

Kippaussteifung von Brettschichtträgern  
Teil 2

**T 2188/2**

T 2188/2

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

# BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Lehr- und Forschungsgebiet Ingenieurholzbau

Prof. Dr.-Ing. Heinz Brüninghoff

## KIPPAUSSTEIFUNG VON BRETTSCHICHTTRÄGERN

Teil 2

Prof. Dr.-Ing. H. Brüninghoff

Dipl.-Ing. T. Mitzenheim

Solingen, im März 1989

Forschungsstelle  
D-5650 Solingen  
Kölner Strasse 8  
Tel.: (0212) 207630  
201197

Universität  
D-5600 Wuppertal 2  
Pauluskirchstrasse 7  
Tel.: (0202) 439-3129  
3198  
3065

# I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

- 1 Aufgabenstellung
- 2 Eingeschlagener Lösungsweg
  - 2.1 Allgemeines
  - 2.2 Ausgangsformeln
  - 2.3 Das abgewandelte Reduktionsverfahren
  - 2.4 Lösungsverfahren der Anfangswertaufgaben
  - 2.5 Sprungstellen
    - 2.5.1 Allgemeines
    - 2.5.2 Elastisch gelagerter Trägerpunkt
    - 2.5.3 Sprung in der Trägernulllinie
  - 2.6 Beispiel (Handrechnung)
- 3 Rechenhilfe
  - 3.1 Allgemeines
  - 3.2 Programmbeschreibung
  - 3.3 Einschränkungen, Seitenlasten
- 4 Beispiel zur Überprüfung
- 5 Kritische Schlußbetrachtung

## 1 Aufgabenstellung

Im zweiten Teil des Forschungsvorhabens "Kippaussteifung von Brettschichtträgern" war eine theoretische Untersuchung von Trägern in Satteldachform verlangt. Bedingt durch den Knick in der Mitte entstehen Umlenkkräfte, die zusätzliche Seitenkräfte erzeugen. Querschnittsabmessungen und Belastung sollen variierbar sein.

Weiterhin sollen parallelgurtige Träger, belastet durch Gleichlast und Endmomente, untersucht werden. Damit wird die Beanspruchung eines Mehrfeldträgers oder Rahmenteils simuliert.

Aufgrund der Ergebnisse des ersten Teils des Forschungsvorhabens und der in der Praxis am häufigsten auftretenden Fälle wird nur eine punktweise Stützung des Obergurtes untersucht. Die Trägerenden sind stets gabelgelagert.

## 2 Eingeschlagener Lösungsweg

### 2.1 Allgemeines

Das im ersten Teil gewählte Rechenverfahren (Mehrfachschießverfahren) erwies sich bei einer feinen Elemententeilung, wie sie für Träger in Satteldachform nötig ist, als ungeeignet. Zudem zeichnete sich bei ersten groben Berechnungen ab, daß wegen der vielen Einflüsse keine einheitliche Lösung zu erwarten war und das bisherige Rechenverfahren bei komplexeren Problemen nur schwer nachvollziehbar ist.

Gewählt wurde für diesen zweiten Teil des Forschungsvorhabens das bei ähnlichen Untersuchungen häufig angewendete Reduktionsverfahren. Es ist möglich, dieses Verfahren derart abzuwandeln, daß der Träger nicht mehr in Einzelabschnitte unterteilt werden muß, für die man unabhängig voneinander die Übertragungsmatrizen ermittelt, sondern die resultierende Übertragungsmatrix zwischen Zustandsgrößen des Endrandes einerseits und Zustandsgrößen des Anfangsrandes und im Zwischenbereich angreifenden zusätzlichen überzähligen andererseits in einem Zuge aufstellen kann.

Bei entsprechender Deutung dieser resultierenden Übertragungsmatrix (die einzelnen Spalten stellen die zu speziellen Anfangszustandsvektoren gehörigen Endzustandsvektoren dar) ergibt sich, daß ihre Spalten jede für sich getrennt ermittelt werden können.

Vorteilhaft ist, daß das Verfahren auch bei Berechnung aufwendiger Problemstellungen überschaubar bleibt.

## 2.2 Ausgangsformeln

Es gelten die im Teil 1 hergeleiteten Formeln 4.3.2 und 4.3.3

$$\psi''(x) = \frac{1}{G \cdot I_x} \left[ M_y(x) \cdot v''(x) - q_z(x) \cdot e \cdot \psi(x) + q_y(x) \cdot s \right] \quad (4.3.2, \text{ Teil 1})$$

$$v'''' = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[ E \cdot I_z \cdot v''''(x) - 2 \cdot M_y'(x) \cdot \psi'(x) - M_y''(x) \cdot \psi(x) - q_y(x) \right. \\ \left. - \frac{M_y(x)}{G \cdot I_T} \cdot ( M_y(x) \cdot v''(x) - q_z(x) \cdot e \cdot \psi(x) + q_y(x) \cdot s ) \right] \quad (4.3.3, \text{ Teil 1})$$

Weiterhin gilt:

$$M_z(x) = - E \cdot I_z \cdot ( v(x) - v_0(x) )'' - M_y(x) \cdot \psi(x) \\ Q_y(x) = - E \cdot I_z \cdot ( v(x) - v_0(x) )'''' - M_y(x) \cdot \psi'(x) - Q_z(x) \cdot \psi \\ M_x(x) = G \cdot I_T \cdot \psi'(x) - M_y(x) \cdot v'(x) \quad (2.2.1)$$

### 2.3 Das abgewandelte Reduktionsverfahren

Für eine Stelle  $z_k$  des Trägers faßt man die Kraftgrößen  $X_j$  in den Vektor  $x_k$ , die Formänderungsgrößen  $Y_j$  in dem Vektor  $y_k$  zusammen.

Gemeinsam bilden sie den Zustandsvektor  $M D_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$  für die Stelle  $z_k$ .

Die Zustandsvektoren  $M D_A$  und  $M D_E$  zweier Trägerstellen  $z_A$  und  $z_E$  sind, wenn man vorerst davon absieht, daß in dem Bereich zwischen  $z_A$  und  $z_E$  noch zusätzliche statische und geometrische Überzählige vorhanden sein können, über die Beziehung

$$\overline{M D}_E = \overline{\mathcal{R}} \cdot \overline{M D}_A + \overline{\mathcal{L}}, \quad (2.3.1)$$

miteinander verknüpft, wobei  $\overline{\mathcal{R}}$  eine Matrix ist, die den Einfluß der mittigen Belastung und der Steifigkeit des zwischen den Stellen  $z_A$  und  $z_E$  liegenden Trägerbereiches wiedergibt.

Im Vektor  $\overline{\mathcal{L}}$  ist der Einfluß der außermittigen Lasten enthalten.

Die Beziehung (2.3.1) läßt sich zusammenfassen in die Form

$$M D_E = \mathcal{R} \cdot M D_A \quad (2.3.2)$$

mit

$$M D_k = \begin{bmatrix} \overline{M D}_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

und

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}} & \overline{\mathcal{L}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Hierbei kann die Matrix  $\mathcal{R}$  eine Feldmatrix  $\mathcal{F}$ , eine Knotenmatrix  $\mathcal{K}$  oder ein Produkt aus Feld- und Knotenmatrizen sein.

Als Feldmatrix  $\mathcal{F}_i$  wird eine Matrix bezeichnet, die die

Zustandsvektoren  $M_{i0}$  am Anfang und  $M_{i1}$  am Ende eines Feldes  $i$ , das ist ein Trägerbereich, in dem die Kraft- und Verformungsgrößen stetig verlaufen, miteinander verknüpft.

Als Knotenmatrix  $K$  wird eine Matrix bezeichnet, die die Zustandsvektoren an beiden Seiten eines Knotens, das ist eine Trägerstelle, in der die Kraft- oder Verformungsgrößen nicht stetig sind, miteinander verknüpft. Die Größe der Unstetigkeiten ist hierbei, im Gegensatz zu festen Lagern und Gelenken, in Abhängigkeit von den Verformungen an der betreffenden Stelle bekannt (z.B. Sprung der Lasten und Querschnittsgrößen; elast. Lagerung eines Trägerpunktes).

Entstehen in dem Bereich  $z_A - z_E$  zusätzliche Überzählige  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_i, \dots, \Delta X_n$  und  $\Delta Y_1, \Delta Y_2, \dots, \Delta Y_i, \dots, \Delta Y_m$  als Folge von festen Lagern oder von Gelenken, so erweitert sich der Zustandsvektor  $M_A$  auf die Form:

$$M_A^* = \left[ \overline{M}_A, \Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n, \Delta Y_1, \Delta Y_2, \dots, \Delta Y_m, 1 \right]^T \quad (2.3.5)$$

Entsprechend erweitert sich die Matrix  $K$  um  $m+n$  Spalten auf die Matrix  $K^*$ . Gleichung (2.3.1) erweitert sich dann auf die Form:

$$M_E = K^* \cdot M_A^* \quad (2.3.6)$$

Zusätzliche Bedingungen zur Bestimmung dieser Überzähligen  $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots$  und  $\Delta Y_1, \Delta Y_2, \dots$  ergeben sich daraus, daß an den festen Lagern geometrische, in den Gelenken statische Größen Null werden müssen.

Ausführlich geschrieben ergibt sich z.B. für einen Träger ohne Überzählige:

$$\begin{array}{c}
 U_E \\
 U'_E \\
 M_{ZE} \\
 Q_{YE} \\
 P_E \\
 M_{XE} \\
 1
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array}
 *
 \begin{array}{c}
 U_R \\
 U'_R \\
 M_{ZR} \\
 Q_{YR} \\
 P_R \\
 M_{XR} \\
 1
 \end{array}$$

$\overline{M}_E^P = \overline{M}^* \cdot \overline{M}_R^P$

Bild 2.3.7

Dieses Gleichungssystem läßt sich umschreiben zu:

$$\begin{array}{c}
 U_E \\
 U'_E \\
 M_{ZE} \\
 Q_{YE} \\
 P_E \\
 M_{XE}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 w_{1,1} \\
 w_{2,1} \\
 w_{3,1} \\
 w_{4,1} \\
 w_{5,1} \\
 w_{6,1}
 \end{array}
 U_R +
 \begin{array}{c}
 w_{1,2} \\
 w_{2,2} \\
 w_{3,2}
 \end{array}
 U'_R +
 \begin{array}{c}
 M_{ZR} \\
 Q_{YR} \\
 P_R \\
 M_{XR}
 \end{array}
 + 1$$

$$\overline{M}_E^P = \overline{M}_E^P (U_R) \cdot U_R + \overline{M}_E^P (U'_R) \cdot U'_R + \overline{M}_E^P (M_{ZR}) \cdot M_{ZR} + \overline{M}_E^P (Q_{YR}) \cdot Q_{YR} + \overline{M}_E^P (P_R) \cdot P_R + \overline{M}_E^P (M_{XR}) \cdot M_{XR} + \overline{M}_E^P (1) \cdot 1$$

Bild 2.3.8

- $w_{i,j}^*$  : Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von  $\overline{M}^*$
- $\overline{M}_k^P (x_i, y_i)$  : Der Zustandsvektor  $\overline{M}$  an der Stelle k infolge der Kraftgrößen  $X_i = 1$  und der Formänderungsgrößen  $Y_i = 1$  des Anfangsrandes
- $\overline{M}_k^P$  : Der resultierende Zustandsvektor

$$\sum_i (\overline{MD}_k^{(x_i)} \cdot x_i + \overline{MD}_k^{(y_i)} \cdot y_i + \overline{MD}_k^{(\Delta x_i)} \Delta x_i + \overline{MD}_k^{(\Delta y_i)} \Delta y_i)$$

an der Stelle k

Die Vektoren  $\overline{MD}_k(x_i, y_i)$  und  $\overline{MD}_k(\Delta x_i, \Delta y_i)$  ergeben sich jeweils als Lösungen von Anfangswertaufgaben.

Den Vektor  $\overline{MD}_E^{(UA)}$  z.B. erhält man, wenn man den zu dem Differentialgleichungssystem 4.3.2 und 4.3.3 (Teil 1) und dem Einheitsanfangsvektor

$$\overline{MD}_R^{(u_R)} = \begin{bmatrix} 1 = u_R \\ 0 = u'_R \\ 0 = M_{zR} \\ 0 = Q_{yR} \\ 0 = p_R \\ 0 = M_{xR} \end{bmatrix}$$

gehörigen Endvektor ermittelt. Die übrigen Endvektoren werden entsprechend ermittelt.

Zusätzliche statische ( $\Delta x_i$ ) oder geometrische ( $\Delta y_i$ ) Überzählige lassen sich auf einfache Weise in Bild 2.3.8 einfügen. Es wird nur der entsprechende Vektor  $\overline{MD}_k^{(\Delta x_i, \Delta y_i)}$  mit der Überzähligen  $\Delta x_i, \Delta y_i$  multipliziert und addiert.

Sind auf diese Art sämtliche Endvektoren bestimmt worden, liegen auch alle Elemente  $m_{i,j}^*$  der Matrix vor. Das Gleichungssystem ist somit lösbar.

Bemerkenswert ist, daß nur für die von Null verschiedenen Anfangswerte die Anfangswertaufgaben gelöst werden müssen.

Die Lösung des Gleichungssystems hat als Ergebnis den Anfangsrandvektor. Den Verlauf der Verformungen erhält man wiederum aus der Lösung des Gleichungssystems 4.3.2 und 4.3.3, Teil 1, und aus dem Anfangsrandvektor.

## 2.4 Lösungsverfahren der Anfangswertaufgaben

Zur Lösung der in 2.3 aufgezeigten Anfangswertaufgaben wird das numerische Integrationsverfahren Runge-Kutta verwendet.

Dieses Verfahren arbeitet mit den Funktionen  $u$  und  $\varphi$  und deren Ableitungen bis zur Ordnung  $n$  des Gleichungssystems. Die Vektoren müssen daher in der Art umgeformt werden, daß sie nur geometrische Größen, d.h. Funktionen von  $u$  und  $\varphi$  enthalten.

Es ergeben sich Vektoren der Form:

$$\left[ v ; H \cdot v' ; \frac{H^2}{2} \cdot v'' ; \frac{H^3}{6} \cdot v''' ; \varphi ; H \cdot \varphi' \right]$$

Hierin ist  $H$  die Schrittweite, die aus rechentechnischen Gründen eingefügt werden muß.

Das Gleichungssystem 4.3.2/4.3.3, Teil 1, wird aufgrund dieser Umformung zu:

$$\varphi''(x) \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{G \cdot I_x} \left[ M_y(x) \cdot \frac{2}{H^2} \cdot v''(x) \cdot \frac{H^2}{2} - q_z(x) \cdot e \cdot \varphi(x) + q_y(x) \cdot s \right] \cdot \frac{H^2}{2} \quad (2.4.1)$$

$$v''''(x) \cdot \frac{H^4}{24} = \frac{1}{E \cdot I_z} \left[ E \cdot I_z \cdot \frac{24}{H^4} \cdot v''''(x) \cdot \frac{H^4}{24} - 2 \cdot M_y'(x) \cdot \frac{1}{H} \cdot \varphi'(x) \cdot H - M_y''(x) \cdot \varphi(x) - q_y(x) \right. \\ \left. - \frac{M_y(x)}{G \cdot I_T} \cdot \left( M_y(x) \cdot \frac{2}{H^2} \cdot v''(x) \cdot \frac{H^2}{2} - q_z(x) \cdot e \cdot \varphi(x) + q_y(x) \cdot s \right) \right] \cdot \frac{H^4}{24} \quad (2.4.2)$$

Mit Hilfe der Gleichungen 2.2.1 lassen sich die Kraftgrößen  $\overline{M}_k$  in geometrische Größen  $\overline{W}_k$  überführen.

Dies kann man in der Form

$$\overline{M}_k = \overline{Q} \cdot \overline{MDS}_k \quad (2.4.3)$$

schreiben. Diese Transformationsmatrix ist auf der nächsten Seite angegeben.

$u$	$u'$	$M_z$	$Q_y$	$\varphi$	$M_x$
-----	------	-------	-------	-----------	-------

\*

$u$	$u'$	$u''$	$u'''$	$\varphi$	$\varphi'$
1					
	H				
		$-\frac{1}{E I_z} \cdot \frac{H^2}{2}$		$-\frac{M_y \cdot H^2}{E I_z^2}$	
			$\left( -\frac{M_y \cdot S S_4}{E I_z \cdot G J_T} - \frac{1}{E I_z} \right) \cdot \frac{H^3}{6}$	$-\frac{Q_z}{E I_z} \cdot \frac{H^3}{6}$	$-\frac{M_y}{E I_z \cdot G J_T} \cdot \frac{H^3}{6}$
				1	
			$\frac{S S_4}{G J_T} \cdot H$		$\frac{1}{G J_T} \cdot H$

\*  $\overline{M_{Qk}}$

[SS4 = Flusmittigkeit von Querkraften]

7

$u$	$H \cdot u'$	$\frac{H^2}{2} \cdot u''$	$\frac{H^3}{6} \cdot u'''$	$\varphi$	$H \cdot \varphi'$
-----	--------------	---------------------------	----------------------------	-----------	--------------------

$\overline{M_{Qk}} =$

2.4.4 Transformationsmatrix

Die in Kapitel 2.3 erläuterten Einheitszustandsvektoren ergeben sich damit zu:

$$\bar{u}_0^{(u)} = \begin{bmatrix} u = 1 \\ H \cdot u' = 0 \\ \frac{H^2}{2} M_z = 0 \\ \frac{H^2}{6} Q_y = 0 \\ p = 0 \\ H \cdot M_x = 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(v)} = \begin{bmatrix} H \\ \left( -\frac{M_y^2}{G I_T \cdot E I_z} - \frac{N}{E I_z} \right) \frac{H^3}{6} \\ + \frac{M_y}{G I_T} \cdot H \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(M_z)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{E I_z} \cdot \frac{H^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(Q_y)} = \begin{bmatrix} \left( -\frac{M_y \cdot S S_4}{E I_z \cdot G I_T} - \frac{1}{E I_z} \right) \frac{H^3}{6} \\ \frac{S S_4}{G I_T} \cdot H \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(p)} = \begin{bmatrix} -\frac{M_y}{E I_z} & \frac{H^2}{2} \\ -\frac{Q_z}{E I_z} & \frac{H^3}{6} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(M_x)} = \begin{bmatrix} -\frac{M_y}{E I_z \cdot G I_T} & \frac{H^3}{6} \\ \frac{1}{G I_T} \cdot H \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_0^{(\text{aufsermittigte Last})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bild 2.4.5

## 2.5 Sprungstellen

### 2.5.1 Allgemeines

Da bei dem hier angewendeten Runge-Kutta-Verfahren mit Zustandsvektoren gearbeitet wird, die nur geometrische Größen enthalten, müssen als erstes alle Unstetigkeiten in den Kraftgrößen  $\Delta X_i$  durch solche in den geometrischen Größen  $\Delta Y_i$  ausgedrückt werden.

Die dazu notwendigen Beziehungen liefert die Transformationsmatrix 2.4.4.

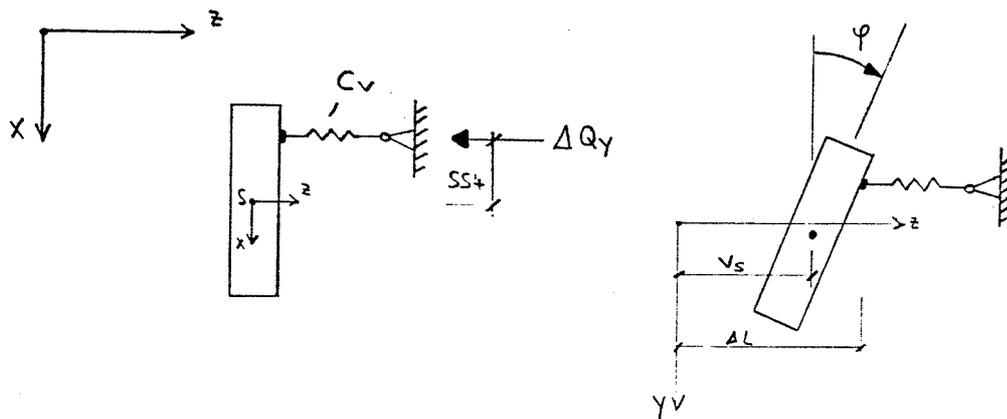
Es ergibt sich für den Knoten K ein Vektor

$$\Delta \bar{y}_K = \left[ \Delta u_K; H \cdot \Delta u_K'; \frac{H^2}{2} \cdot \Delta u_K''; \frac{H^3}{6} \cdot \Delta u_K'''; \Delta \varphi; H \cdot \Delta \varphi' \right]$$

Der Übergang über einen Knotenpunkt läßt sich dann auf einfache Weise in das Runge-Kutta-Verfahren einfügen, und zwar mit der Gleichung

$$\bar{y}_{j_{60}} = \bar{y}_{j_{21}} + \Delta \bar{y}_K \quad (2.5.1.1)$$

## 2.5.2 Elastisch gelagerter Trägerpunkt



$$\Delta Q_y = -C_v \cdot \Delta L = -C_v (v_s + \rho \cdot SS_4) \quad 2.5.2.1$$

Da  $\Delta Q_y$  ausmittig angreift, entsteht ein Torsionsmoment:

$$\Delta M_x = \Delta Q_y \cdot SS_4 = -C_v (v_s + \rho \cdot SS_4) \cdot SS_4 \quad 2.5.2.2$$

Mit 2.2.1 gilt:

$$Q_{Yl} - Q_{Yr} = -EI_z (v_z(x) - v_{ol}(x))'''' - M_y \varphi_l' - Q_z \varphi_l - N v_l'(x) \\ + EI_z (v(x)_r - v_{or}(x))'''' + M_y \varphi_r' + Q_z \varphi_r + N v_r'(x)$$

$$v_{ol}''''(x) = v_{or}''''(x); \quad \varphi_l = \varphi_r; \quad v_l'(x) = v_r'(x) \\ Q_y = EI_z (v''''(x)_r - v(x)''''_l) + M_y (\varphi_r' - \varphi_l')$$

$$Q_y = EI_z \Delta v'''' + M_y \Delta \varphi'$$

2.5.2.3

$$M_{xl} - M_{xr} = GI_T \varphi_l' - GI_T \varphi_r' \\ \Delta M_x = GI_T (\varphi_l' - \varphi_r') \\ \Delta M_x = -GI_T \cdot \Delta \varphi'$$

2.5.2.4

Gleichsetzung von 2.5.2.1 und 2.5.2.3 und 2.5.2.2 und 2.5.2.4

$$\begin{aligned}
 - C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) &= EI_Z v'''' + M_Y \Delta \varphi' \\
 - C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) \cdot SS4 &= - GI_T \varphi'
 \end{aligned}$$

$$\Delta \varphi' = \frac{C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) \cdot SS4}{G I_T}$$

$$\Delta v''' = \frac{1}{EI_Z} \left[ -C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) - M_Y \frac{C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) \cdot SS4}{G I_T} \right]$$

$$\Delta v''' = \frac{1}{EI_Z} \left[ -C_V (v_S + \varphi \cdot SS4) \cdot \left( 1 + \frac{M_Y \cdot SS4}{G I_T} \right) \right]$$

$\Delta \varphi'$  und  $v''''$  sind die einzigen Bestandteile des Vektors  $\Delta \overline{M}_y^k$ . Dieser Vektor  $\overline{M}_y^k$  muß gemäß Bedingung 2.5.1.1 an jeder Sprungstelle eingearbeitet werden.

### 2.5.3 Sprung in der Trägerlinie

Die Berechnung eines Trägers mit stetig veränderlichen Querschnittswerten ist in der Weise möglich, daß man den wirklichen Träger durch einen gedachten Träger mit abschnittsweise konstanten Querschnittswerten ersetzt.

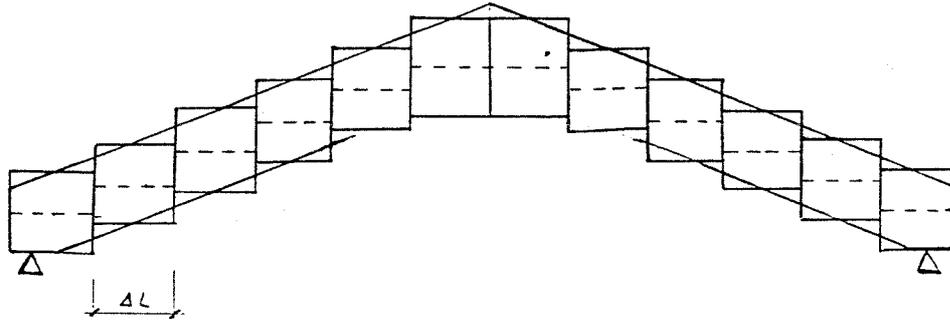


Bild 2.5.3.1

Eine feine Unterteilung (Abtreppung) wird zu wirklichkeitsnahen Ergebnissen führen. Setzt man die beim Runge-Rutta-Verfahren eingeführte Schrittweite  $H$  gleich  $L$  (Bild 2.5.3.1), ist nur ein geringer Mehraufwand gegenüber der Rechnung für Träger mit konstantem Querschnitt nötig. Für jeden Querschnittsprung müssen Übergangsbedingungen berücksichtigt werden. Die seitliche Vorauslenkung  $u_0$  muß dabei beachtet werden.

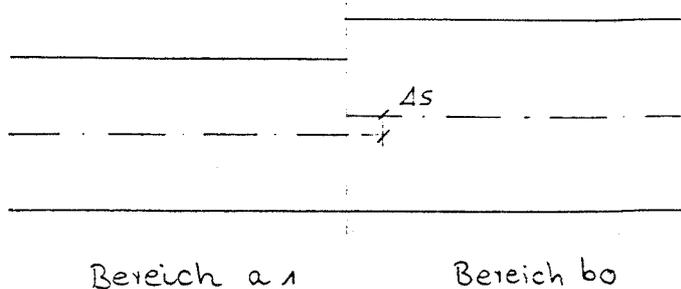
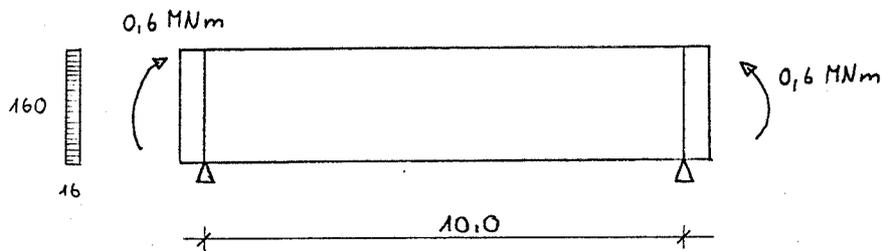


Bild 2.5.3.2

## 2.6 Beispiel (Handrechnung)



$$I_T = 2,047 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$I_z = 5,461 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 11000 \text{ MN/m}^2$$

$$G = 500 \text{ MN/m}^2$$

$$GI_T = 1,024 \text{ MN m}^2$$

$$EI_z = 6,007 \text{ MN m}^2$$

Unterteilung in 4 Elemente mit der  
Schrittweite  $H = 2,50 \text{ m}$

Randbedingungen:  $u = 0$

$$M_y = 0$$

$$\varphi = 0$$

1) Bestimmung des Anfangsvektors (siehe Bild 2.4.5)

Randbedingungen:  $u=0$  ;  $u''=0$  ;  $p=0$

$$\overline{M}_y^{(M_x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-0,6}{6,007 \cdot 1,024} \cdot \frac{2,5^3}{6} \\ 0 \\ \frac{2,5}{1,024} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2,442 \\ 0 \\ -0,254 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}_y^{(u')} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ \left( \frac{0,6^2}{6,007 \cdot 1,024} - \frac{0}{6,007} \right) \frac{2,5^3}{6} \\ 0 \\ \frac{0,6}{1,024} \cdot 2,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ -0,152 \\ 0 \\ 1,465 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{M}_y^{(Q_y)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left( \frac{0,6 \cdot 0}{6,007 \cdot 1,024} - \frac{1}{6,007} \right) \frac{2,5^2}{6} \\ 0 \\ \frac{0}{1,024} \cdot 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,433 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12

(außermittige  
last)

0
0
0
0
0
0

Werden mit Hilfe der 4 Anfangsvektoren und dem  
GLs-System 4.3.2 / 4.3.3 (Teil 1) die Anfangswert-  
aufgaben mittels Runge - Kutta - Verfahren gelöst,  
ergeben sich folgende Endvektoren:

Anmerkung: Es werden nur Endvektoren ermittelt, deren  
zugehörige Anfangswerte von Null verschieden  
sind.

Endvektor 1

$$\bar{y}_E^{(M_x)} = \begin{bmatrix} - 12,103 \\ - 7,288 \\ - 0,833 \\ 0,191 \\ 2,668 \\ - 1,831 \end{bmatrix}$$

Endvektor 2

$$\bar{y}_E^{(v')} = \begin{bmatrix} 2,738 \\ - 1,873 \\ - 0,500 \\ 0,114 \\ 1,601 \\ - 1,099 \end{bmatrix}$$

Endvektor 3

$$\overline{M}_E^{(Q_y)} = \begin{bmatrix} -20,646 \\ -12,432 \\ -1,421 \\ 0,325 \\ -12,115 \\ -7,290 \end{bmatrix}$$

Endvektor 4

$$\overline{M}_E^{(\text{außermittige Last})} = \begin{bmatrix} 0,030 \\ 0,032 \\ 0,011 \\ 0,001 \\ 0,018 \\ 0,019 \end{bmatrix}$$

Umrechnung der Endvektoren in Kraft- und geometrische Größen mit Hilfe der Nebenbedingungen 2.2.1 bzw. der Transformationsmatrix 2.4.3.

Endvektor  $\overline{MP}^{(Mx)}$

$$U = -12,103 = -12,103$$

$$U' = -\frac{7,288}{2,5} = -2,917$$

$$M_z = -6,007 \cdot \frac{2}{2,5^2} \cdot (-0,833) - 0,6 \cdot 2,668 = 0$$

$$Q_y = -6,007 \cdot \frac{6}{2,5^3} \cdot 0,191 - \frac{0,6}{2,5} \cdot (-1,831) - 0 \cdot 2,668 = 0$$

$$\varphi = 2,668$$

$$M_x = \frac{-1,831}{2,5} \cdot 1,024 - \frac{0,6}{2,5} \cdot (-7,288) = 0,999$$

$$\overline{MP}^{(Mx)} = \begin{bmatrix} -12,103 \\ -2,917 \\ 0 \\ 0 \\ 2,668 \\ 0,999 \end{bmatrix}$$

$$\overline{MP}^{(U')} = \begin{bmatrix} 2,731 \\ -0,751 \\ 0 \\ 0 \\ 1,601 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{MP}^{(Q_y)} = \begin{bmatrix} -20,666 \\ -4,977 \\ 10,000 \\ 1,000 \\ -12,115 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{MP}^{(\text{aufgemittelt})} = \begin{bmatrix} 0,003 \\ 0,0013 \\ -0,003 \\ -0,0006 \\ 0,002 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich das Gleichungssystem 2.3.1

$$\begin{bmatrix} U_E = 0 \\ M_{yE} = 0 \\ \varphi_E = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20,66 & 2,731 & -12,12 \\ 10 & 0 & 0 \\ -12,1 & 1,601 & 2,668 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0' \\ Q_{z0}' \\ \varphi_0' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,030 \\ 0,032 \\ 0,018 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses GL-Systems führt zu folgendem Anfangsvektor:

$$\begin{bmatrix} U_0' \\ Q_{z0}' \\ \varphi_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,334 \cdot 10^{-2} \\ 3,229 \cdot 10^{-3} \\ 1,045 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Dieser Vektor wird wiederum mittels der Transformationsmatrix 2.4.3 umgerechnet, da für die erneute Benutzung des Runge-Kutta-Schemas zur Berechnung der Verformungen nur geometrische Größen vorhanden sein dürfen.

(siehe Transformationsmatrix)

$$U_0' = 1,334 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 = \underline{3,335 \cdot 10^{-2}}$$

$$\begin{aligned} Q_{z0}' &= -\frac{0,6^2}{1,024 \cdot 6,007} \cdot \frac{2,5^3}{6} \cdot 1,334 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{6,007} \cdot \frac{2,5^3}{6} \cdot 3,229 \cdot 10^{-3} \\ &\quad - \frac{0,6}{1,024 \cdot 6,007} \cdot \frac{2,5^3}{6} \cdot 1,045 \cdot 10^{-5} = \underline{-3,436 \cdot 10^{-3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0' &= \frac{0,6}{1,024} \cdot 2,5 \cdot 1,334 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{1,024} \cdot 2,5 \cdot 1,045 \cdot 10^{-5} \\ &= \underline{1,956 \cdot 10^{-2}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der gesamte Anfangsvektor für das Runge - Kutta - Verfahren zu :

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_0' \\ Q_z' \\ M_y \\ \varphi \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,335 \cdot 10^{-2} \\ 0 \\ -3,436 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 1,956 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Wird mit Hilfe dieses Anfangsvektors und den Gleichungen 4.3.2 / 4.3.3 das Anfangswertproblem gelöst, führt dies in der Mitte des Trägers zu den Verformungen

$$u(5,00) = 0,0425 \text{ m}$$

und  $\varphi(5,00) = 0,0248$

Wird der Träger in 20 Intervalle unterteilt, wird

$$u(5,00) = 0,0426 \text{ m}$$

und  $\varphi(5,00) = 0,0250$

Die exakte Lösung für diesen Sonderfall würde zu folgenden Werten führen :

$$u(5,00) = 0,0426$$

$$f(5,00) = 0,0250$$

Man erkennt, daß bereits bei einer Unterteilung des Trägers in 4 Elemente eine gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung erreicht wird.

### 3 Rechenhilfe

#### 3.1 Allgemeines

Das in Abschnitt 2 beschriebene Reduktionsverfahren ist für eine Programmierung geeignet, da wiederkehrende Rechenoperationen auftreten. Eine Handrechnung wird bei einer feinen Elemententeilung, wie sie für Satteldachträger erforderlich ist, sehr aufwendig.

Es wurde ein Programm auf der Grundlage von (2) entwickelt, das die Bearbeitung von Problemen, wie sie in der Aufgabenstellung verlangt werden, gestattet. Diese Einschränkung bezieht sich hauptsächlich auf die vereinfachte Eingabe, da das programmierte Rechenverfahren allgemeingültig ist.

Das Programm ist auf IBM-AT kompatiblen Rechnern, die mit einem Coprozessor ausgestattet sind, lauffähig.

### 3.2 Programmbeschreibung

Die Eingabe des Programms erfolgt einheitenfrei im Dialog. Es werden sämtliche erforderliche geometrische Daten sowie Schub- und Elastizitätsmodul abgefragt. Notwendige Querschnittsbeiwerte ( $A$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_T$ ) errechnet das Programm. Wird die Frage "Berechnung eines Einfeldträgers" mit "ja" beantwortet, werden sämtliche zur Rechnung notwendige Schnittgrößen bestimmt. Es muß lediglich die Größe und der Angriffspunkt der Gleichstreckenlast angegeben werden. Wird obige Frage mit "nein" beantwortet, müssen die Schnittgrößen aller Knotenpunkte angegeben werden. Sollen elastisch gelagerte Trägerpunkte in die Rechnung eingefügt werden, muß eine Aussage über die Federsteifigkeit  $C_V$  und deren Angriffshöhe getroffen werden. Eine seitliche, sinusförmige Vorauslenkung mit einem mittleren Stich von  $1/577$  wird programmseitig berücksichtigt. Bei der Berechnung von Trägern in Satteldachform braucht keine Angabe über die Lastangriffshöhe gemacht zu werden, da programmintern von einem Lastangriff an Trägeroberkante ausgegangen wird.

Die Ausgabe des Programms enthält die seitliche Auslenkung  $v(x)$  und die Verdrehung  $\varphi(x)$ . Weiterhin wird die gesamte Verbandsverformung  $u(x) + \varphi(x) \cdot 1/2 \cdot \text{Trägerhöhe}$  und die Verbandsverformung abzüglich der Vorauslenkung angegeben. Hier wird stets davon ausgegangen, daß der Verband an Trägeroberkante angreift.

Im Anschluß an diese Werte wird die "Genauigkeit des Differentialgleichungssystems" ausgegeben. Dieser Wert ergibt sich durch Einsetzen der Ergebnisvektoren am Ende jedes Elementes in das Ausgangsgleichungssystem 4.3.2/4.3.3, Teil 1. Das "schlechteste" Ergebnis wird angegeben. Genauigkeitssteigerungen lassen sich durch eine Verkleinerung der Schrittweite erzielen. Es ist eine Unterteilung in bis zu 800 Elemente möglich.

Sind im Eingabeteil elastisch gelagerte Trägerpunkte angegeben worden, werden die an diesen Punkten auftretenden

Kräfte angegeben. Auch hier wird unterstellt, daß diese Punkte an der Trägersoberkante liegen.

### 3.3 Einschränkungen, Seitenlasten

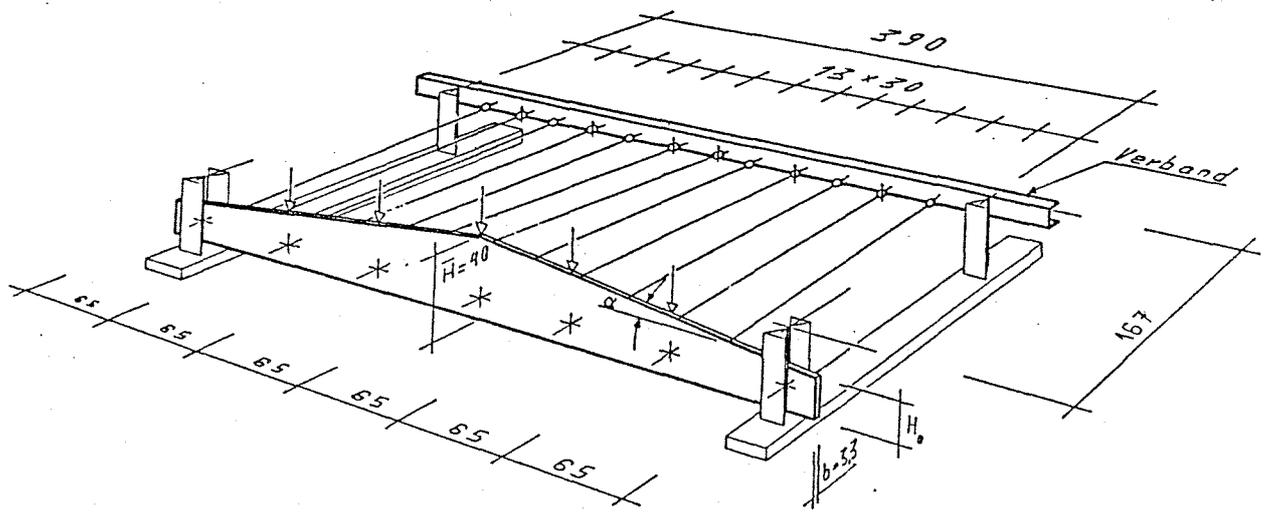
Entsprechend der DIN 1052 können nur Satteldachträger mit einer Ober- und Untergurtneigung von maximal  $20^\circ$  untersucht werden.

Die Seitenlast wird bei elastisch gelagerten Trägerpunkten unmittelbar an den entsprechenden Punkten in Form von Einzellasten im Ausdruck angegeben. Verfügt der zu untersuchende Träger über keine elastisch gehaltenen Trägerpunkte, kann aus der Verformungslinie mittels eines geeigneten Verfahrens (z.B. Differenzenverfahren) die Größe der Seitenlast bestimmt werden.

Aufgrund der Einschränkungen in der Eingabe des Programms können prinzipiell nur Einfeldträger mit zwei Gabelagerungen untersucht werden. Da jedoch die Möglichkeit besteht Endmomente an den Auflagerpunkten anzugeben, kann ein Teil eines Mehrfeldträgers simuliert werden.

#### 4 Beispiel zur Überprüfung

Es wird der in Bild 4.1 dargestellte Träger in Satteldachform mit Hilfe des in Abschnitt 3.2 beschriebenen Programms untersucht. Über den, in diesem Bild dargestellten Versuchsaufbau liegen Ergebnisse über die Durchbiegung des Verbandes und der Verdrehung des Trägers vor (siehe [3]).



alle Maße in cm

Bild 4.1: Hauptversuche ; Versuchsaufbau und Belastung

\*\*\*\*\*

15.3.1989

\*\*\*\*\*

Berechnung eines Einfeldträgers

Satteldachträger mit folgenden Kennwerten:

Auflagerhöhe : 0.267	Trägerbreite : 0.033	Trägerlänge : 3.900
Obergurtneigung : 4.00	Untergurtneigung : 0.00	Biegeradius : 0.000

Trägerpunkt	Biegemoment
0.000	0.000000
0.300	0.004419
0.600	0.008102
0.900	0.011048
1.200	0.013258
1.500	0.014731
1.800	0.015468
2.100	0.015468
2.400	0.014731
2.700	0.013258
3.000	0.011048
3.300	0.008102
3.600	0.004419
3.900	0.000000

Trägerpunkt	Last	Querkraft
0.000	0.008184	0.015959
0.300	0.008184	0.013504
0.600	0.008184	0.011048
0.900	0.008184	0.008593
1.200	0.008184	0.006138
1.500	0.008184	0.003683
1.800	0.008184	0.001228
2.100	0.008184	-0.001228
2.400	0.008184	-0.003683
2.700	0.008184	-0.006138
3.000	0.008184	-0.008593
3.300	0.008184	-0.011048
3.600	0.008184	-0.013504

Feld	Schrittweite
1	70.000000
2	70.000000
3	70.000000
4	70.000000
5	70.000000
6	70.000000
7	70.000000
8	70.000000
9	70.000000
10	70.000000
11	70.000000
12	70.000000
13	70.000000

Trägerpunkt	Federsteifigkeit
0.000	0.000000
0.300	0.200000
0.600	0.001000
0.900	0.008000
1.200	0.021000
1.500	0.020000
1.800	0.020000
2.100	0.020000
2.400	0.020000
2.700	0.021000
3.000	0.008000
3.300	0.001000
3.600	0.200000
3.900	0.000000

Ergebnisse  
\*\*\*\*\*

Verformungen  
-----

	U	Phi	U+Phi*H/2	U+Phi*H/2-Uo
0.000	-0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.004	-0.000004	0.000126	0.000013	-0.000015
0.150	-0.000109	0.004395	0.000501	-0.000463
0.154	-0.000111	0.004520	0.000516	-0.000475
0.296	-0.000097	0.008702	0.001155	-0.000733
0.300	-0.000096	0.008830	0.001174	-0.000740
Die Federkraft bei 0.300 beträgt: -0.000148				
0.300	-0.000095	0.008830	0.001177	-0.000737
0.304	-0.000094	0.008902	0.001189	-0.000753
0.450	0.000076	0.011519	0.001795	-0.001041
0.454	0.000081	0.011602	0.001814	-0.001049
0.596	0.000437	0.014685	0.002704	-0.000989
0.600	0.000449	0.014789	0.002732	-0.000986
Die Federkraft bei 0.600 beträgt: -0.000001				
0.600	0.000451	0.014789	0.002736	-0.000981
0.604	0.000463	0.014893	0.002765	-0.000978
0.750	0.001071	0.018869	0.004086	-0.000458
0.754	0.001090	0.018999	0.004126	-0.000442
0.896	0.001914	0.023678	0.005819	0.000534
0.900	0.001939	0.023831	0.005869	0.000564
Die Federkraft bei 0.900 beträgt: 0.000005				
0.900	0.001943	0.023831	0.005876	0.000571
0.904	0.001967	0.023986	0.005926	0.000600
1.050	0.003034	0.029530	0.008063	0.002074
1.054	0.003063	0.029698	0.008121	0.002114
1.196	0.004242	0.035269	0.010427	0.003859
1.200	0.004273	0.035435	0.010488	0.003904
Die Federkraft bei 1.200 beträgt: 0.000082				
1.200	0.004279	0.035435	0.010499	0.003915
1.204	0.004310	0.035631	0.010565	0.003965
1.350	0.005587	0.041933	0.013167	0.006084
1.354	0.005618	0.042102	0.013229	0.006132
1.496	0.006802	0.046901	0.015520	0.008050
1.500	0.006829	0.047020	0.015569	0.008089
Die Federkraft bei 1.500 beträgt: 0.000162				

1.500	0.006836	0.047020	0.015583	0.008103
1.504	0.006863	0.047198	0.015643	0.008153
1.650	0.007919	0.052024	0.017869	0.010102
1.654	0.007938	0.052125	0.017908	0.010134
1.796	0.008703	0.054018	0.019310	0.011372
1.800	0.008714	0.054031	0.019323	0.011381

Die Federkraft bei 1.800 beträgt: 0.000228

1.800	0.008722	0.054031	0.019339	0.011398
1.804	0.008732	0.054127	0.019368	0.011423
1.950	0.009180	0.055726	0.020414	0.012414
1.954	0.009179	0.055723	0.020413	0.012413
2.096	0.008709	0.053999	0.019321	0.011376
2.100	0.008699	0.053900	0.019290	0.011349

Die Federkraft bei 2.100 beträgt: 0.000227

2.100	0.008691	0.053900	0.019274	0.011333
2.104	0.008680	0.053883	0.019260	0.011322
2.250	0.007868	0.051778	0.017764	0.009996
2.254	0.007848	0.051671	0.017723	0.009962
2.396	0.006807	0.046877	0.015527	0.008037
2.400	0.006780	0.046697	0.015466	0.007986

Die Federkraft bei 2.400 beträgt: 0.000160

2.400	0.006773	0.046697	0.015452	0.007972
2.404	0.006745	0.046576	0.015403	0.007932
2.550	0.005516	0.041556	0.013022	0.005939
2.554	0.005485	0.041385	0.012960	0.005890
2.696	0.004245	0.035251	0.010433	0.003833
2.700	0.004213	0.035055	0.010366	0.003783

Die Federkraft bei 2.700 beträgt: 0.000079

2.700	0.004208	0.035055	0.010356	0.003772
2.704	0.004176	0.034889	0.010295	0.003727
2.850	0.002969	0.029159	0.007930	0.001941
2.854	0.002939	0.028991	0.007872	0.001902
2.996	0.001915	0.023660	0.005820	0.000494
3.000	0.001890	0.023506	0.005770	0.000465

Die Federkraft bei 3.000 beträgt: 0.000004

3.000	0.001887	0.023506	0.005763	0.000458
3.004	0.001862	0.023355	0.005713	0.000429
3.150	0.001027	0.018606	0.003998	-0.000547
3.154	0.001009	0.018479	0.003959	-0.000562
3.296	0.000434	0.014701	0.002706	-0.001036
3.300	0.000422	0.014599	0.002678	-0.001039

Die Federkraft bei 3.300 beträgt: -0.000001

3.300	0.000420	0.014599	0.002674	-0.001044
3.304	0.000408	0.014497	0.002647	-0.001047
3.450	0.000056	0.011405	0.001757	-0.001080
3.454	0.000051	0.011323	0.001740	-0.001071

3.596	-0.000103	0.008859	0.001173	-0.000769
3.600	-0.000105	0.008789	0.001162	-0.000753

Die Federkraft bei 3.600 beträgt: -0.000151

3.600	-0.000106	0.008789	0.001159	-0.000756
3.604	-0.000107	0.008661	0.001140	-0.000748
3.750	-0.000114	0.004376	0.000493	-0.000471
3.754	-0.000111	0.004251	0.000478	-0.000458
3.896	-0.000004	0.000125	0.000012	-0.000015
3.900	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Genauigkeit des Differentialgleichungssystems : 7.19338340696878E-0011

Für die Trägermitte ergibt sich laut Ausdruck bei  $x = 1.95$  eine Verdrehung von 0.0557 und eine Verbandsdurchbiegung von 0.0124 m.

Dies stimmt mit den in Bild 4.2 und 4.3 dargestellten Ergebnissen überein. Es muß jedoch angemerkt werden, daß durch die Wahl der Federkonstanten die Ergebnisse stark beeinflußt werden können.

In dem Programmausdruck ist eine leichte Unsymmetrie zu erkennen. Sie entsteht durch die starke Belastung (nahe dem Eigenwert). Querschnittssprünge machen sich hier, bedingt durch rechte und linke Grenzwerte der Abtreppungen, extrem bemerkbar.

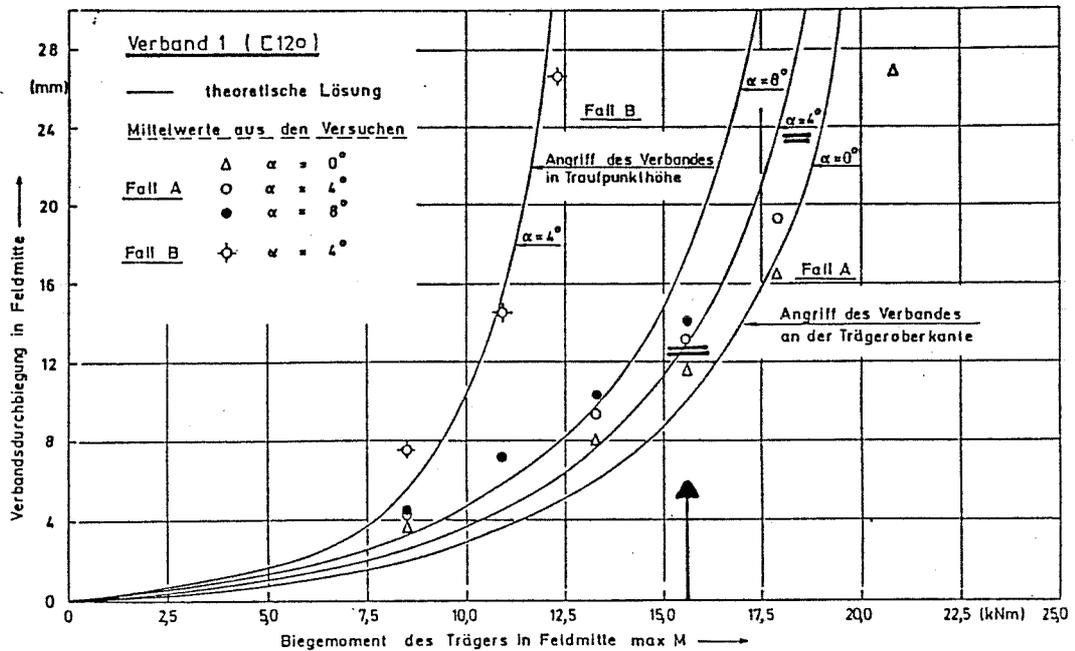


Bild 4.2: Durchbiegung des Auslieferungverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

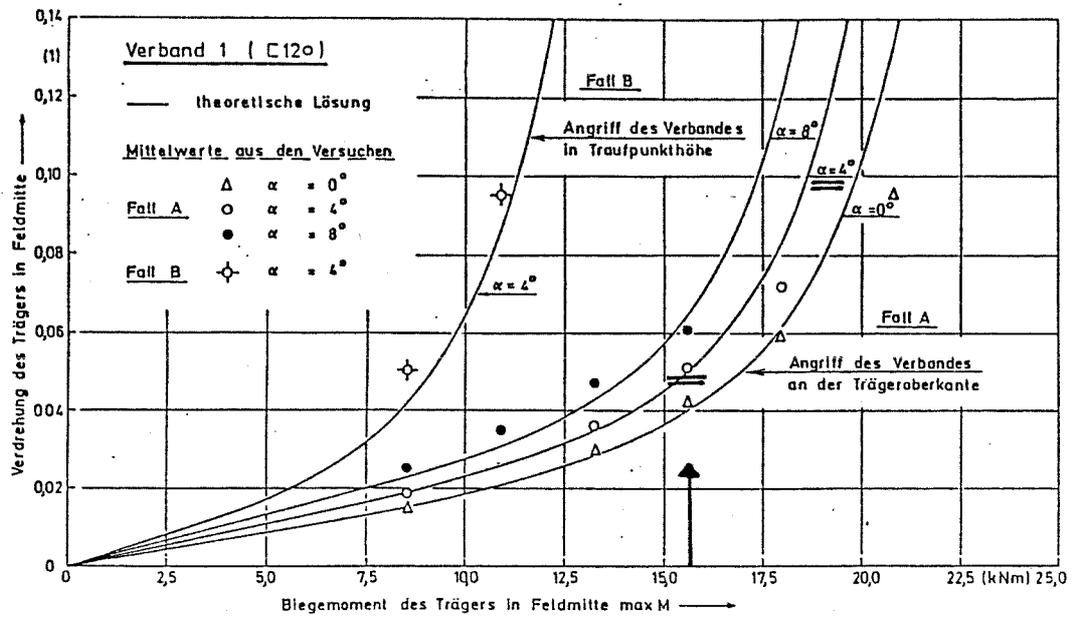


Bild 4.3: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

## 5 Kritische Schlußbetrachtung

Das hier angewandte numerische Integrationsverfahren Runge-Rutta führt für das relativ einfache Differentialgleichungssystem 4.3.2/ 4.3.3, Teil 1, zu guten Ergebnissen, da im Programm mit einer Genauigkeit von 19 Dezimalstellen gearbeitet wird. Bei Verwendung eines modernen Personalcomputers werden auch für umfangreiche und schwierige Probleme die Lösungen nach kurzer Rechenzeit geliefert. Das Rechenverfahren bzw. Programm eignet sich somit zur Lösung der im ersten Kapitel aufgezeigten Anforderungen.

Vergleichsrechnungen für parallelgurtige und schwach geneigte Träger zeigen, daß die Berechnung der Kippstabilität und der Seitenlast mit den Ergebnissen bekannter Rechenverfahren und durchgeführter Versuche hinreichend genau übereinstimmt [3].

An der Stelle der Abstützung muß deren Federkonstante  $C_v$  eingegeben werden. Wird die Abstützkraft in einen Verbandsträger, der beispielsweise als Fachwerk ausgebildet sein kann, eingeleitet und hat der Verband die Steifigkeit  $EI$ , so ist die Federkonstante  $C_v$  eines Abstützpunktes mit derjenigen der übrigen Abstützpunkte gekoppelt. Sie ist unter anderem auch von der Form der Belastung abhängig.

Zur Ermittlung der Federkonstanten  $C_v$  bei einer Abstützung gegen Verbände sind somit noch weitere theoretische Untersuchungen erforderlich.

## Literatur

- [1] DIN 1052; Ausgabe April 1988; Beuth Verlag GmbH, Berlin
- [2] Unger, B.; Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfachsymmetrischen, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt; Dissertation Darmstadt 1969
- [3] Möhler, K.; Knickaussteifungen von Brettschichtträgern mit veränderlichem Querschnitt; Universität Karlsruhe (TH)

## Buckling and bracing of glued laminated beams

### summary report

The equation system has been solved with respect to the buckling tendency of a laminated beam by means of a mathematical method for the solution of differential calculus systems (multiple shooting method). The choice of this computing method allows to consider forked and punctiform intermediate supports. The results of this investigation have been extended according to the calculation methods shown in "DIN 1052 - timber structures", edition april 1988.

All results for beams with intermediate supporting show favorable dimensioning as required within the specifications. The forked support which is required in that DIN is performed automatically in having punctiform support only. The reason for this certainly is given by the assumption of predeformation (polyphase sinecurve), which nevertheless is relevant for the buckling tendency of the beam.

It is remarkable that the method of calculation shown in DIN even in missing the forked support of the intermediate supportings leads to a reliable dimensioning. This statement only applies to intermediate support with the assumption of sufficient stiffness, independent of its construction.

Further aims of the research work were the determination of component forces for tapered and cambered beams and for parallel laminated beams stressed by constant load and endmoments.

It seemed advisable to develop a calculation method (reduction method) to solve the differential equation system named in the first paragraph.

On the basis of this method of calculation a program was made up, which immediately shows the component forces at the supporting points, if the stiffness of the springs are known.

Further research work is necessary to find out the stiffness values of supports, which are part of bracing structures in the form of beams or trusses. In this case the stiffness parameters depend on the properties of the neighbored spring and also on the form of loading.

Solingen, March 1989

A handwritten signature in cursive script, appearing to read 'Brüninghoff', with a horizontal line above it.

Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Brüninghoff

A handwritten signature in cursive script, appearing to read 'T. Mitzenheim', with a horizontal line below it.

Dipl.-Ing. T. Mitzenheim