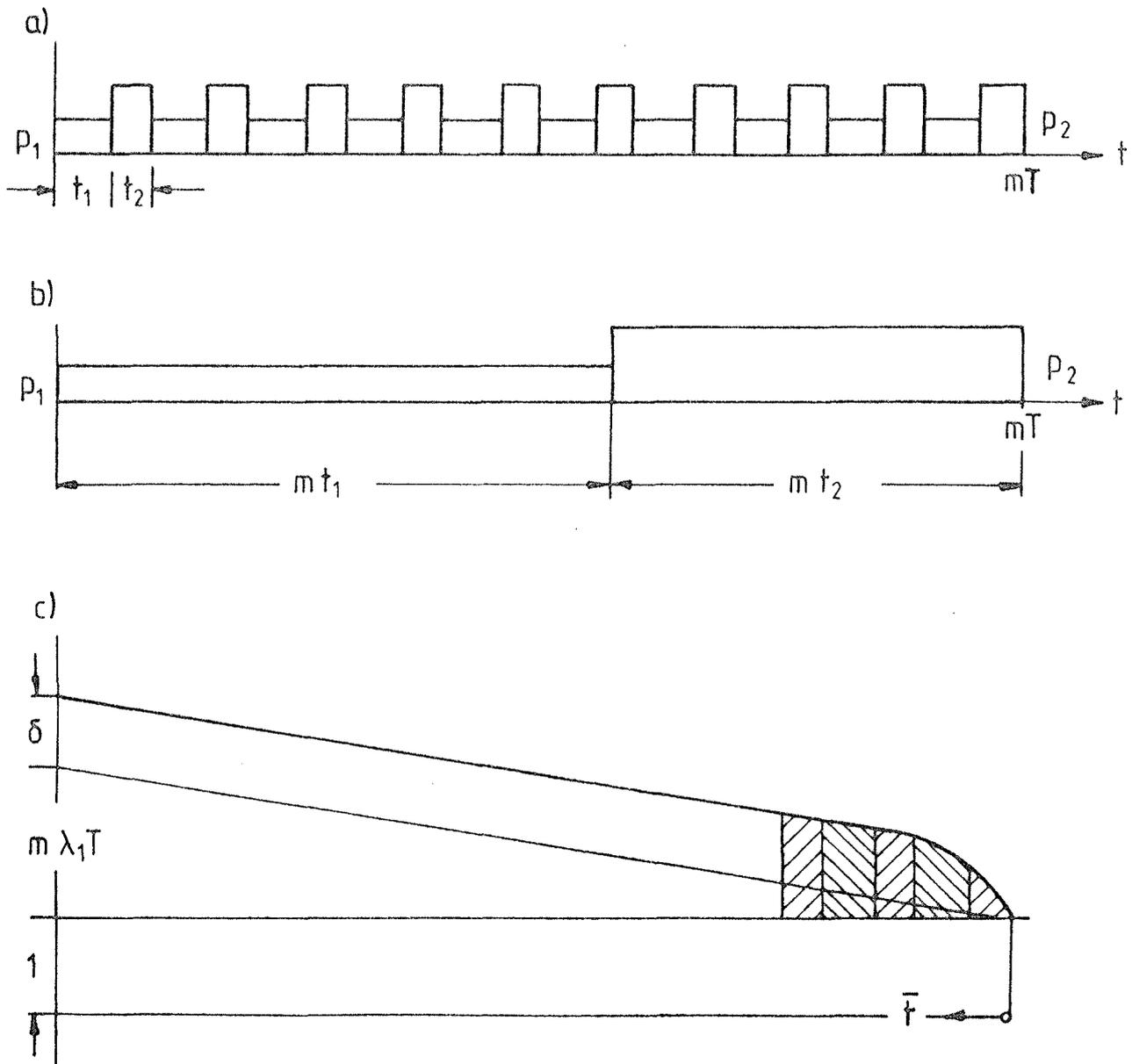


Bild 8: Zur Superposition der Kriechverformungen infolge der Lastzyklen

- a) zyklische Querbelastung
- b) zeitlich geraffte Querbelastung
- c) Superposition an Hand der Kriechfunktion

$$F_{2,\infty} = \delta = F_2(mT) \quad (20)$$

annimmt, zu ersetzen. Da sich die viskoplastischen Anteile linear überlagern, kann man die 2m Lastabschnitte raffen und zu zwei großen Lastabschnitten mit der Dauer von mt_1 und mt_2 zusammenfassen (Bild 8b). Da in der Vorschrift nur die Endkriechmaße und keine Kriechkurven angegeben sind, ist es sinnvoll, neben dem viskoelastischen auch das plastische Endkriechmaß $F_1(mT)$ einzuführen, zumal sich die viskoplastischen Verformungsanteile linear akkumulieren und der einfache Zusammenhang

$$m\lambda_1 t_i = \frac{t_i}{T} F_1(mT) \quad (21)$$

besteht. Dann lautet die Überlagerungsregel

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = 1 + \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{t_1}{T} + \frac{t_2}{T} \right) F_1(mT) + F_2(mT) , \quad (22)$$

wobei jetzt nur noch die einzelnen Endwerte $F_1(mT)$ und (20) sowie die Verhältnisse der Lastzeiten t_i/T und der Belastung p_1/p_2 zwischen der Sommerbelastung und der Winterbelastung eingehen. Es erweist sich bei Erweiterung auf Theorie 2. Ordnung als sinnvoll, mit der Sommer- und Winterbelastung p_i getrennt und nicht mit der Sommerbelastung p_1 , die zugleich die Dauerbelastung ist, und der zusätzlichen Schneebelastung $p_2 - p_1$ zu rechnen. Die einzige Unsicherheit bei der Übertragung auf die Versuchsergebnisse besteht darin, daß man vom Gesamtkriechmaß K nicht immer sagen kann, wieviel davon auf das viskoplastische und das viskoelastische Kriechen entfällt.

Bei einer versuchsmäßig gefundenen Kriechfunktion kann man analog vorgehen, indem man die Kriechbeiträge der einzelnen Lastabschnitte addiert. Damit dabei das viskoelastische Kriechen von Anfang an richtig erfaßt wird, ist es sinnvoll die Zeit \bar{t} von der Endzeit (40 Jahre) her zu zählen und die Kriechfunktion $\Phi(\bar{t})$ wie in Bild 8c einzuführen. Die zu erwartenden relativen Kriechverformungen ergeben sich durch Differenzbildung der Kriechfunktion zu den Be- und Entlastungszeiten, und zwar für die Laststufen p_2 (Winterlasten)

$$\phi_{22} = \Phi(t_2) + \Phi(T+t_2) - \Phi(T) + \Phi(2T+t_2) - \Phi(2T) + \dots \quad (23a)$$

und für die Laststufen p_1 (Sommerlasten)

$$\phi_{21} = \Phi(T) - \Phi(t_2) + \Phi(2T) - \Phi(T+t_2) + \dots \quad (23b)$$

oder in der zusammengefaßten Form

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = 1 + \sum_{m=0}^{39} [\phi(mT+t_2) - \phi(mT)] + \sum_{m=0}^{39} [\phi((m+1)T) - \phi(mT+t_2)] \quad (24)$$

In Tabelle 1 ist diese Auswertung für die Kriechgesetze der Form (11b) vorgenommen worden und zwar getrennt für den Winteranteil ϕ_{22} und den Sommeranteil ϕ_{21} , wobei als Exponenten n die Werte 0,15, 0,085 und 0,4 gewählt sind. Außerdem sind die Bezugszeiten t_0 in (11), die ein Maß für das Erreichen des viskoelastischen Endkriechmaßes darstellen, zwischen den Werten $T, T/2, T/4, T/10$ variiert worden. Die Zeiten t_1 sind zu $t_1 = t_2 = T/2$ festgesetzt. Da in der Vorschrift /5/ nur das Endkriechmaß und nicht der Verlauf der Kriechfunktionen angegeben ist, sind in Tabelle 1 als Nä-

herung noch die Ergebnisse der "linearen" Überlagerungsregel (22) eingetragen. Dabei ist angenommen, daß das viskoelastische Endkriechmaß $F_2(mT)$ gleich dem Kriechmaß am Ende des ersten Belastungsschrittes

$$F_2(mT) = F(t_2) - 1 = (1 + t_2/t_0)^n - 1 \quad (25a)$$

ist. Für F_1 bleibt dann der Rest

$$F_1(mT) = F(mT) - 1 - F_2(mT) \quad (25b)$$

übrig. Diese Werte sind ebenfalls in Tabelle 1 angegeben. Ein Vergleich zwischen den genauen Werten nach Gleichung (24) und der Näherung nach (22) zeigt eine außerordentlich gute Übereinstimmung, sodaß diese linearisierte Näherung für Aufgaben der Baupraxis ohne weiteres angewandt werden kann. Eine Näherung mit nur zwei gerafften Zeitschritten ergibt im Falle der Potenzgesetze (11) zu große Fehler, sodaß sie nicht in Betracht kommt.

Tabelle 1: Vergleich der Winter- und Sommeranteile der Kriechfunktionen nach einem Potenzgesetz (11b)

n	T/t ₀	t ₂ /T ₀	ϕ(40T)	ϕ ₂₂	ϕ ₂₁	F ₁ (40T)	F ₂ (40T)	ϕ ₂₂	ϕ ₂₁
				nach (24)	nach (25)	nach (22)			
.150	1.000	.500	1.7455	1.3902	.3553	.6828	.0627	1.4041	.3414
.150	2.000	1.000	1.9332	1.5002	.4329	.8236	.1096	1.5214	.4118
.150	4.000	2.000	2.1430	1.6319	.5111	.9639	.1791	1.6611	.4819
.150	10.000	5.000	2.4574	1.8433	.6141	1.1490	.3083	1.8829	.5745
.085	1.000	.500	1.3712	1.1955	.1756	.3361	.0351	1.2031	.1680
.085	2.000	1.000	1.4529	1.2455	.2074	.3922	.0607	1.2568	.1961
.085	4.000	2.000	1.5402	1.3038	.2364	.4423	.0979	1.3190	.2212
.085	10.000	5.000	1.6644	1.3948	.2696	.4999	.1645	1.4145	.2500
.040	1.000	.500	1.1601	1.0848	.0754	.1438	.0164	1.0882	.0719
.040	2.000	1.000	1.1922	1.1050	.0872	.1641	.0281	1.1101	.0820
.040	4.000	2.000	1.2254	1.1284	.0970	.1805	.0449	1.1352	.0902
.040	10.000	5.000	1.2709	1.1641	.1068	.1966	.0743	1.1726	.0983

4. Lösungen für Probleme nach Theorie 2. Ordnung

Wenn Druckkräfte vorhanden sind, wird die Überlagerung komplizierter, da die Schnittkräfte in den einzelnen Lastabschnitten nicht mehr konstant sind, sondern sich mit zunehmender Ausbiegung infolge des Kriechens ständig vergrößern, wodurch dann der Kriechprozeß seinerseits wieder angeregt wird. Als charakteristisches Problem wird der gelenkig gelagerte Balken unter konstanter Druckkraft P und unter sinusförmiger Querbelastrung p sowie sinusförmiger Vorverformung w_0 behandelt (Bild 9). Die daraus gewonnenen Ergebnisse insbesondere der Kriechzuwachs lassen sich auf die übrigen statischen Systeme, wie z. B. Schalen oder Durchlaufträger, übertragen, wenn man davon ausgeht, daß die Vorverformung und die Belastung wie die Eigenformen, das sind die Knickfiguren beziehungsweise Beulfiguren im elastischen Falle, verlaufen / 4/.

Die Querbelastrung und die Druckkraft verändern sich in den einzelnen Zeitabschnitten nicht und kehren zyklisch nach T wieder (Bild 1). Für die zugehörigen Verformungen und Schnittkräfte lassen sich bei Zugrundelegung des Burgers-Modells (Abschnitt 2.1) und des erweiterten Maxwell-Modells (Abschnitt 2.3) analytische Lösungen angeben, woraus dann Näherungsbeziehungen abgeleitet werden können.

4.1 Lösung für das Burgers-Modell

Die Ausbiegung des Balkens wird mit $w(x, t)$, die Vordeformation mit $w_0(x)$ bezeichnet, $(\)'$ bedeutet Ableitung nach x und $(\)\dot{\ }$ Ableitung nach t . Die Gleichgewichtsaussage für das Biegemoment M

$$M''(x, t) = P [w(x, t) + w_0(x)]'' - p(x) \quad (26)$$

und die verformungsgeometrische Aussage zwischen der Krümmung κ und der Durchbiegung w

$$\kappa(x, t) = - w''(x, t) \quad (27)$$

sind unabhängig vom Materialgesetz. Beim Burgers-Modell lautet es in Analogie zu (5) mit den Modellparametern (8)

$$B_1 (\ddot{\kappa} + \lambda_2 \dot{\kappa}) = \ddot{M} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta \lambda_2) \dot{M} + \lambda_1 \lambda_2 M, \quad (28)$$

wobei B_1 die elastische Biegesteifigkeit $E_1 I$ ist. Wenn man die Gleichung noch zweimal nach x ableitet und die Momente durch Gleichung (26) und die Krümmung durch Gleichung (27) ersetzt, erhält man

schließlich die partielle Differentialgleichung für die Durchsenkung

$$B_1 (\ddot{w} + \lambda_2 \dot{w})'''' + P [w'' + (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta \lambda_2) \dot{w} + \lambda_1 \lambda_2 w]'' = \lambda_1 \lambda_2 (p - Pw'') \quad (29)$$

im Gegensatz zu der gewöhnlichen Differentialgleichung für den elastischen Fall

$$Bw'''' + Pw'' = p - Pw'' \quad (29a)$$

Die partielle Gleichung (29) geht bei sinusförmiger Ausbiegung und Vordeformation sowie sinusförmiger Belastung

$$w(x, t) = W(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_0(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad p(x) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (30)$$

in die gewöhnlichen Differentialgleichung für die Durchsenkung $W(t)$ in Stabmitte über

$$\ddot{W} + \left[\lambda_2 - \frac{\psi}{1-\psi} (\lambda_1 + \delta \lambda_2) \right] \dot{W} - \frac{\psi}{1-\psi} \lambda_1 \lambda_2 W = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{1-\psi} \left[\psi w_0 + \frac{p_0}{B_1} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \right] \quad (31)$$

mit dem Knickparameter

$$\psi = \frac{P}{B_1} \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \quad (32)$$

der das Verhältnis zwischen der Druckkraft und der elastischen Knickkraft angibt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung setzt sich aus der partikulären

$$W_{\text{part}} = - \frac{1}{\psi} \left[\psi w_0 + \frac{p_0}{B_1} \left(\frac{l}{\pi} \right)^4 \right] = - \frac{\bar{w}_0}{\psi} \quad (33a)$$

und der homogenen

$$\bar{W}_{\text{hom}} = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \quad (33b)$$

zusammen, wobei sich die α -Werte aus dem Modellparametern (8) und dem Knickparameter (32) ergeben

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} (\beta - \lambda_2 \pm \sqrt{(\beta - \lambda_2)^2 + 4\psi \lambda_1 \lambda_2 / (1-\psi)}) \quad (34)$$

mit

$$\beta = \frac{\psi}{1-\psi} (\lambda_1 + \lambda_2 \delta)$$

Hieraus folgt, daß sich mit der Druckkraft P_i in den einzelnen Zeitabschnitten auch die Werte α_1 , α_2 und β ändern.

Es läßt sich eine rekursive Lösung aufbauen, indem man für einen Zeitabschnitt $\Delta t = t_i$ mit konstanter Querbelastung p_i und konstanter Druckbelastung P_i die Lösung aufstellt (Bild 10), und dann aus den Endwerten des einen Abschnittes die Anfangswerte des nächsten Abschnittes ermittelt. Da sich am Übergang von einem Zeitabschnitt

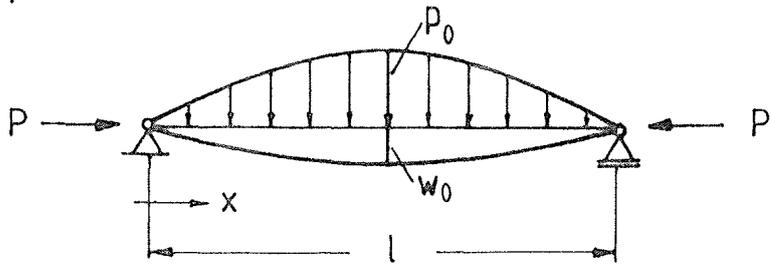


Bild 9: Knickstab

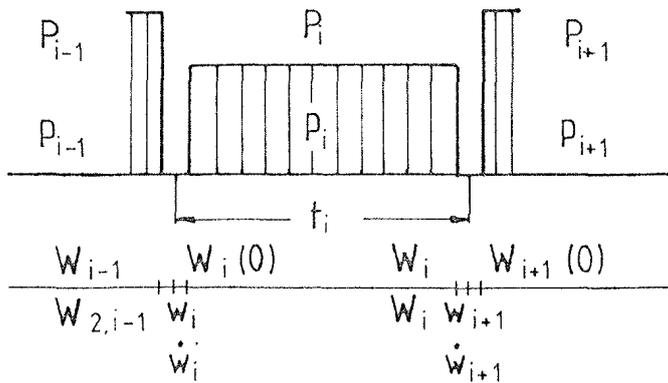


Bild 10: Vorgehensweise zur Erfassung der Glieder nach der Theorie 2. Ordnung bei dem Werkstoffmodell nach Burgers (Betrachtung des i. Zeitabschnitt)

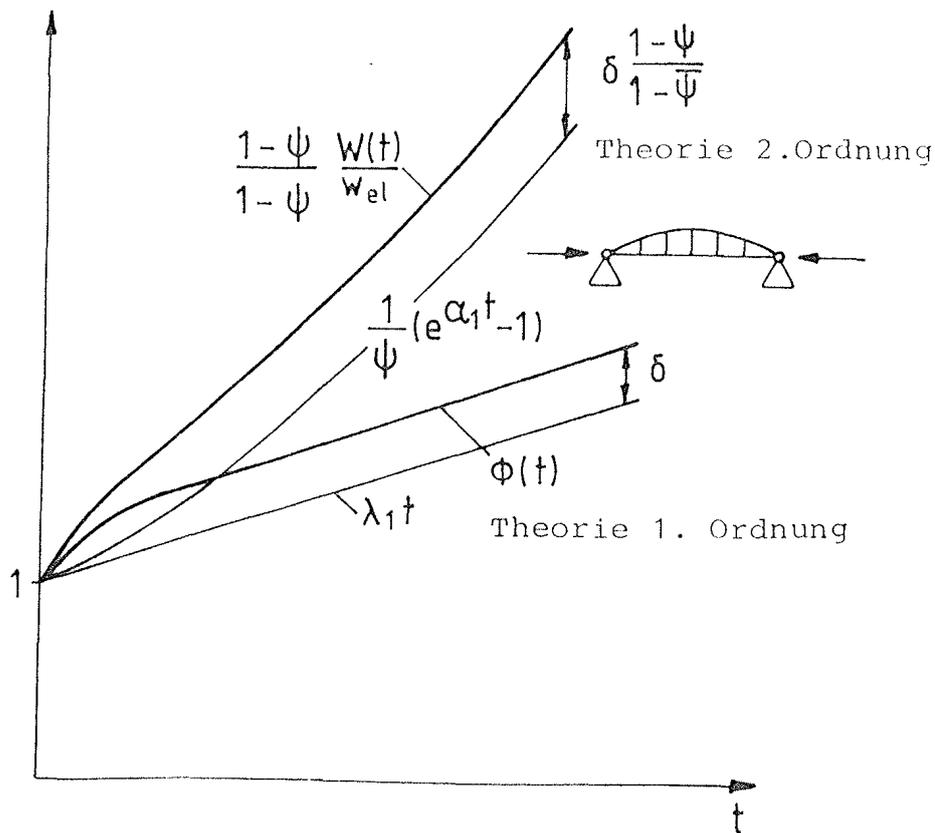


Bild 11: Ersatzkriechfunktion für Probleme nach der Theorie 2. Ordnung

zum anderen sowohl die Querbelastrung als auch die Druckbelastrung ändern kann, ist es sinnvoll wie in Bild 10 angegeben kurz vor Ende des Zeitabschnittes i die Last herunterzufahren und danach auf den neuen Wert hochzufahren. Dabei stellt sich im Zwischenbereich $(i - 1 \div i)$ ein kraftloser Zustand ein, sodaß zu Beginn des i . Abschnittes die "kraftlose" Vorverformung w_i vorliegt, zu der gemäß Gleichung (29a) bei Aufbringung der Last p_i und der Druckkraft P_i die elastische Anfangsverformung nach Theorie 1. Ordnung

$$\bar{w}_i = \psi_i w_i + \frac{P_i}{B_1} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 = \psi_i w_i + w_{pi} \quad (35a)$$

und nach Theorie 2. Ordnung

$$\frac{\bar{w}_i}{1 - \psi_i} = W_i(o) \quad (35b)$$

gehört. Der letztere Wert ist auch zugleich der Anfangswert $W_i(o)$ für den i . Zeitabschnitt.

Außerdem bleibt bei völliger Entlastung noch eine Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_2$ im Voigt-Glied aus dem $(i - 1)$. Abschnitt entsprechend der Gleichung (3)

$$\dot{\epsilon}_i = -\lambda_2 \epsilon_{2,i-1} \quad (36)$$

übrig, da bei plötzlicher Entlastung des elastischen Gliedes im Voigt-Teil der zugehörige Dämpfer angesprochen wird. Die vollständige erste Ableitung für den neuen Zeitabschnitt i setzt sich nun aus dem Wert (36) bei vollständiger Entlastung und aus dem zusätzlichen Wert infolge der Lastaufbringung entsprechend Gleichung (1) und (2) zusammen

$$\dot{\epsilon}_i(o) = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{12} + \dot{\epsilon}_2 = \left[\frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{D_1} + \frac{\sigma}{D_2} \right]_i + \dot{\epsilon}_i$$

Bei Übertragung auf den Biegestab lautet diese Beziehung

$$B_1 \dot{\kappa}_i(o) = \dot{M}_i(o) + (\lambda_1 + \delta \lambda_2) M_i(o) + \kappa_i \quad (37)$$

Um hieraus die Anfangsbedingung für $\dot{W}_i(o)$ ableiten zu können, werden noch die Momente $M(t)$ benötigt. Nach Gleichung (26) gilt für das Moment $M(t)$ in Stabmitte bei ebenfalls sinusförmigem Verlauf des Momentes

$$M(t) = P[W(t) + w_o] + p\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = P[W_i(t) + w_i] + w_{pi} B_1 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (38)$$

Bei Beginn der neuen Laststeife ist nach (35)

$$W_i(o) = (\psi_i w_i + w_{pi}) / (1 - \psi_i) \text{ und } w_o = w_i,$$

sodaß

$$M_i(0) = P_i \left(\frac{\psi_i w_i + w_{pi}}{1-\psi_i} + w_i \right) + p_i \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2 = \frac{1}{1-\psi_i} \left[P_i w_i + w_{pi} B_1 \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \right] \quad (38a)$$

und

$$\dot{M}_i(0) = P_i \dot{W}_i(0)$$

wird. Berücksichtigt man ferner, daß sich die zeitliche Ableitung der Krümmung in Stabmitte bei einem gelenkig gelagerten Stab durch die zeitliche Ableitung der Durchbiegungsamplitude \dot{w} darstellen läßt

$$\dot{\kappa} = -w'' = \left(\frac{\pi}{\ell} \right)^2 \dot{W},$$

dann geht die Bedingung (37) mit der Abkürzung (35a) über in

$$\dot{W}_i(0) = \frac{\lambda_1 + \delta \lambda_2}{1-\psi_i} \bar{w}_i + \psi_i \dot{W}_i(0) + \dot{w}_i,$$

woraus die zweite Anfangsbedingung

$$\dot{W}_i(0) = \frac{\beta_i}{\psi_i} \frac{\bar{w}_i}{1-\psi_i} + \frac{\dot{w}_i}{1-\psi_i} \quad (39)$$

folgt.

Mit den Anfangsbedingungen (35b) und (39) ergeben sich die beiden Gleichungen für die noch freien Konstanten A_i der homogenen Lösung (33b)

$$A_1 + A_2 = \frac{\bar{w}_i}{1-\psi_i} + \frac{\bar{w}_i}{\psi_i} = \frac{\bar{w}_i}{\psi_i (1-\psi_i)}$$

$$A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = \frac{\beta_i}{\psi_i} \frac{w_i}{1-\psi_i} + \frac{\dot{w}_i}{1-\psi_i}$$

zu

$$A_1 = \frac{1}{(1-\psi_i)(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{\bar{w}_i}{\psi_i} (\beta_i - \alpha_2) + \dot{w}_i \right], \quad A_2 = - \frac{1}{(1-\psi_i)(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\frac{\bar{w}_i}{\psi_i} (\beta_i - \alpha_1) + \dot{w}_i \right]. \quad (40)$$

Wenn man die Verformung am Ende des Zeitabschnittes t_i mit W_i bezeichnet, beträgt die Gesamtauslenkung zu dieser Zeit $W_i + w_i$. Bei völliger Entlastung wird das dazu gehörige Moment (38)

$$\Delta M_i = P_i (W_i + w_i) + p_i \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2$$

herausgenommen und die zu diesem Moment gehörige elastische Verformung

$$\Delta w_i = \frac{\Delta M_i}{B_1} \left(\frac{\ell}{\pi} \right)^2$$

abgezogen. Damit bleibt in der kraftlosen Phase zwischen den Bereichen i und $i + 1$ die Verformung

$$w_{i+1} = W_i + w_i - \Delta w_i = (1-\psi_i)(W_i + w_i) - \frac{P_i}{B_1} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \quad (41)$$

übrig. Sie ist zugleich die "kraftlose Vorverformung" für den neuen Abschnitt $i + 1$.

Die Verformung w_{2i} des elastischen Elementes des Voigt-Gliedes am Ende des Zeitabschnittes t_i bewirkt nach (36) die zeitliche Änderung der Durchsenkung in der kraftlosen Zwischenphase

$$\dot{w}_{i+1} = -\lambda_2 w_{2i} \quad ,$$

die für die Berechnung der neuen Konstanten A_1 und A_2 nach (40) benötigt wird. Aufgrund des Materialgesetzes (3) für den Voigt-Teil läßt sich der Auslenkungsanteil w_{2i} durch das zu übertragende Moment und den Dämpferanteil ausdrücken

$$\kappa_2 = \frac{M}{B_1} \delta - \frac{\kappa_2}{\lambda_2} \quad \text{oder} \quad w_{2,i} = \frac{M}{B_1} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \delta - \frac{\dot{w}_2}{\lambda_2} \quad ,$$

wobei sich die Geschwindigkeit κ_2 aus der Summenbeziehung (4) wie folgt

$$\dot{\kappa}_2 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \dot{w}_2 = \dot{\kappa} - \frac{\dot{M}}{B_1} - \frac{M}{B_1} \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \left[\dot{W} - \frac{\dot{M}}{B_1} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 - \frac{M}{B_1} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \lambda_1 \right]$$

durch die Durchsenkung und das Moment ausdrücken läßt. Damit wird

$$\lambda_2 \kappa_2 = \lambda_2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 w_2 = \frac{M}{B_1} (\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \dot{W} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 + \frac{\dot{M}}{B_1}$$

oder, wenn man die Beziehung (38a) für die Momente und die Ableitung einsetzt

$$\lambda_2 w_{2i} = [\psi_i (W_i + w_i) + w_{pi}] (\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \dot{W}_i (1-\psi_i) \quad .$$

Drückt man schließlich die Größen W_i und \dot{W}_i mit Hilfe der Lösung (33) aus, so heben sich die konstanten Terme weg und es bleiben allein die Anteile der homogenen Lösung (33b) übrig.

$$\lambda_2 w_{2i} = A_1 [\psi_i (\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \alpha_1 (1-\psi_i)] e^{\alpha_1 t_i} + A_2 [\psi_i (\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \alpha_2 (1-\psi_i)] e^{\alpha_2 t_i} \quad (42)$$

Hieraus erkennt man, daß sich die Verformung von Bereich zu Bereich rekursiv weiter ermitteln läßt, indem man die hier angegebene Lösung als Grundstock verwendet und lediglich die Endverformungen des einen Abschnittes und zwar in der kraftlosen Übergangsphase als Anfangswert für den neuen Abschnitt verwendet. Für den ersten Lastschritt ist $w_i = w_0$ gleich der ursprünglichen Vordeformation und $w_{2i} = 0$.

Für eine Diskussion ist die allgemeine Lösung zu schwerfällig, sie läßt sich nur mit Hilfe eines Rechners auswerten. Wenn man dagegen berücksichtigt, daß die Werte λ_1 sehr klein sind und die Werte λ_2 so groß sind, daß in den einzelnen Belastungsabschnitten schon der

Endkriechwert $\delta(1 - e^{-\lambda_2 t}) \rightarrow \delta$ erreicht ist, läßt sich eine analytische Auswertung vornehmen. In diesem Falle vereinfachen sich mit

$$\delta' = \frac{\delta\psi}{1-\psi}, \quad \lambda_1' = \frac{\lambda_1\psi}{1-\psi} \quad \text{und} \quad \lambda_2' = \lambda_2(1-\delta') = \lambda_2 \frac{1-\psi(1+\delta)}{1-\psi} \quad (43)$$

die α_i -Werte (34) der homogenen Lösung (33b)

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -\lambda_2' + \lambda_1' \pm \sqrt{\lambda_2'^2 - 2\lambda_2'\lambda_1' + \lambda_1'^2 + 4\lambda_1'\lambda_2'} \right\}$$

$$\sim 2\lambda_2\lambda_1'(1+\delta')$$

zu

$$\alpha_{1,2} \sim \frac{1}{2} \left\{ -\lambda_2' + \lambda_1' \pm \lambda_2' \left(1 + \frac{\lambda_1'}{\lambda_2'} \frac{1+\delta}{1-\delta} \right) \right\}$$

oder nach Zusammenrechnung

$$\alpha_{1,2} \sim \frac{\lambda_1'}{1-\delta'} = \frac{\psi\lambda_1}{1-\psi(1+\delta)} = \frac{\psi\lambda_1}{1-\psi}$$

$$- \lambda_2' = -\lambda_2 \frac{1-\psi}{1-\psi} \quad (44)$$

Die α_i -Werte hängen unmittelbar von den Werkstoffparametern λ_i ab und werden lediglich durch den Knickparameter ψ nach der Theorie 2. Ordnung verändert. Der α_2 -Wert ist negativ. Neben dem elastischen Parameter ψ (32) geht noch der Wert

$$\bar{\psi} = \psi(1 + \delta) \quad (32a)$$

ein. Er ergibt sich, wenn man die zusätzliche Weichheit des schnell ablaufenden Viskoelastizitätsanteils δ zu der elastischen Verformung zuschlägt, d. h. den effektiven E-Modul entsprechend abmindert.

Mit den Kombinationen

$$\alpha_1 - \alpha_2 \sim -\alpha_2 = \lambda_2', \quad \beta - \alpha_2 \sim \lambda_2\delta' + \lambda_2' = \lambda_2, \quad \beta - \alpha_1 \sim \lambda_2\delta'$$

ergeben sich die Näherungsbeziehungen für die Konstanten A_i (40) mit (35a)

$$A_1 = \frac{\bar{w}_i}{\psi_i(1-\bar{\psi}_i)} - \frac{W_{2,i-1}}{1-\bar{\psi}_i} = \frac{w_i - W_{2,i-1} + w_{pi}/\psi_i}{1-\bar{\psi}_i}, \quad (45)$$

$$A_2 = \frac{\delta_i' \bar{w}_i}{\psi_i(1-\bar{\psi}_i)} + \frac{W_{2,i-1}}{1-\bar{\psi}_i},$$

wozu die Näherungslösung am Ende des Zeitabschnittes i

$$W_i = \frac{\bar{w}_i}{\psi_i} \left(1 - \frac{E_{1i} - \delta_i' E_{2i}}{1-\bar{\psi}_i} \right) - \frac{W_{2,i-1}}{1-\bar{\psi}_i} (E_{1i} - E_{2i})$$

gehört, wenn man mit

$$E_{ji} = e^{\alpha_j t_i} \quad (46)$$

abkürzt. Daneben wird noch die Gesamtverschiebung $W_i + w_i$ am Ende des i . Zeitabschnitt benötigt

$$W_i + w_i = \frac{w_i - W_{2,i-1}}{1 - \bar{\psi}_i} E_{1i} + \underbrace{\frac{w_{pi}}{\psi_i} \left(-1 + \frac{E_{1i}}{1 - \bar{\psi}_i}\right) - \frac{E_{2i}}{1 - \bar{\psi}_i} \left(\frac{\delta \bar{w}_i}{1 - \psi_i} - W_{2,i-1}\right)}_{\frac{w_{pi}}{1 - \bar{\psi}_i} \left(1 + \delta + \frac{E_{1i-1}}{\psi_i}\right)} \quad (47)$$

Für den Verformungsanteil W_{2i} des elastischen Gliedes des Voigt-Teils ergibt sich mit den Faktoren in (42)

$$\psi(\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \alpha_1(1 - \psi) \sim \psi \delta \lambda_2, \quad \psi(\lambda_1 + \delta \lambda_2) - \alpha_2(1 - \psi) \sim \lambda_2(1 - \psi)$$

die Näherungslösung zu (42)

$$W_{2i} \sim A_1 \delta \psi_i E_{1i} + A_2 (1 - \psi_i) E_{2i}$$

oder, wenn man die Näherungsbeziehungen (45) für die Konstanten A_i einsetzt

$$W_{2i} \sim \frac{\delta}{1 - \bar{\psi}_i} \left[\psi_i (w_i - W_{2,i-1}) + w_{pi} \left[E_{1i} - [\delta \bar{w}_i - (1 - \psi_i) W_{2,i-1}] \frac{E_{2i}}{1 - \bar{\psi}_i} \right] \right] \quad (48)$$

Die kraftlose Verschiebung w_{i+1} (41) zwischen den Zeitbereichen i und $i + 1$ beträgt mit (47)

$$w_{i+1} = \frac{1 - \psi_i}{1 - \bar{\psi}_i} (w_i - W_{2,i-1}) E_{1i} + \frac{w_{pi}}{1 - \bar{\psi}_i} \left[\underbrace{1 + \delta - \bar{\psi}_i - (1 - \bar{\psi}_i)}_{\delta} + \frac{E_{1i-1}}{\psi_i} (1 - \psi_i) \right] - \frac{E_{2i}}{1 - \bar{\psi}_i} [\delta \bar{w}_i - W_{2,i-1} (1 - \psi_i)] \quad (49)$$

Da in den obigen Beziehungen stets die Differenz $w_i - W_{2,i-1}$ eingeht, wird noch die Differenz zwischen dem i . und $i + 1$. Zeitabschnitt angegeben

$$w_{i+1} - W_{2i} = (w_i - W_{2,i-1}) E_{1i} + \frac{w_{pi}}{1 - \bar{\psi}_i} \left[\delta + \frac{E_{1,i-1}^{-1}}{\psi_i} - \delta - \delta (E_{1,i-1}^{-1}) \right]$$

oder nach Zusammenziehen des w_{pi} -Terms

$$w_{i+1} - W_{2i} = (w_i - W_{2,i-1}) E_{1i} + w_{pi} (E_{1i} - 1) / \psi_i \quad (50)$$

Der schnell abklingende Term $e^{\alpha_2 t_i}$ verschwindet hierbei im Rahmen der Näherung vollständig. Zwischen dieser Verschiebungsdifferenz und der Gesamtverschiebung am Ende des i -ten Abschnittes besteht der einfache Zusammenhang

$$W_i + w_i = \frac{1}{1-\bar{\psi}_i} [w_{i+1} - W_{2i} + w_{pi}(1+\delta)] - \frac{E_{2i}}{1-\bar{\psi}_i} \left(\frac{\delta \bar{w}_i}{1-\psi_i} - W_{2,i-1} \right) \quad (51)$$

Da die Argumente $\alpha_1 t_i$ bei einem Zyklus von einigen Monaten immer sehr klein sind, kann E_{1i} noch näherungsweise durch das erste Taylorglied

$$E_{1i} \rightarrow 1 + \frac{\psi_i \lambda_1 t_i}{1-\psi_i}, \quad \frac{E_{1i} - 1}{\psi_i} \rightarrow \frac{\lambda_1 t_i}{1-\psi_i} \quad (52)$$

ersetzt werden. Der α_2 -Wert ist negativ und wegen des großen Wertes λ_2 beitragsmäßig relativ groß, sodaß die Funktion $e^{\alpha_2 t_i}$ relativ schnell abklingt, und man bei Lastzeiten über einige Monate von einem nahezu vollständigem Abklingen ausgehen kann ($E_{2i} \rightarrow 0$). Eine Ausnahme stellt sich bei höheren Druckkräften ein, da wegen des Faktors $(1-\bar{\psi})/(1-\psi)$ in (44) $|\alpha_2| < \lambda_2$ ist und bei $\bar{\psi} \rightarrow 1$ sehr stark abnimmt.

Der Unterschied zum Kriechverhalten bei konstanter Spannung wird deutlich, wenn man die Endverschiebung (51) für eine Querbelastung $p_i = p$ und ohne Vorverformung $w_i, W_{2,i} = 0$ auf dem statischen Wert $w_p/(1-\psi)$ der Theorie 2. Ordnung (35) bezieht

$$\frac{W(t)}{W_{el}} = \frac{W(t)(1-\psi)}{w_p} = \frac{1-\psi}{1-\bar{\psi}} \left(1 + \delta + \frac{e^{\alpha_1 t} - 1}{\psi} \right) \quad (53)$$

und mit der Kriechfunktion (9) für konstante Schnittkräfte bei abgeschlossenem viskoelastischem Kriechen (gestrichelte Linie in Bild 2b) vergleicht

$$\phi(t) = 1 + \delta + \lambda_1 t$$

Der konstante Wert $(1 + \delta)$ erhöht sich auf

$$\frac{(1-\psi)(1+\delta)}{1-\bar{\psi}(1+\delta)}$$

und das viskose Fließen für kleinere Zeiten gemäß (52) von

$$\lambda_1 t \quad \text{auf} \quad \frac{1-\psi}{(1-\bar{\psi})^2} \lambda_1 t$$

Bei größeren Zeiten macht sich dann das starke Ansteigen der e-Funktion bemerkbar (Bild 11). Wenn man auf die statische Durchsenkung w_p nach Theorie 1. Ordnung bezieht, entfällt im Nenner der Faktor $1-\psi$ und der Unterschied zur Kriechfunktion (9) wird noch größer. Neben den Verformungen interessieren auch die Biegemomente in Stabmitte. Am Ende des i. Lastabschnittes stellt sich mit dem Lastmoment nach Theorie 1. Ordnung

$$M_{pi} = p_i \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \quad (54)$$

gemäß (26) der Wert

$$M_i = P_i (W_i + w_i) + M_{pi} \quad (55)$$

ein. Diese Beziehung gilt allgemein und kann für das Burgers-Modell sowohl mit der exakten Lösung () als auch mit der Näherung (51) ausgewertet werden, wofür sich übersichtlichere Ausdrücke ergeben

$$M_i = \frac{P_i (w_i - W_{2,i-1})}{1-\psi_i} E_{1i} + \frac{P_i w_{pi}}{1-\psi_i} (1 + \delta + \frac{E_{1i}^{-1}}{\psi_i}) + M_{pi}$$

oder mit $P_i w_{pi} = \psi_i M_{pi}$ schließlich

$$M_i = \frac{P_i (w_i - W_{2,i-1}) + M_{pi}}{1-\psi_i} E_{1i} \quad (56)$$

Im Falle einer konstanten Querbelastrung $p_i = p$ würde sich das Moment ohne Knickbiegung ($P = 0$) mit Zeit nicht ändern, beim druckbelasteten Stab steigt es ständig an, wie das Verhältnis zum "statischen" Moment $M_p / (1-\psi)$ nach Theorie 2. Ordnung zeigt

$$\frac{M(t)}{M_{el}} = \frac{M(t)}{M_p} (1-\psi) = \frac{1-\psi}{1-\psi} e^{\alpha_1 t} \quad (57)$$

Diese Vergrößerungsfunktion hat einen ähnlichen Verlauf wie diejenige (53) für die Verformung (Bild 11).

4.2 Verallgemeinertes Maxwell-Modell

Die Grundgleichungen, wie die Gleichgewichtsaussage (26) und die verformungsgeometrische Aussage (27), gelten unabhängig vom Materialgesetz (16)

$$B(t) \dot{w} = - B(t) w'' = \dot{M} + f(t) M \quad (16a)$$

dessen Koeffizienten veränderlich sind, dafür ist es aber um eine Ordnung geringer als das des Burgers-Modells. Differenziert man das Materialgesetz (16a) und führt darin die Gleichgewichtsaussagen (26) ein, so ergibt sich daraus die Differentialgleichung für die Durchbiegung des Balkens

$$B(t) w'''' + P w'' + f P w = f (P w'' + p) \quad (58)$$

Sie ist wie bei dem Burgers-Modell eine partielle Differentialgleichung, die sich beim gelenkig gelagerten Stab, wenn die Belastung p , die Vorverformung w_0 und die Durchsenkung w gemäß (30) sinusförmig verlaufen, in die gewöhnliche Differentialgleichung für die zeitabhängige Durchbiegungsamplitude $W(t)$

$$W' - \bar{f}(t)W = \bar{f} \frac{\bar{w}_0}{\psi_0} \quad (59)$$

übergeht. Dabei ist

$$\psi_0 = \frac{P}{B_0} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \quad (60)$$

der bekannte elastische Knickparameter (32),

$$\bar{w}_0 = \psi_0 w_0 + \frac{P}{B_0} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \quad (61)$$

die Biegeamplitude (35a) des viskoelastischen Balkens ohne Berücksichtigung der Knickbiegung und

$$\psi = \frac{P}{B(t)} \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = \psi_0 (1 + F_2) \quad (60a)$$

der zeitlich veränderliche Knickparameter. Außerdem ist durch den hochgestellten Querstrich die Kriechfunktion für das Knick-Biege-Problem gegenüber der Funktion nach der Theorie 1. Ordnung mit konstanten Momenten modifiziert

$$\bar{F} = \frac{\psi_0}{1-\psi} (F_1 + F_2) \quad (62)$$

Die Modifizierung ergibt sich, da mit dem Kriechen die Verformungen und auch das Knick-Biege-Moment (26) anwachsen. Die Lösung der Differentialgleichung nimmt die einfache Form

$$W = - \frac{\bar{w}_0}{\psi_0} + Ae^{\bar{F}}$$

an, wobei

$$\bar{F} = \int \bar{f} dt = \int \frac{\psi_0 \dot{F}_1}{1-\psi} dt + \int \frac{\psi_0 \dot{F}_2}{1-\psi_0(1+F_2)} dt = \int \frac{\psi_0 \dot{F}_1}{1-\psi} dt + \ln \frac{1-\psi_0}{1-\psi} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (63)$$

ist. Aufgrund der Anfangsbedingung

$$W(0) = - \frac{\bar{w}_0}{1-\psi_0} = - \frac{\bar{w}_0}{\psi_0} + A$$

wird die noch freie Konstante

$$A = \frac{\bar{w}_0}{\psi_0(1-\psi_0)}$$

und der zeitliche Verlauf der Durchsenkung ergibt sich zu

$$W(t) = \frac{\bar{w}_0}{\psi_0} (-1 + \frac{e^{\bar{F}_1}}{1-\psi_0} e^{\bar{F}_2}) = \frac{\bar{w}_0}{\psi_0} (-1 + \frac{e^{\bar{F}_1}}{1-\psi}) = \frac{\bar{w}_0}{\psi_0(1-\psi)} (\psi + e^{\bar{F}_1} - 1)$$

mit der zugehörigen Gesamtauslenkung

$$W(t) + w_0 = \frac{w_0}{1-\psi} e^{\bar{F}_1} + \frac{w_p(1+F_2)}{1-\psi} \left(1 + \frac{e^{\bar{F}_1} - 1}{\psi}\right) \quad (64)$$

und dem Biegemoment in Stabmitte nach (55)

$$M = P(W + w_0) + M_p = \frac{Pw_0 + M_p}{1-\psi} e^{\bar{F}_1} \quad (65)$$

Die Übereinstimmung der Ausdrücke (64) und (65) mit den Näherungen (51) und (56) für das Burgers-Modell wird besonders deutlich, wenn man **davon** ausgeht, daß der viskoelastische Anteil F_2 seinen Grenzwert δ und damit auch die Größen

$$\psi = \bar{\psi} = \psi_0(1+\delta) \quad \text{und} \quad \bar{F}_1 \rightarrow \frac{\psi_0 F_1}{1-\bar{\psi}} \quad (60b)$$

angenommen haben. Der Vorteil dieser Lösung ist, daß darin das Burgers-Modell enthalten ist, aber auch gemessene Kriechfunktionen in die Rechnung eingeführt werden können, ohne sie durch analytische Gesetze beschreiben zu müssen.

5. Zyklische Beanspruchung nach Theorie 2. Ordnung

Nachdem die allgemeinen Lösungen für das Werkstoffmodell nach Burgers und das erweiterte Maxwell-Modell abgeleitet sind, kann nun die Auswertung für die zyklische Beanspruchung mit abschnittsweise konstanter Belastung und Druckkraft vorgenommen werden. Es wird die idealisierte Belastung nach Bild 1 zugrundegelegt und zwar mit der Querbelastung p_1 und der zugehörigen Druckkraft P_1 für eine Dauer von t_1 danach folgt die Querbelastung p_2 , die die Zusatzbeanspruchung infolge Schnee enthält, mit der Druckkraft P_2 und der Dauer von $t_2 = T - t_1$. Diese Belastung soll ständig nach der Periode T gleich 1 Jahr wiederkehren und zwar 40 mal, was einer Lebensdauer von 40 Jahren entspricht. Die höhere Belastung wird als zweite Stufe aufgebracht, da dann am Ende der Lebensdauer noch die Schneebelastung ertragen werden muß und damit der ungünstigste Fall vorliegt. Es werden die Lastfälle Vorverformung w_0 und Querbelastung p gesondert behandelt, und zwar zunächst für das Burgers-Modell und dann für das erweiterte Maxwell-Modell, um daraus allgemeingültige Beziehungen herleiten zu können.

5.1 Modell nach Burgers

Es werden die einzelnen Lastfälle Vorverformung w_0 und Querbelastung p nacheinander behandelt, wobei es insbesondere darum geht, allgemeine Formeln für das Akkumulieren der Kriechverformungen bei zyklischer Belastung abzuleiten.

5.1.1 Vorverformung w_0

In diesem Falle liegt ein Sonderfall vor, weil die "Belastung" w_0 über den gesamten Zeitraum konstant ist und sich lediglich die Druckkraft P von Zeitabschnitt zu Zeitabschnitt ändert. Diese Untersuchung gibt das Wachsen der Vorbeulen wieder und spielt insbesondere für die Schalenstabilität eine große Rolle, da die kurzzeitige Schalenbeulung aus einer vorverformten Lage erfolgt. Außerdem gibt sie für den Spannungsnachweis einen Anhalt, welche Zusatzbeanspruchungen bei Zugrundelegung von Vorverformungen zu erwarten sind, was besonders wichtig ist, wenn z. B. Knickuntersuchungen mit Knicklasten für ideal gerade Stäbe vorgenommen werden. Um das Ergebnis diskutieren zu können, wird hier die Näherung für kleine

λ_1 und große λ_2 , wie sie am Ende des Abschnittes 4.1 abgeleitet ist, zugrundegelegt. Am Anfang ist die "Vorverformung" (50)

$$w_1 - W_{20} = w_0 \quad .$$

Nach dem ersten Zeitabschnitt t_1 mit der Druckkraft P_1 beträgt die kraftlose Verschiebungsdifferenz nach (50)

$$w_2 - W_{2,1} = w_0 E_{11}$$

und nach dem zweiten Zeitabschnitt t_2

$$w_3 - W_{2,2} = w_0 E_{11} E_{12} = w_0 E \quad ,$$

wenn man mit E das Produkt

$$E = E_{11} E_{12} \quad (67)$$

bezeichnet. Nach dem m -Belastungszyklus beträgt der kraftlose Verschiebungszuwachs $w_0 E^m$ und die Gesamtverschiebung (51) am Ende des m . Zeitabschnittes

$$W + w_0 = \frac{w_0 E^m}{1 - \bar{\psi}_2} \quad . \quad (68)$$

Der plastische Verschiebungszuwachs

$$W_p = w_0 E^m \quad (68a)$$

hängt dabei maßgebend von dem Produkt der E -Funktionen

$$E^m = (E_{11} E_{12})^m = (e^{\alpha_{11} t_1} e^{\alpha_{12} t_2})^m = e^{m(\alpha_{11} t_1 + \alpha_{12} t_2)} \quad (67a)$$

mit dem Parameter

$$x = \alpha_{11} t_1 + \alpha_{12} t_2 = \lambda_1 T \bar{\psi}_2 \left(\frac{P_1}{P_2} \frac{t_1/T}{1 - \bar{\psi}_1} + \frac{t_2/T}{1 - \bar{\psi}_2} \right) \quad (69)$$

ab. Da die Argumente x relativ klein sind, ist zur näherungsweisen Berechnung die Entwicklung

$$e^{mx} = 1 + mx(1 + mx/2) \quad (67b)$$

möglich. Hier wird deutlich, daß es für das plastische Endkriechmaß $w_0 E^m$ gleichgültig ist, ob mit der niedrigeren Druckkraft P_1 oder der höheren Druckkraft P_2 begonnen wird. Zur Kontrolle kann der Fall herangezogen werden, daß über die gesamte Zeit eine konstante Druckkraft wirkt, d. h. $t_1 = 0$ gesetzt wird, dann ergibt sich die Gesamtverschiebung

$$W + w_0 = \frac{w_0}{1 - \bar{\psi}_2} e^{m \lambda_1 T \bar{\psi}_2 / (1 - \bar{\psi}_2)} \quad , \quad (70)$$

die sich auch aufgrund der Lösung (47) ergibt, wenn man mT unmittelbar als Zeitdauer einsetzt.

Um die Güte dieser Näherung zu zeigen, ist in Bild 12 die genaue Lösung mit der Näherungslösung verglichen, wobei als Endkriechmaß (ohne Theorie 2. Ordnung) der Wert $F = \varphi_t = 1$ und das viskoelastische Endkriechmaß zu einem Drittel dieses Wertes

$$\delta = F/3$$

gewählt ist. Der viskoplastische Parameter $\lambda_1 T$ beträgt danach } (71)

$$\lambda_1 T = \frac{2}{3} \frac{F}{40} = \frac{F}{60} \quad .$$

Er ist relativ klein, wenn man berücksichtigt, daß für die am stärksten kriechenden Mattenlamine im ungünstigsten Falle $F = 1$ ist. Für die Druckkräfte ist angenommen, daß sie sich in den beiden Lastbereichen wie 1 : 2 verhalten und als Knickparameter (32) sind die Werte

$$\psi_1 = 0,25 \quad \text{und} \quad \psi_2 = 0,5 \quad (72a)$$

eingesetzt, wozu die "viskoelastischen" Knickparameter

$$\bar{\psi}_1 = 0,25 \left(1 + \frac{F}{3}\right) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}_2 = 0,5 \left(1 + \frac{F}{3}\right) \quad (72b)$$

gehören. Die Zeitabstände sind der Einfachheit halber $t_1 = t_2 = T/2$ gesetzt. Zum Vergleich ist in Bild 12^c noch die Lösung eingetragen, wenn $t_1 = 0$ ist und die Druckkraft über die gesamte Zeit konstant ist. Als Dreiecke sind in Bild 12 die Endwerte nach den Näherungen (68) und (70) eingetragen. Die Unterschiede liegen im Prozentbereich und können praktisch nicht dargestellt werden. Außerdem wird deutlich, wie stark die Kriechverformungen infolge der "Erholungspausen" mit der halben Druckkraft $P_1 = 0,5P_2$ zurückgehen. Für die Momente ergibt sich aufgrund der Gleichung (55) eine ähnliche Beziehung

$$M = P_2 (W + w_0) = \frac{P_2 w_0 E^m}{1 - \bar{\psi}_2} \quad (73)$$

wie diejenigen für die Endverschiebung. Sie muß lediglich mit der jeweiligen Druckkraft P_i multipliziert werden. Eine grafische Darstellung würde sich deshalb erübrigen.

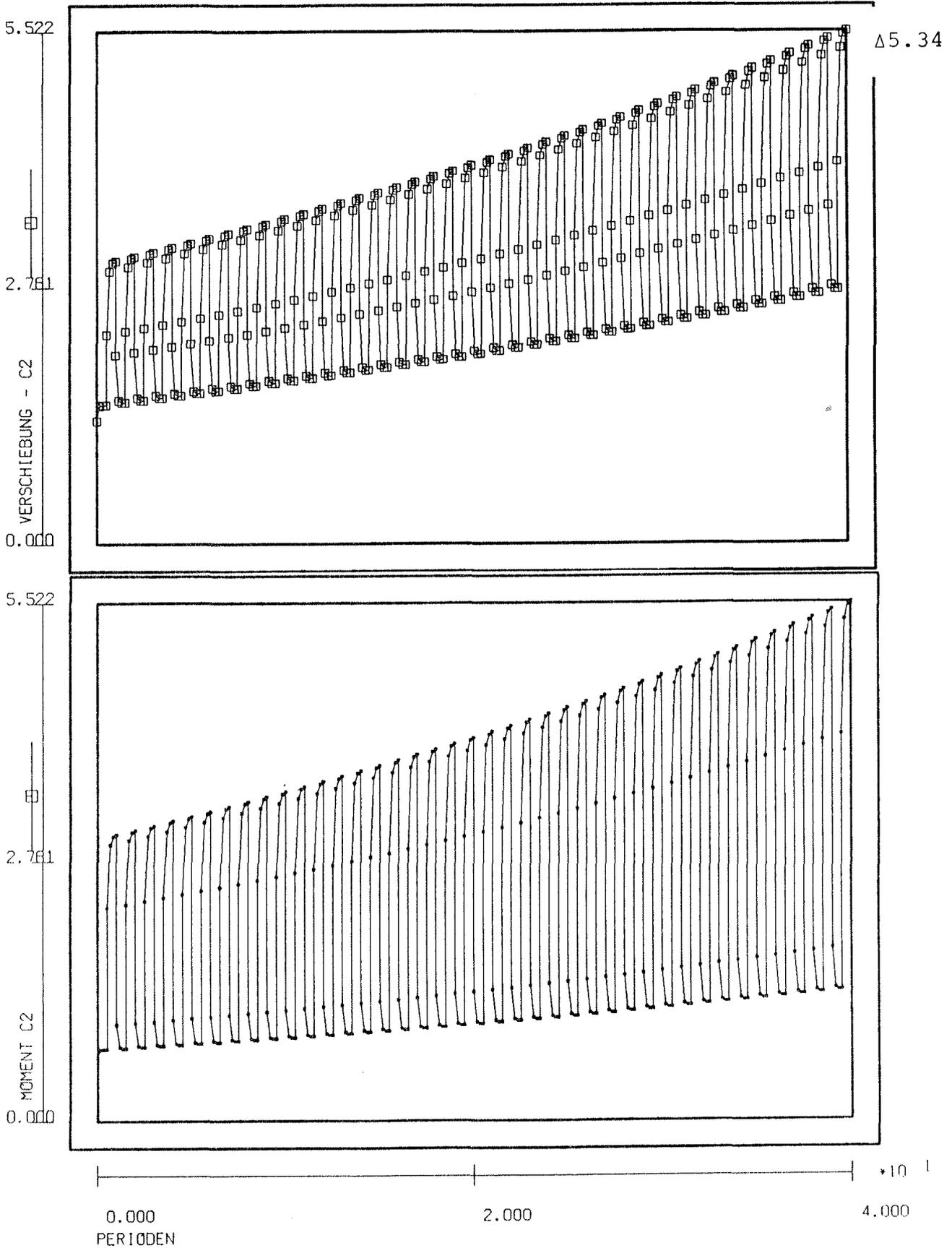


Bild 12: Anwachsen der Vorverformung w_0 und der zugehörigen Momente infolge von 40 Druckkraftzyklen $P_1/P_2 = 0,5$, $\psi_2 = 2\psi_1 = 0,5$ — vollständige Lösung nach dem Burgers-Modell, Δ vereinfachte Lösung für kleine ψ_1 und große ψ_2
 a) Lösung für 40 Lastzyklen ($mT = 40$ Jahre)

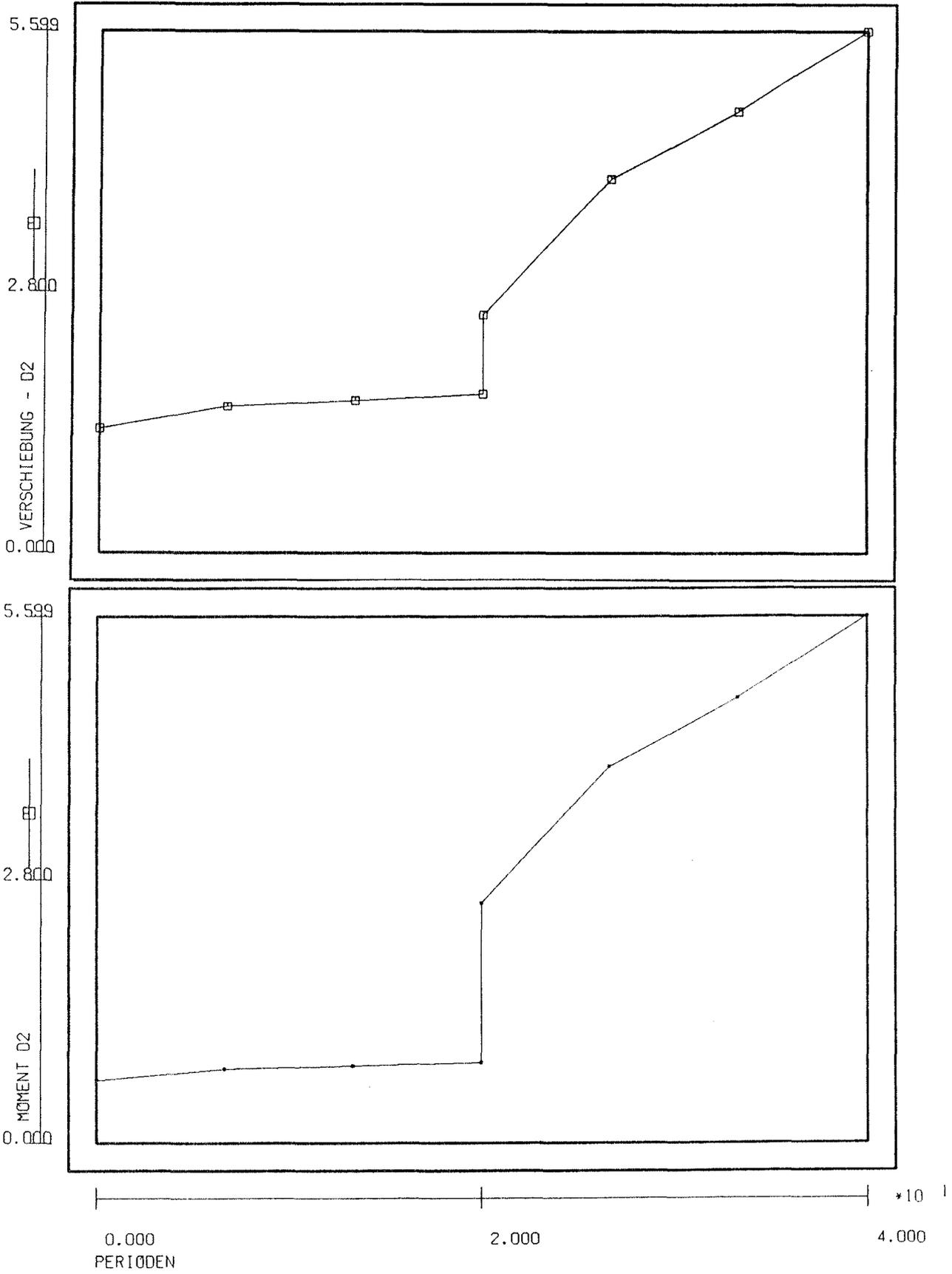


Bild 12b: Lösung für 2 geraffte Zeitschritte nach Bild 8b

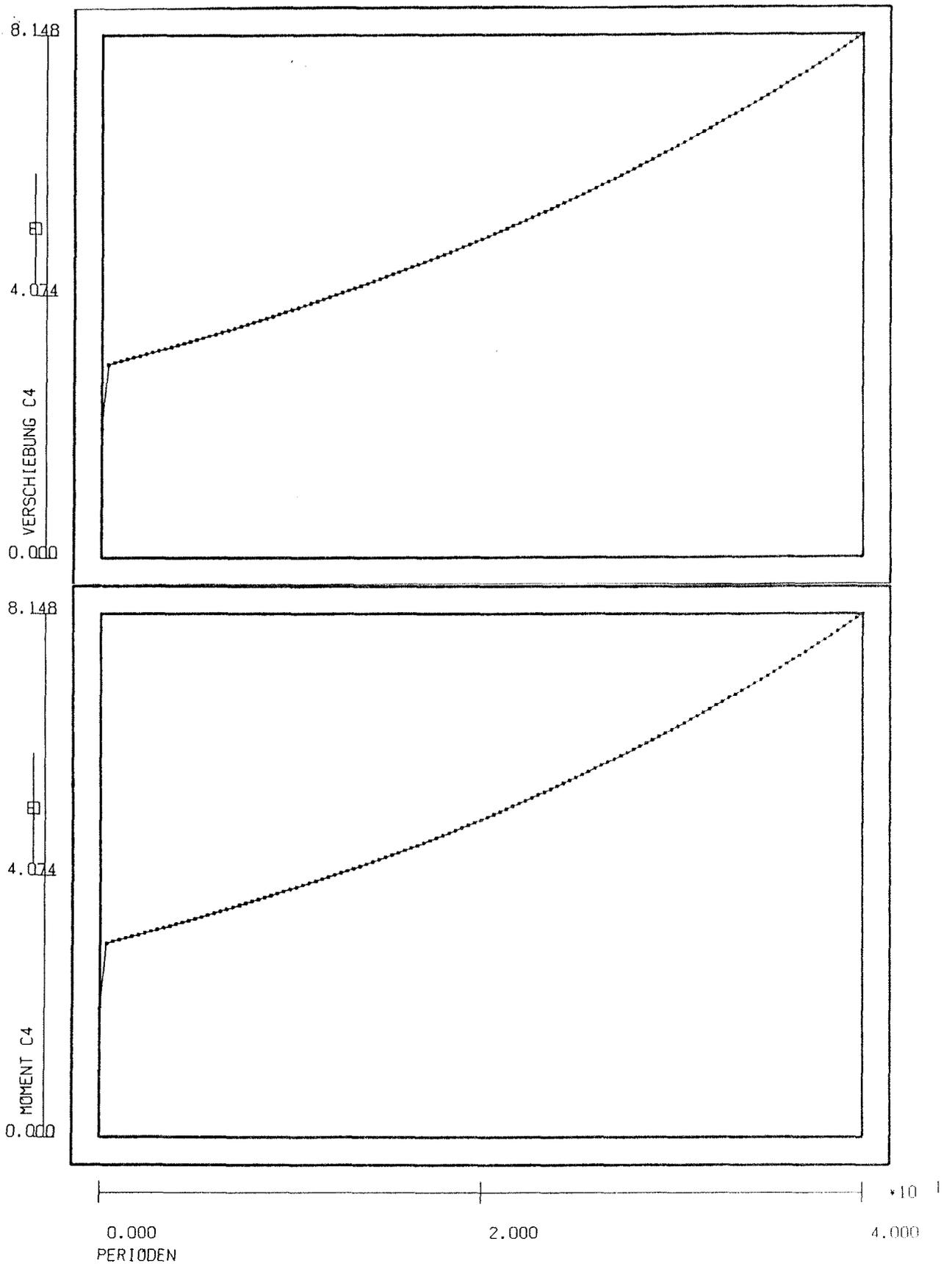


Bild 12c: Zeitlich konstante Druckkraft $P_2(t_1 = 0)$

5.1.2 Abschnittsweise konstante Querbelastrung p_1 und p_2

Durch diesen Lastfall wird im wesentlichen die zusätzliche Schneebelastung $p_2 - p_1$ simuliert, wobei man vom ungünstigsten Fall ausgeht, daß die maximale Schneebelastung über die gesamte Winterzeit t_2 anhält. Die kraftlose Anfangsverschiebung (50) verschwindet hierbei

$$w_1 - W_{2,0} = 0 \quad .$$

Nach der ersten Belastung bleibt nach (50) die "kraftlose" Verschiebungsdifferenz

$$w_2 - W_{2,1} = w_{p1} E'_{11}$$

übrig, wobei

$$E'_{1i} = (E_{1i} - 1) / \psi_i \quad (74)$$

ist. Nach der zweiten Belastung p_2 beträgt die "kraftlose" Verschiebungsdifferenz (50)

$$w_3 - W_{2,2} = w_{p1} E'_{11} E_{12} + w_{p2} E'_{12} \quad .$$

Dies ist zugleich die Restverschiebung nach dem ersten Belastungszyklus. Nach dem letzten Belastungszyklus ergibt sich mit (67) der Wert

$$w_{m+1} - W_{2,m} = (w_{p1} E'_{11} E_{12} + w_{p2} E'_{12}) (1 + E + E^2 + \dots + E^{m-1})$$

oder nach Summation der geometrischen Reihe

$$w_{m+1} - W_{2,m} = (w_{p1} E'_{11} E_{12} + w_{p2} E'_{12}) \frac{E^m - 1}{E - 1} \quad . \quad (75)$$

Diese Reihe kann noch vereinfacht werden, wenn man gemäß (52) wegen des kleinen Wertes $\lambda_1 t_2$ im Vorfaktor $E_{12} \sim 1 + \alpha_2 t_2$ durch 1, E'_{1i} durch $\lambda_1 t_i / (1 - \bar{\psi}_i)$ und $E - 1$ durch x nach (69) ersetzt

$$w_{m+1} - W_{2,m} = \frac{w_{p2}}{2} \frac{\frac{w_{p1}}{p_2} \frac{t_1/T}{1 - \bar{\psi}_1} + \frac{t_2/T}{1 - \bar{\psi}_2}}{\frac{p_1}{p_2} \frac{t_1/T}{1 - \bar{\psi}_1} + \frac{t_2/T}{1 - \bar{\psi}_2}} (E^m - 1) \quad . \quad (75a)$$

Berücksichtigt man ferner noch, daß normalerweise das Verhältnis p_1/p_2 der Druckkräfte annähernd gleich dem Verhältnis p_1/p_2 der Querbelastrung ist, dann hebt sich der große Quotient in (75a) heraus und die Endverschiebung (51) am Ende des letzten Winters vereinfacht sich zu

$$W_m + w_m = \frac{w_{p2}}{1-\bar{\psi}_2} \left(\frac{E^m - 1}{\psi_2} + 1 + \delta \right) \quad (76)$$

Diese Beziehung hat eine große Ähnlichkeit mit derjenigen (68) für die Vorverformung.

Wenn man den Zeitabschnitt t_1 zu Null setzt, also eine konstante Belastung über die gesamten 40 Jahre ansetzt, ergibt sich aufgrund der Addition der Zyklen derselbe Wert wie nach Gleichung (53), wobei hier nur der Faktor $(1-\psi_2)$ fehlt, da (76) die Gesamtverschiebung und nicht das Verhältnis zur elastischen Verschiebung wie in (53) angibt. Die Beziehung (55) für das Moment nimmt mit

$P_2 w_{p2} = \psi_2 M_{p2}$ nach (54) die gleiche Form an

$$M = P_2 (W_m + w_m) + M_{p2} = M_{p2} \left[1 + \frac{\psi_2}{1-\bar{\psi}_2} \left(\frac{E^m - 1}{\psi_2} + 1 + \delta \right) \right] = \frac{M_{p2}}{1-\bar{\psi}_2} E^m \quad (77)$$

wie diejenige (73) für das Moment infolge der Vorverformung, sodaß auch für den Lastfall Querbeltastung eine grafische Darstellung genügen würde. Im Bild 13 ist der Verlauf der Durchsenkung und des Momentes über der Zeit aufgetragen, wobei das Verhältnis der Belastung und der Druckkräfte zu $p_1/p_2 = P_1/P_2 = 0,5$ gesetzt ist. Die Lastdauern t_1 sind jeweils gleich der halben Periode T . Zusätzlich ist noch die konstant gehaltene Last betrachtet, indem $t_1 = 0$ gesetzt ist. Wie im Lastfall Vorverformung ergibt sich auch hier ein großer Unterschied, d. h. eine starke Auswirkung der geringeren Belastung im Sommer. Die Unterschiede zwischen der exakten Lösung (ausgezogene Linie) und der hier angegebenen Näherungslösung (Dreieck) liegt in der Größenordnung von 3 %.

Die für das Kriechen maßgebende Größe E^m ist nach (67) das Produkt die Einzelwerte E_{11}^m und E_{12}^m . Diese viskoelastischen Kriechmaße sind gleich ob man die Lasten über die Gesamtzeiten mt_1 und mt_2 oder in m Laststufen aufbringt, d. h. es hätten auch zwei Laststufen p_1 und p_2 mit einer Lastdauer von mt_1 bzw. mt_2 genügt. Um die Gesamtverformung zu erhalten, muß dann noch das Endkriechmaß infolge der viskoelastischen Verformung des letzten Lastabschnittes p_2 hinzugefügt werden. Diese "geraffte" Lösung ist auch in den Bildern 12b und 13b aufgetragen. Dabei zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen für 40 kurze Lastschritte mit p_1 und p_2 .

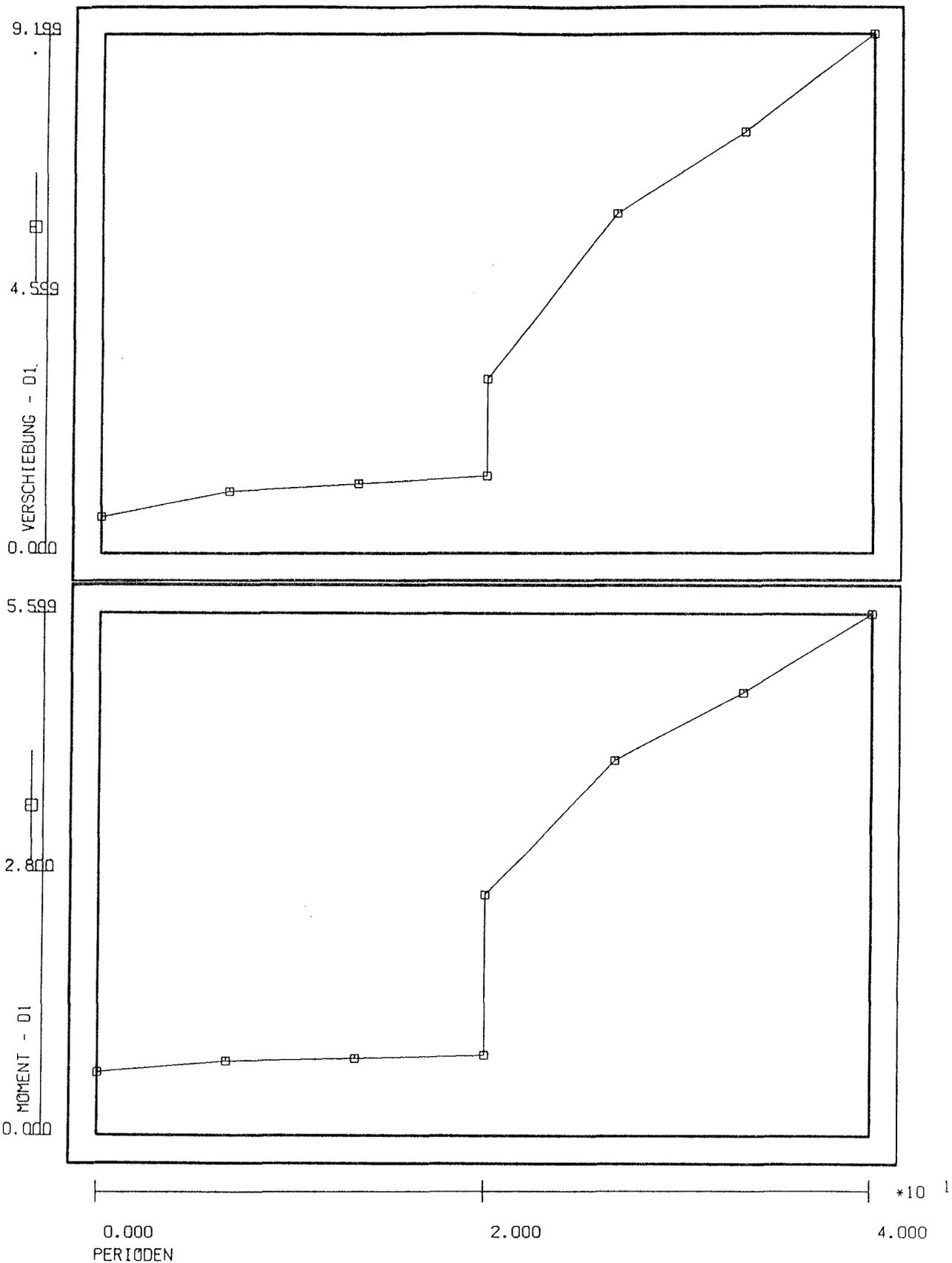


Bild 13b: Lösung für 2 geraffte Zeitschritte nach Bild 8b

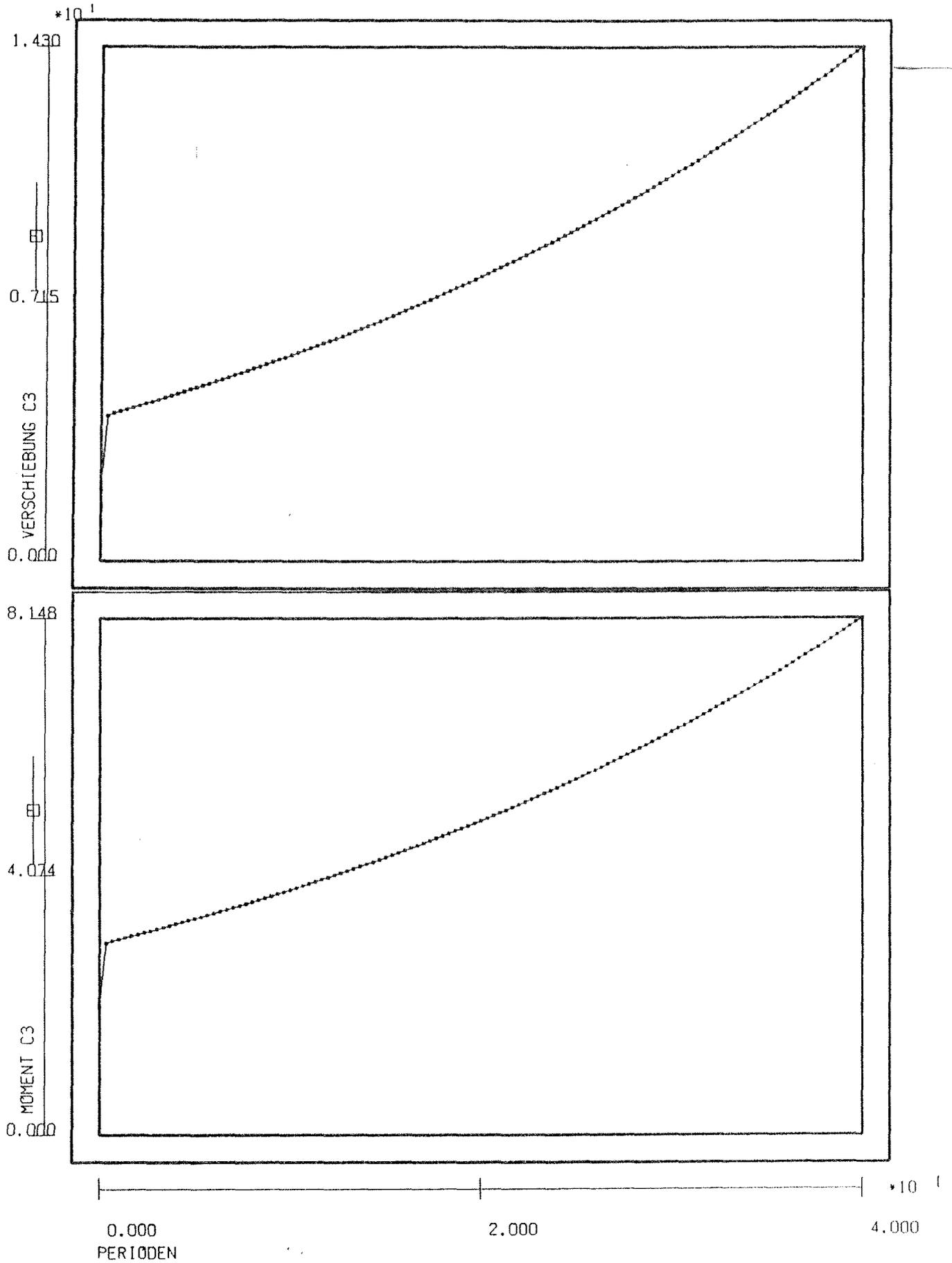


Bild 13c: Zeitlich konstante Druckkraft $P_2(t_1 = 0)$

Beim Vergleich der Kriechzuwächse (68) und (76) sowie der Erhöhung der Momente (73) und (77), die das Akkumulieren der Verformungen und das Anwachsen der Momente bei zyklischer Belastung angeben mit der linearen Überlagerungsregel (22) nach Theorie 1. Ordnung, zeigt sich ein markanter Unterschied. Im Falle der Theorie 1. Ordnung lassen sich die viskoplastischen Anteile der Laststufen p_1 und p_2 linear, d. h. additiv überlagern, dagegen nehmen bei der Theorie 2. Ordnung die Überlagerungsregeln die Produktform $(E_1 E_2)^m$, die bei kleinen Druckkräften p_i in die lineare Regel (22) übergehen, aber bei größeren Druckkräften immer mehr davon abweichen. Da auch die Belastungszeiten in das Argument der E-Funktionen eingehen, bewirken sie keine lineare Änderung der Verschiebungen mehr sondern eine exponentielle, weil $e^{\alpha t} = (e^\alpha)^t$ ist. Die nach der Vorschrift zugelassenen Stabilitätslasten sind aber nicht so hoch, daß dieser Einfluß so stark einget. Man kann also auch weiterhin die lineare Überlagerungsregel (22) mit guter Näherung anwenden, wobei für F_1 und F_2 im Falle der Durchsenkungen die Kriechmaße nach Gleichung (70) und (76) und im Falle der Momente die Gleichungen (73) und (77) zu verwenden sind und in den Gleichungen (73), (76) und (77) die Lastdauern $t_1 = 0$ und die Lastdauer t_2 gleich der Periodendauer T zu setzen sind. Die Funktion E^m geht dann wie in (70) in die e-Funktion $e^{m\psi\lambda_1 T / (1-\psi)}$ über. Das nichtlineare Verhalten, d. h. der überproportionale Kriechzuwachs infolge der Knickbiegung ist in der e-Funktion enthalten.

5.2 Erweitertes Maxwell-Modell

Ausgangspunkt für die Ermittlung des Kriecheinflusses mit Hilfe des Maxwell-Modells sind die Beziehungen (64) und (65) für die Verformungen und Momente infolge der Lastfälle "Vorverformung" w_0 und "Querbelastung" p . An die Stelle der Kriechfunktion (9) im Falle der Theorie 1. Ordnung tritt bei der Theorie 2. Ordnung die Vergrößerungsfunktion, d. h. das Verhältnis der Auslenkung (64) bzw. des Momentes (65) zu den entsprechenden elastischen Werten (35). Sie stimmt für die Verformung im Lastfalle Vorverformung und für die Momente für beide Lastfälle (Vorverformung und Querbelastung) überein

$$\phi = \frac{W}{w_{el}} = \frac{M}{M_{el}} = \frac{1-\psi_0}{1-\psi} e^{\bar{F}_1} \quad (78)$$

Für die Durchsenkung infolge der Querbelastrung ergibt sich nach (64) die Vergrößerungsfunktion

$$\phi = \frac{W}{W_{el}} = \frac{(1-\psi_0)}{1-\psi} (1 + F_2) \left(1 + \frac{\bar{F}_1 - 1}{\psi}\right) + \dots \quad (79)$$

Wenn man nicht auf den elastischen Wert nach der Theorie 2. Ordnung sondern auf den Wert nach der Theorie 1. Ordnung bezieht, entfällt der Vorfaktor $1 - \psi_0$. Diese Funktion ist in Bild 9a dargestellt. Sie muß für jeden Knickparameter ψ und den zugehörigen viskoelastischen Parametern $\bar{\psi}$ nach (60a) bzw. (32a) für die Druckkräfte P_1 und P_2 berechnet werden.

Der Vergleich mit den vereinfachten Beziehungen (70), (73), (76) und (77), nach dem Burgers-Modell, zeigt die weitgehende Übereinstimmung der Beziehungen für das Burgers- und das Maxwell-Modell. Der Vorteil beim Maxwell-Modell ist, daß man ohne weiteres die gemessenen Kriechfunktionen einsetzen kann. Es muß lediglich der viskoelastische Anteil abgeschätzt werden. Da in den Vorschriften nur die Endkriechmaße angegeben sind und nicht der Verlauf der Kriechfunktionen, kann näherungsweise die lineare Kriechfunktion (12) in der verallgemeinerten Form

$$\phi_2 = 1 + F_1^*(mT) + F_2^*(mT) \quad (80)$$

angewandt werden, wobei die kombinierten Kriechmaße F_1^* und F_2^* aus den Endkriechmaßen F_1 und F_2 (25) und den Knickparametern (32) und (32a) oder (60) und (60a) berechnet werden. Wenn eine Dauerlast vorliegt oder der Einfluß der Anfangsauslenkung w_0 untersucht werden soll, ist $t_1 = 0$ und $t_2 = T$ zu setzen.

6. Vereinfachung für die Anwendung in der Baupraxis

Im folgenden werden die Beziehungen für sicherheitstheoretische Untersuchungen nach der Stufe 1, wie sie in der Baupraxis angewandt werden können, zusammengestellt. Ausgangspunkt ist dabei das linearisierte Akkumulationsgesetz (22) für die Kriechverformungen bei zeitlich konstanten Schnittkräften bzw. Spannungen (nach Theorie 1. Ordnung). Dieser Fall ist immer bei statisch bestimmten Konstruktionen und auch bei statisch unbestimmten Konstruktionen, die aus Bauteilen mit gleichem Kriechverhalten zusammengesetzt sind, erfüllt. Als Kriechparameter gehen das viskoplastische Endkriechmaß F_1 und das viskoelastische Endkriechmaß F_2 ein und das Verhältnis der Lastdauer t_1 für die als dauernd wirkend anzusehende "Sommerlast" p_1 und der Lastdauer t_2 für die "Winterlast" p_2 zu der Lastperiode $T = t_1 + t_2$ und das Verhältnis der Lasten p_1/p_2 ein. Es lautet

$$\phi_2 = 1 + \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{t_1}{T} + \frac{t_2}{T} \right) F_1(mT) + F_2(mT) \quad . \quad (22)$$

Der Nachweis wird für eine Lebensdauer von $m = 40$ Jahren, und zwar am Ende des letzten Winters, geführt, da dann neben der dauernd wirkenden Last p_1 noch die Schneelast und die kurzzeitige Verkehrslast aufgenommen werden muß. Gleichung (22) gibt die Vergrößerungsfunktion am Ende der letzten Winterbelastung an. Dabei ist konservativ angenommen, daß das viskoelastische Endkriechmaß $F_2(mT)$ schon während eines Winters voll erreicht wird, was bei den üblichen Kunststoffen nahezu der Fall ist.

Die einzige Schwierigkeit besteht darin, das Endkriechmaß $F = \psi_t$ in den viskoplastischen Anteil F_1 und den viskoelastischen Anteil F_2 aufzuteilen. Wenn man davon ausgeht, daß die viskoplastischen Anteile der einzelnen Lastschritte relativ klein sind, und im ersten Lastschritt im wesentlichen viskoelastische Verformungen auftreten, kann man den viskoelastischen Anteil abschätzen als Gesamtkriechmaß am Ende der ersten Belastung

$$F_2(mT) \sim F(t_1) \quad . \quad (81a)$$

Für das viskoplastische Endkriechmaß F_1 bleibt dann der Rest

$$F_1 = F - F_2 \quad (81b)$$

übrig. Man kann die Beziehung (22) auch auf den Fall der Theorie 2. Ordnung übertragen, wenn man das Verhältnis zwischen der Kriechverformung und der statischen Verformung bei vorhandenen Druckkräf-

ten P, die eine Vergrößerungsfunktion darstellt, als verallgemeinerte Ersatzkriechfunktion $1 + F^*$ (12) eingeführt und diese Vergrößerungsfunktionen wieder in den viskoplastischen Anteil F_1^* und den viskoelastischen Anteil F_2^* zerlegt

$$\phi_2 = 1 + F_1^*(mT) + F_2^*(mT) . \quad (80)$$

Dabei zeigt sich, daß man zwei Fälle unterscheiden muß, und zwar auf der einen Seite die Vergrößerungsfunktion (78) für Verformungen infolge der Vorverformungen w_0 und die Momente infolge der Vorverformungen w_0 und der Querlasten p_1 und auf der anderen Seite die Vergrößerungsfunktion (79) für Verformungen infolge der Querlasten. Diese Fallunterscheidung ist notwendig, da im ersten Falle eine Vergrößerung der Verformungen und der Momente allein durch die Druckkräfte P_1 verursacht wird und im zweiten Falle schon ein Anwachsen der Verformungen infolge der Querbelastung auftritt. Die ursprünglichen Beziehungen (78) und (79) lassen sich auf die additive Form $1 + F_1^* + F_2^*$ bringen, d. h. in einen viskoplastischen und einen viskoelastischen Anteil zerlegen, wenn man berücksichtigt, daß die um 1 verminderte E-Funktion bei immer kleiner werdenden Druckkräften in den viskoplastischen Anteil F_1 nach Theorie 1. Ordnung übergeht. Nach dieser Zerlegung ergeben sich die einzelnen Kriechanteile für die Verformungen infolge Vorverformung w_0 und für die Momente infolge beider Lastfälle

$$F_1^* = \frac{1-\psi_{02}}{1-\bar{\psi}_2} (e^{\bar{F}_1} - 1) , \quad F_2^* = \frac{1-\psi_{02}}{1-\bar{\psi}_2} - 1 = \frac{\psi_{02} F_2}{1-\bar{\psi}_2} \quad (82a)$$

und für die Verformungen infolge der Querbelastung p_1 und p_2

$$F_1^* = \frac{1-\psi_{02}}{(1-\bar{\psi}_2)\psi_{02}} (e^{\bar{F}_1} - 1) , \quad F_2^* = \frac{1-\psi_{02}}{1-\bar{\psi}_2} (1 + F_2) - 1 = \frac{F_2}{1-\bar{\psi}_2} , \quad (82b)$$

wobei die letzten Werte (82b) gegenüber dem ersten (82a) nur durch ψ_0 dividiert sind.

Diese verallgemeinerten Beziehungen haben sich sowohl anhand des Burgers-Modells als auch anhand des erweiterten Maxwell-Modells ergeben. Sie sind ansich für gelenkig gelagerte Stäbe hergeleitet worden, können aber auf beliebige Systeme übertragen werden, wenn man anstelle der Stablänge l die Knicklänge s_k einführt. Maßgebende Parameter sind in den obigen Beziehungen das Verhältnis der Druckkraft

zur elastischen Knickkraft

$$\psi_{oi} = \frac{P_i}{P_K} = \frac{P_i}{B_1} \left(\frac{s_K}{\pi} \right)^2 \quad (83a)$$

und das Verhältnis der Druckkraft zur "viskoelastischen Knickkraft"

$$\bar{\psi}_i = \psi_{oi} (1 + F_2) , \quad (83b)$$

bei der die Knicklast um das Verhältnis $1/(1 + F_2)$ erniedrigt ist oder der Knickparameter um das Verhältnis $1 + F_2$ erhöht ist. Der viskoelastische Parameter \bar{F}_1 beträgt nach (60b)

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \left(\frac{\psi_{o1}}{1 - \bar{\psi}_1} \frac{t_1}{T} + \frac{\psi_{o2}}{1 - \bar{\psi}_2} \frac{t_2}{T} \right) F_1 (mT) \\ &= \psi_{o2} \left(\frac{P_1}{P_2} \frac{t_1/T}{1 - \bar{\psi}_1} + \frac{t_2/T}{1 - \bar{\psi}_2} \right) F_1 (mT) , \end{aligned} \quad (84)$$

wobei das Verhältnis P_1/P_2 der Druckkräfte durch das Verhältnis p_1/p_2 der Querlasten näherungsweise ersetzt werden kann. Wenn eine Dauerbelastung vorliegt, wie zum Beispiel bei der Ermittlung des Kriechzuwachses infolge einer Vorverformung w_o , ist die Zeitdauer $t_1 = 0$ und die Dauer $t_2 = T$ zu setzen.

Die Beziehungen (82) und (84) machen deutlich, daß die Kriechverformungen am Ende der letzten Winterperiode wesentlich höher sind als am Ende des letzten Sommers, da im Winter die Überhöhung der Verformungen durch die Knickbiegung, die den Faktor $1/(1 - \bar{\psi}_2)$ bewirkt, wesentlich höher ist als im Sommer. Die Sommerlast geht nur mit einem sehr geringen Gewicht in das Endergebnis ein, und zwar in den viskoelastischen Parameter \bar{F}_1 nur im Verhältnis der Druckkräfte P_1/P_2 und außerdem noch mit dem geringeren Überhöhungsfaktor $1/(1 - \bar{\psi}_1)$. Das gleiche zeigt sich auch in den Bildern 12 und 13, bei denen das Verhältnis der Kräfte $P_1/P_2 = 0,5$ gesetzt ist. Bei geringen Druckkräften, d. h. kleinen Verhältnissen ψ_{oi} (83a) und bei kleineren Kriechwerten $F_1 (mT)$ kann man die Funktion $e^{\bar{F}_1}$ in eine Taylor-Reihe entwickeln und nach dem ersten Gliedern abbrechen

$$e^{\bar{F}_1} - 1 \sim \bar{F}_1 (1 + \bar{F}_1/2) . \quad (85)$$

Wenn man nur das erste Taylor-Glied berücksichtigt, und das Verhältnis der Druckkräfte P_1/P_2 gleich dem Verhältnis der Querlasten p_1/p_2 setzt, was bei den üblichen Lastfällen nahezu immer zulässig ist, nimmt die

verallgemeinerte Kriechfunktion (80) eine Form an

$$\phi_2 = 1 + \left\{ \begin{matrix} \psi_{o2} \\ 1 \end{matrix} \right\} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \frac{t_1/T}{1-\bar{\psi}_1} + \frac{t_2/T}{1-\bar{\psi}_2} \right) \frac{1-\psi_{o2}}{1-\bar{\psi}_2} F_1(mT) + \frac{F_2(mT)}{1-\bar{\psi}_2} \right], \quad \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \quad (86)$$

die der verallgemeinerten Kriechfunktion (22) für Probleme der Theorie 1. Ordnung sehr nahe kommt. Es kommen lediglich die bekannten Überhöhungsfaktoren $1/(1-\bar{\psi}_i)$ infolge des viskoelastischen Kriechens hinzu. Die verallgemeinerte Kriechfunktion (86a), d. h. mit dem Vorfaktor ψ_{o2} gilt für die Verformungen infolge der Vorverformung w_o und für die Momente infolge der Vorverformung w_o und der Querlasten p_i allein. Hier wird noch einmal deutlich, daß im ersten Falle wegen des Vorfaktors ψ_{o2} die Zunahme der Vorverformungen und Momente allein durch die Knickbiegung verursacht wird und daß es im zweiten Falle (Vorfaktor 1) schon infolge der Querlasten p_i zu Kriechverformungen kommt. Bei großen Knickparametern ψ (83) macht sich die mit der Knickbiegung verbundene stärkere Kriechneigung sehr stark bemerkbar und die Funktion $e^{\frac{d}{\bar{F}}} - 1$ kann nicht mehr durch das Argument \bar{F}_1 dargestellt werden (siehe z. B. Gleichung (85)).

Da nur mit den Endkriechmaßen $F_i(mT)$ gerechnet wird und die Verläufe der Kriechfunktionen im einzelnen nicht bekannt sind, hat es wenig Sinn, zwischen Beziehungen für sicherheitstheoretische Untersuchungen nach Stufe 1 und Stufe 2 zu unterscheiden, sondern man kann die hier abgeleiteten Beziehungen auch für sicherheitstheoretische Untersuchungen nach der genaueren Stufe 2 verwenden.

7. Literatur

- /1/ Flügge, H.: Viskoelasticity
Springer-Verlag, Berlin, 1976
- /2/ Brintrup, H.: Beitrag zum zeitabhängigen Verformungsverhalten und zur Rißbildung orthotrop glasfaserverstärkter ungesättigter Polyesterharze unter ebener Normalbeanspruchung
Diss.Aachen, 1975
- /3/ Giencke, E.: Zur praktischen Berechnung der Spannungen und Verformungen in langzeitbelasteten GFK-Bauteilen
3R International 16 (1977), S.139-149
- /4/ Giencke, E.: Einfluß der verschiedenen Kriechmodelle auf die Spannungen und Verformungen in GFK-Konstruktionen
13.Jahrestagung der AVK, Freudenstadt 1977
- /5/ Bauteile aus textilglasverstärkten Reaktionsharzen. Teil 2: Physikalische Kennwerte