Bauforschung

Planung und Auswertung von Versuchen an geschraubten Verbindungen

T 1704

Fraunhofer IRB Verlag

T 1704

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Fraunhofer IRB Verlag
Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG INSTITUT FÜR STAHLBAU

o. Prof. Dr.-Ing. Joachim Scheer

Bericht Nr. 6 0 6 5

Planung und Auswertung von Versuchen an geschraubten Verbindungen

(Kurzfassung)

Oktober 1985

Auftraggeber

Institut
für Bautechnik
Reichpietschufer 72 - 76

1000 Berlin 30

Dieser Bericht besteht aus 53 Seiten und 2 Anlagen

INSTITUT FÜR STAHLBAU DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG
Beethovenstraße 51 · 3300 Braunschweig

V O R W O R T

Das Forschungsvorhaben "STATISTISCHE PLANUNG UND AUSWERTUNG VON VERSUCHEN AN GESCHRAUBTEN VERBINDUNGEN" ist Bestandteil des DASt-Gemeinschaftsprogrammes GESCHRAUBTE VERBINDUNGEN. Dieses Gemeinschaftsprogramm wurde eingerichtet, nachdem die Notwendigkeit erkannt wurde, die Normung der geschraubten Verbindungen auf eine neue, experimentell gesicherte Grundlage zu stellen.

Ziel des vorliegenden Forschungsvorhabens ist es, Regeln für die statistische Planung und Auswertung von Versuchen aufzustellen und Hilfsmittel für die Versuchsauswertung bereitzustellen. Wegen der auf die Normung abgestellten Zielrichtung der einzelnen Vorhaben des Gemeinschaftsprogrammes sind die GRUNDLAGEN ZUR FESTLEGUNG VON SICHERHEITSANFORDERUNGEN FÜR BAULICHE ANLAGEN, in denen das Sicherheitskonzept für zukünftige Normen festgelegt ist, maßgebend. Grenzgrößen für die aufnehmbare Belastung (z.B. Traglasten) geschraubter Verbindungen sind als Zufallsgrößen aufzufassen; die Kenntnis der Verteilungsfunktionen oder von Fraktilwerten ist erforderlich. Zweckmäßigerweise werden deshalb gewisse bei den einzelnen Vorhaben anfallende Grunddaten gesammelt und statistisch ausgewertet.

Die vorliegende Kurzfassung des Berichtes Nr. 6065 ist ein geringfügig redigierter Auszug aus dem umfassenden Schlußbericht. Es wurde die Gliederung aus dem Gesamtbericht beibehalten.

I N H A L T

		Seite
	Vorwort	I
	Inhaltsverzeichnis	II
1	Einführung	1.1
1.1	Problemstellung	1.1
1.2	Statistische Versuchsplanung, allgemein	1.4
1.3	Statistische Versuchsauswertung, allgemein	1.6
1.4	Die mittelbare Ermittlung der Zielgröße	1.8
1.5	Statistische Versuchsplanung bei mittelbarer Ermittlung der Zielgröße	1.12
1.6	Statistische Versuchsauswertung bei mittelbarer Ermittlung der Zielgröße	1.14
2*	Herstellung von Schrauben, Muttern und Scheiben	
3*	Ableitung von Basisvariablen für die Traglasten geschraubter Verbindungen	
4*	Gütekontrolle bei geschraubten Verbindungen	

* Kapitel 2,3 und 4 sind hier nicht abgedruckt(siehe umfassenden Schlußbericht).

		Seite
5	Auslosen von Zufallszahlen für die Ersatzbasisvariable	5.1
5.1	Verteilung der Ersatzvariablen	5.1
5.1.1	Grundgedanken	5.1
5.1.2	Durchführung	5.4
5.1.2.1	Anwendung des Satzes von Bayes	5.4
5.1.2.2	Likelihood-Funktion	5.5
5.1.2.3	A-priori-Dichte	5.6
5.2	Wahl des Auslosungsverfahrens	5.8
5.2.1	Allgemeines Verfahren	5.8
5.2.2	Vereinfachung durch Transformation auf standardisierte Normalverteilung	5.10
5.2.3	Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen	5.11
5.2.4	Zufallsgenerator für die Ersatzbasisvariable	5.14
5.3	Beispiel: Ersatzbasisvariable aus normalverteilter Grundgesamtheit	5.16
5.3.1	Grundgesamtheit	5.16
5.3.2	Likelihood-Funktion	5.16
5.3.3	A-priori-Dichte	5.17
5.3.4	A-posteriori-Dichte	5.18
5.3.5	Prädikator-Verteilung	5.22
5.3.5.1	Form	5.22
5.3.5.2	Auslosen von Zufallszahlen	5.22
5.3.6	Analytische Integration der Prädikator-Verteilung	5.25

		Seite
6	Ermittlung von charakteristischen Werten für Bauteilwiderstände	6.1
6.1	Versuchsplanung	6.1
6.2	Versuchsauswertung	6.6
6.2.1	Aufbereitung der Versuchsergebnisse für die Simulation	6.6
6.2.2	Simulation	6.7
6.2.2.1	Allgemeiner Weg	6.7
6.2.2.2	Vereinfachungen	6.10
7	Literaturverzeichnis	7.1

Anlagen

1 EINFÜHRUNG

1.1 PROBLEMSTELLUNG

Seit der Mitte dieses Jahrhunderts wird im Bereich des Ingenieurbaus die Umstellung des Sicherheitskonzeptes von einer deterministischen auf eine probabilistische Grundlage diskutiert. Dieses geschieht aus der Einsicht heraus, daß

- die meisten der für die Sicherheit eines Bauwerkes wichtigen Größen streuen,
- Sicherheitsfestlegungen für neue Entwicklungen im Ingenieurbau nicht immer allein aufgrund langjähriger Erfahrungen zutreffend beurteilt werden können und
- ein einheitliches Sicherheitskonzept notwendig ist, um Lastnormen bauart- und baustoffunabhängig erarbeiten zu können und um einen Maßstab zu haben, mit dem die bestehenden Sicherheitsniveaus für verschiedene Bauarten und -stoffe verglichen und gegebenenfalls angeglichen werden können.

Die Grundlagen des probabilistischen Sicherheitskonzeptes sind in /1/ dargestellt.
Mit der Veröffentlichung der "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen" /2/,im weiteren kurz GRUSI-Bau genannt, durch das Deutsche Institut für Normung (DIN) im Jahre 1981 wurde eine breite Anwendung dieses Konzeptes durch seine schrittweise Einführung in das bestehende Regelwerk eingeleitet.
Die exakte Bemessung eines Bauteils geht danach von der gemeinsamen Verteilung der Last- und Widerstandsgrößen des Bauteils aus. In der praktischen Anwendung führt dies zur Lösung mehrdimensionaler Integrale, die nur mit großem analytischem oder numerischem Aufwand gelöst werden können, aber auch zu prinzipiellen Schwierigkeiten. Deshalb führt man näherungsweise die Bemessung auf die Verknüpfung charakteristischer Werte von getrennten Verteilungen für die Last- und Widerstandsgröße eines Bauteils - z.B. 95%- und 5%- Fraktile - zurück.
Der vorliegende Bericht ist ein Beitrag zur Ermittlung charakteristischer Werte von Bauteilwiderständen.

Die GRUSI-Bau faßt sowohl die Einwirkungen als auch die Widerstandsgrößen als Zufallsgrößen auf. Im vorliegenden Falle interessieren nur die Widerstandsgrößen. Dies sind die Basisvariablen des Widerstandes sowie die betrachteten Zielgrößen. Welche Größen Basisvariable und welche Zielgrößen sind, hängt von dem betrachteten Tragwerksausschnitt ab. Betrachten wir eine geschraubte Verbindung, dann sind die Basisvariablen X z.B. unter anderem die Zugfestigkeit der zu verbindenden Teile und die Scherfestigkeit der Schrauben, die Zielgrößen Y z.B. die Traglast (im Sinne von maximal aufnehmarer Last) und die Gebrauchslast (z.B. durch maximale Verformungen definiert) der Verbindung: $Y = f_1(X)$.

Wird hingegen ein komplettes Tragwerk mit geschraubten Verbindungen betrachtet, dann sind diese Grenzlasten Y die Basisvariablen, und die Zielgrößen sind die aufnehmbaren Lasten R des Tragwerkes für die betrachtete Grenze (Kollaps oder Gebrauchsfähigkeit):
$R = f_2(Y)$

Die GRUSI-Bau regelt in diesem Zusammenhang zweierlei:

1) Sie legt für die zukünftigen Normen das Teilsicherheitskonzept als Bemessungsformat fest. Sowohl Einwirkungen als auch Widerstände werden mit Teilsicherheitsbeiwerten behaftet, die Teilsicherheitsbeiwerte beziehen sich auf Fraktilen der Größen des Widerstandes und der Einwirkung.
2) Sie legt fest, in welcher Weise Normenausschüsse Teilsicherheitsbeiwerte bestimmen und überprüfen sollen. Kriterium hierbei ist die Versagenswahrscheinlichkeit.

Daraus folgt:

1) Normenausschüsse müssen - statt wie bisher zulässige Werte - nunmehr Fraktilen für die Grundgrößen des Widerstandes in die Fachnormen schreiben.
2) Für die zuverlässige Festlegung und Überprüfung der von den Normenausschüssen festgelegten Teilsicherheitsbeiwerte müssen die Verteilungsfunktionen der Grundgrößen bekannt sein.

Für die Versuche an geschraubten Verbindungen leitet sich daraus die folgende Anforderung ab:

> Die Versuche müssen so geplant, ausgeführt und ausgewertet werden, daß für die Zielgrößen des Versuches, z.B. Traglast einer Verbindung, die p-%-Fraktile (p% i.a. 5% nach GRUSI-Bau), sowie die Verteilungsfunktion bestimmt werden können.

In der Regel sind für die Ermittlung der charakteristischen Werte Versuche an einer Stichprobe von Bauteilen für eine Grundgesamtheit notwendig. Bei festgelegter Grundgesamtheit hängen Art und erforderlicher Umfang einer Stichprobe ab

- von der Menge der Vorinformationen, die vorhanden ist und in die Versuchsauswertung eingebracht werden kann, sowie
- von der Größe der statistischen Unsicherheit, die in Abhängigkeit der Versuchsauswertung beim Schluß von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit in Kauf genommen wird.

Der zur Verfügung stehende Vorinformationsumfang und die Wahl des Verfahrens für die Versuchsauswertung beeinflussen somit entscheidend den Aufwand für Versuche und die Wirtschaftlichkeit der Versuchsergebnisse. Bei gegebenem Lastbild wird unterschieden, ob nur eine Größe (z.B. der Betrag einer Last) oder ob mehrere Größen (z.B. Betrag einer Normalkraft und Exzentrizität) als Variable aufgefaßt werden. Im ersten Fall wird die Traglast skalar genannt und durch eine dimensionsbehaftete Zahl dargestellt, im zweiten Fall wird die Traglast vektoriell genannt und durch eine Funktion dargestellt.
Schwerpunkt des Forschungsvorhabens sind skalare Traglasten im Sinne von maximal aufnehmbarer Last. Außerdem werden vektorielle Traglasten (Interaktionskurven) und gewisse Funktionen, welche das Tragverhalten beschreiben (z.B. Momenten-Verdrehungs-Beziehungen), behandelt.

1. 2 STATISTISCHE VERSUCHSPLANUNG, ALLGEMEIN

Wenn statistische Daten von Zufallsgrößen, wie z.B. das 5%-Fraktil , gefragt sind, ist zunächst zu fragen, für welche Menge von geschraubten Verbindungen dieser Wert gelten soll. Diese Menge wird Grundgesamtheit genannt. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß alle Verbindungen der Grundgesamtheit bezüglich ihrer Nennwerte gleich sind (d.h. z.B. gleiche Konstruktion, Stahlsorte, Schrauben nach gleicher DIN und Festigkeitsklasse). Dies bedeutet keine Einschränkung. Falls die Voraussetzung nicht gegeben ist, kann diese Grundgesamtheit so in "Unter-Grundgesamtheiten" zerlegt werden, daß dafür die Voraussetzung erfüllt ist.

DEF.: Grundgesamtheit ist diejenige Menge gedachter nennwertgleicher Verbindungen, welche die Eigenschaft hat, daß alle in Zukunft hergestellten Verbindungen als zufällig aus der Grundgesamtheit entnommen angesehen werden können.

Die in Zukunft tatsächlich hergestellten Verbindungen sind demnach in diesem Modell Realisationen aus dieser Grundgesamtheit.

Zwar sind alle Verbindungen nennwertgleich, dennoch unterscheiden sie sich u.a. hinsichtlich der Eigenschaften, welche auf die betrachtete Zielgröße Einfluß haben. So streuen in der Grundgesamtheit z.B. Zugfestigkeit und Streckgrenze des Werkstoffes der zu verbindenden Teile sowie die Scherfestigkeit der Schrauben und damit auch die Traglast der Verbindung.

Die Widerstandsgröße R für die Grundgesamtheit Ω ist eine Zufallsgröße, die durch Verteilungstyp VT und Verteilungsparameter θ_1, θ_2, ... beschrieben wird.

Dafür wird $R \sim VT(\theta_1, \theta_2 ...)$ geschrieben. Ist z.B. R normal verteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ, dann wird dies durch $R \sim N(\mu, \sigma)$ ausgedrückt.

Das p %-Fraktil r_p ist derjenige Wert des Widerstandes, für den gilt, daß genau p% der Verbindungen der Grundgesamtheit einen Widerstand $r < r_p$ haben (sind Verteilungstyp und Parameter gegeben, dann können daraus Fraktilen berechnet werden); der charakteristische Wert r_c ist nach GRUSI-Bau dasjenige Fraktil, auf den der Teilsicherheitsbeiwert bezogen wird.

Gesucht wird zufolge GRUSI-Bau für die Widerstandsgrößen der charakteristische Wert, sowie Verteilungstyp und Parameter. Im folgenden soll zunächst nur der charakteristische Wert behandelt werden.

Da die Grundgesamtheit eine Menge "gedachter" Verbindungen ist, kann der charakteristische Wert nicht unmittelbar, sondern nur mittelbar an einer Stichprobe aus der Grundgesamtheit ermittelt werden. Es muß dann von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit geschlossen werden, d.h. der charakterische Wert des Widerstandes r_c muß aus dem Ergebnis der Versuche an den Verbindungen der Stichprobe statistisch geschätzt werden. Damit dies möglich ist, d.h. die Verfahren der mathematischen Statistik dafür anwendbar sind, muß die Stichprobe repräsentativ für die Grundgesamtheit sein. Entsprechend der Definition für die Grundgesamtheit kann man definieren:

DEF.: Eine Stichprobe ist eine Menge realer, nennwertgleicher Verbindungen, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre Elemente als zufällig aus der Grundgesamtheit entnommen angesehen werden können.

1.3 STATISTISCHE VERSUCHSAUSWERTUNG, ALLGEMEIN

Als Ergebnis der Versuche liegen für jeden Versuchskörper $\mathcal{S}_i$, $i = 1 \ldots n$, die Werte r_i für die gesuchte Widerstandsgröße R vor. Ziel der Auswertung ist voraussetzungsgemäß die statistische Schätzung des Fraktilwertes r_p der Grundgesamtheit.. Hierbei wird wie folgt verfahren:

1) Treffen einer Annahme über den Typ der Verteilung (z.B. Normalverteilung, Lognormalverteilung...).
2) Prüfen der Annahme mittels statistischer Tests.
3) Schätzen der Parameter der Verteilung (bei Annahme einer Normalverteilung von Mittelwert und Standardabweichung).
4) Berechnen des charakteristischen Wertes als p %-Fraktil.

Dieser Weg ist bei großem Stichprobenumfang n (je nach Streuung $n > 30 \ldots 100$, n = Anzahl nennwertgleicher Versuchskörper bei gleichen Versuchsbedingungen) gangbar. Bei kleinem Stichprobenumfang kann die statistische Unsicherheit nicht mehr vernachlässigt werden, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Es wird zunächst angenommen, daß R normalverteilt sei mit $R \sim N(\mu_r, \sigma_r)$, wobei μ_r der unbekannte Mittelwert und σ_r die unbekannte Standardabweichung ist.

Die mittels der bekannten Formeln

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_1^n r_i \quad , \quad s_r = \left(\frac{1}{n-1} \sum_1^n (m_r - r_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

berechneten Schätzwerte für Mittelwert und Standardabweichung sind selbst Zufallsgrößen, bei jeder Stichprobe $\triangle$ wird man andere Werte r für die Widerstandsgröße erhalten und somit auch andere Werte für m_r und s_r (Nach der Regel, daß Zufallsgrößen mit Großbuchstaben zu bezeichnen sind, müßten m und s groß geschrieben werden.). D.h. die Schätzwerte m_r und s_r weichen zufällig von den wahren Werten (den Werten der Grundgesamtheit) μ_r und σ_r ab, und zwar umso mehr, je kleiner der Stichprobenumfang ist. Dieser

Sachverhalt wird mit statistischer Unsicherheit bezeichnet.
Die Festlegung einer Schranke "auf der sicheren Seite" ist notwendig.
Wie allen Zufallsgrößen sind auch den Schätzwerten m_r und s_r Verteilungsfunktionen zugeordnet. Z.B. gilt für den

Mittelwert $m_r \sim N\left(\mu_r, \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma_r\right)$.

Daraus kann als Schranke ein Wert $\check{m}_{ru}$ berechnet werden, für den mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner als P% gilt, daß der wahre Mittelwert μ_{ru} nicht kleiner ist als $\check{m}_{ru}$. $\check{m}_{ru}$ wird die untere Vertrauensgrenze zur Aussagewahrscheinlichkeit P genannt.
Je größer die Aussagewahrscheinlichkeit ist, desto kleiner wird der Wert für $\check{m}_{ru}$. Die Aussagewahrscheinlichkeit ist neben dem Stichprobenumfang und der Standardabweichung von maßgeblichem Einfluß auf das infolge der statistischen Unsicherheit notwendige "Vorhaltemaß" $m_r - \check{m}_{ru}$. Da objektive Kriterien und verbindliche Regeln für die Festlegung von P fehlen, ist eine Vereinbarung erforderlich.
Analoge Überlegungen gelten für die Vertrauensgrenzen von s_r und r_c, die Standardabweichung und den charakteristischen Wert.

1.4 DIE MITTELBARE ERMITTLUNG DER ZIELGRÖSSE

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, führt die bisher gezeigte, unmittelbare Ermittlung der Zielgröße infolge der statistischen Unsicherheiten bei kleinen Stichprobenumfängen zu völlig unvertretbaren Vorhaltemaßen. Bei Versuchen an Bauteilen ist jedoch ein für die statistische Auswertung hinreichend großer Stichprobenumfang i.a. überhaupt nicht möglich und - wie die Erfahrung gezeigt hat - auch nicht nötig: ein Widerspruch. Will man die bisherige Praxis bei der Festlegung von Werten für die Traglast oder für die zulässige Last aufgrund von Versuchen vorsichtig skizzieren, dann könnte man dies wie folgt:

> Die Werte werden aufgrund fachlicher Erfahrung und Intuition durch Vergleich mit ähnlichen Fällen und unter Zuhilfenahme gewisser statistischer Formeln festgelegt. Bewußte "Fehler" der Versuchsplanung werden auf ähnliche Weise berücksichtigt. Ausreißer werden durch das System der Bauadministration (Gutachter, Sachverständige, Prüfer, Ausschüsse) beschränkt.

Die Festlegungen und Forderungen der GRUSI-Bau erschweren diese qualitative Einbringung von Erfahrung (konkrete Forderung nach charakterischen Werten) und zeigen einen Weg zur quantitativen Einbringung von Erfahrung auf, so daß eine korrekte statistische Auswertung möglich wird.

Worauf bezieht sich diese qualitative Erfahrung, die nun quantifiziert werden soll? Bei der unmittelbaren Ermittlung der Zielgröße wurden nur die im Versuch bestimmten Werte r_1, $\ldots r_n$ der Zielgrößen benutzt. Fast immer ist jedoch auch die Kenntnis der mechanischen Zusammenhänge zwischen den wesentlichen Eigenschaften der Versuchskörper und der Zielgröße, sowie der Streuung dieser Eigenschaften mehr oder weniger genau vorhanden. Dieser

Zusammenhang wird nach GRUSI-Bau mechanisches Modell des Widerstandes g_r genannt (da hier nur der Widerstand behandelt wird, kann im weiteren auf den Zusatz "des Widerstandes" und den Index verzichtet werden). Die skalaren Einflußgrößen, welche die wesentlichen Eigenschaften beschreiben, werden als Basisvariable des Widerstandes bezeichnet,

$$\underline{X}_r = (X_{r1}, X_{r2}, \ldots). \qquad (1.49)$$

Es gilt für einen Versuchskörper (eine Verbindung)

$$r = g(x_1, x_2, \ldots x_m, a_1, a_2, \ldots, a_l) = g(\underline{x}, \underline{a}) \qquad (1.50)$$

und für die Grundgesamtheit

$$R = g(X_1, X_2, \ldots X_m, a_1, a_2, \ldots, a_l) = g(\underline{X}, \underline{a}), \qquad (1.51)$$

wobei a_1, a_2 $\ldots, a_l$ für die nicht streuenden Basisvariablen stehen. Das mechanische Modell kann eine Funktion, aber auch ein komplexer Algorithmus sein.

Sind Basisvariablen Zufallsgrößen, ist ihnen eine Verteilungsfunktion zugeordnet. Im allgemeinen sind die Basisvariablen stochastisch voneinander abhängig, d.h. zu ihrer Beschreibung ist eine mehrdimensionale Verteilung, die gemeinsame Verteilung der Basisvariablen notwendig.

Die gemeinsame Verteilung ist durch die gemeinsame Dichtefunktion $f(\underline{X})$ und die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(\underline{X})$ beschrieben.

Für stochastisch voneinander unabhängige Basisvariable gilt $f(\underline{X})$

$$= f(X_1) . f(X_2) \ldots f(X_m). \qquad (1.52)$$

Die Kenntnis des mechanischen Modells erlaubt es, für die Versuchskörper δ der Stichprobe $\triangle$ die Werte für die Zielgröße vorherzuberechnen, wenn die Werte für die Basisvariablen gemessen werden. Je nach dem Idealisierungsgrad des mechanischen Modells wird der Unterschied (Defekt) zwischen vorhergesagtem Wert und gemessenem Wert unterschiedlich ausfallen. Wird der Defekt als Differenz zwischen vorhergesagtem und gemessenem Wert aufgefaßt, ist für einen Versuchskörper δ

$\hat{x}_E = \hat{r} - g\,(\underline{\hat{x}},a)$ (1.53)

mit

$\underline{\hat{x}}$ gemessene Werte der stochastischen Basisvariablen,

$\hat{r}$ gemessener Wert der Zielgröße und

x_E Defekt infolge $\hat{r}$ und $\underline{\hat{x}}$, gleich Ersatzbasisvariable

Wird die Stichprobe $\triangle$ zur Grundgesamtheit Ω, gilt

$X_E = R - g\,(\underline{X},a)$ (1.54)

und damit

$R = g\,(\underline{X},a) + X_E$, (1.55)

wenn keine Meßfehler bei der Ermittlung von $\hat{r}$ und $\underline{\hat{x}}$ auftreten.

Der Weg, den Defekt als Differenz zwischen vorausgesagter und wahrer Zielgröße aufzufassen, ist zwar anschaulich, muß aber nicht immer zweckmäßig sein. Der allgemeine Weg ist, das mechanische Modell g um den Defekt E zu erweitern:

$$R = g_E(X_E, \underline{X},\underline{b}) \quad (1.56)$$

Zur Ermittlung der Versuchswerte von X_E wird g_E nach X_E aufgelöst:

$$\hat{x}_E = g^{-1}{}_u(\hat{r}, \underline{\hat{x}}, \underline{a}). \quad (1.57)$$

Treten Meßfehler Δr und Δx auf mit

$$r = \hat{r} + \Delta r \text{ und} \quad (1.58)$$

$$\underline{x} = \underline{\hat{x}} + \Delta x, \quad (1.59)$$

wird auch der Defekt fehlerhaft sein. Anstelle von

$$x_E = g^{-1}{}_E\,(\hat{r}, \underline{\hat{x}}, \underline{a}) \quad (1.60)$$

wird

$$x_E + \Delta x = g^{-1}{}_E(\hat{r} + \Delta r, \underline{\hat{x}} + \Delta \underline{x}, \underline{a}) \quad (1.61)$$

bestimmt und daraus

$$R+\Delta R = g_E\,(g^{-1}{}_E\,(\underline{R+\Delta R}, \underline{X+\Delta X},\underline{a}),\underline{X},\underline{a}) \quad (1.62)$$

fehlerhaft gegenüber

$$R = g_E(g^{-1}{}_E(R,\underline{X},a), \underline{X},a) \quad (1.63)$$

berechnet.

Was ist durch diese Umformung, in die die vorhandene Kenntnis über das mechanische Modell aufgenommen wurde, gewonnen? Zunächst nicht viel, denn anhand der Versuchsergebnisse für x_E müssen Verteilungstyp und -parameter von X_E geschätzt werden - die statistische Unsicherheit ist offenbar nicht kleiner geworden.
Der Gewinn zeigt sich bei Betrachtung der Art der zu schätzenden Größen.

Der Defekt X_E wird je nach Qualität des mechanischen Modelles g_E deutlich weniger streuen als die Zielgröße R, so daß auch das Vorhaltemaß für X_E deutlich geringer ist als für R. Bei guten mechanischen Modellen tragen die Streuungen von X_1, X_2, ...X_m den Hauptanteil zur Streuung von R bei. Für die Basisvariablen (Streckgrenzen, Scherfestigkeiten...) ist jedoch ein großer Stichprobenumfang möglich, so daß die statistische Unsicherheit vernachlässigbar wird. Der große Stichprobenumfang ist annehmbar, da einerseits der Aufwand je Versuch vergleichsweise gering ist und andererseits die Ergebnisse für die Basisvariablen für eine Vielzahl unterschiedlichster Verbindungen gelten.

Wenn das stochastische Modell der Basisvariablen vorab - gültig für alle Versuche des DASt-Gemeinschaftsprogrammes - bestimmt wird, hat dies offensichtlich auf die Versuchsplanung entscheidende Auswirkung:
Bezüglich dieser Basisvariablen braucht die Stichprobe <u>nicht</u> repräsentativ zu sein!

1.5 STATISTISCHE VERSUCHSPLANUNG FÜR MITTELBARE ERMITTLUNG DER ZIELGRÖSSE

Aus dem zuvor Ausgeführten ergibt sich der Ablauf zwanglos wie folgt:

a) Liste der Einflußgrößen
Es werden die Größen, welche Einfluß auf die Zielgröße haben, zusammengestellt und in deterministische Größen und Zufallsgrößen eingeteilt. Letztere werden in Zusammenhang mit b) in Basisvariable und andere Zufallsgrößen unterteilt. (Basisvariable sind, wie ausgeführt, nur in bezug auf ein bestimmtes mechanisches Modell definiert. Die Liste der Basisvariablen sollte so aufgestellt werden, daß auch zukünftige Modelle mit Basisvariablen aus der Liste versorgt werden können).

b) Mechanische Modelle
Für die Zielgröße werden ein, besser mehrere konkurrierende mechanische Modelle aufgestellt.

c) Beschaffung von Material und Schrauben
Bezüglich der Basisvariablen müssen Material und Schrauben keine Stichprobe im Sinne von Abschnitt 1.3 sein. Mit Rücksicht auf die Bestimmung der Basisvariablen $\hat{x}_i$ für die Versuchskörper ist es zweckmäßig, Material und Schrauben für alle Versuchskörper möglichst homogen zu erhalten; z.B. bei Schrauben möglichst aus einem Herstell-Los, bei Blechen möglichst aus einer Tafel oder, wenn mehrere Tafeln notwendig sind, ebenfalls möglichst aus einem Herstell-Los.

d) Herstellung der Prüfkörper
Sinngemäß gilt das zu c) Ausgeführte.

e) Bestimmung der Basisvariablen
Die Bestimmung der Basisvariablen $\hat{x}_i$ soll möglichst unmittel-

bar an den Versuchskörpern ermittelt werden. Wo dies nicht möglich ist, wie z.B. bei der Scherfestigkeit der Schrauben, müssen aus jeder Liefereinheit (bei Schrauben aus einem Herstell-Los, bei Material z.B. aus jeder Stange oder Tafel) hierfür Prüfkörper entnommen werden. Die Anzahl ist dabei so zu wählen, daß ungewöhnliche Streuungen innerhalb einer Liefereinheit erkannt werden können. Die Entnahmestelle bei Material (z.B. Profilstahl) richtet sich nach der maßgebenden Stelle der Beanspruchung im Versuchskörper.

1. 6 STATISTISCHE VERSUCHSAUSWERTUNG BEI MITTELBARER ERMITTLUNG DER ZIELGRÖSSE

Die Auswertung gliedert sich in zwei Teile

a) Schätzung des Verteilungstyps und der Parameter $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_E$

für die Ersatzbasisvariable X_E.

b) Ermitteln des Verteilungstyps und der Parameter $VT(\theta_1, \theta_2, ...)R$ für die Zielgröße R, wobei die Kenntnis von Verteilungstyp und -parameter $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_i$ der

Basisvariablen $\underline{X}_i$ als gegeben vorausgesetzt wird.

Das Problem bei der unmittelbaren Ermittlung des Zielwertes bestand darin, daß zufolge des geringen Stichprobenumfanges die statistische Unsicherheit unannehmbar groß wurde. Nun, da die vormals qualitative Erfahrung in geeigneter Weise durch g_E und $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_i$ quantifiziert ist, kann man die "fehlenden Versuche" durch simulierte Versuche ersetzen, wenn $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_E$ bekannt ist . Für jeden simulierten Versuch werden je eine Zufallszahl $x^z{}_E$ aus der Verteilung für den Defekt und je eine Zufallszahl $x^z{}_i$, aus den m Verteilungen $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_i$ gezogen und daraus mittels

$$r^z = g_E(x^z{}_E, x^z{}_i, a) \qquad (1.64)$$

der simulierte Versuchswert berechnet.

Die Anzahl der Versuche, d.h. der Umfang der durch Simulation erweiterten Stichprobe kann nun soweit erhöht werden, daß die statistische Unsicherheit vernachlässigbar wird.

Bleibt das Problem der unbekannten Verteilung $VT(\theta_1, \theta_2, ...)X_E$.

Wenn, wie vorausgesetzt, tatsächlich Erfahrung in erheblichem Umfang quantifiziert wurde, darf die Streuung von X_E nur geringen Einfluß auf die Zielgröße R haben. Es wird daher erwartet, daß das Ergebnis der Auswertung hinreichend unempfindlich gegen die Wahl des Verteilungstyps von X_E und deshalb X_E normal verteilt angenommen werden kann, d.h. $X_E \sim N(\mu_E, \sigma_E)$.

Aufgrund der Versuchsergebnisse x_{E1}, x_{E2},... wird mit bekannten statistischen Verfahren die gemeinsame Verteilung der unbekannten Parameter μ_E, σ_E ermittelt. Damit ist die Voraussetzung für die Simulation gegeben: Für jeden simulierten Versuchskörper δ_j wird erst ein Wertepaar (μ_{Ej}, σ_{Ej}) gezogen und dann x_E aus $NV(\mu_{Ej}, \sigma_{Ej})$.

5 AUSLOSEN VON ZUFALLSZAHLEN FÜR DIE ERSATZBASISVARIABLE

5.1 VERTEILUNG DER ERSATZBASISVARIABLEN

5.1.1 Grundgedanken

Zur Ermittlung von charakteristischen Werten eines Bauteilwiderstandes R werden seine deterministischen Basisvariablen und seine stochastischen Basisvariablen, deren Verteilungen bekannt sind, sowie etwaige Einwirkungen in einem mechanischen Modell $R = h(\underline{X})$ zusammengefaßt. Die stochastischen Basisvariablen, deren Verteilungen unbekannt sind, und die Fehler des mechanischen Modells werden einer Ersatzbasisvariablen X_E zugewiesen, um die das mechanische Modell ergänzt wird:

$$R = h(\underline{X}, X_E). \tag{5.01}$$

Mit an Versuchskörpern oder zugehörigen Prüfeinheiten gemessenen Zahlenwerten für

- den Bauteilwiderstand $\underline{\hat{r}}$ (z.B. Traglasten von Verbindungen) und
- die Basisvariablen und Einwirkungen $\underline{\hat{x}}$ (z.B. Schaftdurchmesser und Zugfestigkeit der Schrauben, Dicke und Zugfestigkeit der Bleche, Anzahl der Schrauben, Lastkombinationen)

können Versuchsergebnisse für X_E errechnet werden:

$$\underline{\hat{x}}_E = h^{-1}(\underline{\underline{\hat{x}}}, \underline{\hat{r}}). \tag{5.02}$$

Unter der Voraussetzung, daß mindestens der Verteilungstyp der Grundgesamtheit von X_E bekannt ist, kann mit den erhaltenen Werten $\underline{\hat{x}}_E$ eine Verteilung $F(x_E)$ geschätzt werden, die berücksichtigt, daß die genommene Stichprobe $\underline{\hat{x}}_E$ nur eine der möglichen Stichproben aus der Grundgesamtheit von X_E darstellt und somit die Stichprobenergebnisse streuen. Folgende gedankliche Vorstellung liegt der Schätzung zugrunde:
Für eine Zufallsgröße X seien Verteilungstyp und -parameter $F(x|\underline{\theta})$ mit $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ der Grundgesamtheit bekannt. Entnimmt man ihr eine Reihe von Stichproben vom Umfang n, so werden

die Stichproben verschiedene Schätzwerte $\underline{\hat{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m)$ für die wahren Parameter $\underline{\theta}$ der Grundgesamtheit ergeben. Würde man eine beliebig große Zahl von Stichproben mit jeweils demselben Umfang n entnehmen und die Auftretenswahrscheinlichkeit der erhaltenen Schätzwerte $\underline{\hat{\theta}}$ in einem Diagramm auftragen, so ergäbe sich für die Schätzwerte $\underline{\theta}$ eine m-dimensionale Dichte $f_{\hat{\theta}}(\underline{\hat{\theta}}|\underline{\theta},n)$ (s. z.B. Bild 5.1 a bis c für m = 2).
Stellt man sich eine beliebig große Anzahl j ähnlicher möglicher Grundgesamtheiten mit demselben Verteilungstyp aber jeweils etwas anderen Zahlenwerten $\underline{\theta}^j$ für die wahren Parameter vor, so würden sich für dieselben Schätzwerte $\underline{\hat{\theta}}$ jeweils etwas andere Auftretenswahrscheinlichkeiten und somit andere Dichten $f^j_{\hat{\theta}}(\underline{\hat{\theta}}|\underline{\theta}^j,n)$ ergeben (siehe Bild 5.1a bis c). Für das Auftreten einer bestimmten Stichprobe, die die Schätzwerte $\underline{\hat{\theta}}^0$ liefert, gibt es somit in Abhängigkeit der möglichen Grundgesamtheiten j verschiedene Wahrscheinlichkeiten $f^{j,0}_{\hat{\theta}}(\underline{\theta}^0|\underline{\theta}^j,n)$ (siehe Bild 5.1a bis c). Überträgt man diese in ein Diagramm in Abhängigkeit der $\underline{\theta}$, so erhält man umgekehrt für eine gegebene Stichprobe mit dem Ergebnis $\underline{\hat{\theta}}^0$ und Umfang n die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für ihre Zugehörigkeit zu einer Grundgesamtheit mit den jeweiligen wahren Parametern $\underline{\theta}$. Das bedeutet, die wahren Parameter der Grundgesamtheit werden selbst zu Zufallsgrößen, denen abhängig von der Stichprobe $(\underline{\hat{\theta}}^0,n)$ eine bestimmte gemeinsame Dichte $f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^0,n)$ zugeordnet ist. Die Verteilung F(x) der Zufallsgröße X kann nun mit Berücksichtigung sämtlicher möglicher $\underline{\theta}$ in Abhängigkeit von $\underline{\hat{\theta}}^0$ und n als totale Wahrscheinlichkeit bestimmt werden aus dem Produkt der

- gegebenen Verteilung von X mit der Bedingung, daß $\underline{\theta}$ die unbekannten Parameter der Grundgesamtheit sind: $F_X(x|\underline{\theta}) = \int_X f_X(x|\underline{\theta})dx$ und der
- Wahrscheinlichkeit für diese unbekannten Parameter $\underline{\theta}$ bei einer Stichprobe mit dem Ergebnis $\underline{\hat{\theta}}^0$ und dem Umfang n: $f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^0,n)$,

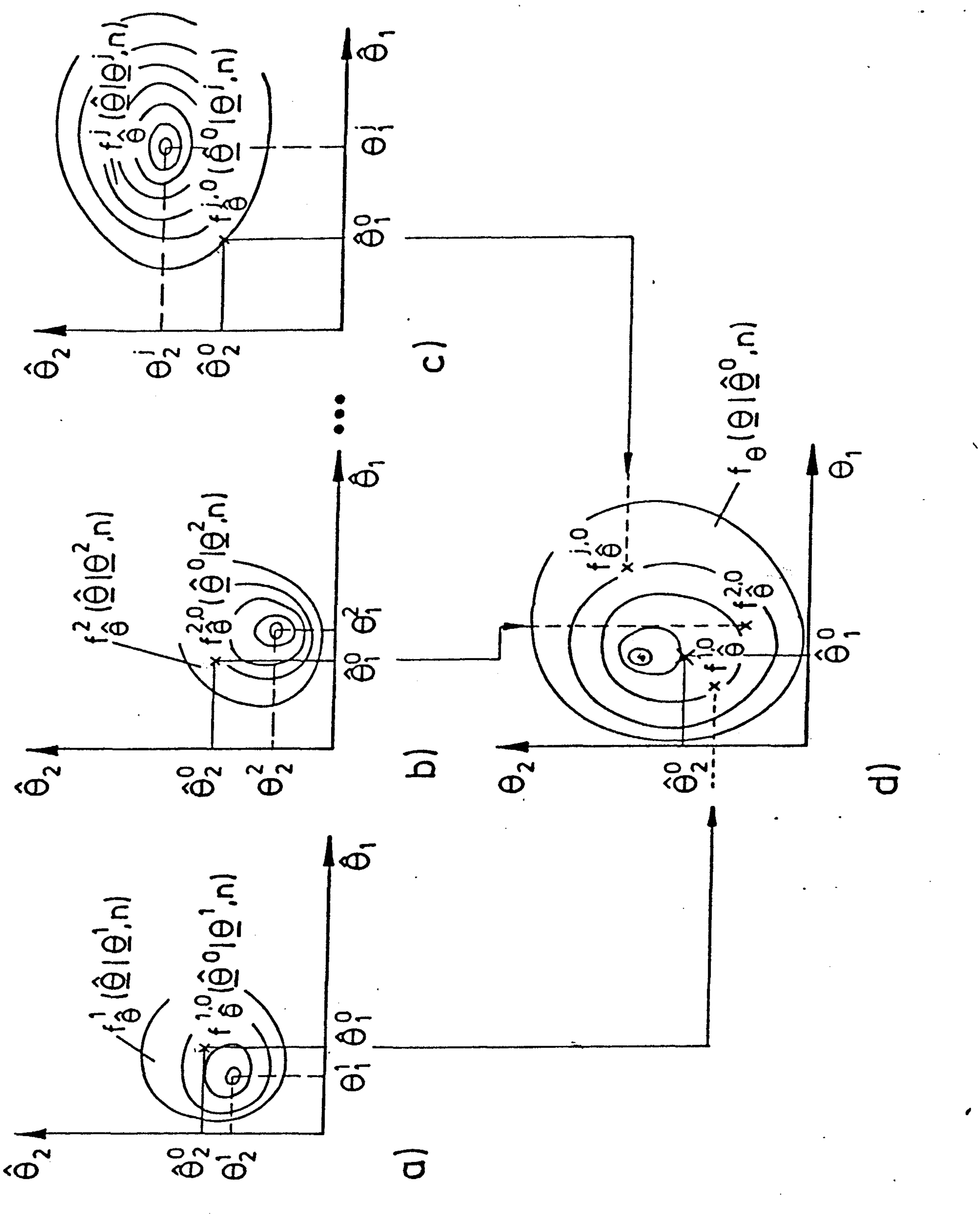


Bild 5.1 Zur Auffassung von unbekannten Verteilungsparametern als Zufallsgröße

- integriert über den gesamten möglichen Bereich der $\underline{\theta}$:

$$F(x|\underline{\hat{\theta}}^{\circ},n) = \iint_{\underline{\theta}x} f_X(x|\underline{\theta})dx \cdot f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^{\circ},n)d\underline{\theta} \quad . \tag{5.03}$$

Diese Verteilung wird als Prädiktor-Verteilung für X bezeichnet. Da $f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^{0},n)$ nicht von x abhängt und beide Integranden stetig sind, kann die Reihenfolge der Integration vertauscht werden:

$$F(x|\underline{\hat{\theta}}^{\circ},n) = \iint_{x\underline{\theta}} f_X(x|\underline{\theta}) \cdot f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^{\circ},n)d\underline{\theta}dx \quad . \tag{5.04}$$

5.1.2 Durchführung

5.1.2.1 Anwendung des Satzes von Bayes

Die unbekannte Dichte $f_{\theta}(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^{0},n)$ kann durch den Satz von Bayes ermittelt werden, wenn der Verteilungstyp der Grundgesamtheit der $\underline{x}$ bekannt ist. Der Satz von Bayes hat für stetige Zufallsgrößen die Form

$$g(q|x) = \frac{f(q) \cdot h(x|q)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(q) \cdot h(x|q)dq} \qquad /3/ \tag{5.05}$$

Er gibt allgemein die Dichte einer Größe q an unter der Bedingung, daß ein Ereignis x eingetreten ist.
Interpretiert man q als die unbekannten Parameter $\underline{\Theta}$ der Verteilung einer Grundgesamtheit und x als zugehörige Versuchsergebnisse $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ einer Stichprobe vom Umfang n, so ist $g(q|x)$ die gesuchte Dichte der Parameter $\underline{\Theta}$ unter der Bedingung, daß die Versuchsergebnisse $\underline{x}$ vorliegen. Für diese Dichte wird im weiteren die Schreibweise $f''(\underline{\theta}|x)$ ($\hat{=}\ f_{\theta}(\underline{\theta}|\hat{\theta}^{0},n)$ aus Gl.(5.04)) gewählt.
Bei bekanntem Verteilungstyp und bekannten Parametern $\underline{\Theta}$ der Grundgesamtheit gibt $h(x|q) = h(\underline{x}|\underline{\Theta})$ ursprünglich die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Versuchsergebnissen $\underline{x}$ an. Bei festliegenden Versuchsergebnissen $\underline{x}$ und unbekannten Parametern $\underline{\Theta}$

wird $h(\underline{x}|\underline{\theta})$ jedoch eine Funktion der $\underline{\theta}$. Diese Funktion wird dann als Likelihood-Funktion $L(\underline{\theta}|\underline{x})$ für $\underline{\theta}$ bei gegebenen $\underline{x}$ bezeichnet. Durch sie fließt somit die Information, die aus Versuchsergebnissen gewonnen wird, in die Berechnung von $f''(\underline{\theta}|\underline{x})$ ein.

Die Funktion $f(q)$ ist von keinen Bedingungen abhängig. Durch sie kann die Information über die Parameter $\underline{\theta}$ bei der Ermittlung von $f''(\underline{\theta}|\underline{x})$ eingebracht werden, die vor den Versuchen bereits bekannt ist; sie wird daher als a-priori-Dichte der $\underline{\theta}$ bezeichnet. Die Schreibweise ist $f'(\underline{\theta})$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\cdot h(x|q)dq \mathrel{\hat{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(\underline{\theta})\cdot L(\underline{\theta}|\underline{x})d\underline{\theta}$ wird bei festliegenden Versuchsergebnissen $\underline{x}$ zu einer Normierungskonstanten $1/K$, die aus der Forderung $\int_{-\infty}^{+\infty} f''(\underline{\theta}|\underline{x})d\underline{\theta} \overset{!}{=} 1$ bestimmt wird. Der Bayes-Ansatz kann somit in der Form

$$f''(\underline{\theta}|\underline{x}) = K\cdot f'(\underline{\theta})\cdot L(\underline{\theta}|\underline{x}) \tag{5.06}$$

geschrieben werden. $f''(\underline{\theta}|\underline{x})$ wird als a-posteriori-Dichte bezeichnet, da sie aus der Verknüpfung dessen, was vor den Versuchen bekannt ist (a priori), mit dem, was durch die Versuche bekannt wird (Likelihood-Funktion), das Wissen nach den Versuchen (a posteriori) repräsentiert.

5.1.2.2 Likelihood-Funktion

In der Regel kann man bei den Versuchskörpern von einer zufälligen Stichprobenentnahme ausgehen; bewußt ausgewählt wird die zu untersuchende Grundgesamtheit. Bei zufälliger Stichprobenentnahme sind die Versuchsergebnisse $\underline{x}$ stochastisch voneinander unabhängig. Die Likelihood-Funktion ist dann als Produkt von n Funktionen darstellbar:

$$L(\underline{\theta}|\underline{x}) = l_1(\underline{\theta}|x_1)\ldots l_n(\underline{\theta}|x_n) = \prod_{i=1}^{n} l_i(\underline{\theta}|x_i) \ . \tag{5.07}$$

Ermittelt man aus den Versuchsergebnissen $\underline{x}$ die Schätzwerte $\underline{\hat{\theta}}^0$

für die Parameter $\underline{\theta}$ und ersetzt durch sie die Einzelergebnisse $\underline{x}$, so ergibt sich

$$L(\underline{\theta}|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} l_i(\underline{\theta}|x_i) = L(\underline{\theta}|\hat{\theta}^\circ,n) \quad . \tag{5.08}$$

Der Bayes-Ansatz erhält dann die Form

$$f''(\underline{\theta}|\underline{x}) = f''(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^\circ,n) = K \cdot f'(\underline{\theta}) \cdot L(\underline{\theta}|\underline{\hat{\theta}}^\circ,n) \quad . \tag{5.09}$$

5.1.2.3 A-priori-Dichte

Je nachdem, ob durch die a-priori-Dichte $f'(\underline{\theta})$ Information über die $\underline{\theta}$ in die a-posteriori-Dichte $f''(\underline{\theta}|\underline{\theta}^0,n)$ eingebracht werden soll oder nicht, wird sie als informativ oder nichtinformativ bezeichnet. Da in der Regel über die Parameter $\underline{\theta}$ nichts oder nicht genügend Gesichertes bekannt ist - aus diesem Grunde werden ja Versuche gerade notwendig -, ist es meist notwendig für $f'(\underline{\theta})$ eine nichtinformative Dichte zu wählen. Ein eindeutiges Kriterium zur Umsetzung von "Nichtwissen" - oder realistischer "wenig Wissen" im Vergleich zu Versuchsergebnissen - in eine nichtinformative a-priori-Dichte gibt es nicht. In der Literatur werden im wesentlichen zwei Auffassungen vertreten:

Kriterium 1:

Bayes selber hat vorgeschlagen /5/, "wenig Wissen" über die Parameter $\underline{\theta}$ der Verteilung einer Zufallsgröße dadurch zu charakterisieren, daß jeder Wert für die Parameter $\underline{\theta}$ als gleichwahrscheinlich angesehen wird; das bedeutet die Annahme einer gleichverteilten Dichte $f'(\underline{\theta})$ = konstant = K für die Parameter $\underline{\theta}$.

Kritiker weisen darauf hin, daß Transformationen der Parameter $\underline{\theta}$ nicht mehr gleichverteilt sind. Z.B. müßte, wenn θ gleichverteilt ist, auch θ^2 gleichverteilt sein, aber durch die Transformation von θ nach θ^2 wird $f'(\theta) = K$ und $f'(\theta^2) = K/\sqrt{(2\theta)}$.

Ist die a-priori-Dichte eine Konstante, ergibt sich als a-posteriori-Dichte die normierte Likelihood-Funktion und die Vorgehensweise stimmt dann soweit mit der der klassischen Statistik überein. Im weiteren jedoch ermittelt sich die klassische Statistik aus der Likelihood-Funktion Schätzwerte für die unbekannten Parameter und mittels weiterer Verfahren dann über Vertrauensintervalle gesuchte Fraktilwerte /6/, während die Bayes'sche Statistik die Likelihood-Funktion als Dichtefunktion für die unbekannten Parameter weiterverwendet, um die Verteilung selbst als Prädiktor-Verteilung abzuschätzen und deren gesuchte Fraktilwerte als Fraktilwerte der Prädiktor-Verteilung ermittelt /7, 8/.

Kriterium 2:

In /17/ wird vorgeschlagen, als "wenig Wissen" gegenüber den Erkenntnissen aus Versuchen eine Gleichverteilung für diejenige Transformation $t(\underline{\theta})$ anzunehmen, bei der die entsprechend transformierte Likelihood-Funktion aufgrund der Versuchsergebnisse $\underline{x}$ nur ihre Lage aber nicht ihre Gestalt ändert: $f'(t(\underline{\theta})) = \text{konstant} = K$. Bei der Rücktransformation der $\underline{\theta}$ bedeutet dies die a-priori-Dichte

$$f'(\underline{\theta}) = f'(t(\underline{\theta})) \cdot \frac{d(t(\underline{\theta}))}{d\underline{\theta}} = K \cdot \frac{d(t(\underline{\theta}))}{d\underline{\theta}} .$$

"Etwas Wissen" geht hier als Vorinformation über die Gestalt der Likelihood-Funktion ein.

Die Auswahl einer a-priori-Dichte für konkrete Rechnungen ist problemabhängig. Die Wahl der a-priori-Dichte im Rahmen dieser Arbeit wird im Abschnitt 5.3.5.2 begründet.

Sind die Parameter $\underline{\theta}$ stochastisch voneinander unabhängig, kann die gemeinsame a-priori-Dichte $f'(\underline{\theta})$ als Produkt von m unabhängigen Dichten $f_i(\underline{\theta})$ ermittelt werden:

$$f'(\underline{\theta}) = f_1'(\theta_1) \ldots f_m'(\theta_m) = \prod_{i=1}^{m} f_i'(\theta_i) \; . \qquad (5.10)$$

5.2 WAHL DES AUSLOSUNGSVERFAHRENS

5.2.1 Allgemeines Verfahren

Die Funktionswerte der Verteilung $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$ einer eindimensionalen Zufallsgröße X liegen vereinbarungsgemäß zwischen 0 und 1. Da F(x) in jedem Fall monoton von 0 bis 1 steigt, kann für vorgegebene Funktionswerte g = F(x) eindeutig der zugehörige Wert x der Zufallsgröße X bestimmt werden (Bild 5.2). Werden die Werte g einer (0,1)-gleichverteilten Grundgesamtheit zufällig entnommen, so sind die Werte x f(x)-verteilt. Auf diese Weise können für jede beliebige Verteilung F(x) Zufallszahlen x^z ausgelost werden. Der Beweis hierfür ist in /9/ wiedergegeben.

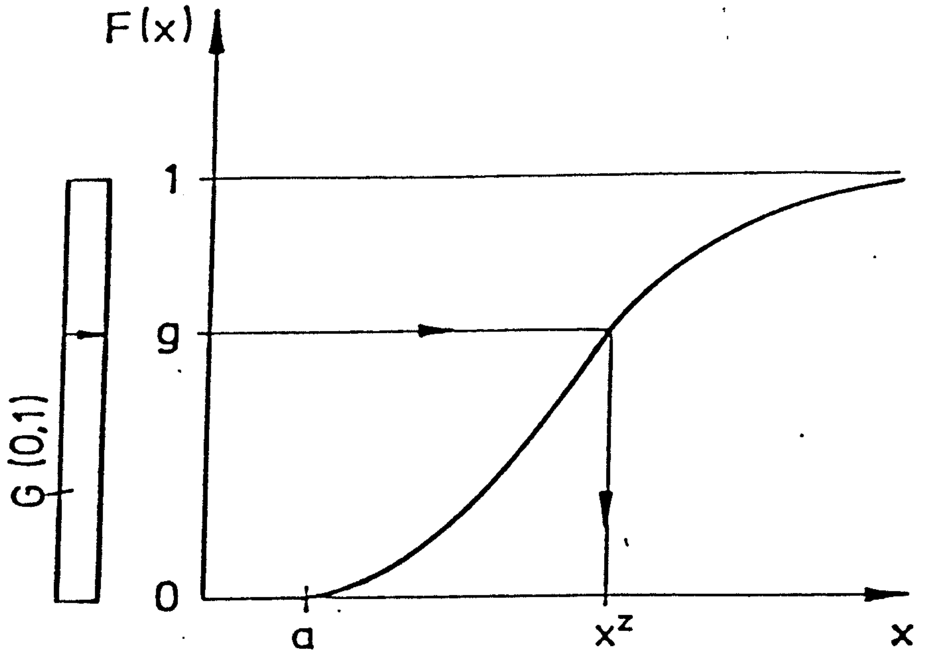


Bild 5.2 Auslosen einer Zufallszahl aus einer beliebigen, stetigen Verteilung

Ist F(x) analytisch angebbar und nach x auflösbar, so können Zufallszahlen durch

$$x^z = F^{-1}(g) \tag{5.11}$$

unmittelbar errechnet werden.
Solche Verteilungen F(x) sind in /10/ aufgelistet. In allen anderen Fällen muß x^z iterativ errechnet werden.

Im Fall einer mehrdimensionalen Verteilung $F(\underline{x})$ mit den Zufallsgrößen $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ muß ein Zufallsvektor $\underline{x}^z = (x_1, \ldots, x_m)$ ausgelost werden.
Es wird von einer beliebigen Randverteilung

$$F(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{x_i} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_i \ldots dx_m \qquad (5.12)$$

ausgegangen, aus der nach dem o.a. Verfahren für den eindimensionalen Fall ein Wert x_i^z für X_i ausgelost wird. Im nächsten Schritt wird aus der Verteilung im Schnitt $x_i = x_i^z$ für X_j ein Wert x_j^z ausgelost:

$$F(x_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{x_j} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_i = x_i^z, \ldots \\ \ldots, x_j, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_j \ldots dx_m \quad . \qquad (5.13)$$

Dieses Vorgehen wiederholt sich so oft, bis am Ende für den letzten Parameter X_l ein Wert x_l^z ausgelost wird:

$$F(x_l \,|\, x_1 = x_1^z, \ldots, x_i = x_i^z, \ldots, x_j = x_j^z, \ldots, x_m = x_m^z) = \\ \int_{-\infty}^{x_l} f(x_1 = x_1^z, \ldots, x_i = x_i^z, \ldots, x_l, \ldots, x_j = x_j^z, \ldots, x_m = x_m^z)\, dx_l \quad . \qquad (5.14)$$

Der letzte ausgeloste Wert x_l^z ist dann die gesuchte Zufallszahl x^z aus der mehrdimensionalen Verteilung. Der Beginn und die Reihenfolge der Abarbeitung der X_i ist beliebig. Der geschilderte Ablauf ist in Bild 5.3 beispielhaft für eine dreidimensionale Verteilung veranschaulicht.

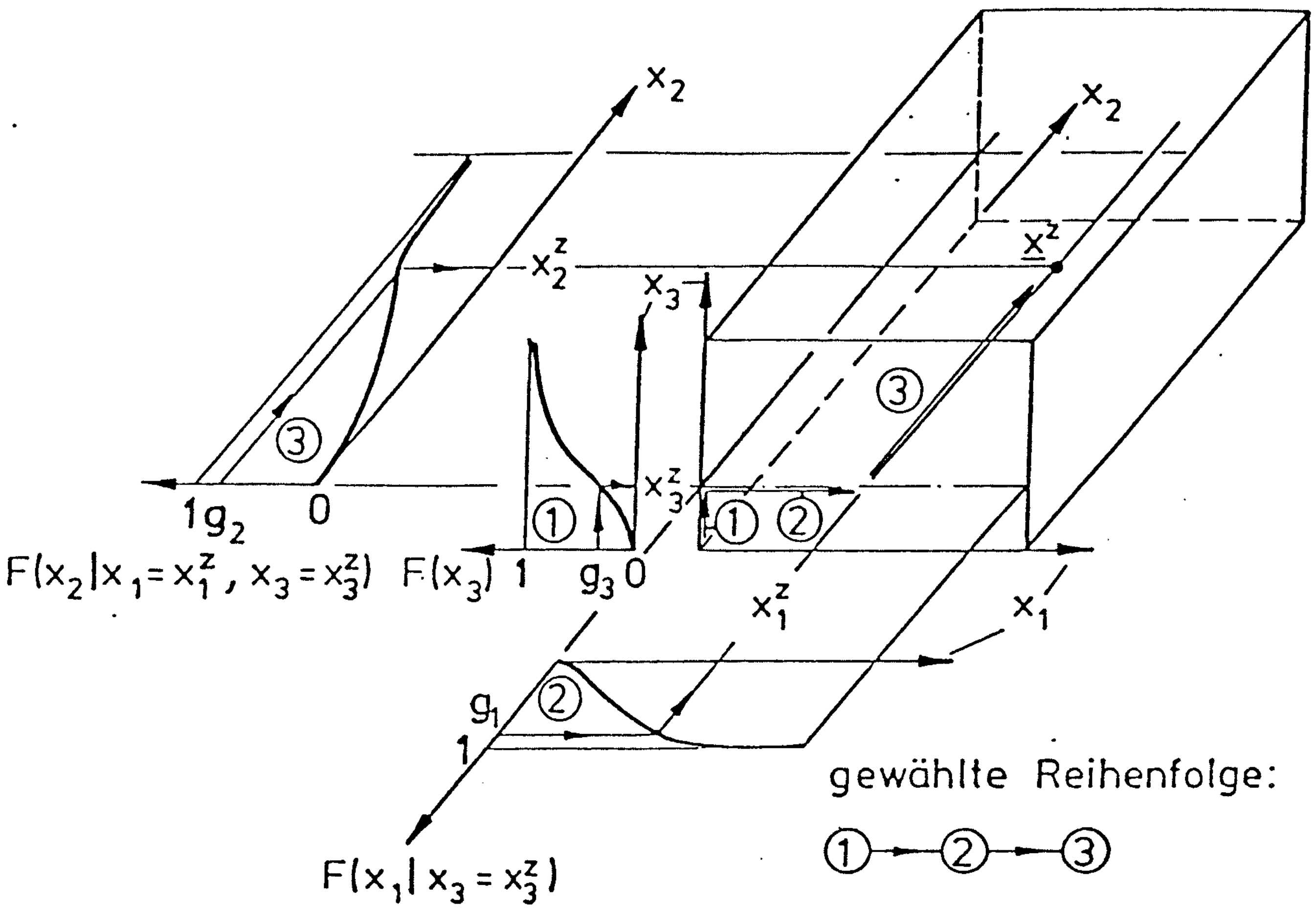


Bild 5.3 Beispiel für das Auslosen von Zufallszahlen aus mehrdimensionalen Verteilungen

Aus Gründen der Darstellung wurde für die Verteilung ein Quader als Begrenzung gewählt.

5.2.2 Vereinfachungen durch Transformation auf standardisierte Normalverteilung

Bei Verteilungen, die durch Transformation in die Form einer standardisierten Normalverteilung N(0,1) gebracht werden können $F(x) \rightarrow F(\bar{z})$, können Zufallszahlen durch entsprechende Rücktransformation einer (0,1)-normalverteilten Zufallszahl $\bar{z}$ errechnet werden. Aufbereitete Formeln hierzu sind in /10/ angegeben. (0,1)-normalverteilte Zufallszahlen selbst werden gemäß Abschnitt 5.2.1 wieder auf (0,1)-gleichverteilte Zufallszahlen zurückgeführt.

5.2.3 Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

Wie aus den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 hervorgeht, müssen für das Auslosen von Zufallszahlen aus beliebigen Verteilungen in jedem Fall (0,1)-gleichverteilte Zufallszahlen vorliegen.
Die Erzeugung von (0,1)-gleichverteilten Zufallszahlen wird auf die Erzeugung von Zufallszahlen zurückgeführt, die in einem beliebigen Zahlenbereich gleichverteilt sind. Die Auswahl eines bestimmten Zahlenbereiches ist lediglich eine Frage entsprechender Normierung. Die Qualität der Gleichverteilung von Zufallszahlen wird durch Tests überprüft. Mittelwert und Standardabweichung beliebig gegriffener und möglichst kleiner Zahlengruppen sollten gegen die theoretischen Werte der Gleichverteilung (bei der (0,1)-Gleichverteilung 0,5 bzw. $1/\sqrt{12}$) konvergieren, die Autokorrelation aufeinanderfolgender Zahlen und Zahlenfolgen sollte 0 sein.

Als allgemein sehr brauchbar für digitale Rechner haben sich die Algorithmen erwiesen, die durch Erzeugung von "Binärem Pseudorauschen" Pseudozufallszahlen generieren. In /12/ wird eine Methode beschrieben, die mit einem Schieberegister und einem Antikoinzidenzgatter arbeitet und sich sehr gut bewährt hat. Diese Methode wird im Rahmen dieser Arbeit benutzt.

Die Pseudozufallszahlen werden erzeugt, indem das in einem Schieberegister vorhandene Bitmuster jeweils um ein Bit weiterwandert (Bild 5.5), wobei das letzte Bit verlorengeht und das erste in Abhängigkeit des Ausgangs eines Antikoinzidenzgatters aufgefüllt wird.

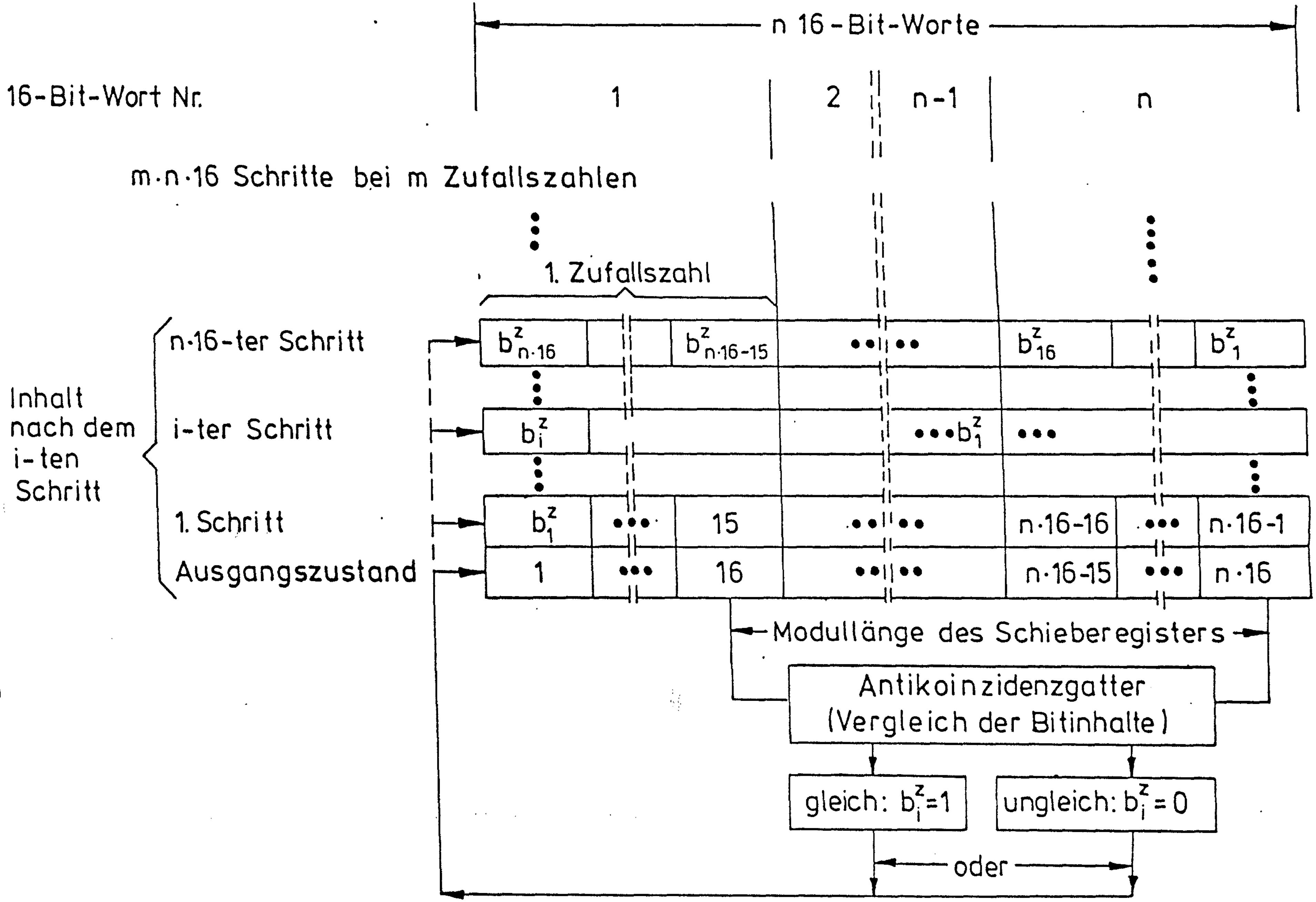


Bild 5.5 Prinzip des gewählten Generators zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

INSTITUT FÜR STAHLBAU DER TU BRAUNSCHWEIG

Zur Durchführung der notwendigen Rechnungen stand ein 16-Bit-Rechner zur Verfügung.
Es wurde mit einem Schieberegister von 256•16 = 4096 Bits gearbeitet. Das Ausgangsbitmuster wurde mit 256 gleichverteilten Zufallszahlen erzeugt, die einer Tabelle aus /13/ entnommen wurden. Das Antikoinzidenzgatter vergleicht das 16. und das 4096. Bit und liefert, wenn deren Inhalte verschieden (antikoinzident) sind, eine 0, wenn sie gleich sind, eine 1. Ist das Schieberegister einmal mit einem vollständig neuen Bitmuster belegt, wird die aus den Inhalten der ersten sechzehn Bits sich ergebende Zahl als Zufallszahl interpretiert. Da das 1. Bit das Vorzeichen bestimmt, können Zahlen (Z) im Bereich von $\pm 2^{15} = \pm 32768$ erzeugt werden.
Über die Normierung

$$g = \frac{Z+2^{15}}{2^{16}} \qquad (5.15)$$

erhält man (0,1)-gleichverteilte Pseudozufallzahlen. Mit der gewählten Modullänge (16.-4096. Bit) wurde bis mindestens 40000 erzeugten Pseudozufallszahlen keine wiederkehrende Zahlenfolge festgestellt. Eine Überprüfung der Zahlenfolge in Blocks zu je Hundert und Vielfachen von Hundert ergab Mittelwerte von $0{,}5 \pm 0{,}008$ und Standardabweichungen von $1/\sqrt{12} \pm 0{,}011$. Eine Überprüfung der Autokorrelation zwischen je 30 aufeinanderfolgenden Zahlen ergab völlige statistische Unabhängigkeit.
Aufgrund der durchgeführten Tests wurde bei den Simulationsrechnungen davon ausgegangen, daß ein Satz von 40000 (0,1)-gleichverteilten Pseudozufallszahlen zur Verfügung stand. Verkürzt werden sie im weiteren als Zufallszahlen bezeichnet.

5.2.4 Zufallsgenerator für die Ersatzbasisvariable

Die Prädiktor-Verteilung Gl.(5.04) ist im allgemeinen nicht analytisch integrierbar. Infolgedessen sind die in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 erläuterten Verfahren zur Auslosung von Zufallszahlen nicht unmittelbar anwendbar. Die beiden Integranden in Gl.(5.04) jedoch liegen jeweils als Dichte in Form einer stetigen Funktion vor. Eine Auslosung von Zufallszahlen aus der Prädiktor-Verteilung wird so durch schrittweises Vorgehen möglich:

1. Auslosen von Zufallszahlen $\underline{\Theta}^z$ aus $f''(\underline{\Theta}|\hat{\underline{\Theta}}^0,n)$ ($\hat{=}\ f_\Theta(\underline{\Theta}|\hat{\underline{\Theta}}^0,n)$ nach Gl.(5.04)) für die $\underline{\Theta}$ gemäß Abschnitt 5.2.1 oder 5.2.2,
2. Auslosen einer Zufallszahl x_E^z aus $f_X(x_E|\underline{\Theta})$ ($\hat{=}\ f_X(x|\underline{\Theta})$ nach Gl.(5.04)) für die Ersatzbasisvariable X_E gemäß Abschnitt 5.2.1 oder 5.2.2, wobei für $\underline{\Theta}$ die Zufallszahlen $\underline{\Theta}^z$ aus dem 1.Schritt eingesetzt werden.

In Bild 5.6 wird dieses Vorgehen an einem Beispiel mit 2 Parametern Θ_1 und Θ_2 dargestellt.

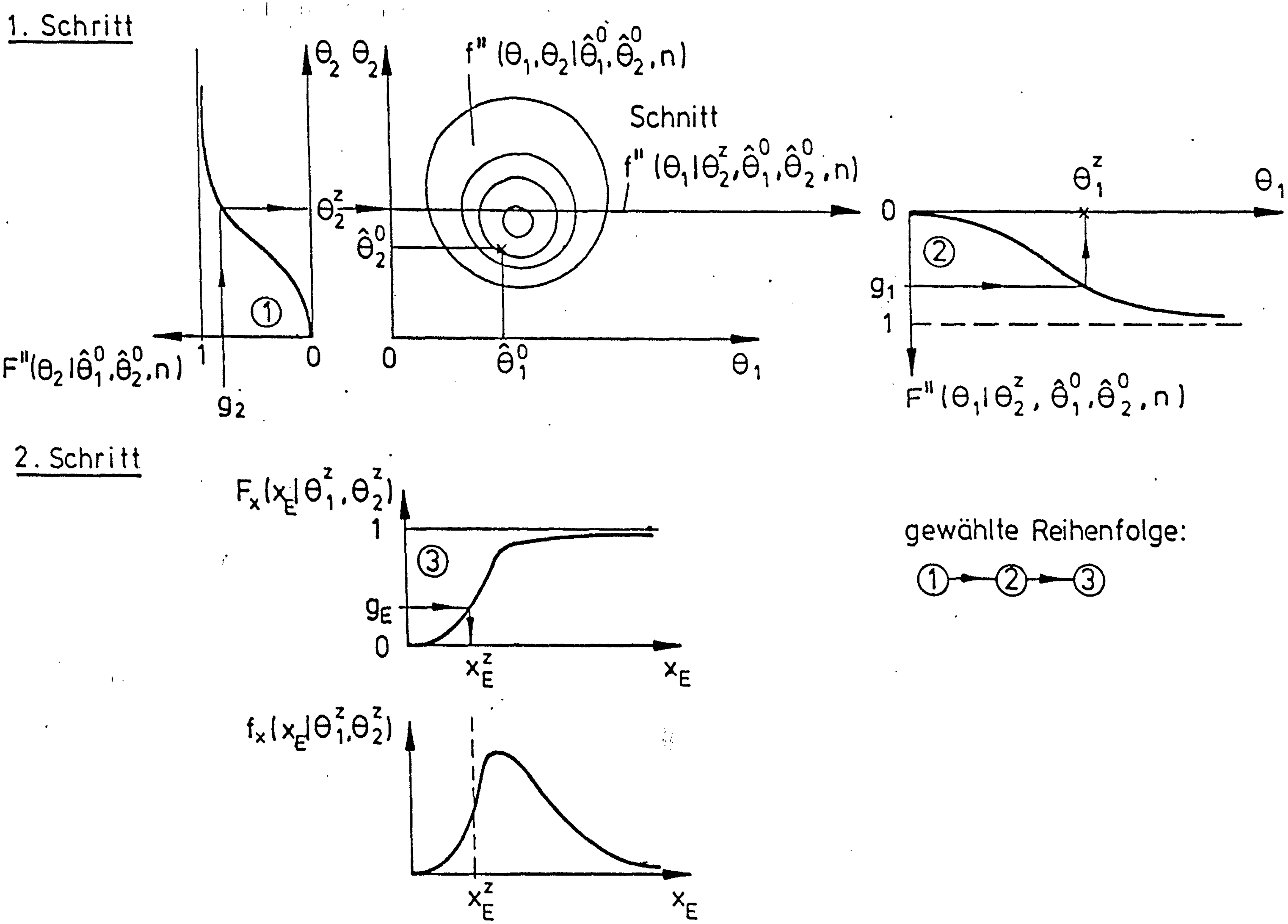


Bild 5.6 Prinzip des Zufallszahlengenerators für die Ersatzbasisvariable x_E

5.3 BEISPIEL: ERSATZBASISVARIABLE AUS NORMALVERTEILTER GRUNDGESAMTHEIT

5.3.1 Grundgesamtheit

Eine Normalverteilung ist durch zwei Parameter - Mittelwert und Standardabweichung, die im folgenden mit $\Theta_1 = \mu_E$ und $\Theta_2 = \sigma_E$ bezeichnet werden - eindeutig beschrieben:

$$f_x(x_E|\mu_E,\sigma_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_E} \exp\left[-\frac{(x_E-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}\right] . \tag{5.16}$$

Die Parameter μ_E und σ_E seien unbekannt. Die standardisierte Form der Normalverteilung lautet mit $\overline{z} = \frac{x_E-\mu_E}{\sigma_E}$

$$f_x(\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\overline{z}^2}{2}\right] . \tag{5.17}$$

5.3.2 Likelihood-Funktion

Es wird vorausgesetzt, daß die Stichproben zufällig der Grundgesamtheit $N(\mu_E,\sigma_E)$ entnommen werden, so daß die einzelnen Versuchsergebnisse $\underline{\hat{x}}_E$ voneinander unabhängig sind. Bei einem Stichprobenumfang n ist die Likelihood-Funktion somit das Produkt von n Einzelfunktionen:

$$\begin{aligned} L(\mu_E,\sigma_E|\underline{\hat{x}}_E) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_E} \exp\left[-\frac{(\hat{x}_{E,i}-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_E^n} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{E,i}-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}\right] . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Mit Einführung der konsistenten und erwartungstreuen Schätzwerte

$$m_E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{E,i} \quad \text{und} \quad s_E^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{E,i}-m_E)^2 \tag{5.19}$$

für μ_E bzw. σ_E^2 können die Informationen aus den einzelnen Versuchsergebnissen $\underline{\hat{x}}_E$ in den Größen m_E, s_E und n zusammengefaßt werden:

$$\underline{\hat{x}}_E = (\hat{x}_{E,i},\ldots,\hat{x}_{E,n}) = (m_E,s_E,n) \; . \tag{5.20}$$

Durch die Umformung

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{E,i}-\mu_E)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{E,i}-m_E+m_E-\mu_E)^2 \tag{5.21}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_{E,i}-m_E)^2 + \sum_{i=1}^{n}2(\hat{x}_{E,i}-m_E)(m_E-\mu_E) + \sum_{i=1}^{n}(m_E-\mu_E)^2$$

$$= (n-1)\cdot s_E^2 \qquad 0 \qquad +n\cdot(m_E-\mu_E)^2$$

und mit c = n - 1 geht Gl.(5.18) über in

$$L(\mu_E,\sigma_E|m_E,s_E,n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma_E^n}\exp\left[-\frac{n(m_E-\mu_E)^2+c\cdot s_E^2}{2\sigma_E^2}\right] \; . \tag{5.22}$$

5.3.3 A-priori-Dichte

Für die unbekannten Parameter μ_E und σ_E soll eine nichtinformative a-priori-Dichte gewählt werden. Es wird vorausgesetzt, daß μ_E und σ_E voneinander unabhängig sind, d.h., eventuelles Wissen über einen der Parameter beeinflußt nicht das Wissen über den anderen Parameter:

$$f'(\mu_E,\sigma_E) = f'(\mu_E)\cdot f'(\sigma_E) \; . \tag{5.23}$$

Nach Kriterium 1 gemäß Abschnitt 5.1.2.3 sind die a-priori-Dichten für μ_E und σ_E gleichverteilte Dichten, d.h.

$$f'(\mu_E) = K_\mu \quad \text{und} \quad f'(\sigma_E) = K_\sigma \; . \tag{5.24}$$

Gemäß Kriterium 2 erhält man

$$f'(\mu_E) = K_\mu \quad \text{und} \quad f'(\sigma_E) = K_\sigma \cdot \sigma_E^{-1} \quad , \tag{5.25}$$

da für $t(\mu_E) = \mu_E$ die Likelihood-Funktion Gl.(5.22) ihre Gestalt aufgrund des Stichprobenergebnisses für m_E und für $t(\sigma_E) = \ln \sigma_E$ die entsprechend transformierte Likelihood-Funktion aufgrund des Stichprobenergebnisses für s_E ihre Gestalt nicht ändert/17/. Unterschiedliche a-priori-Dichten ergeben sich also für σ_E. Zum Vergleich werden vorerst beide Varianten betrachtet, die durch

$$f'(\sigma_E) = K_\sigma \cdot \sigma_E^{-q} \quad , \ q \text{ ganzzahlig} \tag{5.26}$$

erfaßt werden.

5.3.4 A-posteriori-Dichte

Der Bayes-Ansatz nach Gl.(5.09) erhält mit den Gl.en (5.22) bis (5.26) die Form:

$$\begin{aligned} f''(\mu_E,\sigma_E|m_E,s_E,n) &= K_\mu \cdot K_\sigma \cdot \sigma_E^{-q} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_E^{n}} \exp\left[-\frac{n(m_E-\mu_E)^2+c\cdot s_E^2}{2\sigma_E^2}\right] \\ &= K \cdot \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma_E^{n+q}} \exp\left[-\frac{n(m_E-\mu_E)^2+c\cdot s_E^2}{2\sigma_E^2}\right] \end{aligned} \tag{5.27}$$

Die im folgenden notwendigen Integrationen wurden mit den Integraltafeln /14/ durchgeführt.
Aus der Bedingung

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f''(\mu_E,\sigma_E|m_E,s_E,n)\,d\mu_E\,d\sigma_E \overset{!}{=} 1 \tag{5.28}$$

errechnet sich

$$K = \frac{\sqrt{2n}\,(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}c \cdot s_E^2\right)^{\frac{n+q-2}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)} \quad . \tag{5.29}$$

Daraus ergibt sich

$$f''(\mu_E,\sigma_E|m_E,s_E,n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(\frac{c}{2})^{\frac{n+q-2}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n+q-2}{2})}\cdot s_E^{-2}(\frac{s_E}{\sigma_E})^{n+q} \cdot \exp\left[-\frac{n(m_E-\mu_E)^2+c\cdot s_E^2}{2\sigma_E^2}\right] \quad (5.30)$$

Für den weiteren Gebrauch ist eine bezogene Darstellung mit

$$\xi = \frac{m_E-\mu_E}{s_E} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\sigma_E}{s_E} \quad (5.31)$$

vorteilhaft. Mit der Jacobi-Determinante

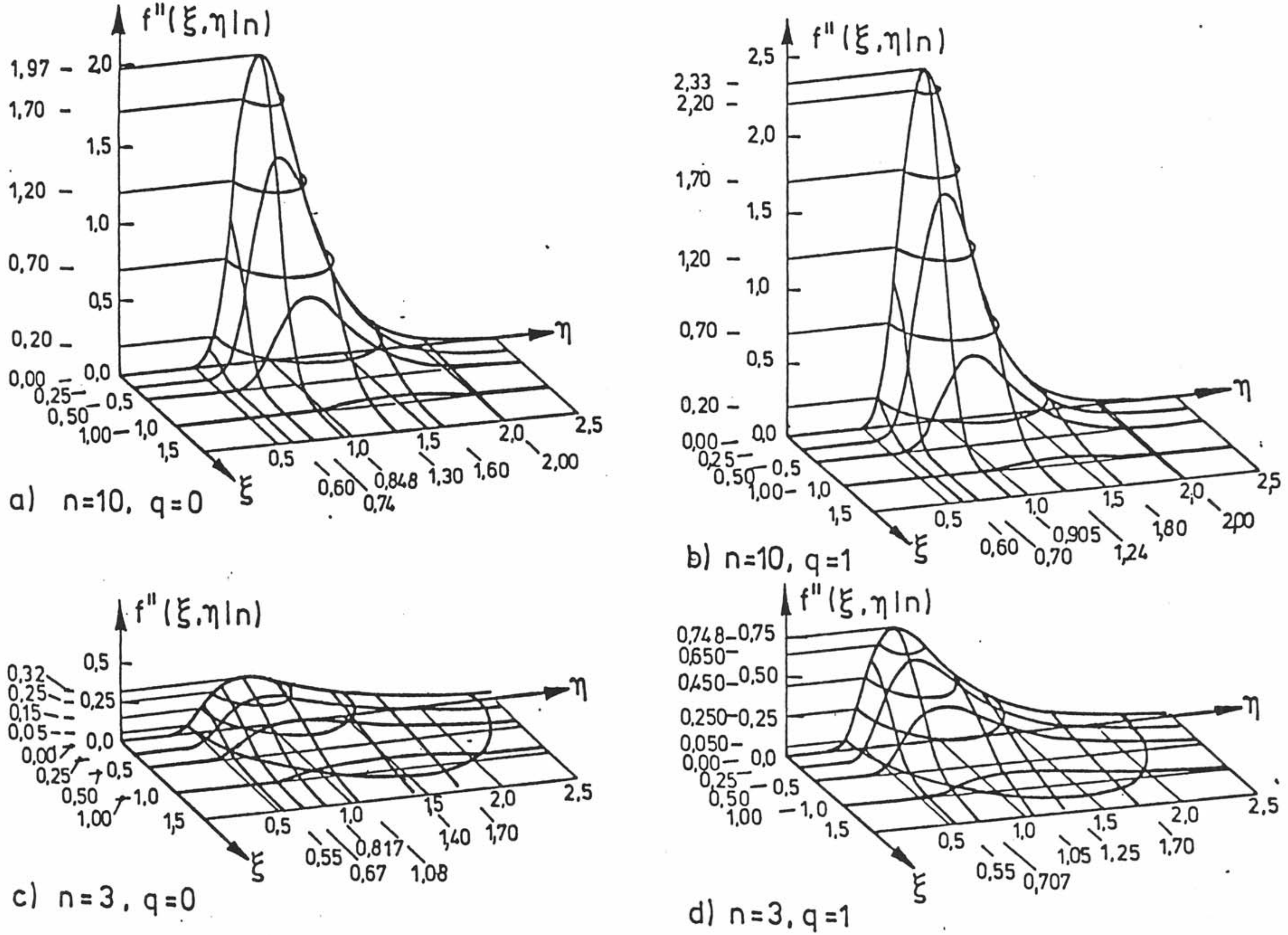
$$|J| = s_E^2 \quad (5.32)$$

erhält man

$$f''(\xi,\eta|n) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,(\frac{c}{2})^{\frac{n+q-2}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n+q-2}{2})}\cdot\eta^{-(n+q)} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\eta^2}(n\xi^2+c)\right] . \quad (5.33)$$

Bild 5.7 zeigt in perspektivischen Darstellungen $f''(\xi,\eta|n)$ für $n = 10$ und $n = 3$ als über der ξ,η-Ebene aufgespannte unimodale Wahrscheinlichkeitshügel. Da sie symmetrisch zu $\xi = 0$ sind, ist jeweils nur eine Hälfte dargestellt.

Bild 5.7 Perspektivische Darstellungen von f''(ξ,η|n)



Bei kleinen Stichprobenumfängen n ist der Hügel flach und weitgeschwungen, bei großen Stichprobenumfängen hoch und schmal; bei gleichem Stichprobenumfang n ist der Hügel mit q = 0 flacher und weiter als mit q = 1. Der Gipfel des Hügels, d.h. die größte Wahrscheinlichkeit, liegt bei

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = \sqrt{\frac{c}{n+q}} \quad . \tag{5.34}$$

Die Randdichte

$$f''(\eta|n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\xi,\eta|n)\,d\xi = 2\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n+q-2}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)} \cdot \eta^{-(n+q-1)} \exp\left[-\frac{c}{2\eta^2}\right] \tag{5.35}$$

hat die Form einer χ^2-Verteilung mit $\chi^2 = (c/\eta^2)$ und $r = n + q - 2$ Freiheitsgraden:

$$f''(\chi^2|n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2}} (\chi^2)^{\frac{r}{2}-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) . \tag{5.36}$$

Die Randdichte $f''(\xi|n)$ hat die Form

$$f''(\xi|n) = \int_{0}^{+\infty} f''(\xi,\eta|n)\,d\eta = \sqrt{\frac{n}{c\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+q-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)} \left(\frac{n}{c}\xi^2+1\right)^{-\frac{n+q-1}{2}} . \tag{5.37}$$

Mit $t = \xi\sqrt{n}$ und q = 1 geht Gl.(5.37) über in eine zentrale t(Student)-Verteilung mit $r = n + 1 - 2 = c$ Freiheitsgraden:

$$f''(\xi|n) = \frac{1}{\sqrt{c\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \left(\frac{t^2}{c}+1\right)^{-\frac{r+1}{2}} . \tag{5.38}$$

5.3.5 Prädiktor-Verteilung

5.3.5.1 Form

Mit den Gl.en (5.17) und (5.33) ergibt sich die Prädiktor-Verteilung Gl.(5.04) zu

$$F(x_E|\bar{z},\xi,\eta,n) = \int_{-\infty}^{\bar{z}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(\bar{z}) \cdot f''(\xi,\eta|n)\, d\xi\, d\eta\, d\bar{z}$$

$$= \int_{-\infty}^{\bar{z}} \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{\bar{z}^2}{2}\right] \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{n+q-2}{2}} \tag{5.39}$$

$$\cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)} \cdot \eta^{-(n+q)} \exp\left[-\frac{1}{2\eta^2}(n\xi^2+c)\right] d\xi\, d\eta\, d\bar{z} \, .$$

5.3.5.2 Auslosen von Zufallszahlen

Die Auslosung von Zufallszahlen aus $F(x_E|\bar{z},\xi,\eta,n)$ wird gemäß Abschnitt 5.2.5 durchgeführt.
Als Weg für die Auslosung von Zufallszahlen aus $f''(\xi,\eta|n)$ wird die Reihenfolge

- Randverteilung $F''(\eta|n) = \int_0^{\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\xi,\eta|n)\, d\xi\, d\eta$,
- Verteilung $F''(\xi|\eta=\eta^z,n) = \int_{-\infty}^{\xi} f''(\xi|\eta=\eta^z,n)\, d\xi$

gewählt. Der Iterationsaufwand für die beiden Randverteilungen ist in etwa gleich; für einen Schnitt $F''(\xi|\eta=\eta^z,n)$ ist er jedoch wesentlich geringer als für einen Schnitt $F''(\eta|\xi=\xi^z,n)$.

Die Randverteilung $F''(\eta|n)$ lautet:

$$F''(\eta|n)=\begin{cases} 1-\psi\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\,\frac{1}{\eta}\right) & \text{für } q=0 \text{ und } n=3 \text{ oder } q=1 \text{ und } n=2 \\[2ex] \exp\left[-\frac{c}{2}\,\frac{1}{\eta^2}\right]\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}-\nu\right)}\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\,\frac{1}{\eta}\right)^{n+q-4-2\nu} & \\ \qquad \text{für } r=\frac{n+q-3+1}{2}\geq 1,\ r \text{ ganzzahlig} & \\[2ex] \exp\left[-\frac{c}{2}\,\frac{1}{\eta^2}\right]\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}-\nu\right)}\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\,\frac{1}{\eta}\right)^{n+q-4-2\nu}+1-\psi\left(\sqrt{\frac{c}{2}}\,\frac{1}{\eta}\right) & \\ \qquad \text{für } r=\frac{n+q-3}{2}\geq 1,\ r \text{ ganzzahlig}\ . & \end{cases} \tag{5.40}$$

$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ ist das "Fehlerintegral"(vgl./15/).

Die Verteilung $F''(\xi|\eta=\eta^z,n)$ hat die Form

$$F''(\xi|\eta=\eta^z,n) = \frac{1}{2}\left(\psi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\xi}{\eta}\right)+1\right)\ . \tag{5.41}$$

Die Auflösung der erhaltenen Funktionen nach η bzw. ξ ist nicht möglich. Die Berechnung der η^z und ξ^z erfolgt iterativ nach dem Verfahren von Newton. Als Ausgangswerte für den 1.Iterationsschritt werden $\eta^{z1} = 1$ und $\xi^{z1} = 0$ gewählt. Eine Berechnung der Ausgangswerte mit Hilfe von Schätzfunktionen ist nicht effektiv, da mit den gewählten Ausgangswerten in der überwiegenden Zahl der Fälle nur sehr wenige Iterationsschritte notwendig sind.
Die Zufallszahlen für μ_E und σ_E errechnen sich durch

$$\mu_E^z = m_E-\xi^z\cdot s_E \quad \text{und} \quad \sigma_E^z = \eta^z\cdot s_E\ . \tag{5.42}$$

Mit einer aus der standardisierten Normalverteilung N(0,1) ausgelosten Zufallszahl $\bar{z}$ für $f_X(\bar{z})$ ergibt sich schließlich

$$x_E^z = \mu_E^z + \bar{z}\cdot\sigma_E^z = m_E + (\bar{z}\eta^z - \xi^z)\cdot s_E \quad . \tag{5.43}$$

Der Erwartungswert der Ersatzbasisvariablen X_E wird durch den Exponenten q der beiden zur Wahl stehenden a-priori-Dichten nicht beeinflußt, da er - mit Werten $\eta^z > 0$ sowie $\bar{z}$ und ξ^z symmetrisch zu Null verteilt - stets dem Stichprobenmittelwert m_E entspricht. Wie aus Bild 5.7 zu ersehen ist, wird jedoch die Streuung der Parameter μ_E und σ_E mit der Annahme q = 0 größer als mit q = 1. Infolgedessen werden die Zufallszahlen x_E^z und dadurch auch die Simulationsergebnisse mit q = 0 ebenfalls stärker streuen als mit q = 1. Der Einfluß der Streuung der Ersatzbasisvariablen auf den Erwartungswert der Simulationsergebnisse ist nach /16/ näherungsweise vernachlässigbar; exakt ist er nicht vorhanden bei additiver oder multiplikativer Hinzufügung der von den anderen Basisvariablen unabhängigen Ersatzbasisvariablen X_E zum vorhandenen mechanischen Modell.
Als Folge der größeren Streuung durch q = 0 liegen die Zahlenwerte einer p%-Fraktile in diesem Fall weiter vom Erwartungswert der Simulationsergebnisse entfernt als bei einer kleinen Streuung (Bild 5.8).

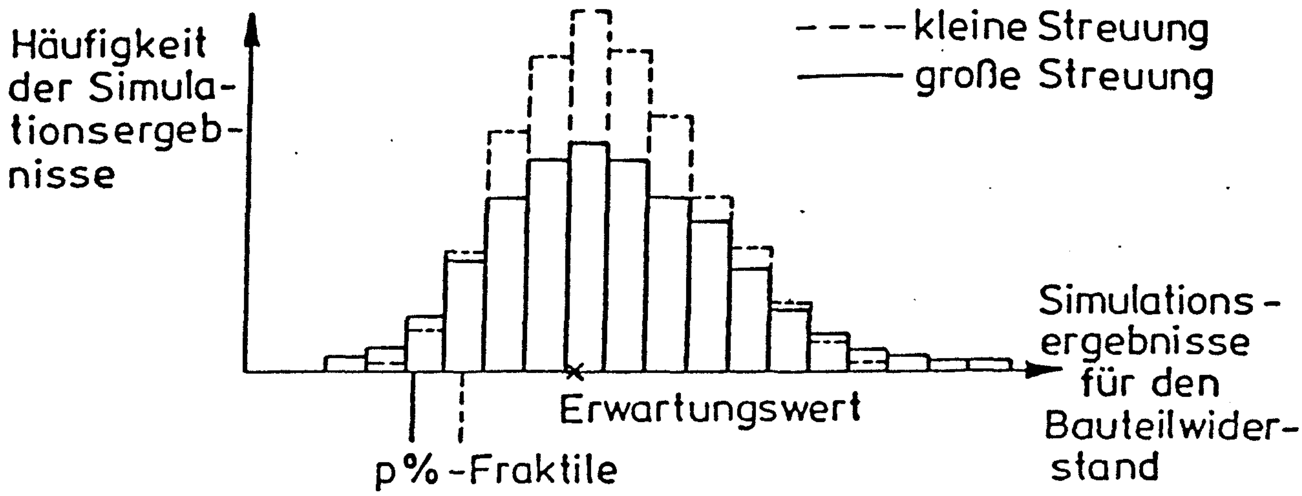


Bild 5.8 Einfluß der Streuung der Simulationsergebnisse auf die Zahlenwerte von p%-Fraktilen für den Bauteilwiderstand

Da entweder untere oder obere Schranken für Bauteilwiderstände gesucht werden, sollten die Simulationsrechnungen auf sicherer Seite liegend mit q = 0 durchgeführt werden.
Die Anlagen 6 bis 23 enthalten für die Stichprobenumfänge n = 3 bis n = 20 jeweils 500 standardisierte Zufallszahlen $\bar{x}_E^z$ $(\bar{x}_E^z=(x_E^z-m_E)/s_E=\bar{z}\eta^z-\xi^z)$ für die Ersatzbasisvariable X_E mit den Voraussetzungen:

- Die Grundgesamtheit der Ersatzbasisvariablen X_E ist normalverteilt.
- Die Parameter dieser Grundgesamtheit sind unbekannt und stochastisch voneinander unabhängig.
- Die nichtinformativen a-priori-Dichten entsprechen einer Gleichverteilung.

5.3.6 Analytische Integration der Prädiktor-Verteilung

Im Fall einer normalverteilten Grundgesamtheit ist auch eine analytische Integration der Prädiktor-Verteilung möglich. Setzt man die Gl.(5.16) und (5.30) in Gl.(5.04) ein, erhält man

$$F(x_E|m_E,s_E,n) = \int_{-\infty}^{x_E}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_E}\exp\left[-\frac{(x_E-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}\right]\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\left(\frac{c}{2}\right)^{n+q-2} \tag{5.44}$$

$$\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)}\cdot s_E^{-2}\left(\frac{s_E}{\sigma_E}\right)^{n+q}\exp\left[-\frac{n(m_E-\mu_E)^2+c\cdot s_E^2}{2\sigma_E^2}\right]d\mu_E\,d\sigma_E\,dx_E\ .$$

Die Integration über μ_E und σ_E ergibt

$$F(x_E|m_E,s_E,n) = \sqrt{\frac{1}{\pi s_E^2 c(n+1)}}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n+q-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q-2}{2}\right)} \tag{5.45}$$

$$\int_{-\infty}^{x_E}\left(\frac{(x_E-m_E)^2}{s_E^2}\,\frac{n}{c(n+1)}+1\right)^{-\frac{n+q-1}{2}}dx_E\ .$$

Geht man auf die bezogene Schreibweise $\zeta = \frac{x_E - m_E}{s_E}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ über, erhält man

$$F(\zeta|n) = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \frac{\Gamma(\frac{n+q-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+q-2}{2})} \int_{-\infty}^{\zeta} (\frac{\zeta^2}{c}+1)^{-\frac{n+q-1}{2}} d\zeta \quad . \tag{5.46}$$

Dies ist mit q = 1 eine zentrale t-Verteilung mit c = n - 1 Freiheitsgraden und entspricht dann der in /8/ angegebenen Prädiktor-Verteilung.

6 ERMITTLUNG VON CHARAKTERISTISCHEN WERTEN FÜR BAUTEILWIDERSTÄNDE

6.1 VERSUCHSPLANUNG

Die Ermittlung des charakteristischen Wertes für einen Bauteilwiderstand beginnt mit der eindeutigen Definition seiner Grundgesamtheit. Dazu gehört

- eine Beschreibung der Geometrie des Bauteils (Zeichnung oder Text oder beides),
- eine Auflistung seiner stochastischen und deterministischen Basisvariablen, der Einwirkung(en) sowie einzuhaltender Randbedingungen und
- die Festlegung der jeweiligen Gültigkeitsbereiche und ggfs. zulässiger Kombinationen von Gültigkeitsbereichen (z.B. einzelne Kombinationen von Schraubenfestigkeitsklassen und Blechwerkstoffen).

Die Gültigkeitsbereiche der deterministischen Basisvariablen und der Einwirkungen sind direkt als Zahlenwerte angebbar, die Randbedingungen als Zahlenwerte oder Beschreibung. Die stochastischen Basisvariablen sind durch Bezeichnungen bestimmt, wie z.B. "4.6 nach DIN ISO 898 Teil 1" für die Zugfestigkeit einer Schraube, "St37-3 nach DIN 17100" für die Zugfestigkeit eines Bleches oder "M20 nach DIN 7999" für den Schaft einer Schraube.

Diejenigen stochastischen und deterministischen Basisvariablen und Einwirkungen, deren jeweilige Einflüsse qualitativ bekannt sind, werden in einem mechanischen Modell zusammengefaßt; Verteilungstyp und -parameter der stochastischen Basisvariablen müssen dabei ebenfalls bekannt sein. Da das mechanische Modell als Vorinformation in die Versuchsauswertung eingebracht wird, braucht die zu nehmende Stichprobe hinsichtlich der im mechanischen Modell enthaltenen Größen nicht mehr repräsentativ für die Grundgesamtheit zu sein. Der erforderliche Umfang der Stichprobe wird daher gegenüber dem durch die herkömmliche Versuchsauswertung und -planung bestimmten Umfang reduziert. Repräsentativ muß die Stichprobe sein für die Größen, deren Einflüsse unbekannt sind; sind auch Verteilungstyp oder -parameter einer stochastischen Basisvariablen unbekannt, muß die Stichprobenauswahl für diese zufällig sein.

Für die stochastischen Basisvariablen des mechanischen Modells müssen die bei den Versuchskörpern vorliegenden Zahlenwerte repräsentativ ermittelt werden. Bei der Materialbestellung ist deshalb eventuell Mehrmaterial für eine ausreichende Anzahl von Werkstoffproben zu berücksichtigen.

Bei der Versuchsauswertung muß die statistische Unsicherheit, die durch die Untersuchung lediglich einer Stichprobe aus der Grundgesamtheit entsteht, beachtet werden. Durch die statistische Unsicherheit wird die Streuung der geschätzten gegenüber der wahren Verteilung des Bauteilwiderstandes vergrößert. Das bedeutet, je größer die statistische Unsicherheit ist, desto größer und damit unwirtschaftlicher wird das Vorhaltemaß der geschätzten Werte gegenüber den wahren Werten der Fraktilen. Die statistische Unsicherheit wird über die Prädiktor-Verteilung der Ersatzbasisvariablen in die Versuchsauswertung eingebracht.
Die absolute Größe der statistischen Unsicherheit, ausgedrückt durch die Standardabweichung der Prädiktor-Verteilung, ist ausschließlich abhängig vom Umfang der Stichprobe. Bei kleinen Stichprobenumfängen bewirkt eine Vergrößerung der Stichprobe um einen oder zwei Versuche bereits eine deutliche Abnahme der statistischen Unsicherheit. Zur Veranschaulichung der Größe der Abnahme der statistischen Unsicherheit in Abhängigkeit eines steigenden Stichprobenumfangs sind in Tabelle 6.1 die Standardabweichungen und die Werte der 5%-Fraktile der Prädiktor-Verteilung der Ersatzbasisvariablen X_E angegeben für
- die Stichprobenumfänge n=3 bis 10,
- eine normalverteilte Grundgesamtheit,
- eine gleichverteilte a-priori-Dichte für die Parameter der Ersatzbasisvariablen (vgl. Abschnitt 5.1.2.3) und
- einen Mittelwert $m_E=0$ und eine Standardabweichung $s_E=1$ der Stichprobe.

Für eine sinnvolle statistische Versuchsauswertung sollte der Stichprobenumfang n=3 nicht unterschritten werden.

Tabelle 6.1 Beispiele für die Abnahme der absoluten Größe der statistischen Unsicherheit durch Vergrößerung des Stichprobenumfangs

①		②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
Stichprobenumfang		3	4	③/②	5	⑤/③	6	⑦/⑤
X_E	Standardabweichung	35,348	3,346	0,095	2,027	0,606	1,653	0,815
X_E	Wert der 5%-Fraktile	-11,176	-4,040	0,362	-2,977	0,737	-2,569	0,863

⑨		⑩	⑪	⑫	⑬	⑭	⑮	⑯	⑰
Stichprobenumfang		7	⑩/⑦	8	⑫/⑩	9	⑭/⑫	10	⑯/⑭
X_E	Standardabweichung	1,479	0,895	1,378	0,932	1,311	0,951	1,264	0,964
X_E	Wert der 5%-Fraktile	-2,341	0,911	-2,198	0,939	-2,091	0,951	-2,026	0,969

Der Einfluß der statistischen Unsicherheit auf die simulierte Verteilung des Bauteilwiderstandes R hängt ab von ihrer relativen Größe innerhalb des mechanischen Modells im Vergleich zu der Streuung der anderen stochastischen Basisvariablen. Ist die gemeinsame Streuung der stochastischen Basisvariablen gegenüber der der Ersatzbasisvariablen relativ groß, so wirkt sich selbst eine deutliche Verringerung der Streuung der Ersatzbasisvariablen durch Erhöhung des Stichprobenumfanges kaum auf die simulierte Verteilung des Bauteilwiderstandes aus.

Als Beispiel sind in Tabelle 6.2 die analogen Werte zu Tabelle 6.1 für das mechanische Modell

$$R = X + X_E \tag{6.01}$$

angegeben mit

- $X \sim N(0\ ,\ 0{,}3)$,
- einem Mittelwert $m_E = 0$ und einer Standardabweichung $s_E = 0{,}03$ der Stichprobe sowie
- den übrigen Voraussetzungen für X_E entsprechend dem Beispiel für Tabelle 6.1.

Die Werte der Tabelle 6.2 lassen deutlich werden, daß in diesen Fällen Stichprobenumfänge, die den erforderlichen Mindestumfang nennenswert überschreiten, keinen Gewinn bringen, da die durch sie erhaltene Information gegenüber der durch die stochastischen Basisvariablen eingebrachten Vorinformation bei der Versuchsauswertung nicht ins Gewicht fällt.

Tabelle 6.2 Beispiele für den relativ geringen Einfluß der statistischen Unsicherheit auf die simulierte Verteilung, wenn die gemeinsame Streuung der stochastischen Basisvariablen gegenüber der der Ersatzbasisvariablen groß ist (gewähltes Verhältnis: 10:1)

1	2	3	4	5	6	7	8
Stichproben-umfang	3	4	$\frac{3}{2}$	5	$\frac{5}{3}$	6	$\frac{7}{5}$
R Standard-abweichung	1,158	0,367	0,317	0,345	0,949	0,339	0,983
R Wert der 5%-Fraktile	-0,770	-0,599	0,778	-0,561	0,937	-0,551	0,982

9	10	11	12	13	14	15	16	17
Stichproben-umfang	7	$\frac{10}{8}$	8	$\frac{12}{10}$	9	$\frac{14}{12}$	10	$\frac{16}{14}$
R Standard-abweichung	0,335	0,988	0,333	0,994	0,332	0,997	0,331	0,997
R Wert der 5%-Fraktile	-0,547	0,993	-0,544	0,995	-0,542	0,996	-0,540	0,996

6.2 VERSUCHSAUSWERTUNG

6.2.1 Aufbereitung der Versuchergebnisse für die Simulation

Ausgangsdaten für die Versuchsauswertung sind die an den Versuchskörpern gemessenen Werte der stochastischen Basisvariablen $\underline{X}_{SB}$ und Bauteilwiderstände $\underline{R}$ sowie die zugehörigen deterministischen Basisvariablen $\underline{X}_{DB}$ und Einwirkungen $\underline{X}_{EW}$. Über das nach der Ersatzbasisvariable X_E aufgelöste mechanische Modell

$$R = h(\underline{X}_{SB},\underline{X}_{DB},\underline{X}_{EW},X_E) \qquad (6.02)$$

kann durch Einsetzen der o.g. Meßwerte für jeden Versuch der Wert $\hat{x}_E$ errechnet werden:

$$\underline{\hat{x}}_E = h^{-1}(\underline{\hat{r}},\underline{\underline{\hat{x}}}_{SB},\underline{\underline{\hat{x}}}_{DB},\underline{\underline{\hat{x}}}_{EW}) \quad . \qquad (6.03)$$

Bei einer großen Anzahl von Versuchen kann mit statistischen Anpassungstests untersucht werden, welchem Verteilungstyp die Versuchswerte $\underline{\hat{x}}_E$ der Ersatzbasisvariablen entsprechen; die Prädiktor-Verteilung wird dann gemäß Abschnitt 5.1 ermittelt. Bei den üblichen kleinen Stichprobenumfängen jedoch sind Anpassungstests nicht sinnvoll; in diesen Fällen wird man für die Ersatzbasisvariable eine Normal- oder Lognormalverteilung voraussetzen.
Von der Art der Erweiterung des mechanischen Modells durch die Ersatzbasisvariable hängt es ab, wie gut der Fehler des mechanischen Modells gegenüber den Versuchsergebnissen erfasst wird, d.h. wie gut die fehlerhafte mechanische Beschreibung des Bauteilwiderstandes verbessert wird.
Als Maß für die Güte der Erweiterung kann bei Voraussetzung einer Normal- oder Lognormalverteilung für die Grundgesamtheit der Ersatzbasisvariablen die Standardabweichung ihrer Versuchswerte $\underline{\hat{x}}_E$ angesehen werden; mit steigender Güte der Erweiterung sinkt die Standardabweichung der Versuchswerte $\underline{\hat{x}}_E$.

6.2.2 Simulation

6.2.2.1 Allgemeiner Weg

Zur statistischen Auswertung von Versuchen wurde ein Programmpaket erstellt, das bei gegebenen mechanischem Modell Gl.(6.02) Versuchsergebnisse für einen skalaren Bauteilwiderstand R (z.B. Traglast) simuliert und bei beliebig hoher Anzahl von Simulationen die Verteilung des Bauteilwiderstandes über ein Histogramm beliebig genau annähern kann. Die als charakteristische Werte vereinbarten Fraktilwerte der Verteilung werden auf dieser Ebene ohne statistische Unsicherheit bezüglich der Verteilung ermittelt, da die statistische Unsicherheit bereits einen Schritt vorher in die Prädiktor-Verteilung der Ersatzbasisvariablen eingebracht wird.
Interaktionsbeziehungen können mit diesem Programmpaket näherungsweise ausgewertet werden, indem der zugehörige Funktionsverlauf durch diskrete Punkte ersetzt wird und für diese Punkte Simulationsrechnungen durchgeführt werden. Voraussetzung ist dabei, daß die auf das Bauteil einwirkenden Kräfte proportional zueinander sind.

Der prinzipielle Vorgang der Simulation ist in Bild 6.1 dargestellt. Aus den bekannten Verteilungen der stochastischen Basisvariablen $\underline{X}_{SB}$ und der Ersatzbasisvariablen $\underline{X}_E$ werden Zufallszahlen $\underline{x}_{SB}^z$ bzw. x_E^z ausgelost; durch das mechanische Modell wird aus diesen Zahlen und den Zahlenwerten $\underline{x}_{DB}$, $\underline{x}_{EW}$ der deterministischen Basisvariablen und Einwirkungen ein "Versuchsergebniss" r^z für den Bauteilwiderstand R errechnet:

$$r^z = h(\underline{x}_{SB}^z, \underline{x}_{DB}, \underline{x}_{EW}, x_E^z) \quad . \qquad (6.04)$$

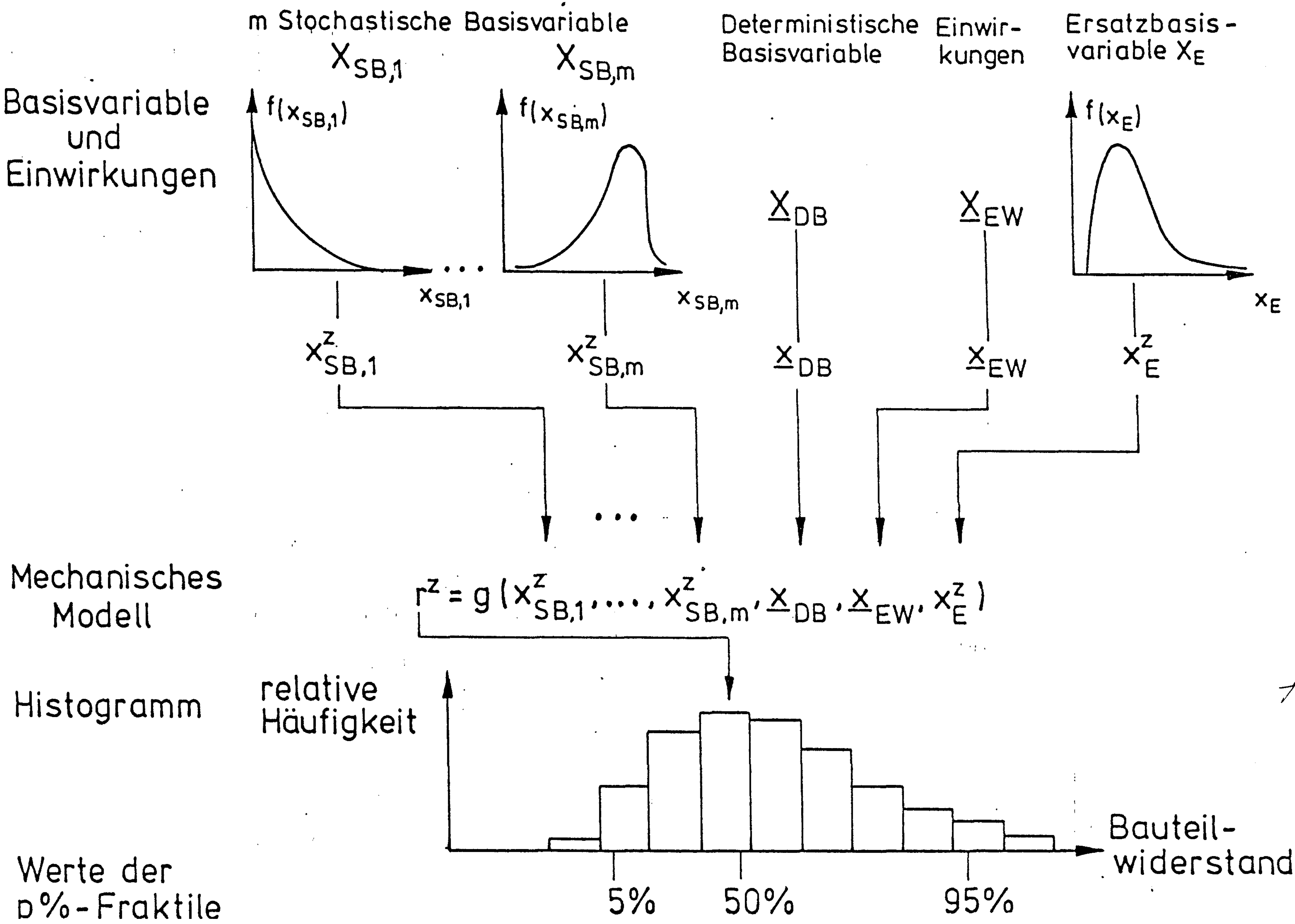


Bild 6.1 Prinzipieller Ablauf der Simulation

Als Verteilung der Grundgesamtheit der Ersatzbasisvariablen kann eine Normal- oder Lognormalverteilung gewählt werden; die Lognormalverteilung ist eine einfache Transformation der Normalverteilung. Bei einer nichtinformativen a-priori-Dichte für die Parameter der Ersatzbasisvariable kann zwischen den beiden in Abschnitt 5.1.2.3 dargestellten Kriterien gewählt werden.

Für die stochastischen Basisvariablen stehen im Progamm die
- Gleich-,
- Normal-,
- Lognormal-,
- Gamma-,
- Weibull-,
- Exponential- und
- Beta-Verteilung sowie die
- Johnson-SB- und
- Johnson-SU-Verteilungssysteme

zur Verfügung. Ihre Dichtefunktionen, ihre typischen Verläufe sowie ihre Momente bis zur 4.Ordnung sind in den Anlagen 24 bis 26 angegeben.

Die Anzahl N der Simulationen wird als ausreichend angesehen, wenn sich für N, N/2 und N/4 die charakteristischen Werte um nicht mehr als 5% unterscheiden. Für das Konvergenzkriterium werden drei Werte (N, N/2, N/4) gewählt, um etwaige Oszillationen oder Linearitäten feststellen zu können. In solchen Fällen muß die Simulationsanzahl weiter erhöht werden, bis die Konvergenz gesichert ist.

Die als charakteristische Werte definierten p%-Fraktilen werden durch Abzählen der Simulationsergebnisse ermittelt und falls gewünscht in einem Histogramm dargestellt. Das Flußdiagramm des Programmpaketes ist in Anlage 27 wiedergegeben.

6.2.2.2. Vereinfachungen

In zwei Fällen sind Vereinfachungen bei der Simulation möglich. Ist ein Teil der stochastischen Basisvariablen im mechanischen Modell
- normalverteilt und additiv oder
- lognormalverteilt und multiplikativ

miteinander verknüpft, können diese jeweils zu einer normal- bzw. lognormalverteilten stochastischen Basisvariablen zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} R &= h'(\underline{X}_{SB}, \underline{X}_{DB}, \underline{X}_{EW}, X_E, \sum_i X_{SB,Ni}) \cdot \prod_j X_{SB,LNj} \\ &= h(\underline{X}_{SB}, \underline{X}_{DB}, \underline{X}_{EW}, X_E, X_{SB,N}) \cdot X_{SB,LN} \end{aligned} \qquad (6.05)$$

mit
$$\begin{aligned} X_{SB} &\sim VT(\underline{\Theta}), \\ X_{SB,Ni} &\sim N(\mu_{Ni}, \sigma_{Ni}), \\ X_{SB,LNj} &\sim LN(\mu_{LNj}, \sigma_{LNj}), \\ X_{SB,N} &\sim N(\mu_N = \sum_i \mu_{Ni}, \sigma_N = \sqrt{\sum_i \sigma_{Ni}^2}) \text{ und} \\ X_{SB,LN} &\sim LN(\mu_{LN} = \sum_j \mu_{LNj}, \sigma_{LN} = \sqrt{\sum_j \sigma_{LNj}^2}) . \end{aligned}$$

Statt einer Zufallszahl aus jeder der Normal- oder Lognormalverteilungen muß nur noch jeweils eine ausgelost werden.

7 LITERATUR

1 Sicherheit im Ingenieurbau - Grundbegriffe für die Beurteilung.
Beiträge zum 1. Sicherheitsseminar des Institutes für Bautechnik, 3. verbesserte Auflage, 1978

2 Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen.
DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 1981

3 Fisz, M. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

4 Fisher, R.A.: On the mathematical foundations of theoretical statistics.
Phil. Trans. Roy. Soc., Series A 222, 1922, 309

5 Bayes, T.R.: An essay towards solving a problem in the doctrine of chances.
Phil. Trans. Roy. Soc. London 53, 1763, 370
(Wiederabdruck in Biometrika 45 (1958), 293)

6 Struck, W.: Zur Berechnung von einseitigen, unteren Grenzwerten bei der statistischen Auswertung von Meßergebnissen unter Berücksichtigung von Vorinformationen mittels der Bayes'schen Methode.
Bautechnik 55 (1978), 49-53

7 Rackwitz,R.: Zur Statistik von Eignungs- und Zulassungsversuchen für Bauteile
Bauingenieur 56 (1981), 103-107

8 Rackwitz, R.: Statistische Beobachtungen, stochastische Modelle und Zuverlässigkeitstheorien für Bauwerke, in: Neuere Ergebnisse aus der Theorie der Normung. 43. SFB-Kolloquium, Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, SFB 96, TU München, Heft 25, 1978

9 Sobol, I.M.: Die Monte-Carlo-Methode.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971

10 Hahn, G.H., Shapiro, S.S.: Statistical Models in Engineering.
John Wiley & Sons, Inc., New York . London . Sidney, 1967

11 Stange, K.: Angewandte Statistik
Zweiter Teil Mehrdimensionale Probleme.
Springer-Verlag, Berlin . Heidelberg . New York, 1971

12 Zindel, M.: Theoretische Studien und Falluntersuchungen zur digitalen Simulation stationärer normalverteilter regelloser Folgen.
Dissertation, TH Darmstadt, 1971

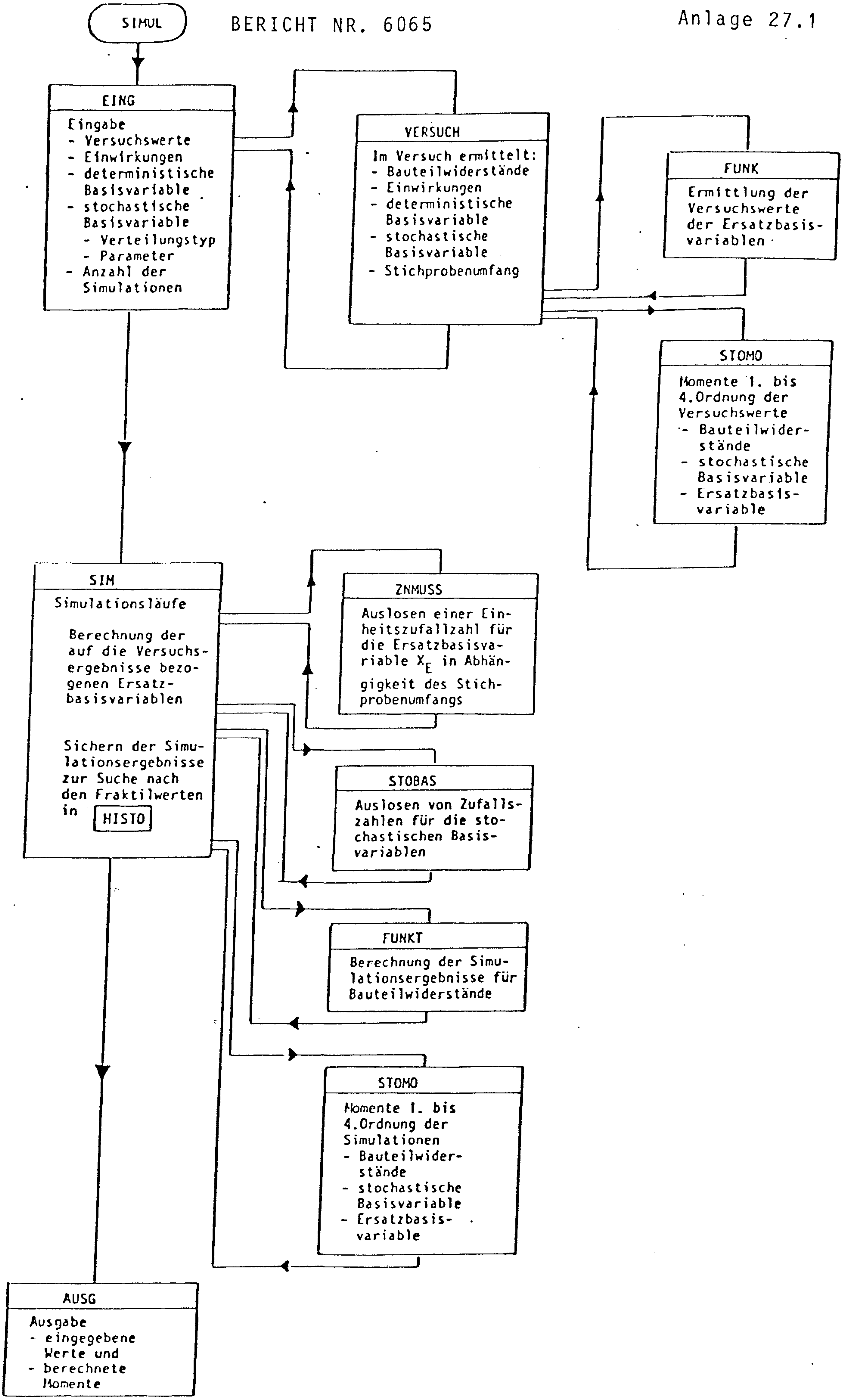
13 Schwarze, J.: Statistik für Ingenieure, Vorlesungen. Institut für Wirtschaftswissenschaften, Abteilung Statistik und Operations-Research an der Technischen Universität Braunschweig, 1983

14 Gröbner, W., Hofreiter, N.: Integraltafeln, 1. Teil, Unbestimmte Integrale und 2. Teil, Bestimmte Integrale.
Springer-Verlag, Wien . New York , 1965 und 1966

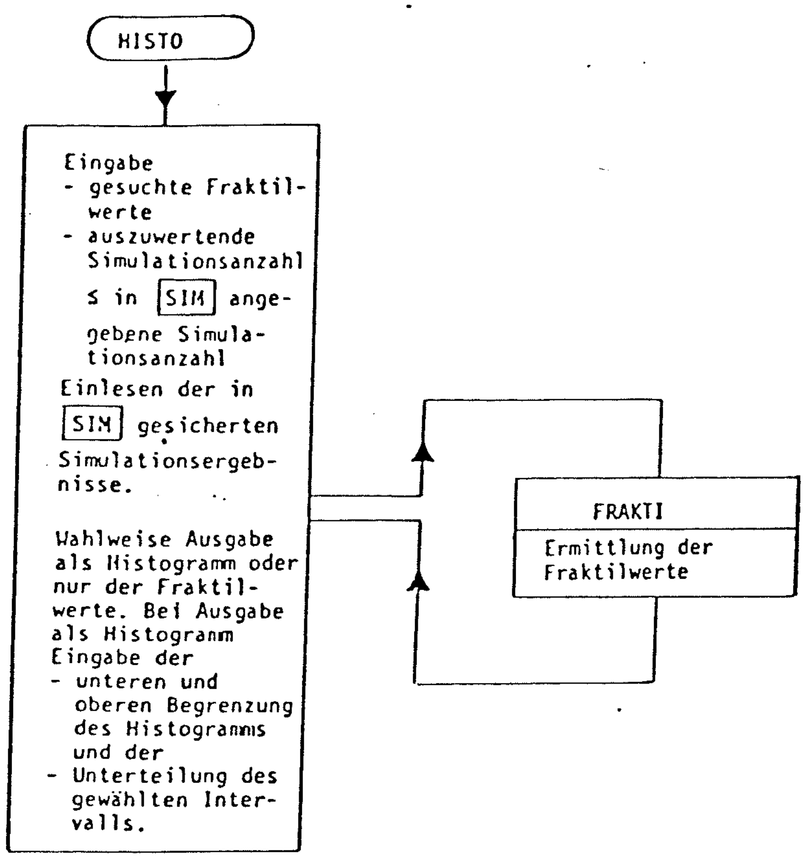
15 Jahnke, Emde, F., Lösch, F.: Tafeln höherer Funktionen. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1960

16 Rasch, D.: Elementare Einführung in die mathematische Statistik.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968

17 Box, G.E.P., Tiao, G.C.: Bayesian inference in statistical analysis.
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Massachusetts USA, 1973



Anlage 27.1 Flußdiagramm des erstellten Programmpaketes, Teil 1: Simulation von Bauteilwiderständen.



Anlage 27.2 Flußdiagramm des erstellten Programmpaketes, Teil 2: Ermittlung der Fraktilwerte.