

Beulverhalten von Kugelschalen unter stetig veränderlichen Flächenlasten

T 2124

T 2124

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

Technische Universität München
Lehrstuhl für Statik

Ruhr-Universität Bochum
Institut für Konstruktiven
Ingenieurbau

Beulverhalten von Kugelschalen unter stetig veränderlichen Flächenlasten

W. Wunderlich, H. Obrecht, F. Schnabel

März 1989

Numerische Untersuchungen im Rahmen des Entwurfs der
DIN 18 800, Teil 4: 'Stabilität im Stahlbau – Schalenbeulen'.
Schlußbericht eines Forschungsvorhabens
des Instituts für Bautechnik, Berlin

Inhalt

Vorbemerkung	1
1. Einleitung	1
2. Numerisches Lösungsverfahren	3
3. Nichtlineares Tragverhalten und Beullasten	4
4. Beulverhalten von Kugelschalen unter Eigengewicht und Außendruck	6
4.1 Beulverhalten offener Kugelschalen unter Eigengewicht	8
4.1.1 Elastisches Verhalten	8
4.1.1.1 Fest eingespannte Ränder	8
4.1.1.2 Gelenkige, unverschieblich gelagerte Ränder	16
4.1.1.3 Gelenkige, horizontal verschieblich gelagerte Ränder	21
4.1.1.4 Radial verschiebliche 'Membranlagerung'	24
4.1.2 Elastisch-idealplastisches Verhalten	29
4.1.2.1 Fest eingespannte Ränder	29
4.1.2.2 Gelenkige, unverschieblich gelagerte Ränder	33
4.1.2.3 Gelenkige, horizontal verschieblich gelagerte Ränder	33
4.1.2.4 Radial verschiebliche 'Membranlagerung'	39
4.2 Beulverhalten von Vollkugelschalen unter Eigengewicht	39
4.3 Beulverhalten offener Kugelschalen unter Außendruck	44
4.3.1 Elastisches Verhalten	44
4.3.2 Elastisch-idealplastisches Verhalten	50
4.4 Beulverhalten von Vollkugelschalen unter Außendruck	56
5. Zusammenfassung	59
Literatur	59

Beulverhalten von Kugelschalen unter stetig veränderlichen Flächenlasten

W. Wunderlich, H. Obrecht, F. Schnabel *

Vorbemerkung

Für die Ausarbeitung von Teil 4 der DIN 18 800 – als Nachfolger der DAST-Richtlinie 013 – war es u.a. von Interesse, wie die als Referenzgröße dienende elastische Beullast offener Kugelschalen von bestimmten Parametern, z.B. vom Öffnungswinkel, vom Radius-zu-Dicken-Verhältnis, vor allem aber von verschiedenen Randbedingungen abhängt. Außerdem sollten die Nachweise für stetig verteilte Flächenlasten wie Eigengewicht und Schnee über die maximal auftretende Membranspannung in Beziehung zum Lastfall Außendruck gesetzt werden. Aufgrund des inzwischen erreichten Standes computerorientierter Methoden konnten die dafür erforderlichen Untersuchungen und Parameterstudien auf numerischem Wege durchgeführt werden.

Der vorliegende Bericht enthält die Ergebnisse eines diesbezüglichen Forschungsvorhabens, das vom Institut für Bautechnik teilweise unterstützt wurde und dessen Durchführung in ständiger Abstimmung mit den Mitgliedern des zuständigen Ausschusses erfolgte. Die numerischen Untersuchungen wurden mit dem Rotationsschalenprogramm ROT-B durchgeführt, das speziell für die geometrisch nichtlineare, elastoplastische Berechnung von Rotationsschalen mit beliebigen nichtaxialsymmetrischen Belastungen und Anfangsimperfektionen entwickelt worden ist.

Zielsetzung war zunächst die o.g. Problemstellung, wobei mit dem Lastfall Eigengewicht begonnen wurde, der dann in Abstimmung mit dem Ausschuß auch stellvertretend für andere stetig verteilte Flächenlasten (z.B. Schnee) stand. Hinzu kam die Ermittlung elastischer Beullasten für verschiedene Randbedingungen beim Lastfall Außendruck als Grundlage der c_k -Werte des Norm-Entwurfs.

Zusätzlich zu diesen Ergebnissen für elastische Verzweigungslasten enthält der Bericht über die Leistungsbeschreibung des Forschungsvorhabens hinaus Parameterstudien für Kugelschalen mit perfekter Geometrie und nichtlinearem Werkstoffgesetz (elastisch-idealplastisch), so daß auch der Einfluß des Materialverhaltens für eine charakteristische Güte (St 37) deutlich wird. Für eine realitätsnahe Bemessung und auch für den direkten Vergleich mit den nach DIN 18 800, Teil 4 bestimmbar Traglasten muß noch berücksichtigt werden, daß die vorliegenden numerischen Ergebnisse die Einflüsse von Anfangs-Imperfektionen und evtl. Sicherheitsbeiwerte nicht enthalten. Auch wurde, da die tatsächlich durchgeführten Untersuchungen zum Teil erheblich über den anfänglich vorgesehenen Fall der offenen, durch Eigengewicht und Schnee belasteten Kugelschale hinausgingen, im Einvernehmen mit den Betreuern der Titel des Forschungsvorhabens entsprechend geändert.

1. Einleitung

Eine zugleich wirtschaftliche und sichere Bemessung von Schalentragerwerken ist nur dann gewährleistet, wenn die jeweiligen Traglasten möglichst genau bekannt sind. Dies aber setzt voraus, daß bei der Berechnung alle relevanten Systemparameter, wie zum

* o.Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich, Dr. H. Obrecht, Lehrstuhl für Statik, TU München
Dr.-Ing. F. Schnabel, Neuenrade

Beispiel die Schalenabmessungen, die Verteilung der Steifigkeiten, die Rand- und Übergangsbedingungen, die lastabhängigen Materialeigenschaften, die geometrischen Imperfektionen, etc. sowie ihr gegenseitiger nichtlinearer Einfluß sowohl qualitativ als auch quantitativ korrekt erfaßt und keine wesentlichen Vereinfachungen vorgenommen werden. Wichtig ist auch, daß alle Faktoren möglichst umfassend berücksichtigt sein müssen, da einige das Tragverhalten positiv beeinflussen, während sich andere ausgesprochen negativ auswirken. Zudem können – wie häufig bei nichtlinearen Prozessen – kleine Parametervariationen zu relativ starken Änderungen der Zustandsgrößen und des Tragverhaltens führen, so daß sich aus Einzelergebnissen oft nur schwer verallgemeinernde Schlußfolgerungen ziehen lassen.

Die rasche Entwicklung computerorientierter Berechnungs- und Konstruktionsmethoden hat dazu geführt, daß inzwischen annähernd beliebige Schalenkonfigurationen eingehend untersucht werden können. Insbesondere ist es möglich geworden, alle wesentlichen Systemparameter sowie deren geometrisch und physikalisch nichtlineares Zusammenwirken detailliert zu beschreiben und so das tatsächliche – teilweise überaus komplexe – Tragverhalten dünnwandiger Schalenkonstruktionen weitgehend wirklichkeitsnah numerisch nachzuvollziehen. Solche nichtlinearen Computersimulationen sind zwar in der allgemeinen Praxis bislang noch die Ausnahme, beim Entwurf von Schalenträgwerken aber, die nicht in den Geltungsbereich von Regelwerken fallen, oder bei denen das Tragverhalten aus Sicherheits- beziehungsweise Wirtschaftlichkeitsgründen möglichst genau bekannt sein muß, sind sie unverzichtbar. Außerdem stellen numerische Simulationen eine wichtige Ergänzung – und teilweise auch eine Alternative – zu zeit- und kostenintensiven experimentellen Untersuchungen dar, da sie wesentlich schneller und billiger durchzuführen sind und da sie es außerdem ermöglichen, den Einfluß einer Variation der verschiedenen Parameter sehr einfach zu bestimmen.

Bei gleichartigen Tragwerken bietet es sich deshalb an, die Flexibilität numerischer Untersuchungen sowie deren Zeit- und Kostenvorteile gezielt zu systematischen Parameteruntersuchungen zu nutzen und daraus praxisnahe, mechanisch fundierte und möglichst allgemeingültige Bemessungsformeln und -diagramme abzuleiten. Damit lassen sich die Schwächen einiger der gängigen Richtlinien vermeiden. Die Vorteile dagegen, die Bemessungsregeln sowohl für die Vorentwurf als auch für die eigentliche Bemessung bieten, bleiben voll erhalten. Dazu zählt zum Beispiel deren einfache und übersichtliche Handhabbarkeit sowie die Möglichkeit, mit ihrer Hilfe die Tragfähigkeit einer Konstruktion bzw. die Zuverlässigkeit eines Entwurfs schnell und mit einem Minimum an Aufwand zu bestimmen. Außerdem lassen sich aus ihnen wichtige konstruktive Hinweise entnehmen.

Darüberhinaus liefern systematische numerische Untersuchungen – anders als Experimente – immer auch detaillierte Aufschlüsse über die zeitlichen und räumlichen Veränderungen aller Zustandsgrößen. Sie ergeben deshalb nicht nur einen vollständigen Überblick über das Tragverhalten einer ganzen Familie von Schalenträgwerken, sondern sie liefern auch wertvolle Hinweise für eine optimale konstruktive Gestaltung. Gerade dieser Aspekt ist von wesentlicher praktischer Bedeutung, zumal es sich gezeigt hat, daß in der Regel auch bei ausgeprägt nichtlinearem Verhalten verschiedene globale dimensionslose Größen existieren, zwischen denen relativ einfache Beziehun-

gen bestehen. Diese haben außerdem den wichtigen Vorteil, daß sie von Vereinfachungen weitgehend freie Extrapolationen und Verallgemeinerungen zulassen.

Ein wichtiger praktischer Vorteil mechanisch begründeter Bemessungshilfen besteht schließlich auch darin, daß sie die Möglichkeit bieten, die Tragsicherheit und Wirtschaftlichkeit von Schalentragswerken mit konventionellen Mitteln zu steigern. Sie kommen damit vor allem kleineren und mittleren Unternehmen zugute, die bislang noch nicht über die sachlichen und personellen Voraussetzungen verfügen, die für den routinemäßigen Einsatz von nichtlinearen Programmsystemen unerlässlich sind.

2. Numerisches Lösungsverfahren

Die in diesem Bericht vorgestellten numerischen Untersuchungen wurden mit dem Rotationsschalenprogramm ROT-B durchgeführt, das speziell für die geometrisch nichtlineare, elastoplastische Berechnung von Rotationsschalen mit beliebigen nichtaxialsymmetrischen Belastungen und Anfangsimperfektionen entwickelt wurde. Wie in [1-10] näher ausgeführt, basiert es auf einer für große Verschiebungen und mäßig große Rotationen gültigen Theorie dünnwandiger Schalen und ermöglicht sowohl die Beschreibung elastisch-idealplastischen als auch verfestigenden Materialverhaltens.

Von üblichen zweidimensionalen Schalenprogrammen unterscheidet sich ROT-B vor allem dadurch, daß die zugrunde liegende Formulierung auf die Rotationsgeometrie zugeschnitten ist und daß eine Diskretisierung lediglich entlang der Meridiankoordinate erfolgt. Dadurch kommt man – ähnlich wie im rotationssymmetrischen Fall – zu Ringelementen. Nichtaxialsymmetrische Einflüsse werden dagegen durch Fourierreihen beschrieben, wobei jeder Fourierkomponente ein Ringelement zugeordnet ist.

Eine weitere Besonderheit besteht darin, daß zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Ringelemente nicht, wie sonst üblich, Ansätze über die Meridianverteilung der Verschiebungsgrößen gemacht werden. Vielmehr wird das zugrundeliegende Fundamentalsystem der Differentialgleichungen asymptotisch genau über ein endliches Meridianintervall integriert. Die darin auftretenden geometrisch und physikalisch nichtlinearen Terme, die zu Kopplungen zwischen den einzelnen Fourierharmonischen führen, werden dabei zu Pseudolasten zusammengefaßt und auf halbdiskrete Weise behandelt. Dazu werden zunächst die einzelnen Komponenten der jeweiligen diskreten Pseudolastvektoren an einer bestimmten Zahl von gleichmäßig über den Schalenumfang und die Schalendicke verteilten Punkten bestimmt. Erst anschließend wird deren Verteilung wieder in Fourierreihen entwickelt. Auf diese Weise lassen sich die diskreten Beziehungen sowohl auf Element- als auch auf Systemebene bezüglich der einzelnen Fourierkomponenten entkoppeln. Die dabei notwendigen Rechenoperationen betreffen dann lediglich die Pseudolastvektoren, während die Steifigkeitsmatrizen unbeeinflusst bleiben, da sie mit denen der entsprechenden linearen Theorie übereinstimmen und damit nur von der Elementgeometrie und der gewählten Diskretisierung, nicht jedoch von der Belastungsgeschichte abhängen. Aus diesem Grund muß auch die Gesamtsteifigkeitsmatrix, die aufgrund der Entkopplung der Fourierharmonischen eine blockdiagonale Struktur mit sehr kleiner Bandbreite hat, nur einmal dreieckszerlegt werden. Dadurch reduziert sich nicht nur der Speicherplatzbedarf, sondern auch der gesamte Rechenaufwand ganz erheblich, was besonders bei komplexen Geometrien und systematischen Parameteruntersuchungen von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Ein weiterer großer Vorteil der verwendeten Formulierung besteht darin, daß bei der Behandlung nichtaxialsymmetrischer Probleme keinerlei restriktive Annahmen bezüglich der Umfangsverteilung der Zustandsgrößen getroffen werden müssen, wie dies bei Verwendung von zweidimensionalen Elementen aus Gründen der Speicherplatzbeschränkung oder der Rechenzeiterparnis oft geschieht. Insbesondere ist es nicht erforderlich, die Zahl der Freiheitsgrade in Umfangsrichtung dadurch klein zu halten, daß man sich auf die Untersuchung von Schalensektoren beschränkt und an den parallel zu den Meridianlinien verlaufenden Rändern fiktive Randbedingungen vorgibt. Solche Vereinfachungen sind bei linearem Verhalten durchaus zweckmäßig. Im nichtlinearen Bereich dagegen, wo sich die charakteristischen Wellenlängen der Zustandsgrößen in der Regel stark mit der Art und Höhe der Belastung ändern, können reduzierte diskrete Modelle zu beträchtlichen Ungenauigkeiten führen. Ein Beispiel dafür sind Behälterböden, bei denen je nach den Abmessungen und der Belastung die Zahl der Umfangsbeulwellen um mehr als das Zehnfache schwanken kann. Demgegenüber hängt bei ROT-B die Genauigkeit, mit der sich die Verteilung der Zustandsgrößen in Umfangsrichtung erfassen läßt, allein von der vom Benutzer frei wählbaren Zahl der Fourierharmonischen ab. Um diese Genauigkeit zu steigern, muß lediglich die Zahl der Fourierkomponenten erhöht werden, während dies bei zweidimensionalen Elementen nur durch eine völlige Änderung der Umfangsdiskretisierung möglich ist. In der Regel ist dazu eine Neugenerierung des gesamten Netzes erforderlich, wodurch sich auch die Dimension der lastabhängigen und gewöhnlich stark besetzten tangentialen Systemsteifigkeitsmatrix ändert. Der Modellierungs- und Diskretisierungsaufwand ist also bei der hier verwendeten Vorgehensweise erheblich geringer. Deshalb können ohne weiteres auch große Schalen mit komplexer Geometrie in ihrer Gesamtheit diskretisiert werden, und auch umfangreiche Parameteruntersuchungen lassen sich mit praktisch durchaus vertretbarem Aufwand durchführen.

3. Nichtlineares Tragverhalten und Beullasten

Wie bereits erwähnt, haben die charakteristischen Systemgrößen, insbesondere die Geometrieparameter, die Materialmoduln und die Art der Belastung einen entscheidenden Einfluß auf das Tragverhalten eines Schalentragerwerks und auf seine möglichen Versagensformen. Diese können sehr unterschiedlich sein, weshalb es zur Bestimmung der Tragfähigkeitsgrenze in der Regel nicht genügt, lediglich eine der möglichen Versagensarten zu betrachten. Vielmehr ist es erforderlich, von allen kritischen Zuständen denjenigen zu bestimmen, dem das jeweils niedrigste Lastniveau zugeordnet ist. Da auch bei den im Rahmen dieses Vorhabens durchgeführten Berechnungen unterschiedliche Beulformen auftreten, sollen die verschiedenen kritischen Belastungen und ihre jeweilige mechanische Bedeutung noch einmal kurz charakterisiert werden (siehe auch [7]).

So bezeichnet zum Beispiel die bekannte elastische Verzweigungslast p_{ki}^{el} diejenige Lastintensität, bei der das Lastverschiebungsdiagramm der perfekten elastischen Schale einen Verzweigungspunkt aufweist (siehe Abbildung 1a). Dieser ist dadurch gekennzeichnet, daß sich dort wenigstens zwei mögliche Gleichgewichtspfade schneiden, von denen zumindest einer ein vom ursprünglichen – in der Regel axialsymmetrischen – Zustand abweichendes nichtaxialsymmetrisches Verschiebungsmuster aufweist. Bei

den meisten der hier betrachteten Schalenkonfigurationen sind die auf den Verzweigungspfaden liegenden Gleichgewichtszustände – ebenso wie die Verzweigungszustände selbst – instabil, so daß beim Erreichen von p_{ki}^{el} spontan ein nichtaxialsymmetrisches Beulmuster auftritt. Gleichzeitig wird ein nichtlinearer dynamischer Prozess eingeleitet, der in der Regel zum Versagen der Konstruktion, zumindest aber zu einer starken Einschränkung ihrer Gebrauchsfähigkeit führt. Bei den praktischen Berechnungen werden solche Verzweigungspunkte mit Hilfe einer sogenannten 'begleitenden Eigenwertanalyse' ermittelt.

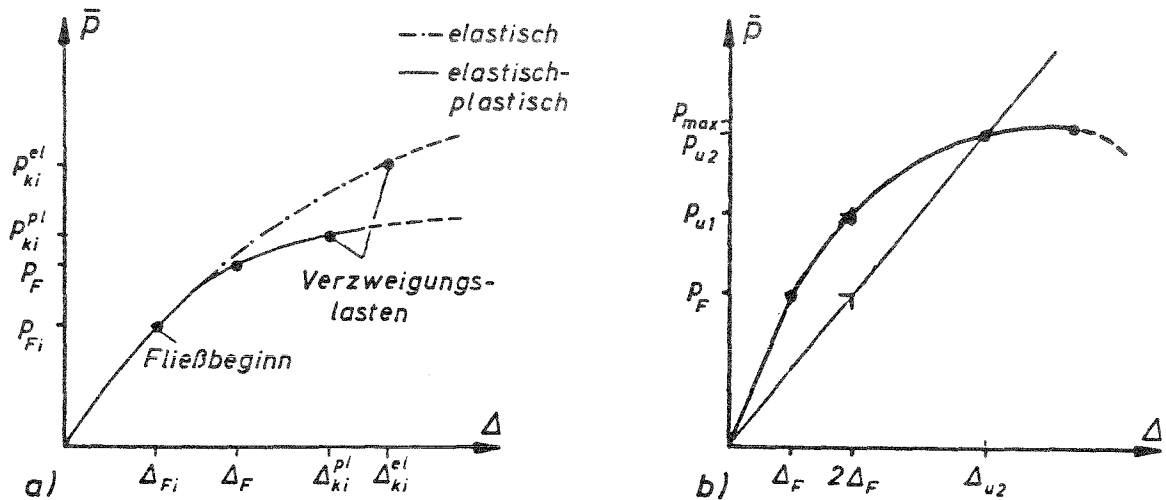


Abb. 1: Nichtlineares Tragverhalten und Beullasten

Bei entsprechenden Abmessungsverhältnissen und Materialeigenschaften kann man allerdings nicht mehr voraussetzen, daß die Schale im Verlauf der Belastung elastisch bleibt. Vielmehr wird dann bei einem Lastniveau p_{Fi} (Abbildung 1a) an einer oder mehreren Stellen (zumeist an der Innen- oder Außenseite) die Fließspannung σ_F des Materials überschritten. Die daraus resultierenden plastischen Dehnungen haben jedoch in der Regel selbst dann, wenn sich das Material elastisch-idealplastisch verhält, nicht sofort globale Auswirkungen. Wie umfangreiche numerische Untersuchungen gezeigt haben [2,3,7], ist mit einer deutlichen Änderung des Gesamttragverhaltens normalerweise erst dann zu rechnen, wenn bei der sogenannten 'Fließlast' p_F (Abbildung 1a) die Membranvergleichsspannung an der maximal beanspruchten Stelle der Schalenmittelfläche die Fließspannung σ_F überschreitet. Vom numerischen Standpunkt aus ist die Last p_F auch deshalb interessant, weil sie sich mit deutlich weniger Aufwand bestimmen läßt als die anfängliche Fließlast p_{Fi} .

Wenn p_{Fi} , beziehungsweise p_F , überschritten ist, kann – ähnlich wie im elastischen Fall – bei p_{ki}^{pl} (Abbildung 1a) ein plastischer Verzweigungspunkt und ein entsprechendes nichtaxialsymmetrisches Beulmuster auftreten. Zwar ist im plastischen Bereich der Gleichgewichtszustand der Schale an den jeweiligen Verzweigungspunkten noch nicht instabil, jedoch führen bei Druckbelastung die geometrisch nichtlinearen Einflüsse sowie die bei weiter ansteigender Belastung abnehmende Materialsteifigkeit in der Regel dazu, daß die tatsächliche Versagenslast der entsprechenden Schale nur wenig

höher liegt als p_{ki}^{pl} . Deshalb kann in allen praktisch wichtigen Fällen die Verzweigungslast p_{ki}^{pl} auch als Traglast angesehen werden.

Neben den Verzweigungspunkten können aber auch noch andere kritische Gleichgewichtszustände auftreten. Je nach der Geometrie, den Materialeigenschaften und den Randbedingungen bleibt der anfängliche – bei perfekten Rotationsschalen gewöhnlich axialsymmetrische – Spannungs- und Verschiebungsverlauf erhalten bis der primäre Last-Verschiebungspfad bei der Traglast p_{max} ein Maximum erreicht (Abbildung 1b). Die zu p_{max} gehörigen Gleichgewichtszustände sind durchweg instabil, so daß auch hier ein nichtlinearer dynamischer Prozess eingeleitet wird, der zum Versagen der Konstruktion führt. Anders als in Abbildung 1b angedeutet, können Lastmaxima aber sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich auftreten. Dies ist zum Beispiel bei einem Teil der hier vorgestellten Ergebnisse der Fall. Im plastischen Bereich sind sie allerdings nicht selten auch mit vergleichsweise großen axialsymmetrischen Deformationen verbunden. Man spricht dann gewöhnlich von 'plastischem Versagen'. In solchen Fällen verlaufen auch die entsprechenden Last-Verschiebungskurven häufig so flach, daß die jeweiligen Lastmaxima p_{max} nicht immer so eindeutig zu bestimmen sind wie die Verzweigungslasten p_{ki} . Aus diesen Gründen sind verschiedene 'plastische Grenzlasten' definiert worden (siehe zum Beispiel [7]), die den Zweck haben, eine praktische obere Gebrauchsfähigkeitsgrenze des Schalentragswerks festzulegen. Ein solcher Grenzwert ist zum Beispiel die in Abbildung 1b definierte plastische Grenzlast p_{u1} . Sie bezeichnet dasjenige Lastniveau, bei dem eine charakteristische globale Verschiebung, oder eine Verschiebungsnorm Δ , doppelt so groß wird wie bei der Fließlast p_F . Eine andere gebräuchliche plastische Grenzlast ist p_{u2} , die dann als erreicht gilt, wenn die 'Gesamtsekantensteifigkeit' p_{u2}/Δ_{u2} nur noch halb so groß ist wie bei der Fließlast p_F (siehe Abbildung 1b). Da der Wert von p_{u2} immer größer ist als der von p_{u1} und da er somit auch dem der tatsächlichen Traglast p_{max} näherkommt, empfiehlt es sich – sofern Δ_{u2} nicht oberhalb einer definierten Verschiebungsgrenze liegt –, p_{u2} als die maßgebende kritische Gebrauchslast anzusehen.

Der Einfachheit halber werden im folgenden elastische und elastisch-plastische Verzweigungs- beziehungsweise Maximallasten nicht im einzelnen mit p_{ki}^{el} und p_{ki}^{pl} oder mit p_{max}^{el} und p_{max}^{pl} bezeichnet, sondern es wird für den jeweils maßgebenden Wert lediglich die Bezeichnung p_{kr} verwendet. Die Bedeutung ergibt sich dabei immer eindeutig aus dem jeweiligen Zusammenhang.

4. Beulverhalten von Kugelschalen unter Eigengewicht und Außendruck

Die bislang verfügbaren Ergebnisse zum Beulen von Kugelschalen gelten überwiegend für flache Kugelkalotten sowie – allerdings in erheblich geringerem Umfang – für Halb- und Vollkugeln. Auch wird als Belastung zumeist nur konstanter Außendruck angenommen. Ergebnisse für Kugelschalen mit variablem Öffnungswinkel sowie mit allgemeiner Belastung existieren dagegen nur vereinzelt. Deshalb basieren Bemessungen nicht selten auf stark vereinfachten linearisierten – oder sogar linearen – mechanischen Modellen, während die Einflüsse, die dabei unberücksichtigt bleiben, zum Beispiel Plastizierungen, unterschiedliche Randbedingungen, geometrisch nichtlineare Effekte etc., lediglich über pauschale Abminderungsfaktoren erfaßt werden. Bei einer solchen globalen Beschreibung besteht allerdings die Gefahr, daß es, je nach

Ausführung, entweder zu Überdimensionierungen – und damit unwirtschaftlichen – oder zu Unterdimensionierungen – und damit unsicheren Lösungen – kommt und daß deshalb die Tragsicherheit solcher Konstruktionen nicht – wie eigentlich beabsichtigt – in allen Fällen gewährleistet ist.

Hauptziel des Forschungsvorhabens, über das hier berichtet wird, war es deshalb, durch systematische numerische Untersuchungen die Abhängigkeit der Tragfähigkeit von offenen und durch Flächenlasten (Eigengewicht und Außendruck) belasteten Kugelschalen (Abbildung 2) vom Öffnungswinkel, den Randbedingungen, dem Radius-zu-Dickenverhältnis R/t sowie der Art des Materialverhaltens (elastisch beziehungsweise elastisch-idealplastisch) zu bestimmen und die Ergebnisse soweit wie möglich in die Formulierung des Teils 4 der DIN 18 800 ('Stabilität im Stahlbau – Schalenbeulen') einfließen zu lassen (vgl. auch die Vorbemerkung).

Allen numerischen Berechnungen wurde der Elastizitätsmodul und die Querdehnungszahl von Stahl ($E = 210\,000\text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$) sowie die für St 37 geltende Fließspannung ($\sigma_F = 240\text{ N/mm}^2$, $\sigma_F/E = 0,001143$) zugrunde gelegt und es wurde außerdem – wie im Stahlbau üblich – vorausgesetzt, daß sich das Material elastisch-idealplastisch verhält. Die Annahme, daß keine Verfestigung stattfindet, trifft zwar im allgemeinen nicht oder nur bedingt zu. Sie ist aber in jedem Fall konservativ, da eine Verfestigung immer auch zu einer Steigerung der Tragfähigkeit führt. Außerdem vermeidet man auf diese Weise, das im Detail häufig sehr komplexe Verfestigungsverhalten genauer beschreiben und dazu mehrere zusätzliche Parameter berücksichtigen zu müssen. Nicht berücksichtigt wurden in diesem Vorhaben die das Tragverhalten ebenfalls beeinflussenden Vorbeulen (Anfangs-Imperfektionen) sowie evtl. Sicherheitsbeiwerte.

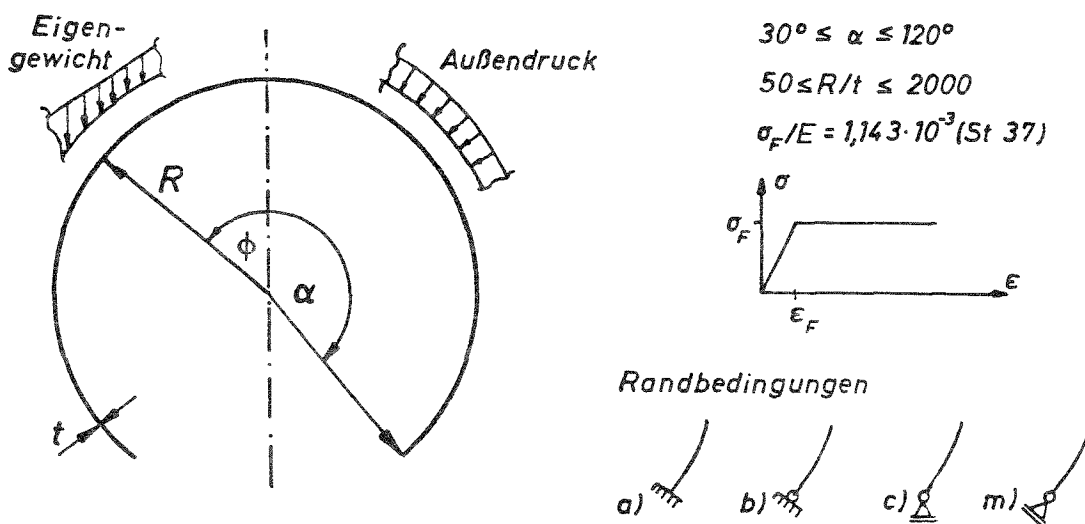


Abb. 2: Offene Kugelschalen unter Eigengewicht und Außendruck

Die Bereiche, über die im Verlauf der numerischen Berechnungen der Öffnungswinkel sowie das R/t -Verhältnis variiert wurde, sind in Abbildung 2 wiedergegeben. Dort sind auch die jeweils berücksichtigten Randbedingungen skizziert. Wie man sieht, wurde speziell die feste Einspannung a), die gelenkige, unverschiebliche Lagerung b), die gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung c) und die 'klassische Membran-

lagerung' m) untersucht. Außerdem wurden Berechnungen für die in Abbildung 3 dargestellten Vollkugeln durchgeführt, die einmal am Äquator ($\alpha = 90^\circ$) und einmal bei $\alpha = 120^\circ$ durch eine tangential unverschiebliche aber radial verschiebliche 'Quasimembranlagerung' gehalten sind. In allen Fällen erfolgte die Festlegung der Parameter und der Randbedingungen in Abstimmung mit dem für die Erarbeitung des Teils 4 der DIN 18 800 zuständigen Normenausschuß Bauwesen (NABau) im Deutschen Institut für Normung (DIN).

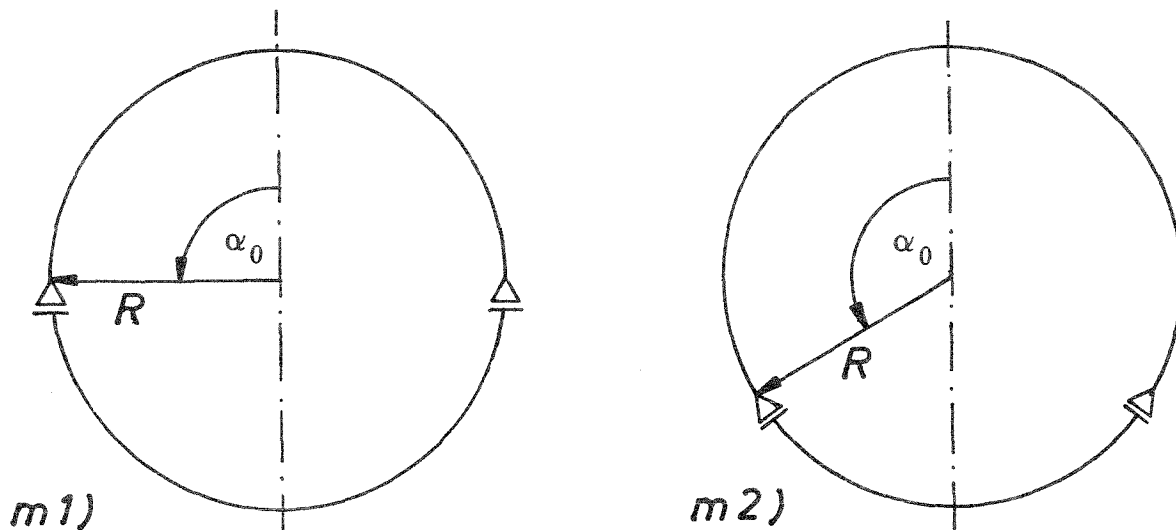


Abb. 3: Vollkugelschalen mit radial verschieblicher 'Membranlagerung'

4.1 Beulverhalten offener Kugelschalen unter Eigengewicht

Anders als etwa bei Außendruckbelastung sind bei Eigengewicht die einzelnen, auf das lokale Koordinatensystem der Schalenmittelfläche bezogenen Komponenten der Belastung längs der Meridiankoordinate nicht konstant. Vielmehr hängt sowohl die Normalkomponente p_n als auch die Tangentialkomponente p_t vom Meridianwinkel ϕ (Abbildung 2) ab. Mit dem Lastparameter $p = \gamma t$, wobei γ das spezifische Gewicht des Materials und t die Dicke der Schale bezeichnet, erhält man dann (siehe zum Beispiel [11]):

$$p_n = p \cos \phi, \quad p_t = p \sin \phi. \quad (1)$$

4.1.1 Elastisches Verhalten

Setzt man voraus, daß das Material bis zum Erreichen der jeweiligen kritischen Belastung elastisch bleibt, so erhält man die in den nachfolgenden Tabellen 1-4 sowie den Abbildungen 4-13 wiedergegebenen numerischen Ergebnisse.

4.1.1.1 Fest eingespannte Ränder

Für den Fall der offenen, an den freien Rändern fest eingespannten Kugelschale ergeben sich für die untersuchten α - und R/t -Werte die in Tabelle 1 angegebenen kritischen Belastungsparameter p_{kr} . Dabei handelt es sich - je nachdem ob die Umfangs-

Randbedingung	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	n	$\sigma_{22}^{* 1)}$	$\sigma_z^{1)}$	p^*
a)	30°	50	85.00	3	2278.0	2541.0	0.90
		100	22.00	5	1179.0	1270.5	0.93
		300	2.58	10	415.0	423.5	0.98
		500	0.95	14	225.0	254.1	1.00
		2000	0.0623	4	66.8	63.5	1.05
	60°	50	79.00	5	2633.0	2541.0	1.04
		100	20.80	4	1387.0	1270.5	1.09
		300	2.42	6	484.0	423.5	1.14
		500	0.89	0	297.0	254.1	1.17
		2000	0.0525	0	70.0	63.5	1.10
	90°	50	64.40	5	3220.0	2541.0	1.27
		100	16.20	7	1620.0	1270.5	1.28
		300	1.69	13	507.0	423.5	1.20
		500	0.63	15	315.0	254.1	1.24
		2000	0.0365	0	73.0	63.5	1.15
	120°	50	38.90	5	3890.0	2541.0	1.53
		100	--	-	--	--	--
		300	--	-	--	--	--
		500	0.36	0	360.0	254.1	1.42
		2000	0.0195	0	78.0	63.5	1.23

1) Dimension: N/mm^2

Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.1.1.1 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 1: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (feste Einspannung)

beulwellenzahl n in Tabelle 1 von Null verschieden ist oder nicht – entweder um elastische Verzweigungslasten p_{ki}^{el} (für $n > 0$) oder um elastische Maximallasten p_{max}^{el} (für $n = 0$). Wie man sieht, nimmt n – geht man von den dickeren Schalen aus – mit wachsendem R/t -Verhältnis zu. So ergibt sich zum Beispiel für $\alpha = 30^\circ$ und $R/t = 50$ der Wert $n = 3$, während man für $R/t = 500$ den vergleichsweise großen Wert $n = 14$ erhält. Andererseits geht für eine sehr dünne Kugelschale mit $R/t = 2000$ die Zahl der Umfangsbeulwellen wieder auf 4 zurück. Dies zeigt deutlich, daß niedrige n -Werte nicht – wie vielleicht zu vermuten – nur bei dickeren Schalen auftreten.

Eine ähnliche Abhängigkeit der Beulwellenzahl vom R/t -Verhältnis erhält man für $\alpha = 90^\circ$. Hier ergibt sich allerdings für $R/t = 2000$ der Wert $n = 0$. Das bedeutet, daß eine sehr dünne elastische Halbkugel nicht an einem Verzweigungs-, sondern an einem Maximalpunkt des primären axialsymmetrischen Last-Verschiebungspfades versagt. Für $R/t = 2000$ ist dies außerdem bei $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 120^\circ$ der Fall, und überdies hat man bei $\alpha = 60^\circ$ auch für $R/t = 500$ den Wert $n = 0$.

Während – wie auch die späteren Bilder zeigen – die charakteristischen Wellenlängen der jeweiligen Beuleigenformen stark vom Öffnungswinkel abhängen, ist dies für die entsprechenden kritischen Werte des Lastparameters p_{kr} nicht in gleichem Maß der Fall. Stattdessen wird dieser – wie auch zu erwarten – sehr viel stärker vom R/t -Verhältnis beeinflusst. So liegen, wie Tabelle 1 zeigt, die jeweils größten, für die dickeren Schalen gültigen Werte von p_{kr} um etwa drei Zehnerpotenzen über denen für die entsprechenden dünneren Schalen.

Die Werte in den ersten fünf Spalten von Tabelle 1 geben zwar das nichtlineare Beulverhalten der untersuchten festeingespannten offenen Kugelschalen vollständig wieder. Sie lassen sich jedoch in dieser Form nicht ohne weiteres verallgemeinern. Um dies zu erreichen, wurde eine Normierung von p_{kr} vorgenommen, die – wie Abbildung 4 zeigt – für gegebene R/t -Verhältnisse zu einem annähernd linearen Zusammenhang zwischen einem geeignet definierten dimensionslosen Lastparameter p^* , der den Einfluß von R/t näherungsweise erfaßt, und dem Öffnungswinkel α führt.

Die in diesem Zusammenhang angestellten Überlegungen lehnten sich im wesentlichen an das Nachweiskonzept des Teils 4 der DIN 18 800 an. Dort wird nicht vom eigentlich interessierenden kritischen Wert der äußeren Belastung ausgegangen, sondern von den Größtwerten der daraus berechneten Membran(druck)spannungen. Dies hat den prinzipiellen Nachteil, daß Spannungen keine globalen, sondern lokale Größen sind. Ihre jeweiligen Größtwerte und deren Position innerhalb eines Tragwerks sind deshalb nur in Ausnahmefällen explizit bekannt, so daß sie gewöhnlich für jeden Einzelfall neu bestimmt werden müssen. Überdies bleibt im nichtlinearen Bereich bei steigender Belastung der Ort, an dem die Größtwerte auftreten, normalerweise nicht fest, sondern verändert sich infolge der stattfindenden Spannungsumlagerungen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich nichtlineare Vorgänge ganz wesentlich von linearen.

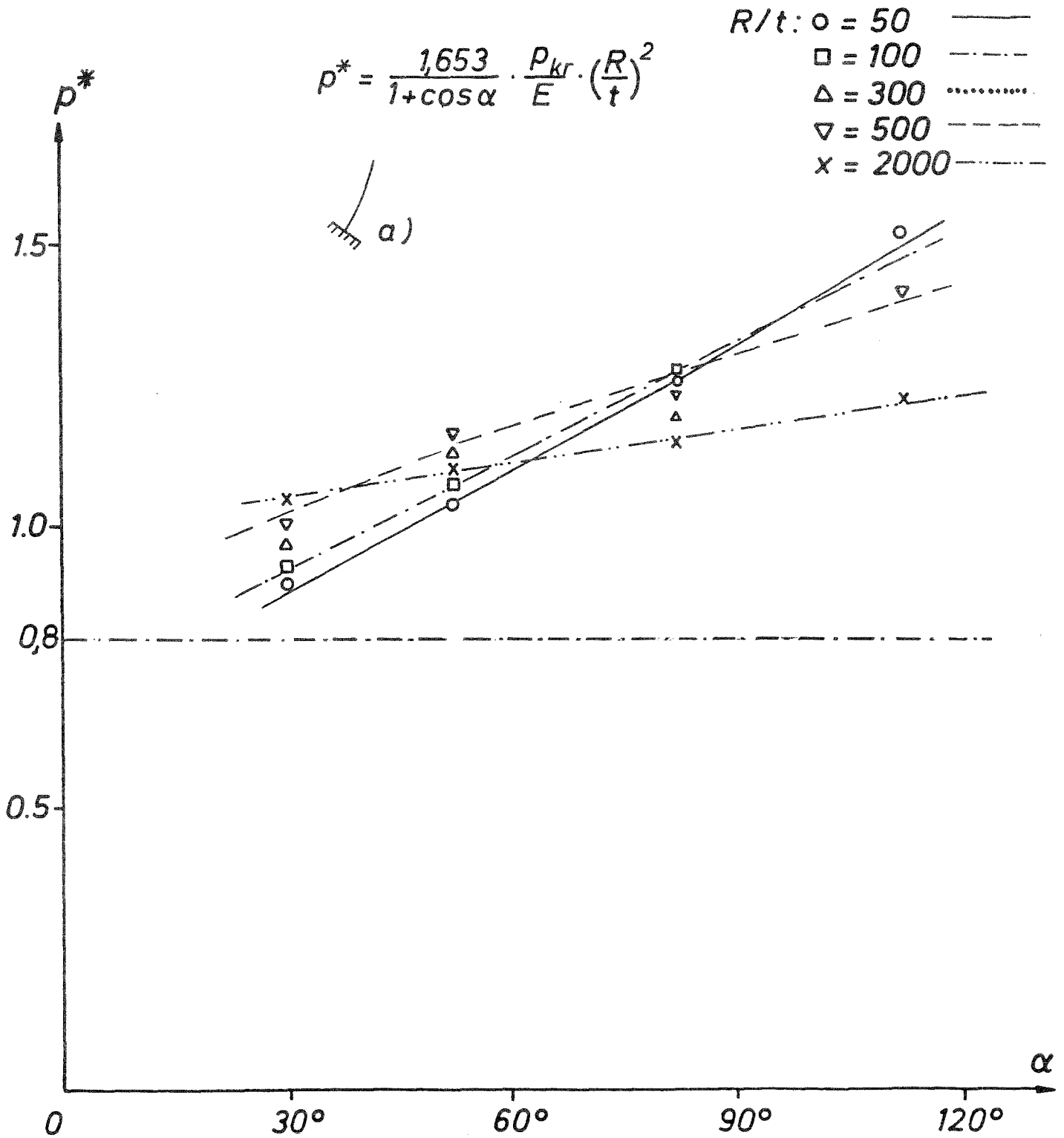


Abb. 4: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), feste Einspannung)

Bei den meisten der hier betrachteten Konfigurationen war dies allerdings aus geometrischen Gründen nicht der Fall. Vielmehr zeigte sich im Verlauf der numerischen Untersuchungen, daß die maximalen Membrandruckspannungen – außer bei der gelenkig, horizontal verschieblichen Lagerung c) – an den Auflagern auftraten und daß diese außerdem in recht guter Näherung durch

$$\sigma_{22}^* = p_{kr} (R/t)/(1+\cos \alpha) \quad (2)$$

angenähert werden können. Mechanisch gesehen ist σ_{22}^* die sich für Eigengewichtsbelastung aus der Membrantheorie ergebende Meridiandruckspannung am jeweiligen Auflager. Sie entspricht also der tatsächlichen Auflagerspannung nur näherungsweise. Formal betrachtet bedeutet (2) dagegen lediglich die Transformation des globalen kritischen Lastparameters p_{kr} auf eine geeignete lokale Spannungsgröße. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 1 angegeben. Um daraus einen dimensionslosen Lastparameter p^* zu gewinnen, wird σ_{22}^* noch durch die bekannte 'Zoelly-Spannung'

$$\sigma_z = 0,605 E (t/R), \quad (3)$$

also die klassische, homogene Verzweigungsspannung einer perfekten, durch konstanten Außendruck belasteten Vollkugel, dividiert. Man erhält dann

$$p^* = \sigma_{22}^* / \sigma_z = 1,653 (p_{kr}/E) (R/t)^2 / (1+\cos \alpha). \quad (4)$$

Ein Vergleich mit dem im Teil 4 der DIN 18 800 verfolgten Nachweiskonzept zeigt, daß für den Fall, daß σ_{22}^* tatsächlich dem jeweiligen Größtwert der Membrandruckspannung entspricht, p^* mit den dort angegebenen konstanten Beiwerten c_k übereinstimmt. Man kann also durch einen Vergleich von p^* mit c_k Rückschlüsse auf den Gültigkeitsbereich des DIN-Entwurfs ziehen. Trotz – oder vielleicht gerade wegen – dieser formalen Übereinstimmung sollten aber die prinzipiellen Unterschiede zwischen p^* und c_k nicht übersehen werden. Anders als c_k ist p^* kein pauschaler 'Abminderungsfaktor', der die Unterschiede zwischen dem im Verzweigungspunkt einer perfekten, außendruckbelasteten Vollkugel herrschenden homogenen Membranzustand und den Maximalspannungen einer durch Eigengewicht beanspruchten Teilkugelschale abdeckt. Vielmehr stellt p^* direkt eine dimensionslose, aus nichtlinearen Berechnungen gewonnene kritische Belastung dar, die sich, wie oben erwähnt, sowohl auf einen Verzweigungspunkt als auch auf ein Lastmaximum beziehen kann.

Wie man aus Tabelle 1 und noch anschaulicher aus Abbildung 4 sieht, wächst p^* für fast alle R/t -Werte annähernd linear mit dem Winkel α an. Vergleicht man diese Verläufe mit dem im Teil 4 der DIN 18 800 für feste Einspannung angegebenen konstanten Wert $c_k = 0,8$, so zeigt sich, daß die jeweils niedrigsten und höchsten Werte von p^* um etwa 12 bis 90 Prozent höher liegen. Im Fall der eingespannten Kugelschale erscheint also der DIN-Entwurf, insbesondere für größere Werte von α , konservativ.

Aus Anwendersicht ist vielleicht noch von Bedeutung, daß die numerischen Ergebnisse in Abbildung 4 in bezug auf das R/t -Verhältnis gewisse Schwankungen aufweisen. So differieren die jeweils für konstantes α ermittelten höchsten und niedrigsten p^* -Werte um etwa 5 bis 25 Prozent. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, daß die

oben gewählte Normierung von p_{kr} , die sich im wesentlichen auf idealisierte Membranspannungszustände bezieht, das tatsächliche Tragverhalten einer durch Eigengewicht belasteten Schale nicht genau erfaßt. Durch eine stärker angepaßte Normierung, die den im vorliegenden Fall auftretenden inhomogenen Spannungs- und Verschiebungszustand besser berücksichtigt, wäre es unter Umständen möglich, die durch das R/t -Verhältnis bedingten Schwankungen in Abbildung 4 weiter zu verringern beziehungsweise ganz zu beseitigen. Wenn dies gelänge, ließen sich alle Ergebnisse in Tabelle 1 durch eine einzige, nur noch vom Winkel α abhängige Kurve annähern. Dieser Aspekt wurde allerdings aus Zeitgründen nicht weiter verfolgt.

In den Abbildungen 5 und 6 sind schließlich für $R/t = 50$ und $R/t = 500$ die den Verzweigungslasten p_{ki}^{el} zugeordneten Eigenformen dargestellt. Dabei ist im jeweils rechten Teil der Bilder die Meridianverteilung der Normalverschiebungskomponente w und im linken Teil die Resultierende der Normalkomponente w und der Meridiankomponente v dargestellt. Wie man sieht, sind die einzelnen linken und rechten Bildhälften annähernd gleich, da infolge der festen Einspannung die Tangentialkomponente v nur eine untergeordnete Rolle spielt. Außerdem zeigt sich, daß die charakteristischen Wellenlängen der Eigenformen – wie oben bereits angedeutet – sowohl mit wachsenden α -Werten als auch mit zunehmendem R/t -Verhältnis kleiner werden, während sich gleichzeitig die Stellen, an denen die Amplituden Maximalwerte annehmen, in Richtung der Auflager verschieben. Der Vollständigkeit halber sollte in diesem Zusammenhang auch noch daran erinnert werden, daß die gewählten Maximalamplituden keine mechanische Bedeutung haben, da sich aus dem zugrundeliegenden homogenen Eigenwertproblem lediglich die Verzweigungslast p_{ki}^{el} , die Umfangswellenzahl n und die Meridianverteilung der Eigenform ergibt, nicht jedoch deren Amplitude.

Schließlich sollte auch noch einmal erwähnt werden, daß man aus einem Vergleich der in den Abbildungen 5 und 6 angegebenen Umfangsbeulwellenzahlen n nicht den Schluß ziehen darf, daß dickere Schalen mit $R/t = 50$ im allgemeinen niedrigere n -Werte aufweisen als dünnere mit $R/t = 500$. Wie bereits im Zusammenhang mit Tabelle 1 erläutert, hängt der Wert von n sehr stark von der jeweiligen Konfiguration ab. So sind zum Beispiel in Abbildung 6 für $\alpha = 60^\circ$ und $\alpha = 120^\circ$ deshalb keine Eigenformen aufgetragen, weil eine Schale mit $R/t = 500$ bei diesen Öffnungswinkeln nicht an einem Verzweigungs-, sondern an einem Durchschlagspunkt ($n = 0$) versagt. Einzelergebnisse können also auch hier nicht ohne weiteres verallgemeinert werden. Die einzige Tendenz, die sich bezüglich n aus Tabelle 1 ablesen läßt, ist, daß die Größenordnung der n -Werte für $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ besser übereinstimmt als für den dazwischen liegenden Wert $\alpha = 60^\circ$. Erwähnt werden sollte auch noch, daß sich aus der Zahl der Umfangsbeulwellen zwar keine direkten Rückschlüsse auf die jeweilige kritische Belastung p_{ki}^{el} ziehen lassen, daß es aber dennoch wichtig ist, sich über die zum Teil beträchtlichen Schwankungen von n im klaren zu sein. Dies ist insbesondere im Zusammenhang mit numerischen Berechnungen von Bedeutung, da die notwendige Diskretisierung – und damit die Genauigkeit der Ergebnisse – im wesentlichen von der jeweils kürzesten Wellenlänge der Verschiebungen, also in erster Linie von n bestimmt wird. Gerade in dieser Hinsicht hat das hier verwendete Lösungsverfahren – wie oben bereits ausgeführt – einige wesentliche Vorteile gegenüber allgemeinen Finite-Element-Methoden.

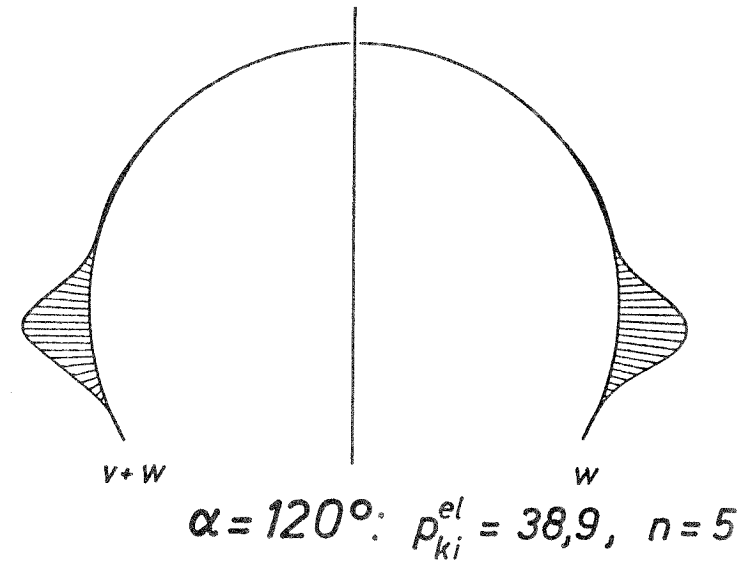
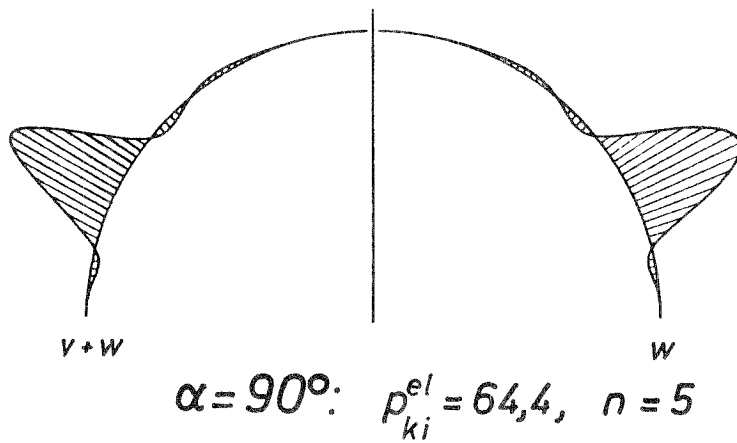
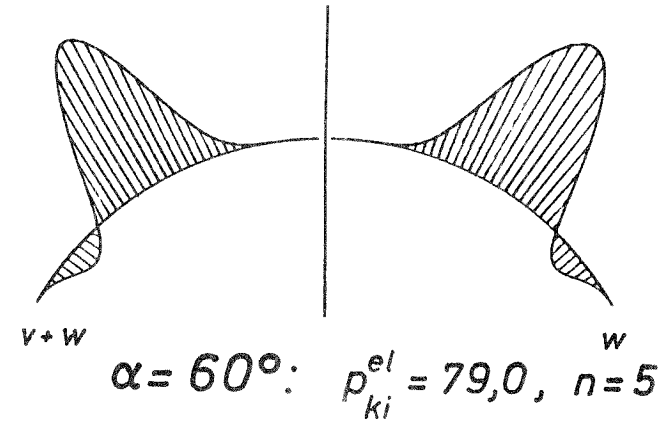
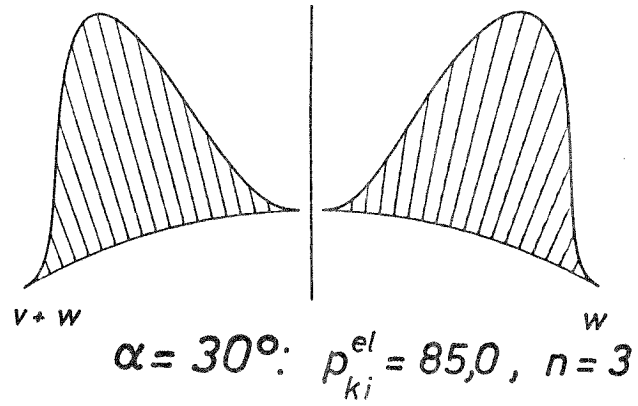
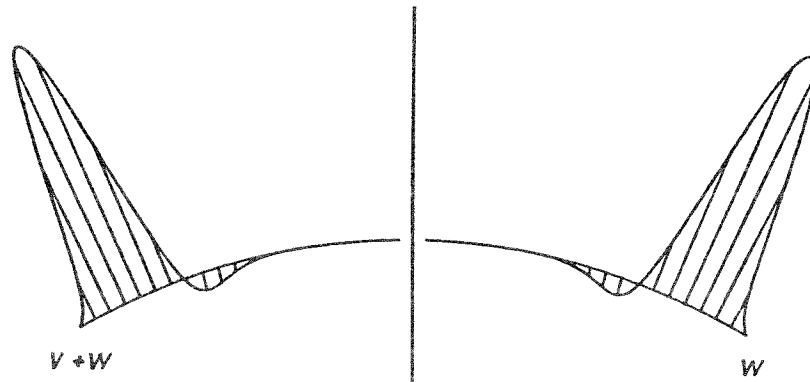
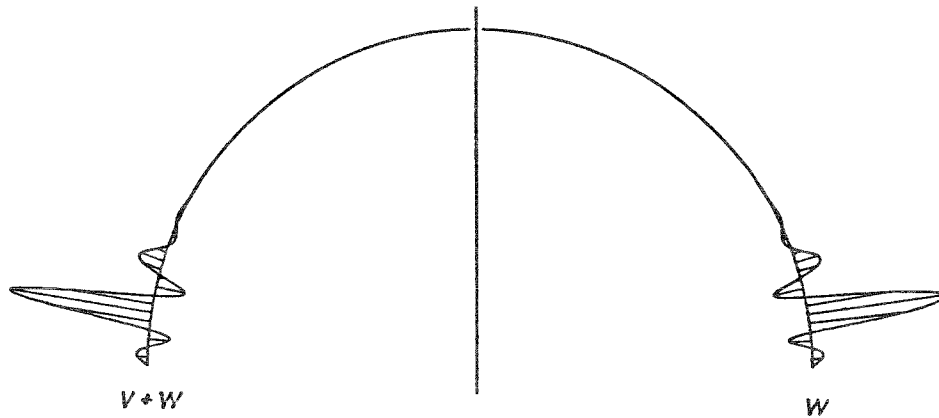


Abb. 5: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (feste Einspannung, $R/t = 50$)



$\alpha = 30^\circ: p_{ki}^{el} = 0,95, n = 14$

$\alpha = 60^\circ: \text{keine Verzweigung } (n = 0)$



$\alpha = 90^\circ: p_{ki}^{el} = 0,63, n = 15$

$\alpha = 120^\circ: \text{keine Verzweigung } (n = 0)$

Abb. 6: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (feste Einspannung, $R/t = 500$)

4.1.1.2 Gelenkige, unverschieblich gelagerte Ränder

Wenn die Schale an den Rändern gelenkig unverschieblich gelagert ist (Randbedingung b) in Abbildung 2), erhält man die in Tabelle 2 und in Abbildung 7 zusammengefaßten numerischen Ergebnisse. Sie differieren zwar nicht grundsätzlich von denen des vorigen Abschnitts, weisen aber dennoch einige wichtige quantitative und qualitative Unterschiede auf. So liegen zum Beispiel aufgrund der 'geringeren Steifigkeit' der Lagerung b) die kritischen Lasten p_{kr} - je nach den α - und R/t -Werten - zwischen etwa 5 und 40 Prozent unter denen für feste Einspannung, wobei die dickste Schale mit $R/t = 50$ und einem Öffnungswinkel von $\alpha = 120^\circ$ den größten Unterschied (42 Prozent) aufweist, während die durchschnittliche Abminderung bei etwa 14 Prozent liegt. Zu den qualitativen Unterschieden zählt, daß die Eigenform einer sehr dünnen Schale mit $R/t = 2000$, einem Winkel von $\alpha = 30^\circ$ und fester Einspannung lediglich 4 Umfangsbeulwellen besitzt, während deren Zahl bei der 'weicheren' gelenkigen Lagerung b) auf 29 ansteigt. Umgekehrt hat man nun bei $\alpha = 60^\circ$ nicht nur für $R/t = 2000$ und $R/t = 500$, sondern auch für $R/t = 300$ einen Durchschlags- und keinen Verzweigungspunkt mehr, und bei $\alpha = 120^\circ$ ist dies im Gegensatz zur festen Einspannung nun sogar für alle betrachteten R/t -Werte der Fall. Außerdem zeigt sich auch hier die oben bereits festgestellte Tendenz, daß die Größenordnung der n -Werte für $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ besser übereinstimmt als dies zum Beispiel bei $\alpha = 60^\circ$ der Fall ist.

Ermittelt man wieder, wie zuvor, aus den kritischen Lastparametern p_{kr} die entsprechenden dimensionslosen Lastparameter p^* und trägt diese als Funktion von α und R/t auf, so erhält man die Darstellung in Abbildung 7. Wie man sieht, ergeben sich nun durchweg keine weitgehend linearen Zusammenhänge zwischen p^* und α mehr. Vielmehr erhält man verschiedene Kurvenverläufe, von denen einige bei etwa $\alpha = 60^\circ$ ein Maximum aufweisen. Auch haben sich die durch die gewählte Normierung bedingten Schwankungen zwischen den jeweils höchsten und niedrigsten Werten von p^* etwas verschoben. Sie differieren nun, je nach α -Wert, zwischen etwa 10 und 20 Prozent.

Vergleicht man außerdem wieder die verschiedenen numerisch ermittelten dimensionslosen Lastparameter p^* mit dem im Entwurf von Teil 4 der DIN 18 800 für gelenkige, horizontal unverschiebliche Lagerung angegebenen c_k -Wert von 0,7 (siehe Abbildung 7), so zeigt sich, daß die Abweichungen zu den jeweils niedrigsten und höchsten Werten von p^* etwas geringer ausfallen als bei fester Einspannung. Sie liegen nun nur noch um etwa 10 bis 65 Prozent höher. Außerdem tritt die größte Abweichung nicht mehr bei $\alpha = 120^\circ$, sondern bei etwa $\alpha = 90^\circ$ auf. Der DIN-Entwurf ist also auch bei der gelenkigen, unverschieblichen Lagerung für einen relativ großen α -Bereich recht konservativ.

In den Abbildungen 8 und 9 sind wieder für $R/t = 50$ und $R/t = 500$ die den jeweiligen Verzweigungslasten p_{ki}^{el} zugeordneten Eigenformen angegeben. Vergleicht man zum Beispiel Abbildung 8 mit Abbildung 5, so zeigt sich, daß für dickere Schalen mit $R/t = 50$ die Eigenformen vergleichsweise wenig differieren. Hier bestehen die Unterschiede hauptsächlich darin, daß die Winkel an den Auflagern nicht mehr Null sind und daß bei $\alpha = 120^\circ$ kein Verzweigungs-, sondern ein Durchschlagspunkt auftritt. Andererseits haben die charakteristischen Beulwellenlängen sowohl in Meridian- als

Randbedingung	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	n	$\sigma_{22}^{* 1)}$	$\sigma_z^{1)}$	$p^{* 1)}$
b)	30°	50	73.10	3	1959.0	2541.0	0.77
		100	19.20	5	1029.0	1270.5	0.81
		300	2.22	10	357.0	423.5	0.84
		500	0.83	13	222.0	254.1	0.87
		2000	0.0572	29	61.3	63.5	0.97
	60°	50	73.10	5	2437.0	2541.0	0.96
		100	18.30	5	1220.0	1270.5	0.96
		300	2.23	0	446.0	423.5	1.05
		500	0.81	0	270.0	254.1	1.06
		2000	0.05	0	66.7	63.5	1.05
	90°	50	52.80	5	2640.0	2541.0	1.04
		100	14.70	8	1470.0	1270.5	1.16
		300	1.52	11	456.0	423.5	1.08
		500	0.53	17	265.0	254.1	1.04
		2000	0.0334	0	66.7	63.5	1.05
	120°	50	22.60	0	2260.0	2541.0	0.89
		100	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--
		500	0.27	0	270.0	254.1	1.06
		2000	0.0182	0	72.7	63.5	1.14

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb.2, Abschnitte 3 und 4.1.1.2 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 2: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (gelenkige, unverschiebliche Lagerung)

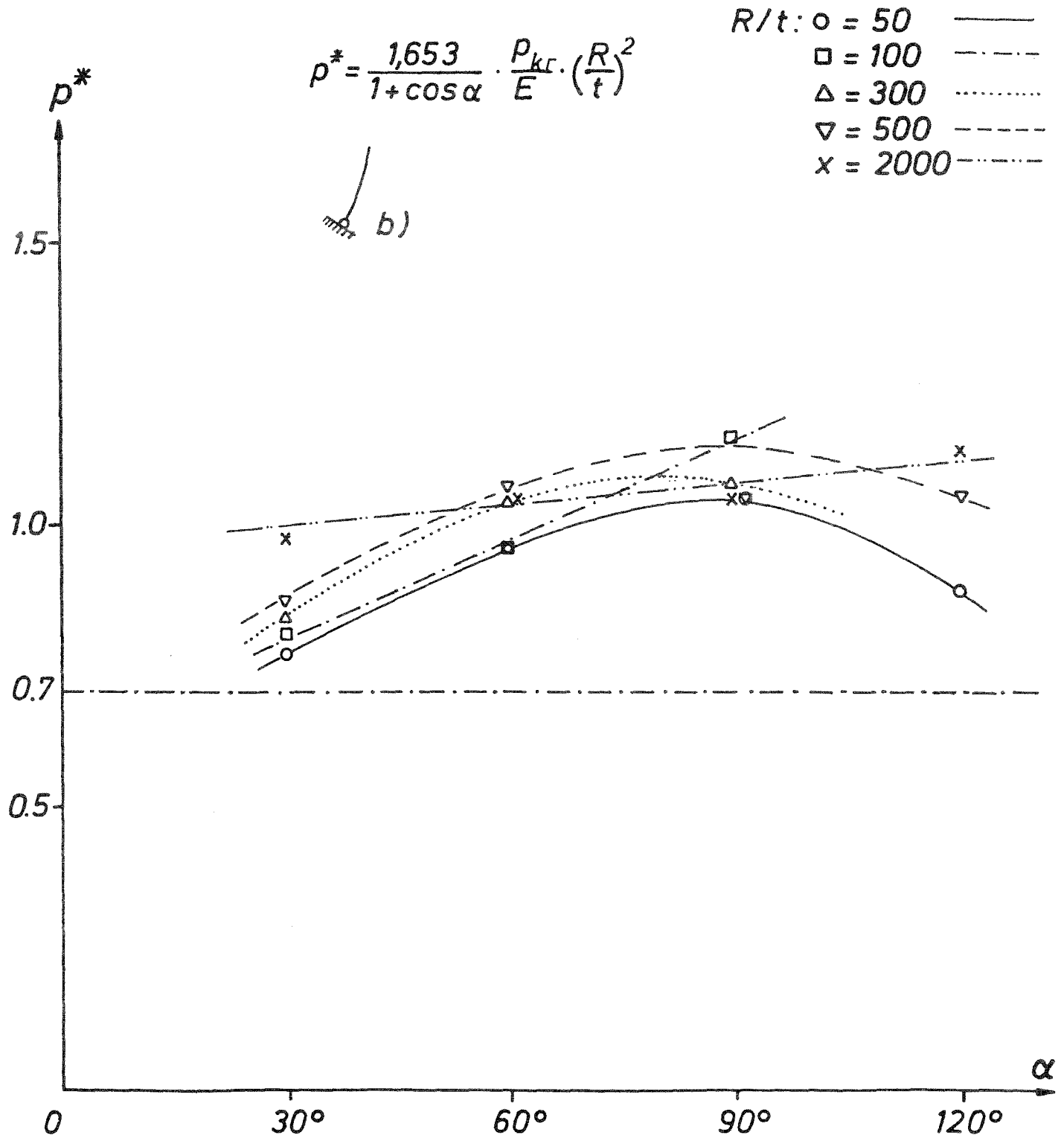
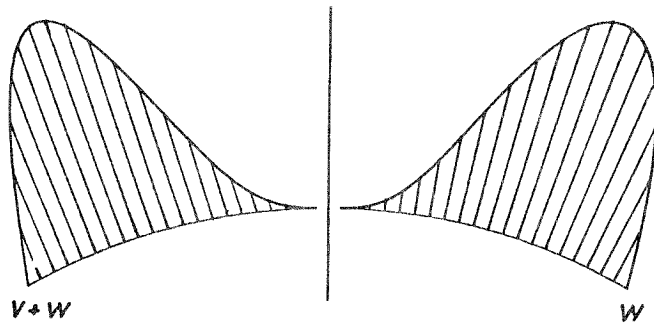
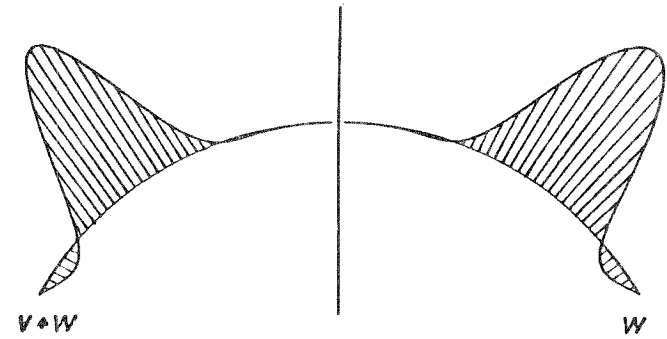


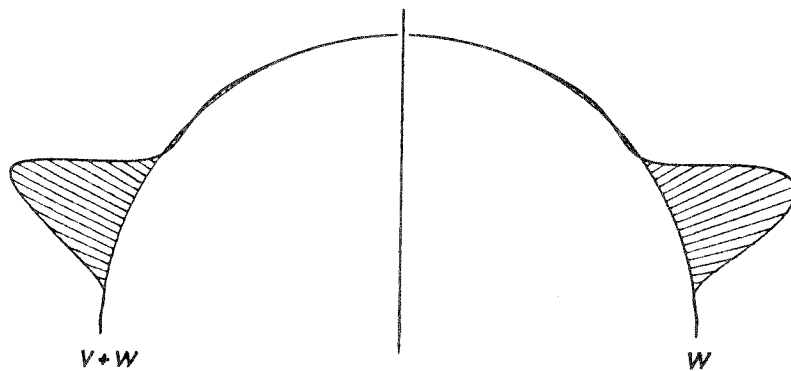
Abb. 7: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), gelenkige, unverschiebliche Lagerung)



$$\alpha = 30^\circ: p_{ki}^{el} = 73,1, n = 3$$



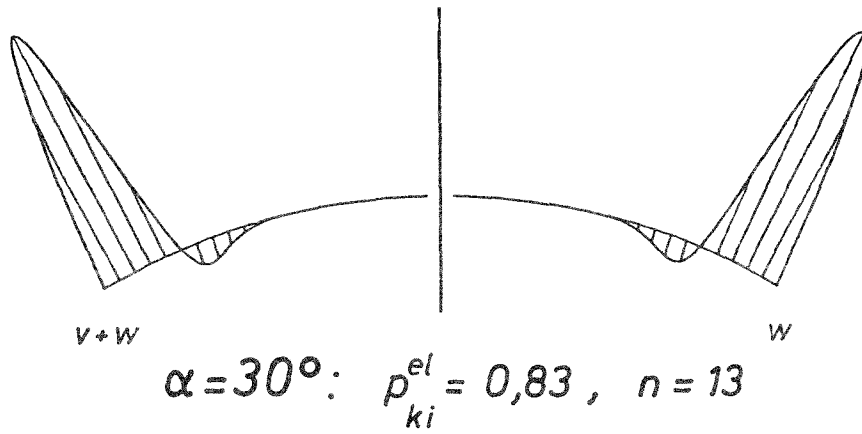
$$\alpha = 60^\circ: p_{ki}^{el} = 73,1, n = 5$$



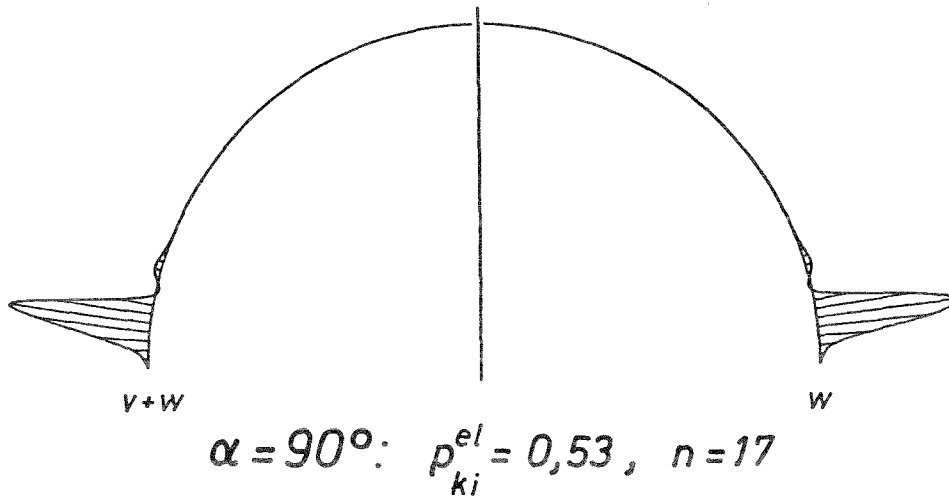
$$\alpha = 90^\circ: p_{ki}^{el} = 52,8, n = 5$$

$\alpha = 120^\circ: \text{keine Verzweigung}$
($n = 0$)

Abb. 8: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (gelenkige, unverschiebliche Lagerung, $R/t = 50$)



$\alpha = 60^\circ: \text{keine Verzweigung } (n = 0)$



$\alpha = 120^\circ: \text{keine Verzweigung } (n = 0)$

Abb. 9: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (gelenkige, unverschiebliche Lagerung, $R/t = 500$)

auch in Umfangsrichtung etwa die gleiche Größenordnung. Ähnlichkeiten zwischen den Eigenformen für eingespannte und gelenkig gelagerte Kugelschalen gibt es auch für die dünneren Schalen mit $R/t = 500$ (siehe Abbildung 9). Dies gilt insbesondere für $\alpha = 30^\circ$. Bei der gelenkig gelagerten Halbkugel ($\alpha = 90^\circ$) ist dagegen die charakteristische Wellenlänge in Meridianrichtung deutlich größer. Dies hat allerdings keinen wesentlichen Einfluß auf die Abminderung der Verzweigungslast. Sie liegt sowohl für $\alpha = 30^\circ$ als auch für $\alpha = 90^\circ$ etwa 14 Prozent unter der der entsprechenden festeingespannten Schalen.

4.1.1.3 Gelenkige, horizontal verschieblich gelagerte Ränder

Wenn die Ränder der gelenkig gelagerten Schale nicht mehr unverschieblich sind, sondern sich in horizontaler Richtung frei bewegen können (Randbedingung c) in Abbildung 2), so verändert sich das Tragverhalten grundsätzlich. Insbesondere liegen dann – wie die numerischen Ergebnisse in Tabelle 3 und Abbildung 10 zeigen – die kritischen Lasten erheblich niedriger. So beträgt p_{kr} für $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ nur noch etwa 20 bis 30 Prozent, für $\alpha = 90^\circ$ etwa 45 bis 50 Prozent und für $\alpha = 120^\circ$ etwa 30 bis 35 Prozent der entsprechenden Werte für die Randbedingung b). Außerdem weisen nun sowohl die Kugelschalen mit $\alpha = 90^\circ$ als auch diejenigen mit $\alpha = 120^\circ$ für alle R/t -Werte einen Durchschlags- und keinen Verzweigungspunkt mehr auf, während für $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ ausschließlich Verzweigungspunkte auftreten. Darüberhinaus stimmen nun bei den flacheren Schalen mit $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ – anders als bei der gelenkig unverschieblichen Lagerung – die Größenordnungen der n -Werte recht gut überein, wobei für $\alpha = 60^\circ$ gerade bei den Schalen, die zuvor axialsymmetrisch versagten, die Zahl der Umfangsbeulwellen besonders hoch ist.

Das veränderte Tragverhalten zeigt sich auch daran, daß nun die am Rand auftretenden Umfangsspannungen σ_{11} (siehe Tabelle 3) um mehr als eine Größenordnung über den mit Hilfe von (2) abgeschätzten Randmeridianspannungen σ_{22}^* liegen, während sie bei den beiden anderen Lagerungsarten erheblich kleiner sind.

In Abbildung 10 sind wieder die dimensionslosen Lastparameter p^* in Abhängigkeit von α und R/t aufgetragen. Wie man sieht, stellt die Halbkugel einen Sonderfall dar, da sich bei $\alpha = 90^\circ$ für alle R/t -Verhältnisse ein p^* -Wert von etwa 0,5 ergibt, während dieser für alle anderen Öffnungswinkel erheblich niedriger liegt. Daß hier die kritischen Lasten für einen isolierten α -Wert erheblich größer sind, ist in erster Linie darauf zurückzuführen, daß für $\alpha = 90^\circ$ die horizontal verschiebliche Lagerung c) mit der 'Membranlagerung' m) (siehe Abbildung 2) übereinstimmt, für die – wie der nächste Abschnitt zeigt – die p^* -Werte generell höher liegen.

Betrachtet man bei der horizontal verschieblichen Lagerung den Winkel $\alpha = 90^\circ$ als Spezialfall und ignoriert die entsprechenden Ergebnisse in Abbildung 10, so ergeben sich wieder – außer für die dickere Schale mit $R/t = 50$ – annähernd lineare Zusammenhänge zwischen p^* und α . Die normierungsbedingten Schwankungen zwischen den jeweils höchsten und niedrigsten p^* -Werten liegen dabei zwischen etwa 5 und 20 Prozent und sind damit ähnlich groß wie bei der gelenkigen, unverschieblichen Lagerung b). Andererseits sind nun aber nicht mehr alle numerisch ermittelten Lastparameter p^* größer als der im Entwurf von Teil 4 der DIN 18 800 vorgesehene c_k -Wert von 0,2. Vielmehr liegen für $\alpha = 30^\circ$ einige p^* -Werte etwas darunter. Setzt

Rand- bedingung	α	R/t	$P_{kr}^{1)}$	n	$\sigma_{22}^{* 1)}$	$\sigma_{11}^{1)}$	$\sigma_z^{1)}$	p^*
c)	30°	50	18.300	0	490.0	3341.0	2541.0	0.193
		100	4.900	3	263.0	2660.0	1270.5	0.207
		300	0.525	6	84.4	1512.0	423.5	0.199
		500	0.185	8	50.0	1175.0	254.1	0.197
		2000	0.0116	13	12.4	--	63.5	0.195
	60°	50	20.600	4	687.0	5493.0	2541.0	0.270
		100	5.400	3	360.0	4059.0	1270.5	0.283
		300	0.580	10	116.0	2244.0	423.5	0.274
		500	0.189	13	63.0	1574.0	254.1	0.248
		2000	0.0117	25	15.6	--	63.5	0.245
	90°	50	26.200	0	1310.0	1310.0	2541.0	0.520
		100	6.500	0	650.0	650.0	1270.5	0.510
		300	0.710	0	213.0	213.0	423.5	0.500
		500	0.255	0	127.5	127.5	254.1	0.500
		2000	0.0160	0	32.0	32.0	63.5	0.500
	120°	50	8.000	0	800.0	5337.0	2541.0	0.310
		100	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--
		500	0.080	0	80.0	1882.0	254.1	0.310
		2000	0.006	0	24.0	--	63.5	0.380

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.1.1.3 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 3: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37)
 unter Eigengewicht (gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung)

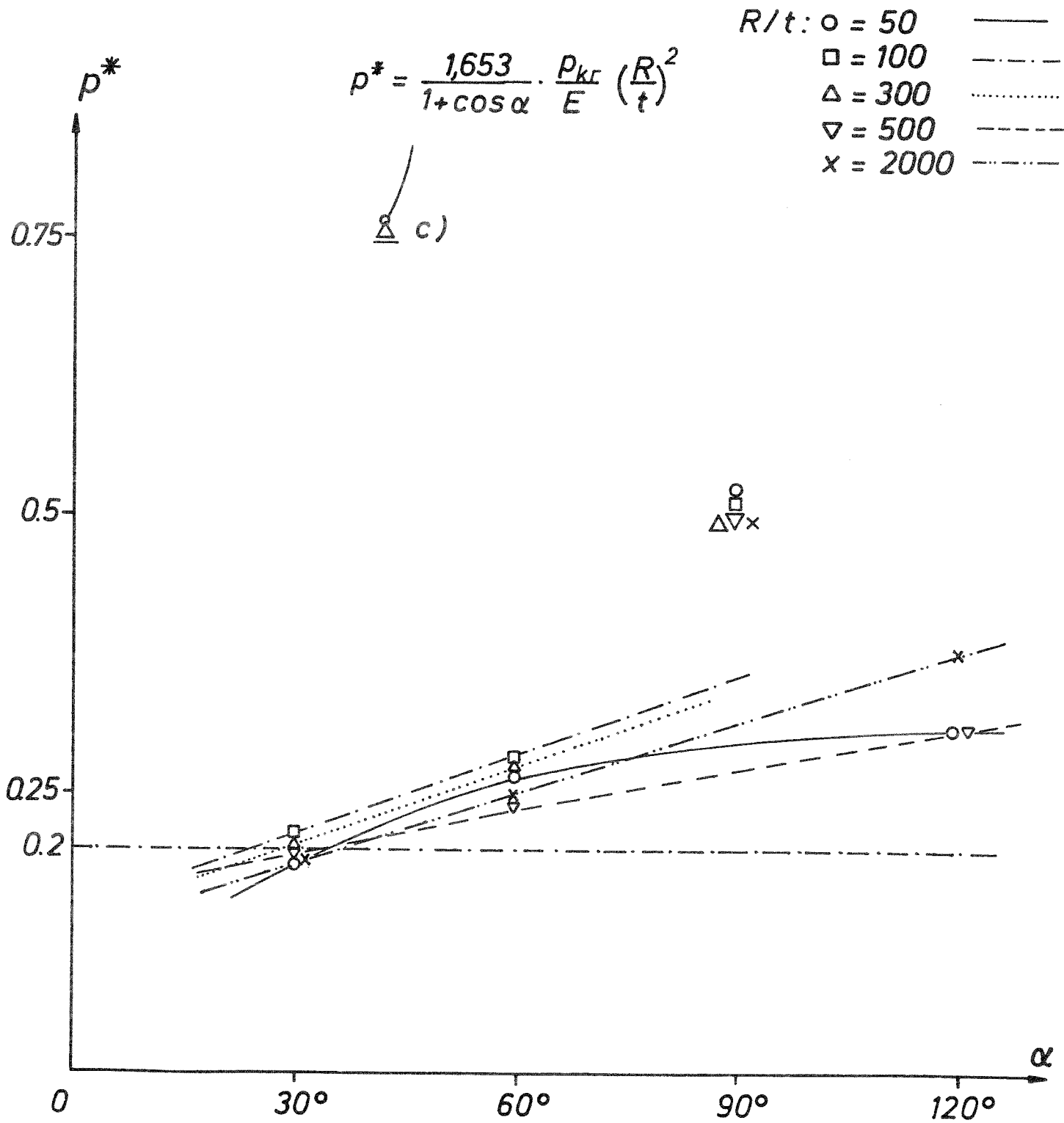


Abb. 10: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), gelenkige, horizontal verschiebbliche Lagerung)

man voraus, daß p^* und c_k direkt vergleichbar sind, so ist der DIN-Entwurf also für $\alpha \leq 30^\circ$ zunehmend nichtkonservativ. Für größere α -Werte ist er dagegen, wie zuvor, konservativ, wobei die größten Abweichungen, die hier etwa 55 bis 90 Prozent betragen, wieder für $\alpha = 120^\circ$ auftreten.

In Abbildung 11 ist die einzige für $R/t = 50$ noch auftretende Eigenform mit negativem Vorzeichen aufgetragen. (Auch das umgekehrte Vorzeichen hat keinerlei mechanische Bedeutung, da, wie bereits erwähnt, bei den Eigenformen sowohl die Maximalamplituden als auch die Vorzeichen beliebig sind). Wie man sieht, ergeben sich dabei aufgrund der horizontalen Verschieblichkeit der Ränder einige deutliche, wenn auch nicht sehr große, Unterschiede zwischen der linken und der rechten Bildhälfte. Bedeutsamer aber ist die Tatsache, daß die charakteristische Wellenlänge erheblich größer ist als die der vergleichbaren Eigenform in Abbildung 8. Ähnliches gilt auch für die beiden in Abbildung 12 dargestellten Eigenformen für die dünneren Schalen mit $R/t = 500$. Auch hier ist – anders als zum Beispiel in Abbildung 9 – entlang des Meridians kein Vorzeichenwechsel mehr zu beobachten.

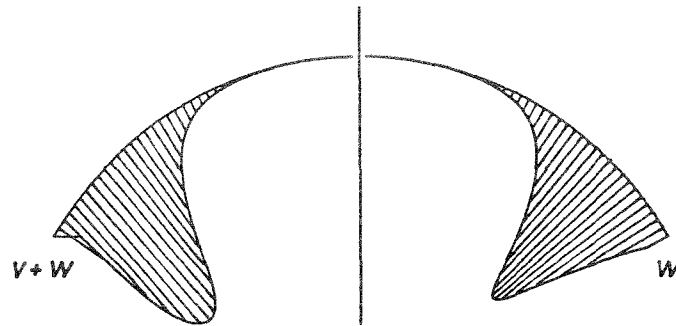
4.1.1.4 Radial verschiebliche 'Membranlagerung'

Setzt man abschließend noch voraus, daß die Schale an den Rändern nicht horizontal, sondern radial verschieblich gelagert ist ('Membranrandbedingung' m) in Abbildung 2), so erhält man die in Tabelle 4 und Abbildung 13 zusammengefaßten Ergebnisse. Wie man sieht, differieren sie insofern erheblich von denen in den vorigen Abschnitten, als nun für keine Parameterkombination mehr Verzweigungs-, sondern nur noch Durchschlagpunkte auftreten ($n = 0$). Außerdem liegen die kritischen Lasten – außer für $\alpha = 90^\circ$, wo, wie bereits erläutert, die Randbedingungen c) und m) übereinstimmen – deutlich über denen für die erheblich 'weniger steife', horizontal verschiebliche Lagerung c). Je nach α -Wert betragen die Unterschiede zwischen 60 und 150 Prozent. Andererseits liegen sie aber auch zwischen 30 und 55 Prozent niedriger als bei den gelenkig, unverschieblich gelagerten Kugelschalen.

Wie Abbildung 13 zeigt, weist auch der dimensionslose Lastparameter p^* eine andere Abhängigkeit vom Winkel α auf als bei den anderen Lagerungsarten. Einmal fällt auf, daß die normierungsbedingten Schwankungen zwischen den jeweils größten und kleinsten p^* -Werten ähnlich groß sind wie bei den früheren Randbedingungen, obwohl der Normierung (4) im wesentlichen die Annahme einer idealen Membranlagerung zugrunde liegt. Sie betragen zwischen etwa 5 und 15 Prozent. Zum anderen ist p^* nun – außer bei den dickeren Schalen mit $R/t = 50$ und $R/t = 100$ – von α annähernd unabhängig. Dies bedeutet allerdings nicht, daß der Öffnungswinkel keinen Einfluß auf die Durchschlaglast einer membrangelagerten Teilkugelschale unter Eigengewicht besitzt, da p^* ja implizit noch von α abhängt (siehe (4)).

Geht man auch hier wieder von einer Analogie zwischen p^* und den c_k -Faktoren des Teils 4 der DIN 18 800 aus, so läßt sich aus Abbildung 13 ein c_k -Wert von 0,4 ableiten. Er ist für alle untersuchten Parameterkombinationen konservativ und weicht zwischen etwa 10 und 50 Prozent von den numerisch ermittelten p^* -Werten ab, wobei die größten Unterschiede wiederum bei $\alpha = 120^\circ$ auftreten.

$\alpha = 30^\circ$: keine Verzweigung ($n = 0$)

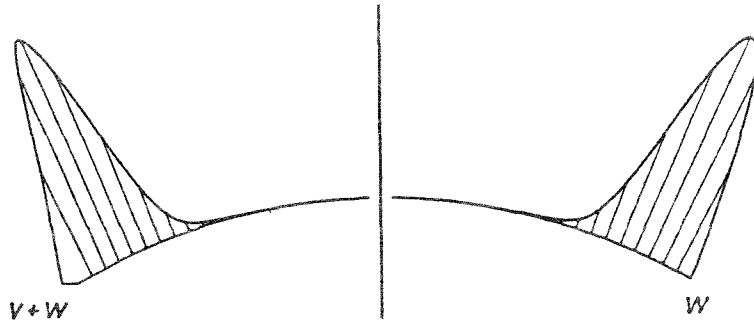


$\alpha = 60^\circ$: $p_{ki}^{el} = 20,6$, $n = 4$

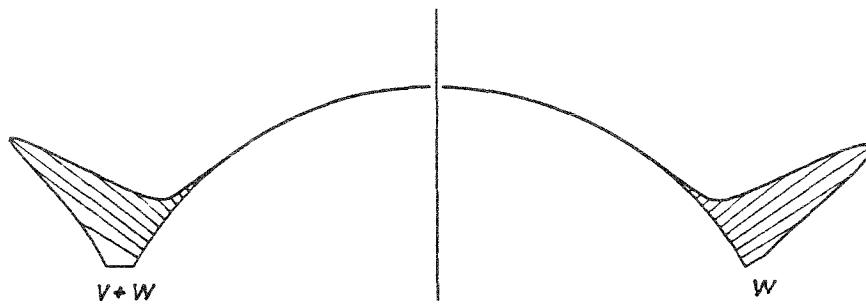
$\alpha = 90^\circ$: keine Verzweigung ($n = 0$)

$\alpha = 120^\circ$: keine Verzweigung ($n = 0$)

Abb. 11: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung, $R/t = 50$)



$$\alpha = 30^\circ: p_{ki}^{el} = 0,185, n = 8$$



$$\alpha = 60^\circ: p_{ki}^{el} = 0,189, n = 13$$

$\alpha = 90^\circ$: keine Verzweigung ($n = 0$)

$\alpha = 120^\circ$: keine Verzweigung ($n = 0$)

Abb. 12: Beul-Eigenformen bei Eigengewichtsbelastung (gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung, $R/t = 500$)

Randbedingung	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	n	$\sigma_{22}^{* 1)}$	$\sigma_z^{1)}$	p^*
m)	30°	50	41.20	0	1104	2541.0	0.43
		100	10.50	0	563	1270.5	0.44
		300	1.24	0	199	423.5	0.47
		500	0.47	0	126	254.1	0.50
	60°	50	33.60	0	1120	2541.0	0.44
		100	8.70	0	582	1270.5	0.46
		300	1.02	0	205	423.5	0.48
		500	0.38	0	127	254.1	0.50
	90°	50	26.20	0	1310	2541.0	0.52
		100	6.50	0	650	1270.5	0.51
		300	0.71	0	213	423.5	0.50
		500	0.255	0	127	254.1	0.50
	120°	50	15.50	0	1550	2541.0	0.61
		100	3.56	0	712	1270.5	0.56
		300	0.392	0	235	423.5	0.55
		500	0.130	0	130	254.1	0.51

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb.2, Abschnitte 3 und 4.1.1.4 sowie Gleichungen (2), (3), (4)

Tab. 4: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (radial verschiebliche 'Membranlagerung')

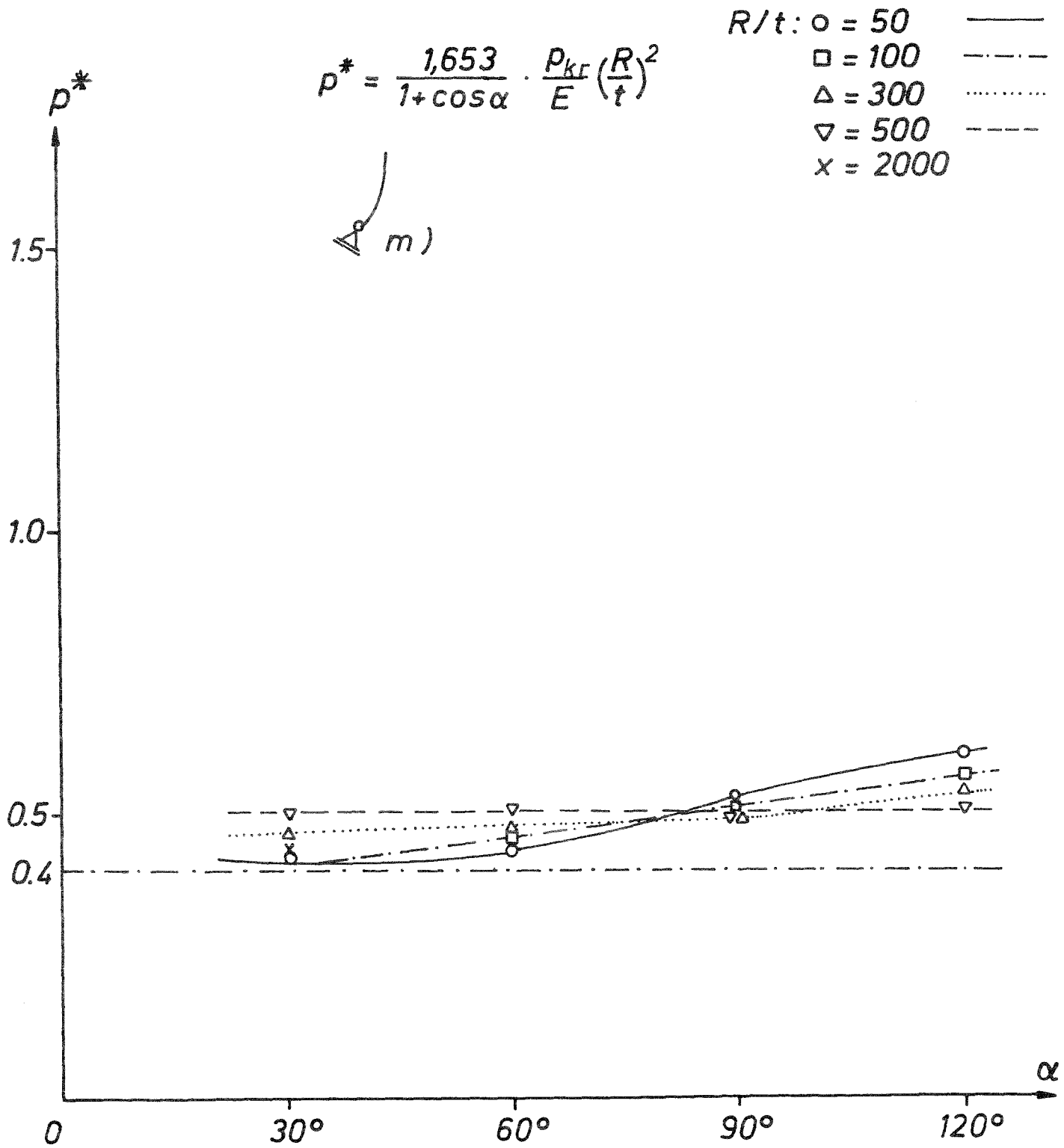


Abb. 13: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), radial verschiebliche 'Membranlagerung')

4.1.2 Elastisch-idealplastisches Verhalten

Nimmt man an, daß sich das Material nicht rein elastisch, sondern elastisch-idealplastisch verhält und daß es die Fließspannung von St 37 ($\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_F/E = 0,001143$) besitzt, so treten für die meisten der betrachteten Parameterkombinationen plastische Dehnungen auf bevor die in den vorigen Abschnitten beschriebenen elastischen kritischen Lasten erreicht sind. Da innerhalb der sich dann ausbreitenden plastischen Zonen die Materialsteifigkeit drastisch absinkt, sind auch die plastischen kritischen Lasten kleiner als die entsprechenden elastischen Werte. Außerdem tritt im plastischen Bereich Versagen durchweg an einem Durchschlags- und nicht an einem Verzweigungspunkt auf.

4.1.2.1 Fest eingespannte Ränder

Betrachtet man die gleichen Parameterkombinationen wie in den vorigen Abschnitten, so erhält man für die an den Rändern fest eingespannte Kugelschale (Randbedingung a) in Abbildung 2) die in Tabelle 5 zusammengestellten kritischen Belastungen p_{kr} . Dabei handelt es sich, wie erwähnt, außer für $R/t = 2000$ um plastische Durchschlagslasten. Lediglich die dünnste der betrachteten Schalen bleibt für alle α -Werte bis zum Erreichen der entsprechenden Verzweigungslasten elastisch (siehe auch Tabelle 1).

Wie man sieht, führt die in den plastischen Bereichen stark reduzierte Materialsteifigkeit dazu, daß die kritischen Lasten in Tabelle 5 zwischen etwa 10 und 95 Prozent unter denen von Tabelle 1 liegen. Plastische Dehnungen haben also, wie zu erwarten, einen erheblichen Einfluß auf die Tragfähigkeit offener Kugelschalen. Um deren Auswirkungen etwas genauer bewerten zu können und um die Einflüsse der Geometrieparameter zu einem gewissen Grad zu eliminieren, wurden die kritischen Lastparameter in Tabelle 5 auf die gleiche Weise normiert wie im elastischen Bereich. Mit Hilfe von (2) und (4) erhält man dann wieder die – nunmehr weitgehend fiktiven – Membranmeridianspannungen σ_{22}^* sowie den dimensionslosen Lastparameter p^* . Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 5 angegeben und die Abhängigkeit von p^* von α und R/t ist in Abbildung 14 dargestellt. Vergleicht man letztere mit der entsprechenden Abbildung 4, so kann man den Plastizierungseinfluß direkt ablesen. Dabei zeigt sich, daß sich plastische Dehnungen bei den jeweils dicksten Schalen mit $R/t = 50$ am stärksten auswirken, und zwar um so mehr, je größer der Winkel α wird. Dies führt dazu, daß der entsprechende Lastparameter p^* im plastischen Bereich nicht mit α anwächst, sondern davon weitgehend unabhängig bleibt, und daß er außerdem nur noch etwa 5 bis 10 Prozent der entsprechenden elastischen Werte beträgt. Ähnliche Ergebnisse, wenn auch keine ganz so ausgeprägte Abminderung der kritischen Lasten, erhält man für die Schalen mit einem R/t -Verhältnis von 100. In diesem Fall liegt p^* 'nur' etwa 80 bis 90 Prozent unter den elastischen Werten, nimmt aber auch mit wachsendem Winkel α ab. Bezüglich der Abhängigkeit von α hat man also im plastischen Bereich genau die umgekehrte Tendenz wie im elastischen. Auch daran zeigt sich, daß im nichtlinearen Bereich weder Einzelergebnisse noch Ergebnistrends ohne weiteres extrapoliert werden können.

Noch ausgeprägter sind diese Unterschiede bei $R/t = 300$ und $R/t = 500$. In beiden Fällen wirken sich Plastizierungen auf das Tragverhalten der beiden flacheren Kugelschalen mit $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ sehr viel weniger deutlich aus als bei Kugelschalen

RB	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	$\sigma_{22}^{* 1)}$	p^*	$\sigma_{ki}^{1)}$	$\kappa_{s,2}$	$\sigma_u^{1)}$	σ_{22}^*/σ_u
a)	30°	50	9.55	256.0	0.10	2033.0	0.87	209.0	1.22
		100	4.90	263.0	0.21	1016.0	0.73	175.0	1.50
		300	1.50	241.0	0.57	339.0	0.37	87.8	2.74
		500	0.86	230.0	0.91	203.0	0.20	49.2	4.67
		2000	0.0623	66.8	1.05	50.8	--	--	--
	60°	50	7.74	258.0	0.10	2033.0	0.87	209.0	1.23
		100	3.69	246.0	0.19	1016.0	0.73	175.0	1.41
		300	1.13	226.0	0.53	339.0	0.37	87.8	2.57
		500	0.59	197.0	0.77	203.0	0.20	49.2	4.00
		2000	0.0525	70.0	1.10	50.8	--	--	--
	90°	50	3.85	192.0	0.07	2033.0	0.87	209.0	0.92
		100	1.97	197.0	0.16	1016.0	0.73	175.0	1.13
		300	0.50	150.0	0.35	339.0	0.37	87.8	1.71
		500	0.269	134.0	0.52	203.0	0.20	49.2	2.72
		2000	0.0365	73.0	1.15	50.8	--	--	--
	120°	50	2.72	272.0	0.10	2033.0	0.87	209.0	1.30
		100	--	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--	--
		500	0.1530	130.0	0.51	203.0	0.20	49.2	2.64
		2000	0.0195	78.0	1.23	50.8	--	--	--

1) Dimension: N/mm²
 Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.1.2.1 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 5: Elastisch-plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (feste Einspannung)

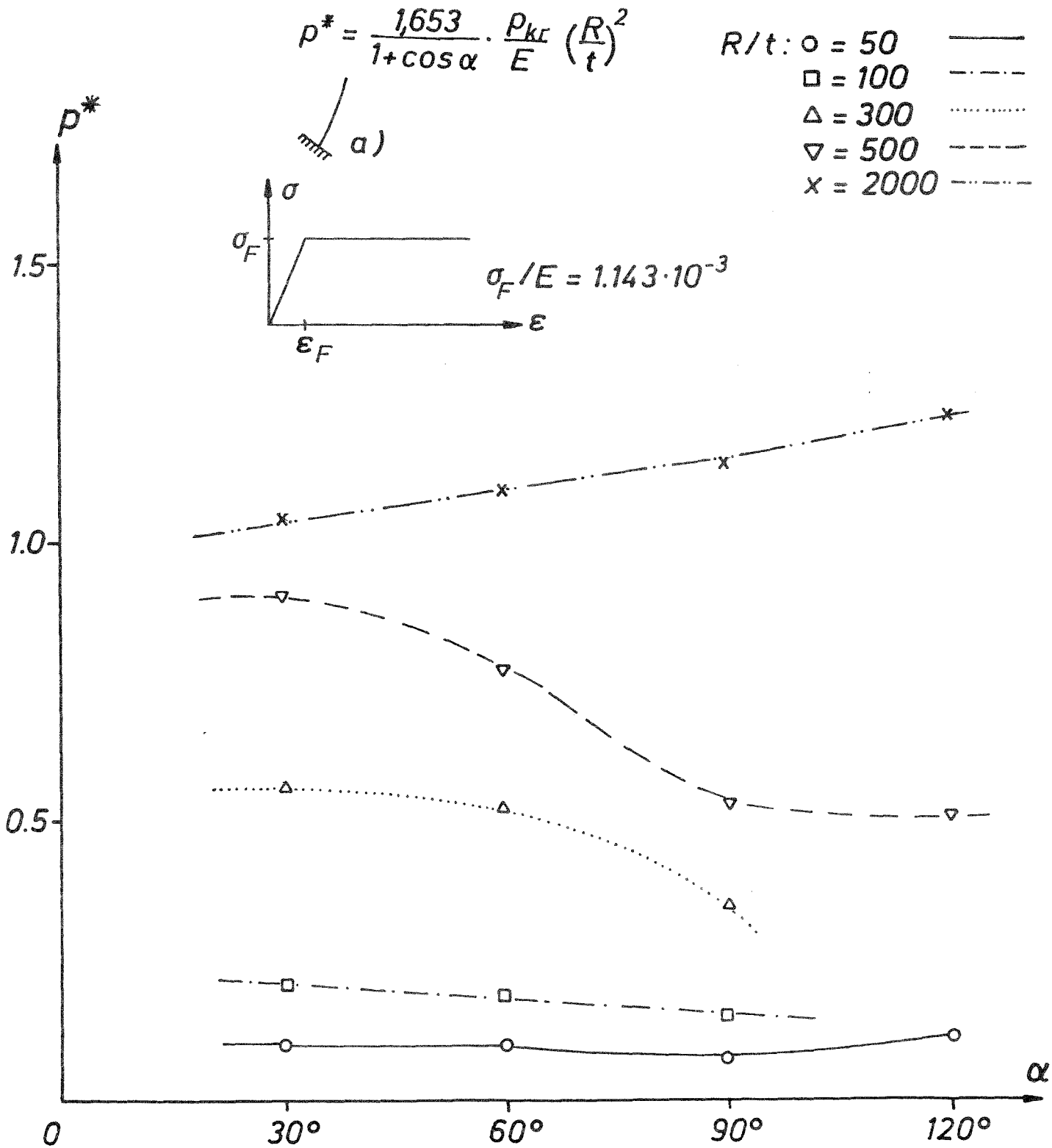


Abb. 14: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastisch-plastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), feste Einspannung)

mit größeren α -Werten. Für die dünnste Schale mit $R/t = 2000$ erhält man schließlich wieder die gleiche, mit größer werdendem α ansteigende Gerade wie in Abbildung 4. Inwiefern es möglicherweise gelingt, die stark von R/t abhängigen Unterschiede zwischen den einzelnen Kurven in Abbildung 14 durch eine besser an das plastische Materialverhalten angepaßte Normierung zu beseitigen, wurde im Rahmen dieses Vorhabens nicht näher untersucht. Umfangreiche Erfahrungen, die im Zusammenhang mit Untersuchungen zum nichtlinearen Tragverhalten von Behälterböden im elastisch-plastischen und Kriechbereich gewonnen wurden (siehe [2,3,7-10]), deuten aber darauf hin, daß es möglich sein wird, diese stark zu reduzieren. In jedem Fall lassen sich aber aus den Abbildungen 4 und 14 α -abhängige 'plastische Abminderungsfaktoren' ermitteln, die den traglastmindernden Einfluß von Plastizierungen auf die Tragfähigkeit von perfekten, fest eingespannten Kugelschalen wiedergeben. Für die Bestimmung der kritischen Lasten wäre dies allerdings im vorliegenden Fall ein Umweg, da sich diese ja direkt aus Abbildung 14 entnehmen lassen.

Anzumerken ist auch noch einmal, daß die untersuchten Kugelschalen im plastischen Bereich an einem Durchschlagpunkt versagen und daß die angegebenen kritischen Lastparameter p_{kr} den Maximallasten p_{max} in Abbildung 1b entsprechen. Dagegen sind die dort ebenfalls angegebenen Grenzlasten p_{u1} und p_{u2} hier nicht von Belang, da die Gesamtverschiebungen so gering bleiben, daß bei Erreichen von p_{max} weder sie noch die Gesamtsektantensteifigkeit die der Definition von p_{u1} und p_{u2} zugrunde gelegten Grenzwerte erreichen.

Da – wie bereits erwähnt – das Bemessungskonzept des Teils 4 der DIN 18 800 nicht darauf beruht, die Sicherheit einer Kugelschale durch einen Vergleich von kritischen Belastungen nachzuweisen, sondern vielmehr ein Nachweis auf der Ebene von Nennspannungen geführt wird, wurde hier auch noch versucht, die numerisch ermittelten kritischen Lasten der geometrisch perfekten Schale den sogenannten 'realen Beulspannungen' σ_u des DIN-Entwurfs gegenüberzustellen, um so einen gewissen Überblick darüber zu gewinnen, inwiefern die Vorgaben der DIN mit den hier vorgestellten detaillierten numerischen Ergebnissen in Einklang stehen.

Wie in Teil 4 der DIN 18 800 angegeben, ergibt sich die 'reale Beulspannung' σ_u aus der Fließspannung σ_F des Materials und aus einem Abminderungsfaktor $\kappa_{s,2}$, der seinerseits von σ_F , der 'Zoelly-Spannung' σ_z , den oben diskutierten c_k -Faktoren und implizit auch noch von den Anfangs-Imperfektionen abhängt. Legt man den im DIN-Entwurf für feste Einspannung vorgesehenen c_k -Wert von 0,8 zugrunde, so ergeben sich daraus sowie aus σ_z und σ_F die in Tabelle 5 angegebenen 'idealen Beulspannungen' σ_{ki} , die Abminderungsfaktoren $\kappa_{s,2}$ und die 'realen Beulspannungen' σ_u . Außerdem sind in der letzten Spalte von Tabelle 5 die Quotienten aus σ_{22}^* – also den aus der tatsächlichen kritischen Belastung p_{kr} ermittelten (fiktiven) Meridianmembranspannungen – und den jeweiligen σ_u -Werten angegeben. Die mechanische Bedeutung dieses Quotienten ist zwar nicht eindeutig, da genau genommen sowohl σ_{22}^* als auch σ_u fiktive und keine realen Spannungswerte darstellen. Dabei hat allerdings die Spannung σ_{22}^* gegenüber σ_u den Vorzug, daß sie durch eine einfache Transformation aus einer kritischen Belastung gewonnen wird. Geht man dennoch davon aus, daß σ_{22}^* und σ_u gleichwertige Maße für die maximale lokale Beanspruchung der Kugelschale im jeweiligen elastisch-plastischen Durchschlagpunkt darstellen, so sagt der Quotient σ_{22}^*/σ_u etwas darüber aus, inwiefern der Einfluß der Plastizierung im DIN-Entwurf

zutreffend berücksichtigt wurde und wieviel Spielraum für die Imperfektionen enthalten ist.

4.1.2.2 Gelenkige, unverschieblich gelagerte Ränder

Für gelenkig, unverschieblich gelagerte Schalen (Randbedingung b) in Abbildung 2) erhält man die in Tabelle 6 zusammengefaßten und in Abbildung 15 dargestellten numerischen Ergebnisse. Wie im elastischen Bereich unterscheiden sie sich nicht grundsätzlich von denen für fest eingespannte Ränder, und auch die durch die 'weniger steife' Lagerung bedingte Abnahme der kritischen Lasten p_{kr} hat ungefähr die gleiche Größenordnung. Sie beträgt im Durchschnitt etwa 10 Prozent, liegt aber in Einzelfällen auch höher und erreicht für $R/t = 50$ und $\alpha = 120^\circ$ sogar etwa 48 Prozent.

Was den Einfluß der plastischen Dehnungen auf die Tragfähigkeit betrifft, so liegen bei gelenkiger Lagerung die plastischen kritischen Lasten etwa ähnlich weit unterhalb der entsprechenden elastischen Werte wie dies für die feste Einspannung der Fall ist (siehe Tabelle 2 und Abbildung 7). Die jeweiligen 'plastischen Abminderungen' betragen hier zwischen etwa 10 und 93 Prozent. Daß das elastisch-plastische Tragverhalten von eingespannten und gelenkig gelagerten Kugelschalen große Ähnlichkeiten aufweist, zeigt auch ein Vergleich der Abbildungen 14 und 15 sehr deutlich. Wie man sieht, ergeben sich auch hier die größten Abminderungen wieder für die dickeren Schalen. Außerdem haben die zu den verschiedenen R/t -Werten gehörigen Kurven einen annähernd gleichen Verlauf, wobei – wie bereits erwähnt – die Amplituden in Abbildung 15 um durchschnittlich 10 Prozent niedriger liegen. Die infolge der Plastizierung stattfindenden Spannungsumlagerungen führen also auch hier dazu, daß die Art, wie der dimensionslose Lastparameter p^* von α abhängt, gegenüber dem elastischen Bereich grundlegend verändert wird (vergleiche auch Abbildungen 7 und 15).

Im einzelnen beträgt der Unterschied zwischen den jeweiligen elastischen und elastisch-plastischen p^* -Werten für $R/t = 50$ etwa 85 bis 95 Prozent, für $R/t = 100$ etwa 75 bis 90 Prozent, für $R/t = 300$ zwischen 35 und 70 Prozent und für $R/t = 500$ zwischen 10 und 55 Prozent. Für die dünnste Schale mit $R/t = 2000$ erhält man, wie zuvor, die entsprechende elastische Kurve (siehe auch Abbildung 7).

4.1.2.3 Gelenkige, horizontal verschieblich gelagerte Ränder

Auch im plastischen Bereich haben gelenkig, horizontal verschieblich gelagerte Teilkugelschalen ein grundsätzlich anderes Tragverhalten als solche mit gelenkiger aber unverschieblicher Lagerung. Dies ist, wie oben bereits erläutert, vor allem darauf zurückzuführen, daß infolge der horizontalen Verschieblichkeit die Umfangsspannungen – speziell am Rand – erheblich größere Werte annehmen können als die Meridianspannungen. Davon wird naturgemäß auch der Grad und das Ausmaß der Plastizierungen erheblich beeinflusst, was letztlich dazu führt, daß die kritischen Lasten deutlich niedriger sind als im Fall der unverschieblichen Lagerung b) (vergleiche Tabellen 6 und 7). So betragen zum Beispiel die Abminderungen für $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 60^\circ$ zwischen 80 und 93 Prozent und für $\alpha = 120^\circ$ zwischen etwa 6 und 93 Prozent. Vergleicht man diese mit den entsprechenden, durch die 'weichere' Randbedingung hervorgerufenen Traglastreduktionen im elastischen Bereich, so wird deutlich, daß sich

RB	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	$\sigma_{22}^{* 1)}$	p^*	$\sigma_{ki}^{1)}$	$\kappa_{s,2}$	$\sigma_u^{1)}$	σ_{22}^*/σ_u
b)	30°	50	9.66	259.0	0.10	1779	0.85	204.0	1.27
		100	4.73	253.0	0.20	889	0.69	166.0	1.52
		300	1.42	229.0	0.54	296	0.32	76.8	2.98
		500	0.75	201.0	0.79	178	0.17	41.0	4.90
		2000	0.0572	61.3	0.97	--	--	--	--
	60°	50	7.50	250.0	0.098	1779	0.85	204.0	1.23
		100	3.40	227.0	0.178	889	0.69	166.0	1.37
		300	0.97	194.0	0.458	296	0.32	76.8	2.53
		500	0.50	167.0	0.657	178	0.17	41.0	4.07
		2000	0.05	66.7	1.050	--	--	--	--
	90°	50	3.61	180.0	0.071	1779	0.85	204.0	0.88
		100	1.68	168.0	0.132	889	0.69	166.0	1.01
		300	0.46	138.0	0.326	296	0.32	76.8	1.80
		500	0.23	115.0	0.453	178	0.17	41.0	2.80
		2000	0.0334	66.7	1.050	--	--	--	--
	120°	50	1.70	170.0	0.067	1779	0.85	204.0	0.83
		100	--	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--	--
		500	0.113	113.0	0.445	178	0.17	41.0	2.76
		2000	0.0182	72.7	1.140	--	--	--	--

1) Dimension: N/mm²
 Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3, 4.1.2.1 und 4.1.2.2 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 6: Elastisch-plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (gelenkige, unverschiebliche Lagerung)

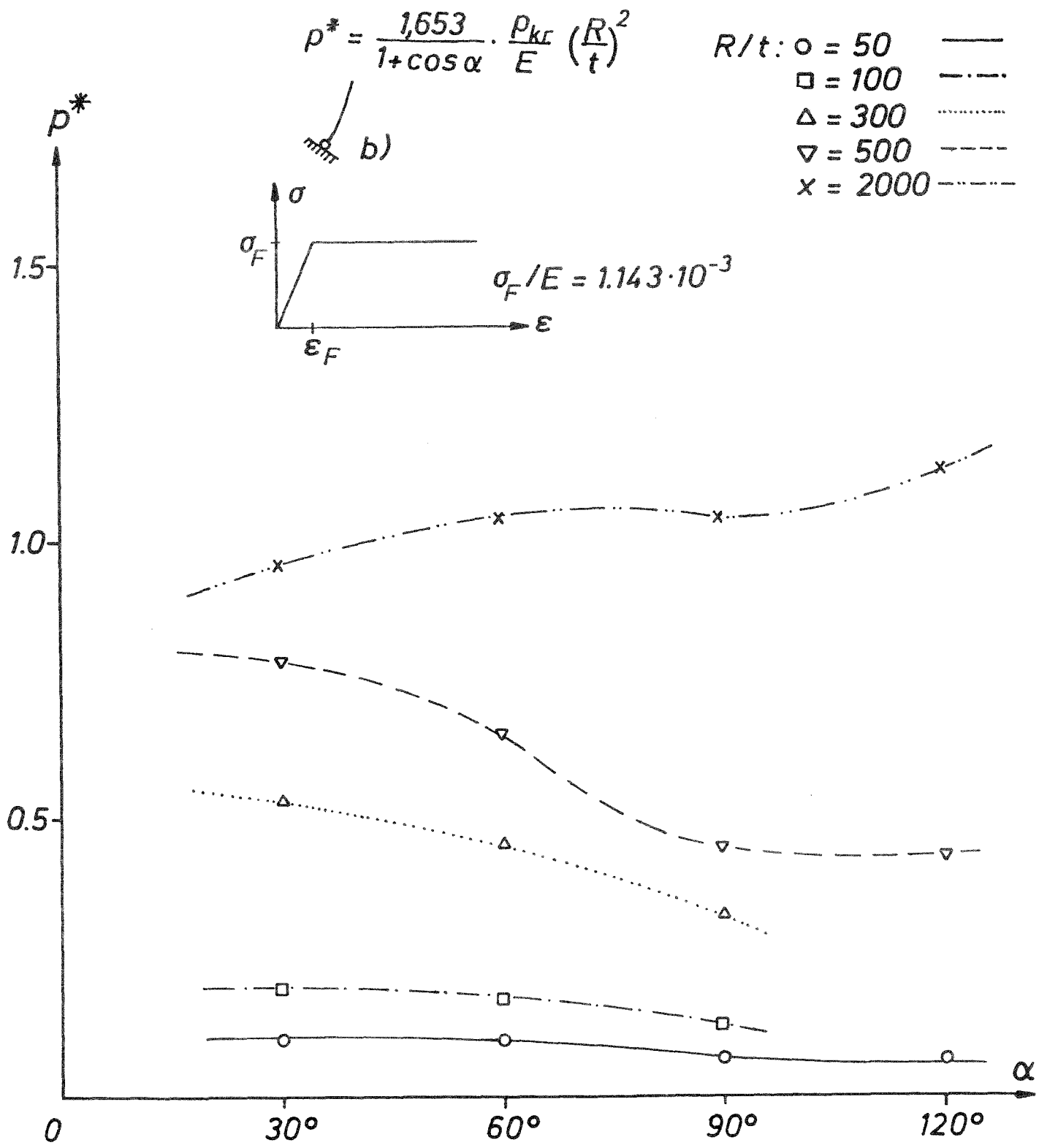


Abb. 15: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastisch-plastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), gelenkige, unverschiebliche Lagerung)

die horizontale Verschieblichkeit im plastischen Bereich erheblich negativer auf die Tragfähigkeit von Teilkugelschalen auswirkt als dies bei rein elastischem Materialverhalten der Fall ist, wobei davon die dickeren Schalen wieder wesentlich stärker betroffen sind als die dünnen.

Ein Vergleich der plastischen kritischen Lasten der horizontal verschieblich gelagerten Teilkugelschalen in Tabelle 7 mit den entsprechenden elastischen Werten in Tabelle 3 zeigt, daß die ersteren, je nach α - und R/t -Wert, zwischen etwa 10 und annähernd 99 Prozent unterhalb der letzteren liegen. Auch diese Unterschiede sind erheblich größer als bei den entsprechenden fest eingespannten und gelenkig aber unverschieblich gelagerten Schalen.

Die Abhängigkeit des dimensionslosen Lastparameters p^* vom Winkel α und dem R/t -Verhältnis ist in Abbildung 16 dargestellt. Sie zeigt einmal, daß auch hier, wie im elastischen Bereich, die Halbkugel eine Sonderstellung einnimmt, da für $\alpha = 90^\circ$ die horizontal verschiebliche Lagerung mit der wesentlich 'steiferen' 'Membranlagerung' m) übereinstimmt. Man kann deshalb auch im plastischen Bereich den Winkel $\alpha = 90^\circ$ als isolierten Sonderfall betrachten. Für die anderen Winkel ergeben sich dann p^* -Werte, die für $R/t = 50$ zwischen 50 und 93 Prozent, für $R/t = 100$ zwischen 85 und 90 Prozent, für $R/t = 300$ zwischen 75 und 85 Prozent, für $R/t = 500$ zwischen 65 und 85 Prozent und schließlich für $R/t = 2000$ zwischen 35 und 75 Prozent unterhalb der entsprechenden elastischen Ergebnisse liegen. Man sieht auch daran sehr deutlich, daß sich bei horizontal verschieblicher Lagerung die abmindernden Einflüsse von Plastizierungen wesentlich stärker auswirken als dies bei den anderen Randbedingungen der Fall ist und daß davon neben den dickeren auch die dünnste Schale mit $R/t = 2000$ sehr stark betroffen ist.

Deutlich werden die großen qualitativen und quantitativen Unterschiede zwischen dem elastischen und dem elastisch-plastischen Tragverhalten auch aus einem Vergleich der p^* -Verläufe in den Abbildungen 10 und 16. Während der dimensionslose Lastparameter p^* in Abbildung 10 ungefähr linear mit α anwächst, ist er in Abbildung 16 – speziell für die dickeren Schalen – von α weitgehend unabhängig. Andererseits macht sich der Einfluß des R/t -Verhältnisses stärker bemerkbar, und zwar interessanterweise gerade bei der Halbkugel ($\alpha = 90^\circ$), bei der im elastischen Bereich die dimensionslosen Lastparameter p^* für alle R/t -Werte praktisch identisch sind. Sehr augenfällig ist auch, wie stark die Kurvenverläufe in Abbildung 16 von den entsprechenden 'plastischen' Kurven für die feste Einspannung und die gelenkige, unverschiebliche Lagerung abweichen (siehe Abbildungen 14 und 15).

Die beträchtlichen Auswirkungen der horizontalen Verschieblichkeit auf das Tragverhalten erkennt man auch aus einem Vergleich der Meridianmembranspannungen σ_{22}^* mit den 'realen Beulspannungen' σ_u des Teils 4 der DIN 18 800 (siehe Tabelle 7). Anders als bei der festen Einspannung und der gelenkig unverschieblichen Lagerung liegt nun der Quotient σ_{22}^*/σ_u – sieht man wieder von der Halbkugel ab – für die dickeren Schalen deutlich unterhalb von Eins, während er bei den dünneren, wie schon zuvor, zum Teil erheblich darüber liegt. Im Sonderfall $\alpha = 90^\circ$ erreicht er für $R/t = 500$ sogar den Wert 26,3. Diese Schwankungen deuten darauf hin, daß bei dünnen, horizontal verschieblichen Teilkugelschalen die mit Hilfe des Abminderungsfaktors $\kappa_{s,2}$ näherungsweise bestimmte Tragfähigkeit zum Teil beträchtlich unterschätzt, bei dickeren dagegen überschätzt werden kann.

RB	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	$\sigma_{22}^{* 1)}$	p^*	$\sigma_{ki}^{1)}$	$K_{s,2}$	$\sigma_u^{1)}$	σ_{22}^*/σ_u
c)	30°		1.910	51.0	0.02	508.0	0.51	123.0	0.41
		100	0.670	36.0	0.03	254.0	0.27	64.8	0.56
		300	0.122	19.6	0.05	84.7	0.05	12.0	1.63
		500	0.064	17.1	0.07	50.8	0.018	4.38	3.90
		2000	0.0076	8.14	0.128	--	--	--	--
	60°	50	1.310	44.0	0.017	508.0	0.51	123.0	0.36
		100	0.480	32.0	0.025	254.0	0.27	64.8	0.49
		300	0.086	17.2	0.041	84.7	0.50	12.0	1.43
		500	0.038	12.3	0.048	50.8	0.018	4.38	2.81
		2000	0.0041	5.49	0.086	--	--	--	--
	90°	50	2.97	148.0	0.058	508.0	0.51	123.0	1.20
		100	1.43	143.0	0.113	254.0	0.27	64.8	2.21
		300	0.46	138.0	0.326	84.7	0.50	12.0	11.50
		500	0.23	115.0	0.453	50.8	0.018	4.38	26.30
		2000	0.016	32.0	0.500	--	--	--	--
	120°	50	0.600	60.0	0.024	508.0	0.51	123.0	0.49
		100	--	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--	--
		500	0.014	14.0	0.055	50.8	0.018	4.38	3.20
		2000	0.0014	5.62	0.089	--	--	--	--

1) Dimension: N/mm²
 Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3, 4.1.2.1 und 4.1.2.3 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 7: Elastisch-plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung)

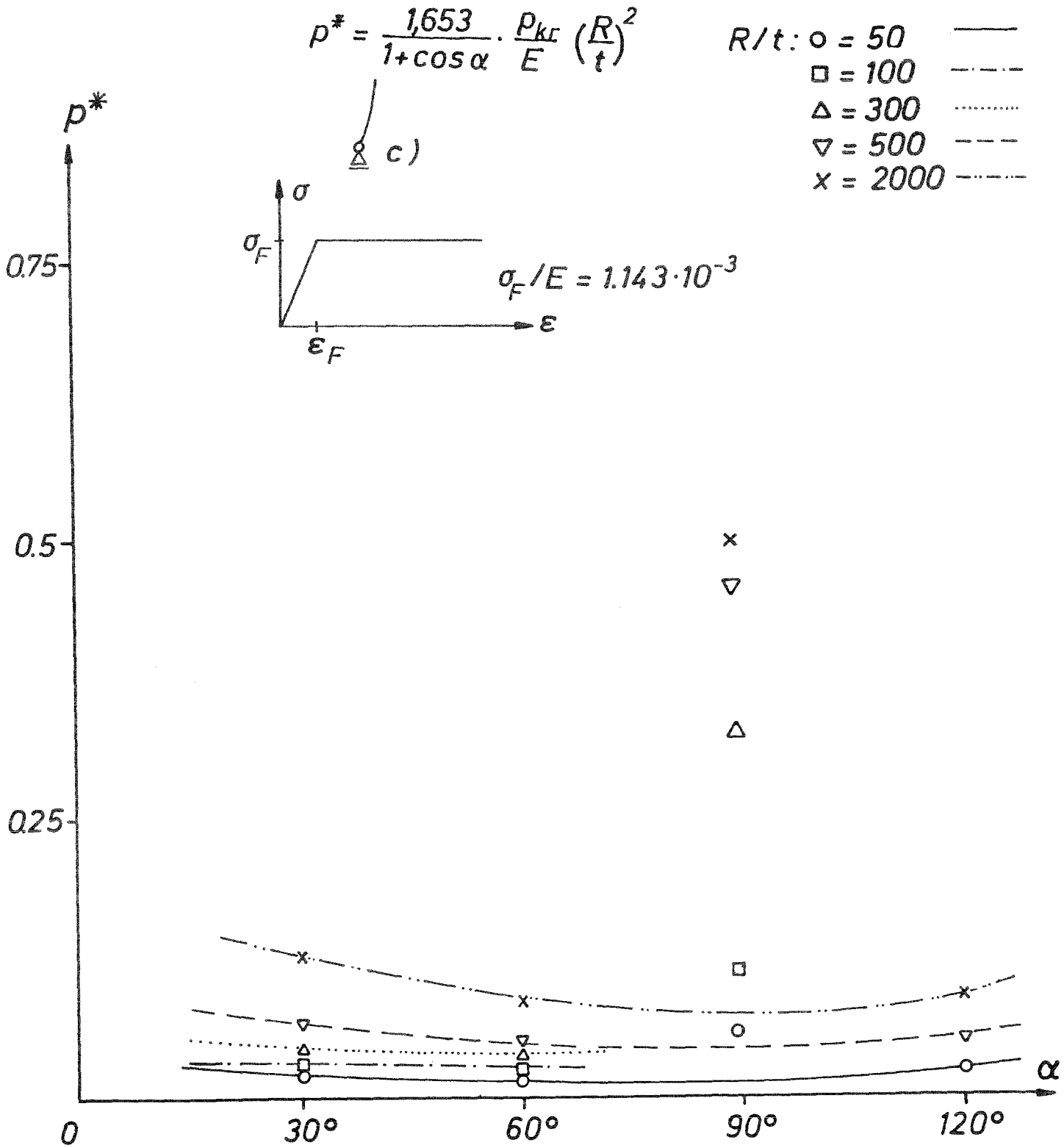


Abb. 16: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastisch-plastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), gelenkige, horizontal verschiebbliche Lagerung)

4.1.2.4 Radial verschiebliche 'Membranlagerung'

Abschließend wurden noch für verschiedene α - und R/t -Werte die plastischen Beul-lasten von radial verschieblich gelagerten Teilkugelschalen (Randbedingung m) in Ab-bildung 2) ermittelt und in Tabelle 8 und Abbildung 17 zusammengefaßt. Wie man aus einem Vergleich der Tabellen 7 und 8 sieht, sind für die Halbkugel die jeweiligen Werte für p_{kr} und σ_{22}^* identisch. Dagegen differieren die zugehörigen Werte für σ_{ki} , $\kappa_{s,2}$, σ_u , etc. zum Teil beträchtlich, da Teil 4 der DIN 18 800 für die 'steifere' 'Membranlagerung' m) einen höheren c_k -Wert ($c_k = 0,5$ anstatt $c_k = 0,2$) vorsieht. Außerdem zeigt sich (siehe auch Abbildungen 16 und 17), daß die p^* -Werte für die radial verschiebliche Lagerung beträchtlich höher liegen als für die horizontal ver-schiebliche und daß sie – besonders für größere α -Werte – nur verhältnismäßig wenig von den plastischen p^* -Werten für gelenkig, unverschieblich gelagerte Teilkugel-schalen abweichen. Im elastischen Bereich sind diese Unterschiede dagegen erheblich größer (vergleiche Tabellen 2, 3 und 4 sowie Abbildungen 7, 10 und 13).

Auffällig ist auch, daß nun – in sehr viel stärkerem Maß als bei den radial verschiebli-chen elastischen Schalen (siehe Abbildung 13) sowie den elastisch-plastischen, hori-zontal verschieblich gelagerten Schalen (siehe Abbildung 16) – der dimensionslose Lastparameter p^* kaum noch von α abhängt und daß stattdessen der Einfluß des R/t -Verhältnisses deutlich ausgeprägter ist. Im einzelnen beträgt der Unterschied zwischen den jeweiligen elastischen und den elastisch-plastischen p^* -Werten für $R/t = 50$ etwa 75 bis 90 Prozent, für $R/t = 100$ etwa 75 bis 80 Prozent, für $R/t = 300$ zwischen 35 und 50 Prozent und für $R/t = 500$ zwischen etwa 5 und 10 Prozent. Auch hier fallen also die Abminderungen für die dickeren Schalen am größten aus.

4.2 Beulverhalten von Vollkugelschalen unter Eigengewicht

Um die obigen Ergebnisse für Teilkugelschalen zu ergänzen, wurde auch die durch Eigengewicht belastete Vollkugel näher untersucht. Bezüglich der Randbedingungen wurde einmal bei $\alpha_0 = 90^\circ$ (Randbedingung m1) in Abbildung 3) und einmal bei $\alpha_0 = 120^\circ$ (Randbedingung m2)) ein radial verschiebliches 'Membranlager' ange-nommen.

Setzt man elastisches Materialverhalten voraus und betrachtet zunächst die Lagerungs-bedingung m1), so erhält man die im oberen Teil der Tabelle 9 zusammengestellten Ergebnisse. Sie zeigen, daß die jeweiligen kritischen Lasten p_{kr} ziemlich genau zwi-schen denen der festeingespannten und denen der gelenkig gelagerten Halbkugel liegen (vergleiche die Tabellen 1, 2 und 9). Das gleiche gilt auch für die nichtaxialsym-metrischen Verzweigungsformen und die jeweilige Zahl der Umfangsbeulwellen. Als Beispiel hierfür ist in Abbildung 18 die bei einer Vollkugel mit $R/t = 500$ auftretende Eigenform dargestellt. Wie man sieht, hat sie eine ganz ähnliche Meridianverteilung wie die Verzweigungsform der gelenkig gelagerten Schale (siehe Abbildung 9), während die Ähnlichkeit mit der Eigenform der festeingespannten Halbkugel (siehe Abbildung 6) weniger ausgeprägt ist.

Andererseits bestehen – anders als man vielleicht hätte vermuten können – keinerlei Ähnlichkeiten zwischen den Ergebnissen für die Vollkugel und denen für die ebenfalls membrangelagerte Halbkugel, und zwar weder bezüglich der kritischen Lasten, noch hinsichtlich der Versagensformen (vergleiche Tabellen 4 und 9). Einmal beult die membrangelagerte Vollkugel – außer für $R/t = 2000$ – an einem Verzweigungspunkt,

RB	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	$\sigma_{22}^{*1)}$	p^*	$\sigma_{ki}^{1)}$	$\kappa_{s,2}$	$\sigma_u^{1)}$	σ_{22}^*/σ_u
m)	30°	50	9.62	258	0.10	1016	0.73	175.0	1.47
		100	--	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--	--
		500	0.47	126	0.50	102	0.07	16.8	7.50
	60°	50	6.58	219	0.086	1016	0.73	175.0	1.25
		100	--	--	--	--	--	--	--
		300	--	--	--	--	--	--	--
		500	0.38	127	0.500	102	0.07	16.8	7.56
	90°	50	2.97	148	0.058	1016	0.73	175.0	0.85
		100	1.43	143	0.113	508	0.51	123.0	1.16
		300	0.46	138	0.326	169	0.16	38.4	3.59
		500	0.23	115	0.453	102	0.07	16.8	6.85
	120°	50	1.420	142	0.056	1016	0.73	175.0	0.81
		100	0.650	130	0.102	508	0.51	123.0	1.06
		300	0.196	118	0.279	169	0.16	38.4	3.07
		500	0.123	123	0.484	102	0.07	16.8	7.32

1) Dimension: N/mm^2

Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3, 4.1.2.1 und 4.1.2.4 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 8: Elastisch-plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (radial verschiebliche 'Membranlagerung')

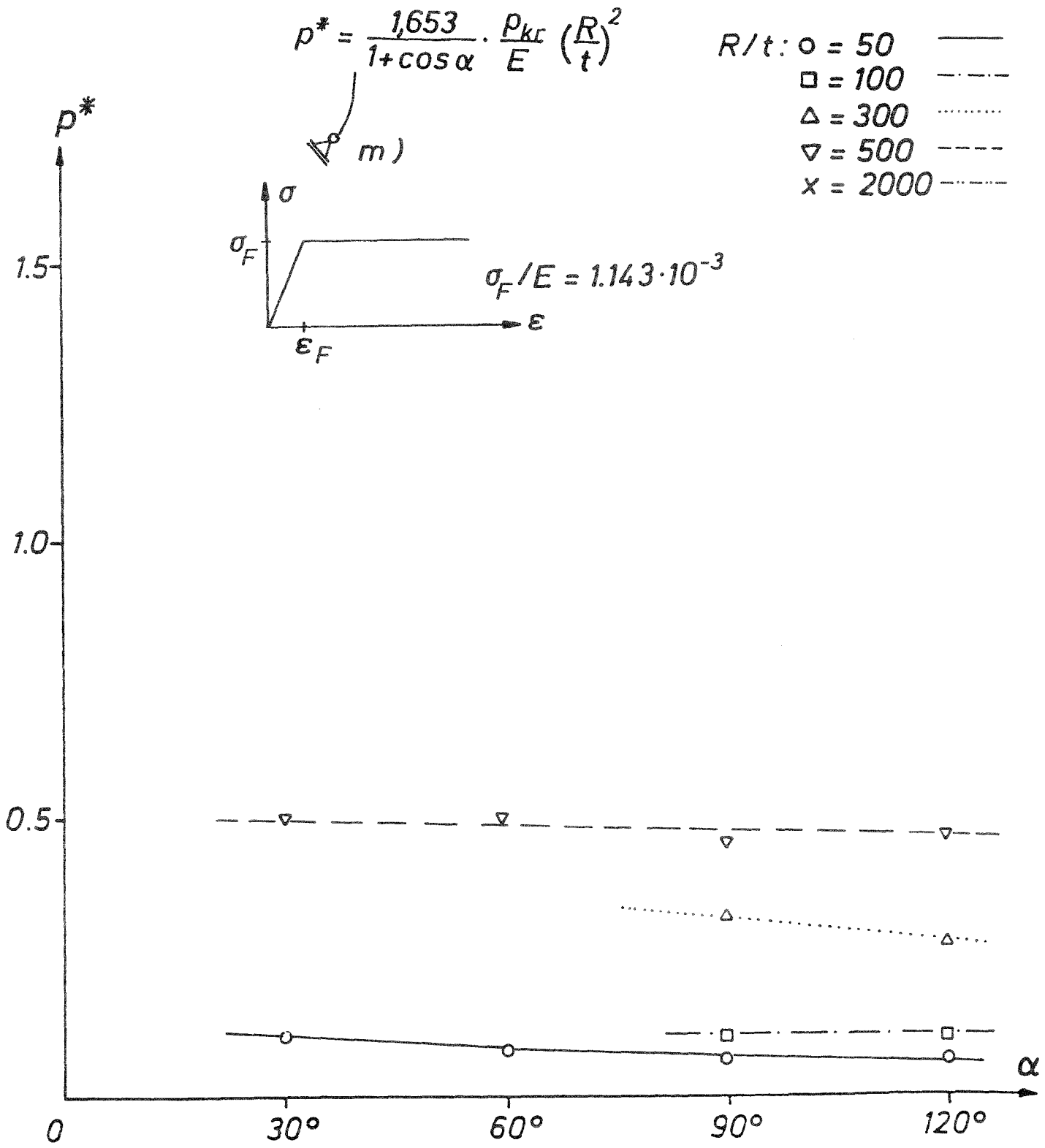


Abb. 17: Abhängigkeit von p^* von α und R/t (Elastisch-plastische offene Kugelschalen aus Stahl (St 37), radial verschiebliche 'Membranlagerung')

Rand- bedingung	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	n	$\sigma_{22}^{* 1)}$	$\sigma_z^{1)}$	p^*
m1)	90°	50	59.00	5	2950.0	2541.0	1.16
		100	15.00	8	1500.0	1270.5	1.18
		300	1.61	12	483.0	423.5	1.14
		500	0.59	16	295.0	254.1	1.16
		2000	0.0362	0	72.4	63.5	1.14
m2)	120°	50	33.30	0	3330.0	2541.0	1.31
		500	0.335	13	335.0	254.1	1.32
		2000	0.0191	0	76.3	63.5	1.20

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 3, Abschnitte 3 und 4.2 sowie Gleichungen (2), (3), (4)

Tab. 9: Elastische kritische Lasten von Vollkugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (radial verschiebliche 'Membranlagerung')

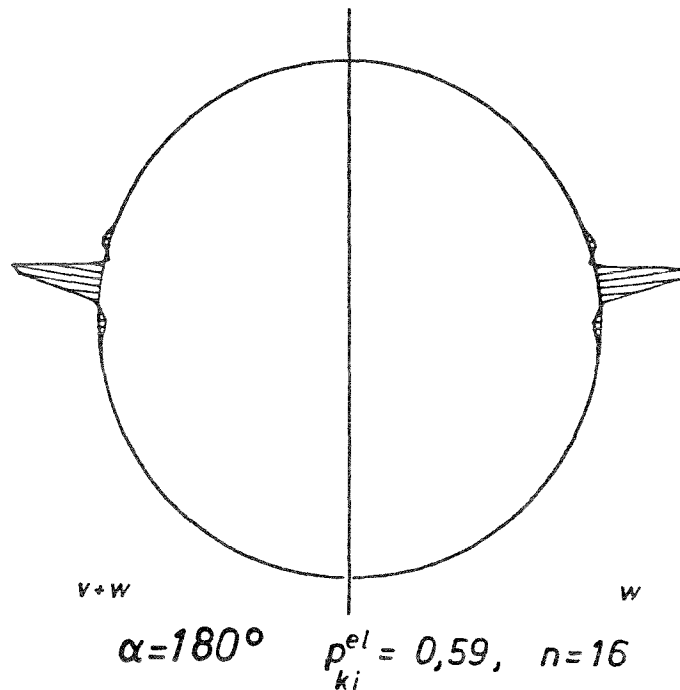


Abb. 18: Beul-Eigenform einer Vollkugel aus Stahl (St 37) bei Eigengewichtsbelastung (radial verschiebliche 'Membranlagerung' m1), R/t = 500)

wobei die Zahl der Umgangsbeulwellen teilweise recht hoch ist (bis $n = 16$), während die gleichartig gelagerte Halbkugel immer an einem Durchschlagpunkt versagt. Diese Unterschiede sind in erster Linie darauf zurückzuführen, daß der unterhalb des Auflagers gelegene, 'aufgehängte' Teil der Vollkugel für das Gesamttragverhalten eine wesentliche Rolle spielt, da in ihm beträchtliche Meridianzugkräfte auftreten. Diese wiederum führen in Verbindung mit den geometrisch nichtlinearen Einflüssen dazu, daß sowohl die Systemsteifigkeit als auch die Tragfähigkeit ansteigt.

Für die Membranlagerung m2) (siehe Abbildung 3), bei der das radial verschiebliche Ringlager bei $\alpha_0 = 120^\circ$ angeordnet ist, erhält man ähnliche Ergebnisse wie bei der Lagerung m1) (siehe Tabelle 9). Auch hier liegen die Ergebnisse für die Vollkugel wieder zwischen denen der bei $\alpha = 120^\circ$ festeingespannten und denen der entsprechenden gelenkig, unverschieblich gelagerten Teilkugelschale, wobei nun allerdings die kritischen Lasten p_{kr} mehr zu denen für die feste Einspannung tendieren. Bei den Beulformen und der Zahl der Umfangsbeulwellen gibt es jedoch größere Unterschiede als im Fall der Lagerung m1) (vergleiche Tabellen 1, 2 und 9). Keinerlei Übereinstimmung gibt es auch hier wieder zwischen den Ergebnissen für die Vollkugel mit der Lagerungsbedingung m2) und denen der bei $\alpha = 120^\circ$ membrangelagerten Teilkugelschale. Wie ein Vergleich zwischen den Tabellen 9 und 4 zeigt, liegen aus den bereits genannten Gründen die kritischen Lasten der offenen Kugel wieder um etwa 50 bis 60 Prozent unter denen der entsprechenden Vollkugel, und auch bezüglich der Beulformen gibt es kaum Ähnlichkeiten.

Setzt man nicht mehr rein elastisches, sondern elastisch-idealplastisches Materialverhalten voraus, so erhält man für die Lagerungsbedingung m1) die in Tabelle 10 angegebenen Ergebnisse. Wie man daraus sieht, liegen die kritischen Lasten p_{kr} der Vollkugel auch im plastischen Bereich wieder ziemlich genau zwischen denen der festeingespannten und denen der gelenkig gelagerten Halbkugel (vergleiche Tabellen 5, 6

RB	α	R/t	$p_{kr}^{1)}$	$\sigma_{22}^{*1)}$	p^*	$\sigma_{ki}^{1)}$	$\kappa_{s,2}$	$\sigma_u^{1)}$	σ_{22}^*/σ_u
m1)	90°	50	3.76	188.0	0.073	1779	0.85	204.0	0.92
		100	1.74	174.0	0.137	889	0.69	166.0	1.05
		300	0.48	144.0	0.340	296	0.32	76.8	1.88
		500	0.264	132.0	0.519	178	0.17	41.0	3.22
		2000	0.0362	72.4	1.140	--	--	--	--

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 3, Abschnitte 3 und 4.2 sowie Gleichungen (2),(3),(4)

Tab. 10: Elastisch-plastische kritische Lasten von Vollkugelschalen aus Stahl (St 37) unter Eigengewicht (radial verschiebliche 'Membranlagerung' m1))

und 10). Allerdings zeigt sich nun auch, daß sich – anders als im elastischen Bereich – die plastischen kritischen Lasten der Vollkugel nur noch verhältnismäßig wenig von denen der entsprechenden membrangelagerten Halbkugel unterscheiden (vergleiche

Tabellen 8 und 10). Dies liegt möglicherweise daran, daß die auftretenden Plastizierungen generell zu einer so starken Reduzierung der kritischen Lasten führen, daß sich der zusätzliche Einfluß von Geometrieparametern und Randbedingungen kaum noch auswirkt. Hinsichtlich der Beulformen gibt es im plastischen Bereich ohnehin keine Diskrepanzen zwischen Voll- und Teilkugelschalen, da beide an einem Durchschlagspunkt axialsymmetrisch versagen.

Die vorgestellten Ergebnisse für die Vollkugel sind zwar nicht vollständig, sie lassen aber dennoch den Schluß zu, daß sich – zumindest für $\alpha > 90^\circ$ – die Tragfähigkeit von membrangelagerten Vollkugelschalen recht gut und auf der sicheren Seite liegend durch die kritischen Lasten einer am gleichen Breitenkreis gelenkig, unverschieblich gelagerten Teilkugelschale abschätzen läßt. Durch diese Annahme wird der insgesamt stabilisierend wirkende untere Teil der Vollkugel ausreichend berücksichtigt. Inwiefern diese Näherung auch dann noch gilt, wenn α weniger als 90° beträgt, läßt sich aus den bisher vorliegenden Ergebnissen allerdings nicht entnehmen.

4.3 Beulverhalten offener Kugelschalen unter Außendruck

4.3.1 Elastisches Verhalten

Die Untersuchungen zum Beulverhalten von offenen Kugelschalen unter konstanter radialer Außendruckbelastung wurden für die gleichen Öffnungswinkel, Randbedingungen und Materialparameter durchgeführt wie die vorangegangenen für Kugelschalen unter Eigengewicht. Bei den R/t -Verhältnissen wurden dagegen nach Abstimmung mit dem zuständigen Ausschuß nur die beiden Fälle $R/t = 50$ und $R/t = 500$ berücksichtigt. Deshalb entsprechen auch die in den nachfolgenden Tabellen 11–14 zusammengefaßten Ergebnisse nicht mehr einer bestimmten Randbedingung, sondern einem bestimmten R/t -Verhältnis. So gibt zum Beispiel Tabelle 11 die elastischen Beullasten vergleichsweise dicker offener Kugelschalen mit $R/t = 50$ wieder, während Tabelle 12 die entsprechenden Ergebnisse für eine dünne Schale mit $R/t = 500$ sowie zwei stichprobenartige Ergebnisse für eine sehr dünne Schale mit $R/t = 2000$ enthält.

Erwartungsgemäß ergaben die numerischen Berechnungen, daß sich bei allen untersuchten Parameterkombinationen über annähernd die ganze Schale eine Spannungsverteilung einstellt, die nur in einem Randstörungsbereich vom bekannten Membranspannungszustand einer außendruckbeanspruchten Vollkugel abweicht, wohingegen – wie oben bereits erläutert – der Spannungszustand der durch Eigengewicht belasteten Kugelschalen sehr inhomogen sein kann. So wachsen zum Beispiel bei letzteren die Meridianspannungen zu den Auflagern hin an, und außerdem können, je nach Randbedingung, die Meridian- und die Umfangsspannungen erheblich differieren. Dies deutet bereits auf grundsätzliche Unterschiede im Tragverhalten und in der Tragfähigkeit hin.

Bei den in Tabelle 11 angegebenen kritischen Lasten p_{kr} handelt es sich wieder – je nachdem ob die Umfangsbeulwellenzahl n von Null verschieden ist oder nicht – entweder um elastische Verzweigungslasten p_{ki}^{el} (für $n > 0$) oder um elastische Durchschlagslasten p_{max} (für $n = 0$). Um auch hier zu einer geeigneten Normierung von p_{kr} zu kommen, ist es aufgrund der Homogenität der Spannungsverteilung allerdings nicht mehr nötig, den Umweg über eine geeignete maximale Membranspannung

σ_{22}^* und die 'Zoelly-Spannung' σ_z zu nehmen. Vielmehr ergibt sich ein dimensionsloser kritischer Außendruck sehr einfach dadurch, daß man p_{kr} direkt durch den klassischen Verzweigungsdruck der Vollkugel, den sogenannten 'Zoelly-Druck'

$$p_z = 1.21 E (t/R)^2 \quad (5)$$

dividiert. Die entsprechenden Zahlenwerte sind ebenfalls in Tabelle 11 wiedergegeben und in Abbildung 19 auch als Funktion des Winkels α und der jeweiligen Randbedingungen aufgetragen.

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	p_{kr}/p_z
50	30°	a)	78.5	3	0.770
		b)	66.8	3	0.660
		c)	20.0	0	0.197
		m)	49.8	2	0.490
	60°	a)	80.4	8	0.79
		b)	70.1	8	0.69
		c)	25.4	6	0.25
		m)	50.5	0	0.50
	90°	a)	81.0	11	0.80
		b)	71.1	10	0.70
		c)	50.9	0	0.50
		m)	50.9	0	0.50
	120°	a)	88.8	7	0.870
		b)	73.5	10	0.720
		c)	30.0	0	0.295
		m)	51.3	0	0.505

1) Dimension: N/mm^2

Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.3.1 sowie Gleichung (5)

Tab. 11: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck ($R/t = 50$)

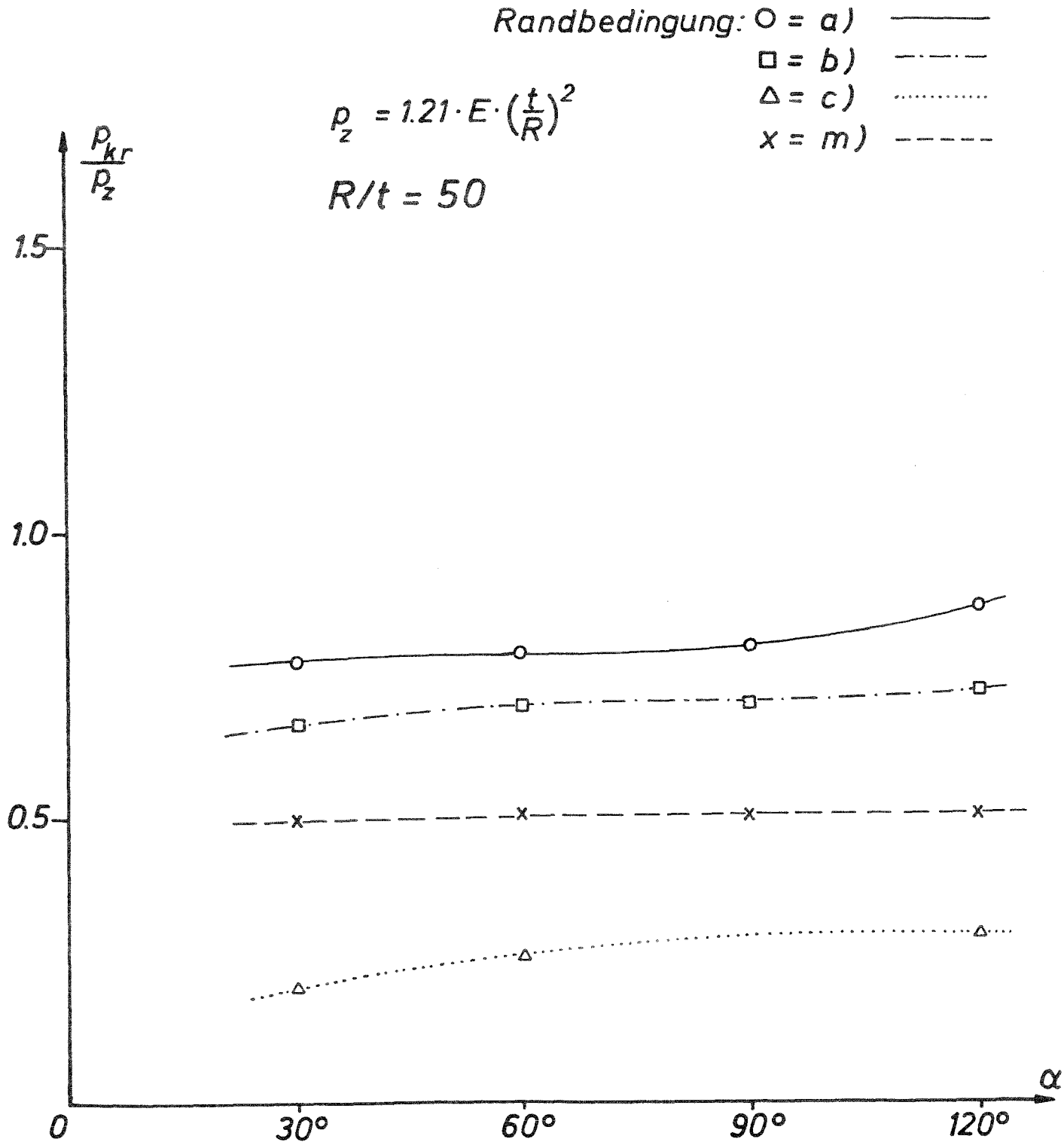


Abb. 19: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck ($R/t = 50$)

Vergleicht man die kritischen Lasten p_{kr} in Tabelle 11 mit den entsprechenden Ergebnissen für eigengewichtbelastete Schalen (siehe Tabellen 1-4), so ergeben sich – wie zu erwarten – beträchtliche quantitative und auch qualitative Unterschiede, und zwar sowohl bezüglich der jeweiligen p_{kr} -Werte als auch bezüglich der Versagensformen. So liegen zwar bei Eigengewichtsbelastung die kritischen Lasten p_{kr} für die jeweils kleinsten Werte von α teilweise deutlich über denen für außendruckbelastete Schalen, bei größeren Winkeln ist aber in der Regel das Gegenteil der Fall. Direkte Vergleiche zwischen den einzelnen kritischen Lasten sind also – hauptsächlich aufgrund der sehr unterschiedlichen Belastungs- und Spannungsverteilungen – nicht ohne weiteres möglich. Man sieht auch daran wieder sehr deutlich, daß es im nichtlinearen Bereich ganz wesentlich darauf ankommt, die tatsächlichen Verhältnisse möglichst genau zu beschreiben, da eine Veränderung der Belastungs- und/oder der Randbedingungen zu grundsätzlich anderen Ergebnissen und Ergebnistrends führen kann, weshalb man auch mit Hilfe einfacher Analogieschlüsse möglicherweise zu fehlerhaften Schlußfolgerungen kommt. So deuten zum Beispiel die hier vorliegenden Ergebnisse darauf hin, daß es für gegebene Parameterkombinationen nur in Sonderfällen möglich ist, die kritischen Belastungen und Versagensformen von Kugelschalen unter Eigengewicht durch die entsprechenden Ergebnisse von außendruckbelasteten Kugelschalen anzunähern.

Betrachtet man die in Abbildung 19 dargestellte Abhängigkeit der dimensionslosen kritischen Lasten p_{kr}/p_z vom Öffnungswinkel α und den Randbedingungen, so fällt auf, daß der Einfluß des Winkels α sehr gering ist, während er im Fall der Eigengewichtsbelastung – außer bei der relativ 'weichen', radial verschieblichen 'Membranlagerung' – eine sehr wichtige Rolle spielt. Umgekehrt haben nun die Randbedingungen einen ganz entscheidenden Einfluß. Erwartungsgemäß ergibt die feste Einspannung (Randbedingung a) in Abbildung 2) die jeweils höchsten kritischen Lasten, während die horizontal verschiebliche Lagerung c) zu den jeweils niedrigsten Werten führt. So erreicht die kritische Belastung p_{kr} im ersteren Fall bei $\alpha = 120^\circ$ annähernd 90 Prozent der klassischen Verzweigungslast p_z der Vollkugel, während sie im zweiten nur noch etwa 20 bis 30 Prozent beträgt. Dagegen liefert die gelenkige, unverschiebliche Lagerung wieder Werte, die näher bei denen für feste Einspannung liegen.

Einen interessanten Sonderfall stellt wiederum die 'Membranlagerung' m) dar, für die sich bei allen untersuchten Öffnungswinkeln und R/t -Verhältnissen ein p_{kr} -Wert ergibt, der ziemlich genau 50 Prozent der 'Zoelly-Last' p_z beträgt. Daß hier die Ergebnisse von α unabhängig sind und außerdem niedriger liegen als für die eingespannten und die gelenkig gelagerten Kugelschalen, ist unter anderem auch deshalb bemerkenswert, weil man annehmen könnte, daß bei der Randbedingung m) am Auflager ein ähnlicher Membranspannungszustand herrscht wie bei der der Normierung zugrunde liegenden perfekten, homogenen Vollkugel. Erstaunlich ist auch, daß hier – außer für $\alpha = 30^\circ$ – Versagen nicht, wie im klassischen Fall, an einem Verzweigungs-, sondern an einem Durchschlagpunkt auftritt. Das Beulverhalten der offenen und der geschlossenen Kugel ist also trotz gleicher Belastung und weitgehend gleichen Randbedingungen nicht vergleichbar. Auch dies ist wieder ein deutliches Beispiel für die unter Umständen sehr begrenzte Gültigkeit von Analogiebetrachtungen.

Die entsprechenden Ergebnisse für dünnere Schalen mit $R/t = 500$ sind in Tabelle 12 und Abbildung 20 wiedergegeben. Darüberhinaus enthält Tabelle 12, wie bereits er-

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	P_{kr}/P_z
500	30°	a)	0.810	15	0.80
		b)	0.725	15	0.71
		c)	0.193	9	0.19
		m)	0.504	0	0.50
	60°	a)	0.840	29	0.830
		b)	0.735	27	0.720
		c)	0.200	16	0.196
		m)	0.507	0	0.500
	90°	a)	0.850	35	0.84
		b)	0.740	33	0.73
		c)	0.508	0	0.50
		m)	0.508	0	0.50
120°	a)	0.84	32	0.83	
	b)	0.75	31	0.74	
	c)	0.14	0	0.14	
	m)	0.51	0	0.50	
2000	30°	a)	0.0550	32	0.87
		b)	0.0485	32	0.76

1) Dimension: N/mm²

Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.3.1 sowie Gleichung (5)

Tab. 12: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck (R/t = 500)

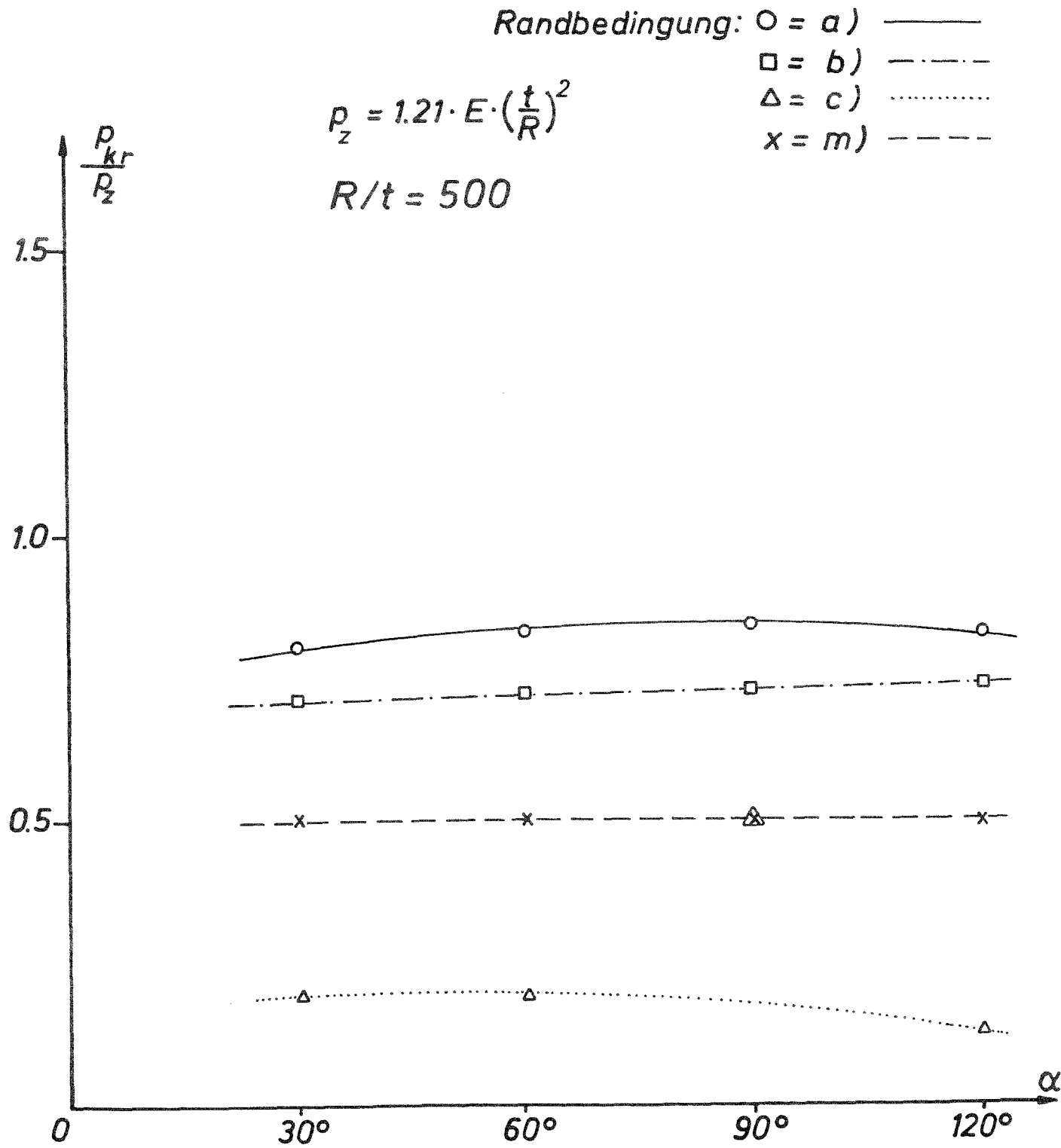


Abb. 20: Elastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck ($R/t = 500$)

wähnt, auch zwei stichprobenartige Ergebnisse für eine sehr dünne Schale mit $R/t = 2000$. Vergleicht man nun die kritischen Lasten in den Tabellen 11 und 12 sowie die Abbildungen 19 und 20, so erkennt man gewisse quantitative, aber nur sehr geringe qualitative Unterschiede, die sich außerdem fast ausschließlich auf die Schalen mit den jeweils niedrigsten und höchsten α -Werten beziehen. Gleich ist dagegen in beiden Fällen, daß die kritischen Lasten p_{kr} kaum von α abhängen und daß für die 'Membranlagerung' m) der Quotient aus p_{kr} und p_z wieder für annähernd alle α -Werte 0,5 beträgt. Deutlichere Unterschiede ergeben sich jedoch bei der Zahl der Umfangsbeulwellen n . Sie ist bei den dünneren Schalen durchweg sehr viel höher als bei dickeren und erreicht für eine fest eingespannte Halbkugel mit $R/t = 500$ sogar den Wert 35. Andererseits gilt für die membrangelagerten Schalen in gewissem Sinn auch das Umgekehrte. Hier versagen nun sämtliche dünneren Schalen mit $R/t = 500$ an einem Durchschlagpunkt, während für $R/t = 50$ in zumindest einem Fall (bei $\alpha = 30^\circ$) ein Verzweigungspunkt auftritt.

4.3.2 Elastisch-idealplastisches Verhalten

Berücksichtigt man außer rein elastischem auch elastisch-idealplastisches Materialverhalten, so erhält man die Ergebnisse in den Tabellen 13 und 14. Wie sich aus Tabelle 13 ergibt, hat die im plastischen Bereich stattfindende Reduktion der Materialsteifigkeiten bei den dickeren Schalen mit $R/t = 50$ zur Folge, daß – wie schon im Fall der Eigengewichtsbelastung – für alle Öffnungswinkel und Randbedingungen bei der kritischen Belastung p_{kr} Durchschlagen und keine Verzweigung auftritt. Außerdem zeigt ein Vergleich mit den Ergebnissen in Tabelle 11, daß die jeweiligen plastischen kritischen Lasten zum Teil beträchtlich unter den entsprechenden elastischen Werten liegen. Je nach Öffnungswinkel und Randbedingung betragen die Abminderungen infolge des Auftretens plastischer Dehnungen zwischen 60 und 95 Prozent, wobei der Mittelwert bei ungefähr 85 Prozent liegt. Erwartungsgemäß ist davon auch die membrangelagerte Schale stark betroffen, wobei hier die Abminderungen für alle α -Werte ungefähr gleich groß sind und mit ungefähr 80 Prozent etwa die gleiche Größenordnung besitzen wie beim Durchschnitt der anderen untersuchten Schalen.

Bei den in Tabelle 14 angegebenen elastisch-plastischen Ergebnissen für $R/t = 500$ zeigt sich zunächst, daß – anders als im Fall $R/t = 50$ – nicht alle dünneren Schalen an einem Durchschlagpunkt versagen. Vielmehr treten bei den fest eingespannten und den gelenkig, unverschieblich gelagerten Kugelschalen durchweg Verzweigungspunkte auf. Außerdem ist die jeweilige Zahl von Umfangsbeulwellen nicht wesentlich niedriger als bei den entsprechenden elastischen Schalen. Lediglich bei der horizontal verschieblichen Lagerung c) und bei der Membranlagerung m) treten Durchschlagpunkte auf, wobei die Schalen im letzteren Fall bis zum Erreichen der jeweiligen Maximallast p_{max} elastisch bleiben. Schließlich wirken sich auch die auftretenden Plastizierungen bei den dünneren Schalen mit $R/t = 500$ nicht annähernd so negativ auf die Tragfähigkeit aus wie bei den dickeren mit $R/t = 50$. Sieht man von den membrangelagerten Schalen ab, bei denen bis zum Erreichen der Durchschlagslast keine plastischen Dehnungen auftreten, so betragen die Abminderungen bei den Lagerungen a) und b) im Mittel nur etwa 10 Prozent. Lediglich bei der sehr 'weichen', horizontal verschieblichen Lagerung c) liegen die elastisch-plastischen kritischen Lasten um etwa 70 Prozent niedriger als die entsprechenden elastischen Werte.

In den Abbildungen 21–24 sind die Ergebnisse aus den vorangegangenen Tabellen 11–14 noch einmal – ähnlich wie bei den Kugelschalen unter Eigengewicht – für die verschiedenen Randbedingungen separat dargestellt. Betrachtet man zunächst die Abbildungen 21 und 22 für die fest eingespannte und die gelenkig, unverschieblich gela-

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	P_{kr}/p_z
50	30°	a)	9.40	0	0.092
		b)	9.27	0	0.091
		c)	2.16	0	0.021
		m)	9.56	0	0.094
	60°	a)	9.40	0	0.092
		b)	9.27	0	0.091
		c)	2.05	0	0.020
		m)	9.60	0	0.094
	90°	a)	9.70	0	0.095
		b)	9.27	0	0.091
		c)	9.60	0	0.095
		m)	9.60	0	0.095
	120°	a)	9.50	0	0.093
		b)	9.27	0	0.091
		c)	1.77	0	0.017
		m)	9.65	0	0.095

1) Dimension: N/mm^2

Erläuterungen siehe Abb.2, Abschnitte 3 und 4.3.2 sowie Gleichung (5)

Tab. 13: Elastisch–plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck ($R/t = 50$)

gerte Schale, so sieht man deutlich, daß die mit der 'Zoelly–Last' p_z normierten kritischen Lasten kaum vom Öffnungswinkel α abhängen. Lediglich bei den dickeren Schalen mit $R/t = 50$ ergibt sich eine gewisse Abhängigkeit von α , allerdings nur im elastischen Bereich. Außerdem sieht man, wie schon erwähnt, daß sich plastische Dehnungen bei den dünneren Schalen mit $R/t = 500$ verhältnismäßig wenig auf die kriti-

schen Lasten auswirken, während sich bei den dickeren Schalen mit $R/t = 50$ ganz erhebliche Abminderungen ergeben. Interessant ist auch, daß der oben bereits angesprochene, bei elastischen Schalen mit $R/t = 50$ mehr oder weniger deutliche Einfluß des Öffnungswinkels α durch die plastischen Dehnungen fast vollständig verschwindet.

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	P_{kr}/P_z
500	30°	a)	0.730	15	0.718
		b)	0.640	15	0.629
		c)	0.064	0	0.063
		m)	0.504	0	0.496
	60°	a)	0.740	28	0.728
		b)	0.670	27	0.659
		c)	0.055	0	0.054
		m)	0.507	0	0.499
	90°	a)	0.750	34	0.737
		b)	0.670	34	0.659
		c)	0.508	0	0.500
		m)	0.508	0	0.500
	120°	a)	0.750	29	0.737
		b)	0.680	28	0.669
		c)	0.051	0	0.050
		m)	0.510	0	0.500

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 2, Abschnitte 3 und 4.3.2 sowie Gleichung (5)

Tab. 14: Elastisch-plastische kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck ($R/t = 500$)

Bei den in Abbildung 23 dargestellten Ergebnissen für die horizontal verschiebbliche Lagerung c) kommt man zu ganz ähnlichen Schlußfolgerungen. Allerdings gibt es auch hier – wie schon im Fall der Eigengewichtsbelastung – einige wichtige Unterschiede gegenüber den Ergebnissen für die feste Einspannung und die gelenkige, unverschieb-

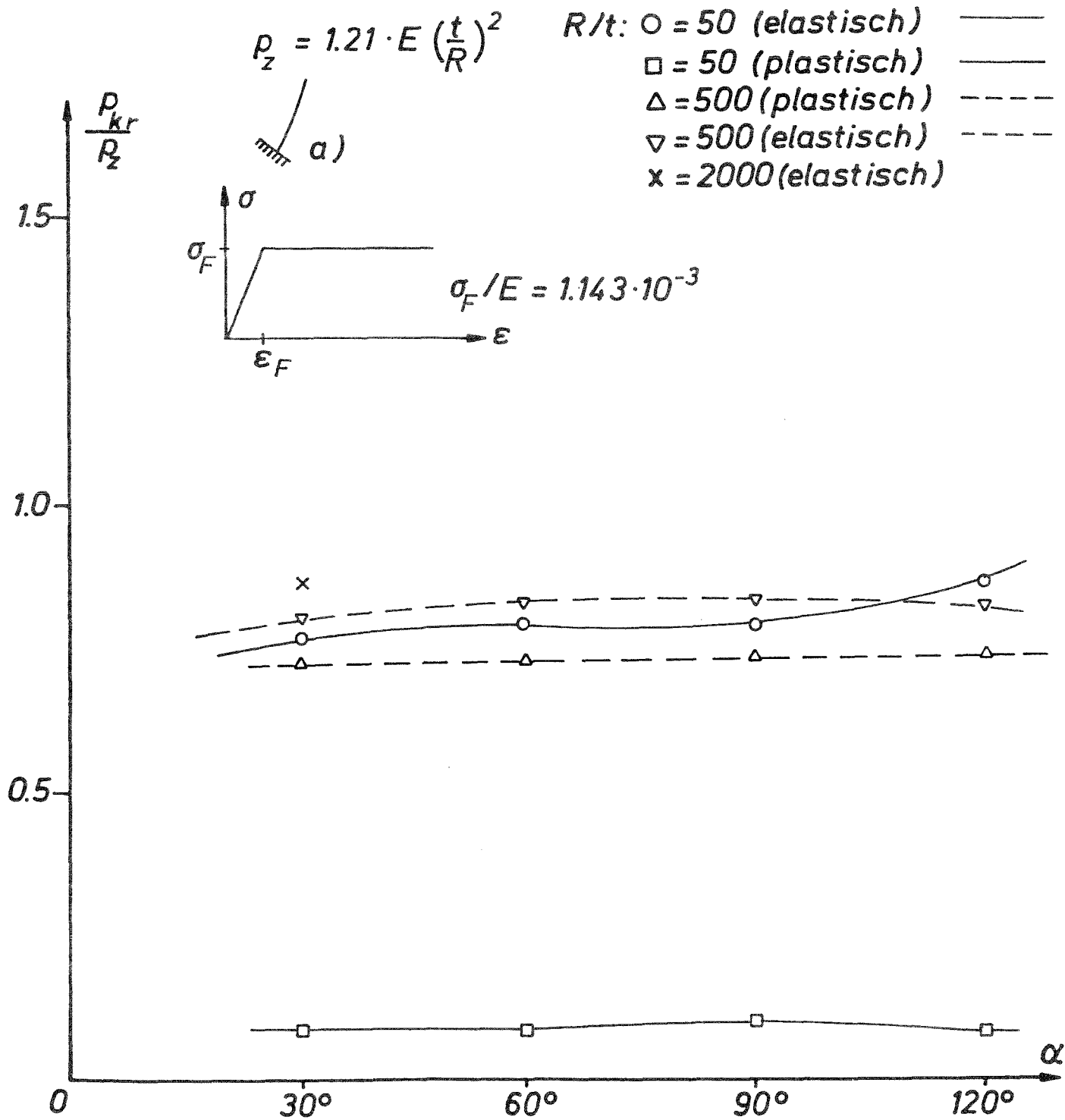


Abb. 21: Kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck (feste Einspannung)

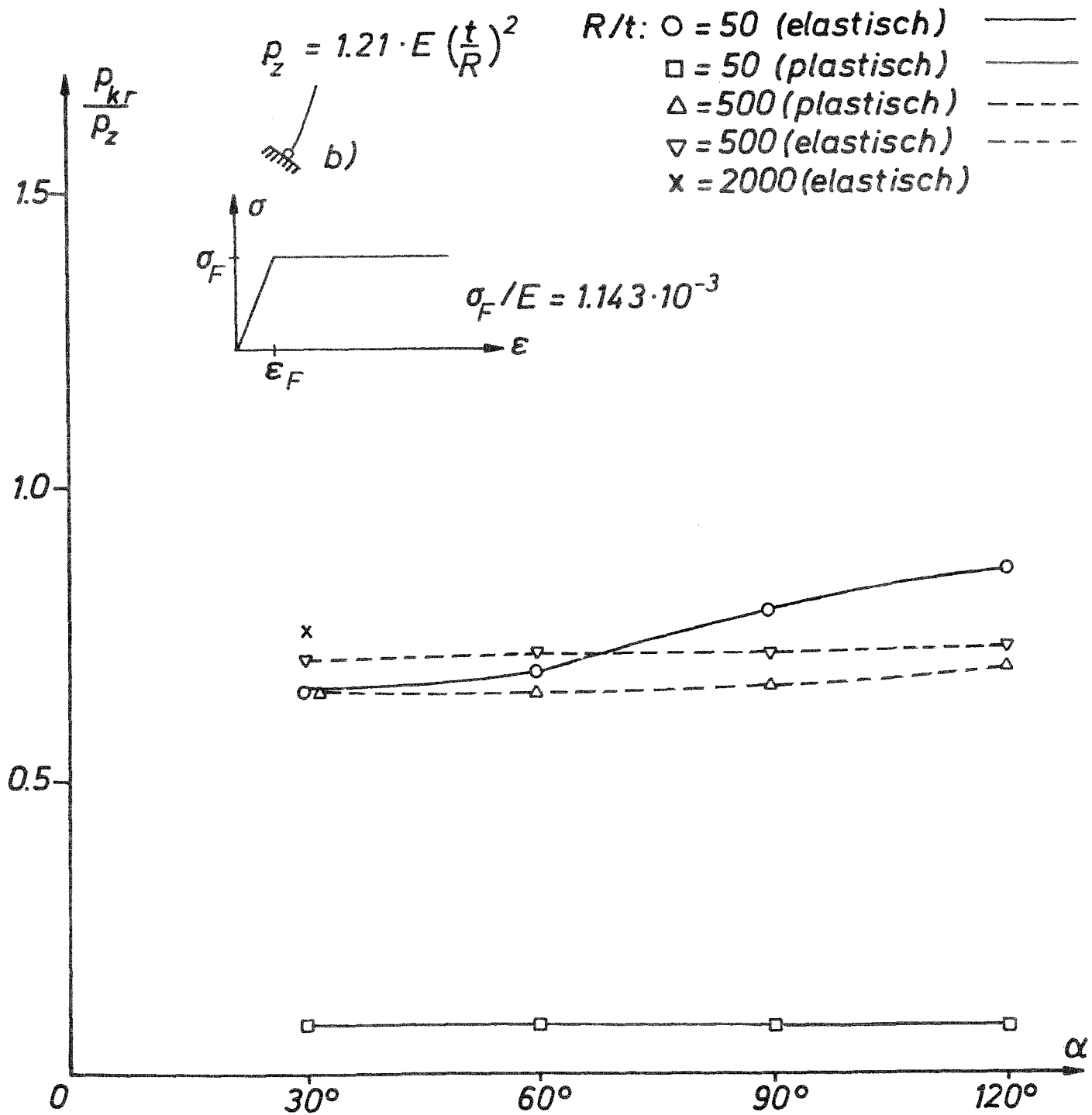


Abb. 22: Kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck (gelenkige, unverschiebliche Lagerung)

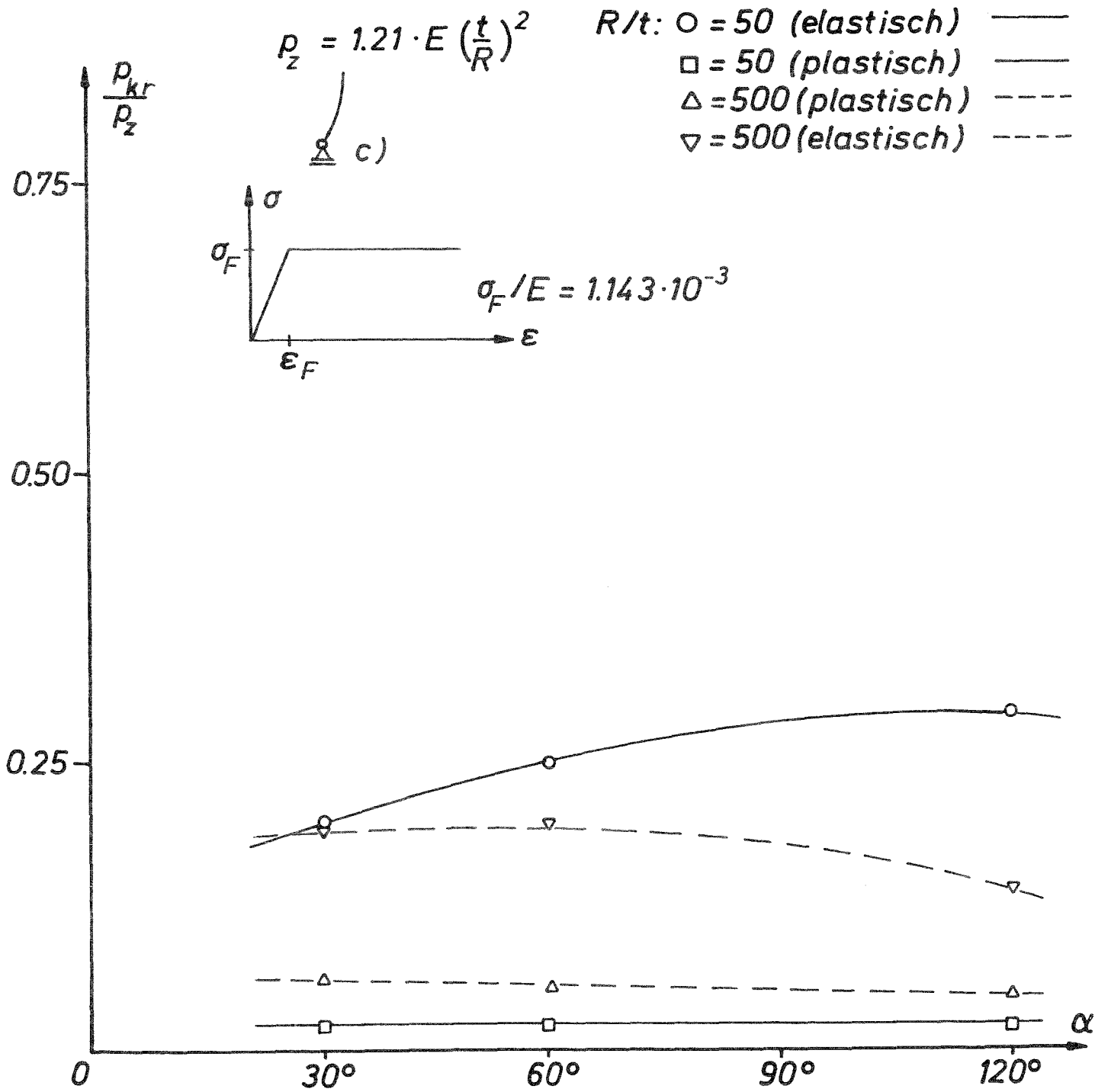


Abb. 23: Kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck (gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung)

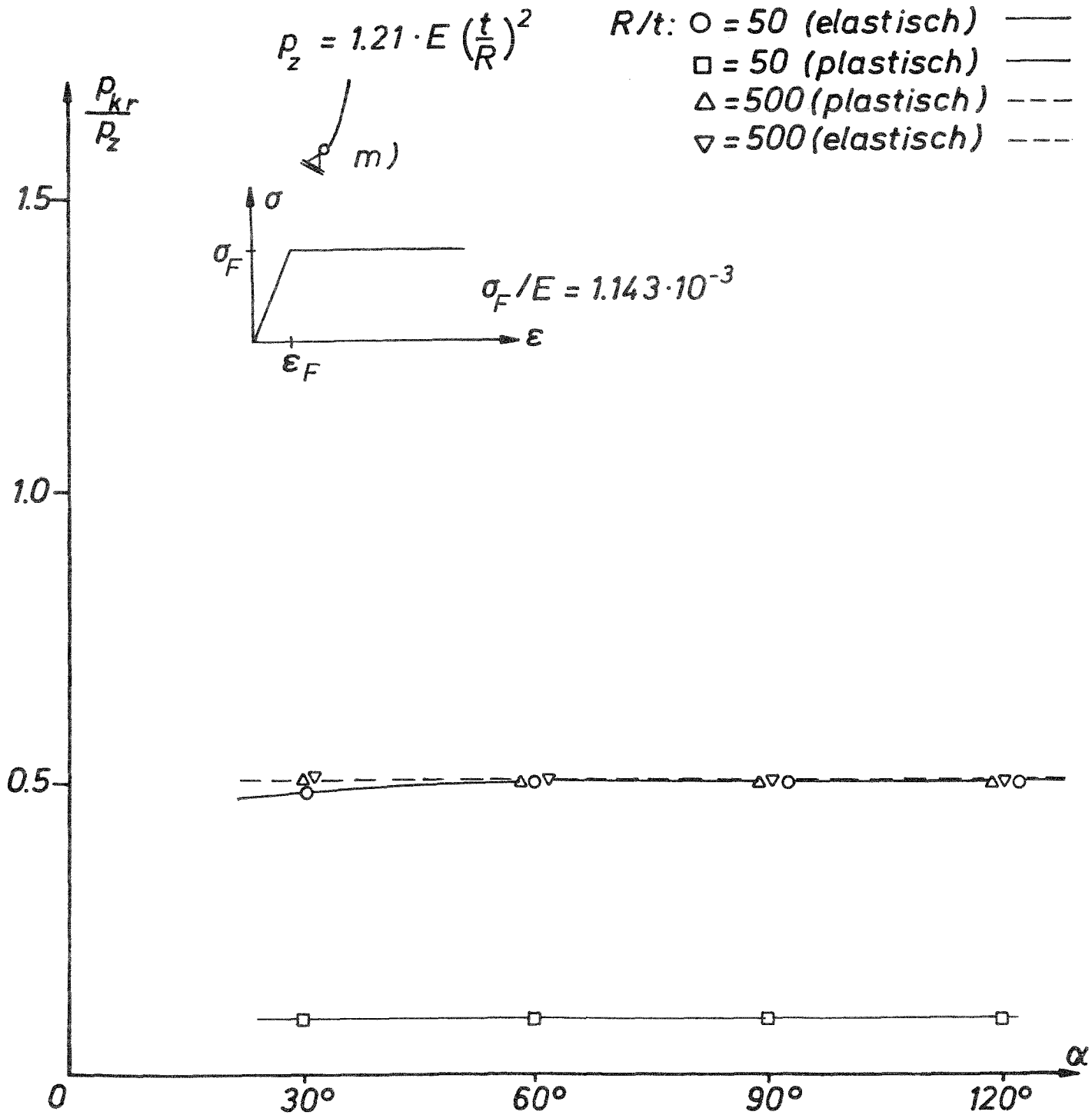


Abb. 24: Kritische Lasten offener Kugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck (radial verschiebliche 'Membranlagerung')

liche Lagerung. So liegen zum Beispiel die elastischen kritischen Lasten p_{kr} , je nach Öffnungswinkel α , um etwa 35 bis 85 Prozent unterhalb der entsprechenden Werte für die fest eingespannte Schale. Außerdem zeigen sie, speziell für $R/t = 50$, eine deutlich ausgeprägtere Abhängigkeit von α . Diese wird jedoch durch die auftretenden Plastizierungen ebenso nivelliert wie dies auch bei den übrigen Lagerungen der Fall ist. Andererseits haben Plastizierungen nun auch bei den dünneren Schalen mit $R/t = 500$ Abminderungen der kritischen Lasten von durchschnittlich 70 Prozent zur Folge.

Die in Abbildung 24 dargestellten Ergebnisse für die 'Membranlagerung' m) zeigen bei der dünneren Schale mit $R/t = 500$ keinen Unterschied zwischen den elastischen und den elastisch-plastischen Berechnungen. Dies ist in erster Linie darauf zurückzuführen, daß hier die geometrisch nichtlinearen Terme dominieren und daß die plastischen Bereiche lokal begrenzt sind. Dadurch wird die jeweilige kritische Last p_{kr} erreicht, bevor sich die durch die Plastizierung hervorgerufenen Steifigkeitsabminderungen global auswirken können. Entsprechend liegen alle Punkte auf der horizontalen Geraden $p_{kr}/p_z = 0,5$. Bei dickeren Schalen mit $R/t = 50$ gilt dies jedoch nicht. In diesem Fall haben plastische Dehnungen wieder starke Abminderungen zur Folge, die jedoch von α weitgehend unabhängig sind. Außerdem fallen sie deutlich niedriger aus als bei der sehr viel 'weicheren' horizontal verschieblichen Lagerung c).

4.4 Beulverhalten von Vollkugelschalen unter Außendruck

Zum Abschluß wurden noch außendruckbeanspruchte Vollkugelschalen mit $R/t = 50$ und $R/t = 500$ sowie den Lagerungsbedingungen m1) und m2) untersucht (siehe Abbildung 3). Setzt man elastisches Materialverhalten voraus, so erhält man die Ergebnisse in Tabelle 15. Wie man sieht, sind die kritischen Lasten p_{kr} bei der Kugel, die am Äquator radial verschieblich gelagert ist (Randbedingung m1)), sowohl für $R/t = 50$ als auch für $R/t = 500$ um etwa 10 Prozent größer als bei der Lagerungsbedingung m2). Bei $R/t = 50$ erreicht p_{kr} sogar den klassischen Wert der 'Zoelly-Last' p_z , wobei sich allerdings die jeweiligen Eigenformen ganz wesentlich von den klassischen unterscheiden. Auffallend ist auch, daß in allen untersuchten Fällen Verzweigungspunkte auftreten und daß bei $R/t = 500$ sowie der Lagerungsbedingung m2) die Zahl der Umfangsbeulwellen etwa fünfmal so groß ist wie bei der Lagerungsbedingung m1), während gleichzeitig die zugehörige Verzweigungslast etwa 10 Prozent niedriger liegt.

Vergleicht man die kritischen Lasten in Tabelle 15 mit denen der entsprechend gelagerten offenen Kugelschalen in den Tabellen 11 und 12, so zeigt sich, daß bei Außendruckbelastung – anders als bei Eigengewicht – die kritischen Lasten der Vollkugel immer größer sind als die der entsprechenden gelenkig, unverschieblich beziehungsweise fest eingespannten Teilkugelschalen. Die kritischen Lasten der letzteren können nun zwar als konservative untere Schranken für die Tragfähigkeit der Vollkugel angesehen werden, jedoch läßt sich daraus – anders als im Fall der Eigengewichtsbelastung – nicht schließen, daß das Tragverhalten von offenen und geschlossenen Kugelschalen unter Außendruckbelastung grundsätzliche Gemeinsamkeiten aufweist. Dies zeigt sich zum Beispiel sehr deutlich auch daran, daß sich bei der Vollkugel die Zahl der Umfangsbeulwellen sehr stark von der ähnlich gelagerter offener Kugelschalen unterscheidet.

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	P_{kr}/P_z
50	180°	m1)	101.3	3	1.00
		m2)	95.5	3	0.94
500	180°	m1)	0.965	3	0.95
		m2)	0.860	15	0.85

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 3, Abschnitte 3 und 4.4 sowie Gleichung (5)

Tab. 15: Elastische kritische Lasten von Vollkugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck

R/t	α	Randbedingung	$p_{kr}^{1)}$	n	P_{kr}/P_z
50	180°	m1)	9.80	0	0.096
		m2)	9.40	0	0.092
500	180°	m1)	0.89	0	0.876
		m2)	0.78	0	0.767

1) Dimension: N/mm^2
 Erläuterungen siehe Abb. 3, Abschnitte 3 und 4.4 sowie Gleichung (5)

Tab. 16: Elastisch-plastische kritische Lasten von Vollkugelschalen aus Stahl (St 37) unter Außendruck

Setzt man elastisch-idealplastisches Materialverhalten voraus, so erhält man die in Tabelle 16 angegebenen Beullasten. Auch hier versagen die Schalen wieder durchweg an einem Durchschlags- und nicht an einem Verzweigungspunkt. Verglichen mit dem elastischen Bereich gibt es aber hier größere Ähnlichkeiten zwischen dem Beulverhalten von Voll- und Teilkugelschalen. Einmal sind die Abminderungen infolge Plastizierung ähnlich groß. Für $R/t = 50$ betragen sie zum Beispiel wieder etwa 90 Prozent, während sie bei $R/t = 500$ nur etwa 10 Prozent ausmachen. Außerdem liegen die kritischen Lasten nun wieder näher an denjenigen für feste Einspannung als dies im elastischen Bereich der Fall ist, und für $R/t = 50$ sowie die Lagerungsbedingung m 2) liegt p_{kr} wieder – wie bei Eigengewichtsbelastung – zwischen denen der vergleichbaren offenen Kugelschalen mit fester Einspannung einerseits und denen mit gelenkiger, unverschieblicher Lagerung andererseits. Hinsichtlich der Beulformen gibt es keinerlei Diskrepanzen, da im plastischen Bereich sowohl die Teil- als auch die Vollkugelschalen an einem Durchschlagspunkt versagen.

5. Zusammenfassung

Gegenstand der Forschungsarbeiten waren systematische numerische Untersuchungen zum nichtlinearen Trag- und Beulverhalten von offenen und geschlossenen, durch stetig veränderliche Flächenlasten wie Eigengewicht und Außendruck beanspruchten Kugelschalen. Im einzelnen wurde untersucht, wie sich die geometrischen Parameter (Öffnungswinkel und Radius-zu-Dickenverhältnis), das Materialverhalten (elastisch beziehungsweise elastisch-idealplastisch) sowie die Randbedingungen (feste Einspannung; gelenkige, unverschiebliche Lagerung; gelenkige, horizontal verschiebliche Lagerung; radial verschiebliche 'Membranlagerung') auf die Tragfähigkeit auswirken.

Für die Berechnungen wurde das Rotationsschalenprogramm ROT-B verwendet, das auf einer für große Verschiebungen und mäßig große Rotationen gültigen Theorie dünnwandiger Schalen beruht und speziell auf die geometrisch nichtlineare, elasto-plastische Berechnung von beliebigen Rotationsschalen mit allgemeinen, nichtrotationssymmetrischen Belastungen und Anfangsimperfektionen zugeschnitten ist.

Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß die Tragfähigkeit von Kugelschalen von allen berücksichtigten Faktoren maßgeblich beeinflußt wird und daß sich bei den kritischen Belastungen, je nach Parameterkombination, Unterschiede von mehreren Zehnerpotenzen ergeben können. Durch geeignete Normierungen ist es einmal möglich, diese beträchtlich zu reduzieren und zum anderen zu vergleichsweise einfachen Beziehungen zwischen den die Tragfähigkeit beschreibenden dimensionslosen Größen zu kommen. Darüberhinaus lassen sich daraus einige der im Teil 4 der DIN 18 800 vorkommenden Abminderungsfaktoren begründen sowie deren Anwendungsbereiche bestimmen. Dazu gehören zum Beispiel die c_k -Faktoren, die den Einfluß der Lagerungsart auf die Tragfähigkeit beschreiben.

Literatur

- [1] Wunderlich, W.: Zur nichtlinearen Berechnung von Rotationsschalen. Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Arch. u. Bauwesen Weimar, Bd. 28 (1982) 221–225.
- [2] Rensch, H.J.: Elastoplastisches Beulen und Imperfektionsempfindlichkeit torisphärischer Schalen. Tech.-Wiss. Mitteilung Nr. 82–13, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum (1982).

- [3] Wunderlich, W., Rensch, H.J., Obrecht, H.: Analysis of elastic-plastic buckling and imperfection-sensitivity of shells of revolution. In "Buckling of Shells", Ramm, E. (ed.), Springer Verlag, Berlin (1982) 137-174.
- [4] Obrecht, H., Schnabel, F., Wunderlich, W.: Elastoplastisches Tragverhalten von Rotationsschalen. *Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Arch. u. Bauwesen Weimar*, Bd. 30, H. 6 (1984) 443-447.
- [5] Wunderlich, W., Cramer, H., Obrecht, H.: Application of ring elements in the nonlinear analysis of shells of revolution under nonaxisymmetric loading. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 51 (1985) 259-275.
- [6] Wunderlich, W., Cramer, H., Redanz, W.: Nonlinear analysis of shells of revolution including contact conditions. In "Finite Element Methods for Nonlinear Problems", Bergan, P.G., Bathe, K.J., Wunderlich, W. (eds.), Proc. Europe-US Symp., Trondheim, Aug. 1985, Springer Verlag, Berlin (1985) 697-718.
- [7] Wunderlich, W., Schnabel, F., Obrecht, H.: Tragfähigkeit zusammengesetzter Rotationsschalen im geometrisch und physikalisch nichtlinearen Bereich. *Tech.-Wiss. Mitteilung Nr. 86-3*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Mai (1986).
- [8] Wunderlich, W., Obrecht, H., Schnabel, F.: Nonlinear behavior of externally pressurized toriconical shells - Analysis and design criteria. In 'Stability of Plate and Shell Structures', Proc. ECCS-Coll., Ghent, Belgium, April (1987) 373-386.
- [9] Wunderlich, W., Obrecht, H., Schnabel, F.: Tragverhalten von Behälterböden und Kugelschalen - Die Finite-Element-Methode als Werkzeug zur Aufstellung von Entwurfshilfen. In: "Finite Elemente - Anwendungen in der Baupraxis", Wunderlich, W., Stein, E. (Hrsg.), Ernst & Sohn, Berlin (1988) 155-166.
- [10] Wunderlich, W., Obrecht, H.: Tragfähigkeit zusammengesetzter Rotationsschalen im geometrisch und physikalisch nichtlinearen Bereich. In "Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau", Schlußkoll. DFG-Schwerpunkt, Hannover, März 1989, Stein, E. (Hrsg.), Springer Verlag, Berlin (1989) 176-203.
- [11] Pflüger, A.: *Elementare Schalenstatik*, 5. Aufl. Springer Verlag, Berlin (1981).

Bundesforschungsanstalt für Forst- und Holzwirtschaft

Institut für Holzbiologie und Holzschutz

Überprüfung der notwendigen Holzschutzmittelmengen zum Schutz gegen Insekten

Kurzfassung

Zur Erarbeitung von Grundlagen, inwieweit zur Erzielung ausreichender Wirkstoffmengen von insektizid ausgerüsteten Holzschutzmitteln in der Praxis eine Verminderung der Einbringmengen möglich ist, wurden im Institut für Holzbiologie und Holzschutz der Bundesforschungsanstalt für Forst- und Holzwirtschaft Laborversuche in Anlehnung an EN 46 mit Modellpräparaten durchgeführt, bei denen Lindan sowie Permethrin in unterschiedlichen Konzentrationen in Testbenzin K 60 gelöst war. Versuchshölzer waren überwiegend Fichtenproben im Normformat und als Dachlattenabschnitte sowie in geringerem Umfang Kiefernnormproben. Die Auftragsmengen betragen 40 und 60 g/m².

Die Versuche haben bei allen schutzbehandelten Proben auf der Holzoberfläche zu einer Abtötung der Larven geführt, bevor sich diese in das Holz einbohren konnten, was auf die hohe Wirkstoffdichte in der Oberfläche zurückzuführen ist. Dagegen war nach Abhobelung nur in Ausnahmefällen noch eine vollständige Abtötung der eingesetzten Larven zu beobachten.

Die Versuchsergebnisse zeigen deutlich, daß eine beliebige Verminderung der Auftragsmenge nicht möglich ist. Vielmehr wird im Bereich von 60 bis 40 g/m² (= 50 bis 75 ml/m²) trotz höherer Wirkstoffkonzentration die Grenze der Wirksamkeit erreicht. In dem Wechselspiel Transportmittel (= Lösungsmittel) und Wirkstoff sind keine beliebigen Verschiebungen zugunsten geringerer Auftragsmengen möglich. Vielmehr ist für eine ausreichende Wirkstoffverteilung auch eine ausreichende Anwendungsmenge unerlässlich.

Für eine abschließende Bewertung der für eine Langzeitwirkung notwendigen Holzschutzmittelmengen sind noch Versuche nach Dachbodenlagerung erforderlich, die nicht Gegenstand des vorliegenden Forschungsvorhabens waren.

Bundesforschungsanstalt für Forst- und Holzwirtschaft

Institut für Holzbiologie und Holzschutz

Reevaluation of the preservative retention necessary to protect wood against insect attack

Abstract

In the Institute of Wood Biology and Wood Preservation of the Federal Research Organization for Forestry and Forest Products laboratory tests have been done taking pattern from EN 46 to get basic data how far the retention of wood preservatives may be diminished in practice to reach sufficient insecticidal efficacy. Formulations of lindane and permethrin in organic solvent were prepared in various concentrations and tested on spruce specimens of standard size as well as sections of 4 cm x 6 cm square. Furthermore, pine sapwood specimens of standard size were used to some extent. The retentions were 40 and 60 g/m². All specimens tested showed sufficient efficacy on the wood surface: All larvae were dead before they could bore themselves into the wood. This is due to the high density of the insecticide on the surface. After planeing of 1 or 2 mm resp. from the surface, however, the larvae could enter the wood and were killed only scarcely.

The test results demonstrate, that it is not possible to diminish the retention to any extent. Within the range of 60 - 40 g/m² (= 75 - 50 ml/m²) the threshold of efficacy is reached in spite of the high concentration of the insecticide. In the combination of vehicle (= solvent) and effective ingredient only limited displacements are possible in favour to reduced retentions. In any case for a suitable distribution of the active ingredients a sufficient retention of the preservative is essential.

For a final judgement of the long-term efficacy of the necessary preservative retention additional tests after storage of the samples below a roof are essential.

Bundeforschungsanstalt für Forst- und Holzwirtschaft

Institut für Holzbiologie und Holzschutz

RÉÉVALUATION DE LA QUANTITÉ DU PRÉSERVATIVE DU BOIS NÉCESSAIRE POUR LA PROTECTION CONTRE LES INSECTES XYLOPHAGES

Résumé

Dans l'Institut de la Biologie du Bois et de la Préservation du Bois du Centre Fédéral de Recherches Forestières des tests dans laboratoire similaire au EN 46 avait été fait avec des préparations modèles afin de recevoir les dates de base pour apprendre comment la rétention des préservatives du bois peut être diminuer en pratique pour atteindre assez d'efficacité contre les insectes xylophages. Des formulations de lindane et permethrine en solvant organique avaient été préparé en différentes concentrations et avaient été essayé avec des éprouvettes d'épicéa d'une taille selon EN 46 ainsi que des sections de 4 cm x 6 cm carré. De plus quelques éprouvettes normalisées de pin avaient été utilisé. Les rétentions étaient de 40 et 60 g/m².

Sur la surface du bois l'efficacité était suffisante en tous cas. Toutes les larves étaient mortes avant qu'ils pouvaient entrer dans le bois, due à la haute densité de l'insecticide sur la surface. Cependant, après avoir raboté la surface de 1 à 2 mm les larves pénétraient dans le bois et pouvaient à peine être tuées.

Les résultats des tests montrent qu'il n'est pas possible de diminuer la rétention n'importe comment. Dans la portée de 60-40 g/m² (=75-50 ml/m²) le seuil d'efficacité est atteint malgré de la haute concentration d'insecticide. Dans l'action réciproque du moyen de transport (=solvant) et de la substance active seulement des déplacements limités sont possible en faveur d'une rétention réduites. Dans tous les cas pour une distribution appropriée de la substance active une rétention suffisante du préservative est essentielle.

Pour un jugement définitive de la rétention du préservative nécessaire pour l'efficacité à long term il y a encore des tests supplémentaires à faire après un stockage des éprouvettes sous le toit.