

Rechnerische Untersuchung
des Verankerungsbereiches von
Spannbetonhohlplatten mit Hilfe der
Finite-Elemente-Methode

T 2266

T 2266

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

GhK

**Gesamthochschule
Kassel · Universität**

**Fachbereich 14
Bauingenieurwesen**

Rechnerische Untersuchung
des Verankerungsbereiches von Spannbetonhohlplatten
mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode

Manfred Keuser
Gerhard Mehlhorn

Prof. Dr. Ing. Gerhard Mehlhorn

Massivbau

Rechnerische Untersuchung
des Verankerungsbereiches von Spannbetonhohlplatten
mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode

Manfred Keuser
Gerhard Mehlhorn

Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben
"Schubspannungen aus Spannkrafteinleitung"

Nr. 15
Forschungsbericht aus dem Fachgebiet Massivbau der GhK
1990

Vorbemerkung:

Für die Förderung sei auch an dieser Stelle dem Institut für Bautechnik und der Betreuungsgruppe, bestehend aus den Herren Prof. Dr. Bechert, Prof. Dr. Plähn und Dipl.-Ing. Krüger gedankt.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
1.1 Allgemeines	1
1.2 Problemstellung	2
2. Berechnungsmodell	4
2.1 Allgemeine Bemerkungen zur Finiten-Element-Methode	4
2.2 Verwendete Elementtypen	5
2.2.1 Elemente für Beton und Stahl	5
2.2.2 Isoparametrisches Kontaktelement	6
2.3 Verbund- und Werkstoffmodelle	12
2.3.1 Verbundmodell	12
2.3.2 Werkstoffmodelle für Stahl und Beton	15
2.4 Elementnetze	17
2.4.1 Scheibenmodell	17
2.4.2 Räumliches Modell	19
3. Ergebnisse der Untersuchungen am Scheibenmodell	22
3.1 Voruntersuchungen	22
3.2 Schubspannungen im Stegbereich	25
3.2.1 Einfluß der minimalen Stegbreite	25
3.2.2 Einfluß der Plattendicke d_0	30
4. Ergebnisse der Untersuchungen am räumlichen Modell	40
5. Zusätzliche Untersuchungen an einem modifizierten Scheibenmodell	44
6. Näherungsverfahren für die Ermittlung der Schubspannungen im Verankerungsbereich	45
6.1 Beanspruchung aus äußeren Lasten	47
6.2 Beanspruchung aus der Einleitung der Vorspannkraft	48
6.3 Nachweis	57
6.4 Beispiel	58
7. Zusammenfassung	73
LITERATUR	74

1. Einleitung

1.1 Allgemeines

Im Zuge einer zunehmenden Rationalisierung von Bauverfahren gewinnt im Hochbau die Verwendung vorgefertigter Elemente zur Herstellung von Decken an Bedeutung. Dabei stellen Spannbetonhohlplatten, bei denen auf nicht vorgespannte Bewehrung vollständig verzichtet wird, eine besonders unter herstellungstechnischen Gesichtspunkten interessante Lösung dar. Dieser Plattentyp kann mit konstantem Querschnitt in großen Längen im Spannbett hergestellt und anschließend nach Bedarf in die erforderlichen Platten-
größen getrennt werden.

Da die Verankerung der Vorspannlitzen ausschließlich über Verbund geschieht, stellt der Verankerungsbereich einen hinsichtlich der Standsicherheit der Platten kritischen Punkt dar und verlangt besondere Aufmerksamkeit. Bisher wurde zur Festlegung der zulässigen einzuleitenden Vorspannkraft die empirisch gewonnene "Rüsch-Formel" verwendet, die die maximale Vorspannkraft in Abhängigkeit von der minimalen Stegdicke angibt. Die Anwendung dieser Formel in der Baupraxis führte in der Vergangenheit zu einer sicheren Bemessung, schränkte jedoch den Anwendungsbereich von Spannbetonhohlplatten auf größere Spannweiten durch die Begrenzung der Vorspannkraft ein. In jüngster Zeit wird nun angestrebt, den Anwendungsbereich durch eine Erhöhung der zulässigen einzuleitenden Vorspannkraft zu erweitern. Da hiermit der bisherige Erfahrungsbereich verlassen wird, ist dies nicht ohne eine genauere rechnerische Untersuchung und eine experimentelle Absicherung möglich. Eine Berechnung nach der Technischen Biegelehre scheidet aus, da es sich hier um die Überlagerung der beiden örtlichen Lasteinleitungsprobleme Vorspannung und Auflagerkraft handelt. Eine geschlossene analytische Ermittlung des Spannungszustandes im Verankerungsbereich ist für ein linear-elastisches Materialverhalten und eine Reduzierung des räumlichen Problems auf eine ebene Betrachtungsweise bereits sehr aufwendig. Daher wird eine numerische Lösung nach der Finite-Elemente-Methode vorgezogen. Dies erlaubt zum einen die realistische Abbildung der Geometrie des Plattenquerschnitts und der Vorspannlitzen sowie der Material- und Verbundeigenschaften. Darüber hinaus ist auch die Untersuchung räumlicher Spannungszustände möglich, wobei dies jedoch mit einem hohen Berechnungsaufwand verbunden ist.

1.2 Problemstellung

Zur rechnerischen Ermittlung des Spannungszustandes im Verankerungsbereich von Spannbetonbalken geben Plähn/Kröll/1/ eine analytische Lösung an. Diese ist jedoch zahlreichen Einschränkungen wie z.B. linear-elastisches Materialverhalten unterworfen. Walraven/Mercx/2/ untersuchen verschiedene Versagensarten von Spannbetonhohlplatten experimentell und entwickeln Formeln zur Ermittlung der maximalen Vorspannkraft für die einzelnen Versagensarten. Ein ausführlicher Überblick über Bemessungsgrundlagen für Spannbetonhohlplatten wird in /3/ gegeben.

Erste eigene Untersuchungen von Spannbetonhohlplatten mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode sind in /4/ veröffentlicht. Dabei handelt es sich um Berechnungen, die an Spannbetonhohlplatten des Systems VARIAX durchgeführt wurden. Durch einen Vergleich mit Versuchsergebnissen wird die Brauchbarkeit eines Scheibenmodells zur Ermittlung der Schubspannungen im Verankerungsbereich infolge Querkraft und Vorspannung gezeigt. Eine solche ebene Berechnung liefert jedoch keine Aussage über die Spannungen in Dicken- und Querrichtung der Platte, so daß zur Untersuchung der Sprengwirkung und der Stirnzugspannungen eine räumliche Berechnung erforderlich wird.

Im Rahmen dieses Forschungsvorhabens werden die folgenden Punkte untersucht:

1. Schub- und Hauptzugspannungen in den Stegen im Verankerungsbereich der Hohlplatten infolge Querkraft und Einleitung der Vorspannkraft. Gemäß DIN 4227, Teil 1, Abschnitt 12.6, ist die im Bereich der Eintragungslänge e auftretende Spaltzugkraft stets durch Bewehrung abzudecken. Hierbei ist es jedoch nicht erforderlich, die Zugkräfte aus Schub und Spaltzug zu addieren, wenn örtlich die jeweils größere Zugkraft durch Bügel abgedeckt wird. Diese Vorgehensweise beruht auf Versuchsergebnissen und theoretischen Überlegungen von Kupfer und Ruhnau /5/.

Die ausreichende Verankerung durch Verbund gilt nach DIN 4227, Teil 1, Abschnitt 14.2, Absatz a) als nachgewiesen, wenn die Hauptzugspannung σ_1 im Abstand von $0,5 d_0$ vom Auflagerrand die zulässigen

Werte nach Tab. 9, Zeile 49 bzw. 50 nicht überschreitet. Auf die Ermittlung der Hauptzugspannung wird in der DIN nicht weiter eingegangen.

Wird auf die Bewehrung gem. Abschnitt 12.6 verzichtet, muß die Hauptzugspannung vom Beton übernommen werden. Ein Fachwerkmodell mit Schubrisen, wie es der Bemessung der Schubbewehrung nach DIN 4227 zugrunde liegt, ist daher nicht mehr möglich. Im Rahmen eigener Untersuchungen /4/ für das Zulassungsgutachten für VARIAX-Spannbetonhohlplatten wurde der Verlauf der Schub- und schiefen Hauptzugspannungen im Auflagerbereich an einigen Plattentypen untersucht. Die Berechnungen erfolgten mit dem Finite-Elemente Programmsystem ADINA. Das nichtlineare Werkstoffverhalten von Beton und Bewehrung wurde hierbei berücksichtigt. Für die Erfassung der Verbundwirkung zwischen Beton und Bewehrung wurden Verbundelemente entwickelt und in das Programm ADINA implementiert. Die Schubspannungen infolge Querkraft und Vorspannung sind von der Querschnittsform und von der Spanngliedlage im Querschnitt abhängig, wobei jedoch die Maximalwerte der beiden Schubspannungen im allgemeinen nicht zusammenfallen. Deshalb ist eine Addition der Maximalwerte nur in Sonderfällen erforderlich.

Aufbauend auf den bisherigen Untersuchungen soll durch eine Parameterstudie Datenmaterial geschaffen werden, auf dessen Basis die "Rüsch-Formel", die eine empirische Begrenzung der einleitbaren Vorspannkraft in Abhängigkeit von der minimalen Stegbreite gibt, einer kritischen Überprüfung unterzogen werden soll. Dabei werden die Untersuchungen im wesentlichen auf Plattenstreifen mit Plattendicken von $d_0 = 15/25/35$ cm und minimalen Stegbreiten $b_0 = 2,5/4,0/6,0$ cm beschränkt. Außerdem wird die Übertragungslänge variiert, indem verschiedene Verbundqualitäten infolge der Oberflächenbeschaffenheit der Spannglieder (Litzen, gerippte Drähte) untersucht werden. Ziel ist es, einen einfachen, mechanisch zu begründenden Formel Ausdruck zur Begrenzung der Vorspannkraft zu entwickeln.

Neben der Beanspruchung des Stegbereiches sind bei den Spannbetonhohlplatten zwei weitere Punkte für die Standsicherheit von besonderer Bedeutung:

2. Die Sprengwirkung durch die Spannlitzen oder -drähte, die in deren unmittelbarer Umgebung zu einem Aufspalten des Betons führen kann.
3. Die Stirnzugspannungen, die beim Wirksamwerden der Vorspannung in den Endflächen entstehen.

Diese beiden Beanspruchungen erfordern dreidimensionale Untersuchungen. Der Aufwand für diese Untersuchungen übersteigt den Umfang dieses Forschungsvorhabens jedoch erheblich. Daher sollen hierzu lediglich Vorüberlegungen angestellt und nur für eine Platte mit $d_0 = 15$ cm und $b_0 = 2,0$ cm eine dreidimensionale FE-Untersuchung exemplarisch durchgeführt werden.

2. Berechnungsmodell

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird zur Berechnung der zwei- und dreiaxialen Spannungszustände, die im Rahmen dieses Forschungsvorhabens untersucht werden, die Finite-Elemente-Methode verwendet. In diesem Abschnitt wird zunächst auf die Grundlagen der Finiten-Elemente-Methode einschließlich der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten hingewiesen. Anschließend werden die verwendeten Elementtypen, insbesondere das Kontaktelement zur Beschreibung der Verbundwirkung erläutert. Nach der Beschreibung des Verbundmodells und der Materialmodelle werden die verwendeten Elementnetze dargestellt.

2.1 Allgemeine Bemerkungen zur Finiten-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode, die im weiteren mit FEM abgekürzt wird, wird bereits seit mehr als 30 Jahren zur Berechnung von Strukturen mit linear elastischem Werkstoffverhalten verwendet. Ursprünglich im Flugzeugbau entwickelt /6/, /7/, fand die FEM eine rasche Ausbreitung auch auf andere Ingenieurdisziplinen und wird seit nunmehr 20 Jahren auch zur Untersuchung von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtigung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten angewandt.

Eine verständliche Darstellung der Grundlagen der FEM ist in der im Rahmen dieses Berichts dafür gebotenen Kürze nicht möglich. Deshalb wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen. Eine allgemeine Einführung in die Begriffswelt der Finiten Elemente wird z.B. sehr anschaulich in /19/ gegeben. Ergänzend dazu wird in /20/ auf die Berücksichtigung der nichtlinearen Gegebenheiten des Werkstoffs Stahlbeton bei Anwendung der FE-Methode eingegangen.

2.2 Verwendete Elementtypen

Die Eignung eines Elements hängt vom jeweils zu behandelnden Problem ab. Die Wahl eines für eine bestimmte Struktur geeigneten Elementtyps ist von grundsätzlicher Bedeutung für eine FE-Anwendung. Deshalb wird in diesem Kapitel auf die für die durchgeführten Berechnungen verwendeten Elemente näher eingegangen.

2.2.1 Elemente für Beton und Stahl

Die Abbildung von Beton und Bewehrung geschieht mittels der in dem verwendeten FE-Programm ADINA /8/ zur Verfügung stehenden Elementbibliothek. Als Betonelemente kommen Scheibenelemente für den ebenen Spannungs- und Dehnungszustand, sowie rotationssymmetrische und allgemeine Volumenelemente für die räumliche Untersuchung zum Einsatz. Zur Idealisierung der Bewehrung werden zusätzlich noch Stabelemente verwendet. Die in ADINA implementierten Elemente basieren u.a. auch auf dem isoparametrischen Elementkonzept, welches eine genaue Approximation von Strukturen mit einer komplizierten Geometrie erlaubt. Je nach Anzahl der Knotenpunkte können die Elementränder gerade oder parabolisch gekrümmt sein, so daß ein Element nahezu jede Form annehmen kann, vgl. Abb. 2.1. Bei Netzverdichtungen, z.B. im Bereich von Spannungsspitzen bieten die isoparametrischen Elemente außerdem die Möglichkeit, Übergangselemente mit unterschiedlicher Zahl von Knotenpunkten an gegenüberliegenden Elementkanten zu verwenden. Für die Stabelemente können lineare, quadratische und kubische Verschiebungsansätze, bei den übrigen Elementtypen lineare und quadratische Verschiebungsansätze gewählt werden. Bezüglich der Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrizen wird auf /9/ verwiesen. Wesentlich ist hierbei, daß die Integration über den Elementbereich wegen der variablen Geometrie nicht mehr in einer geschlossenen Form möglich ist. Statt dessen wird bei der Aufstellung

der Elementsteifigkeitsmatrix und der Berechnung der Knotenkräfte die numerische Integration nach Gauß angewandt.

Die in ADINA implementierten Elemente sind zur Untersuchung physikalisch und geometrisch nichtlinearer statischer und dynamischer Probleme geeignet. Die vorhandenen Elemente werden im Grundkonzept nicht verändert. Modifikationen werden an den Materialmodellen vorgenommen, auf die in Abschnitt 5 eingegangen wird.

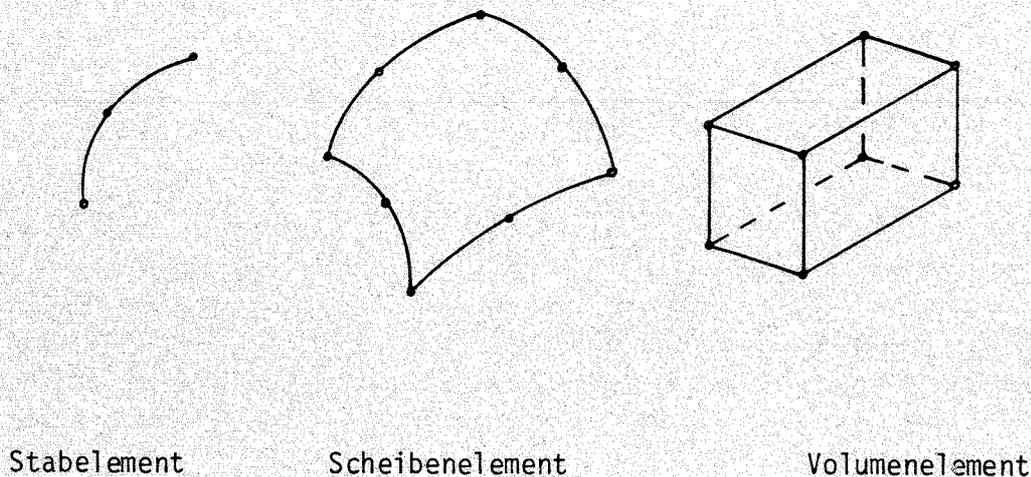


Abb. 2.1 Isoparametrische Elemente

2.2.2 Isoparametrisches Kontaktelement

Zur Berücksichtigung der Verbundwirkung wird das in /10/ entwickelte isoparametrische Verbundelement verwendet. Zum besseren Verständnis werden hier die wichtigsten Grundlagen dieses Elementes erläutert. Eine ausführliche Herleitung kann in /10/ nachgelesen werden.

Das wesentliche Merkmal des isoparametrischen Elementkonzeptes besteht darin, daß sowohl die Geometrie als auch das angenommene Verschiebungsfeld mit Hilfe derselben Formfunktionen beschrieben werden. Eine ausführliche, allgemeine Herleitung wird von Bathe /9/ gegeben. Die Abbildung der Geometrie mit Hilfe der Formfunktionen bietet den großen Vorteil, daß nahezu jede

beliebige Struktur erfaßt werden kann, vgl. Abb. 2.3. Die Elemente können sowohl in zweidimensionalen als auch in rotationssymmetrischen und dreidimensionalen Berechnungen verwendet werden. Hier wird das Element als Linienelement hergeleitet. Die darauf aufbauende Erweiterung auf flächigen Verbund wird in /10/ vorgenommen. Das Element wird für ein beliebiges nichtlineares Verhalten in der Berührungsfläche zwischen den beiden durch das Kontaktelement verbundenen Elemente entwickelt und ist somit nicht auf die Beschreibung des Verbundes zwischen Beton und Stahl beschränkt. So wird z.B. in /11/ das Kontaktverhalten eines GFK-Spannglieds innerhalb der Endverankerung untersucht.

Das eindimensionale Kontaktelement dient zur Verbindung zweier ebener oder räumlicher Elemente entlang einer Elementkante bzw. zum Anschluß eines Stabelementes an einen dieser beiden Elementtypen, vgl. Abb. 2.2.

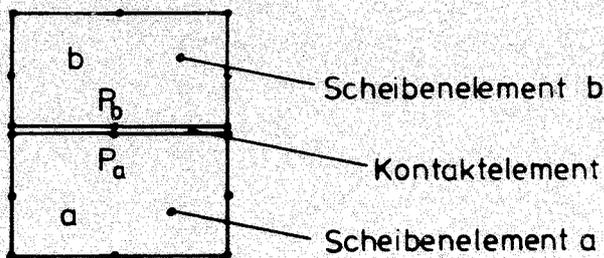


Abb. 2.2 Kontaktelement zwischen zwei Scheiben

Bei der isoparametrischen Formulierung eines Finiten Elementes werden als Unbekannte die Knotenpunktverschiebungen \underline{u} im globalen Koordinatensystem eingeführt. Dies bringt neben der Identifizierung der Unbekannten mit physikalischen Größen erhebliche Vorteile bei der Herleitung und Implementierung eines solchen Elementes in ein Rechenprogramm. Durch diese Zuordnung wird der gewählte Verschiebungsansatz durch die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes festgelegt. Für die eigenen Berechnungen wurden die in Abb. 2.3 dargestellten Elemente mit zwei, drei und vier Doppelknoten

programmiert. In der Kontaktlinie besitzt jedes der beiden miteinander verbundenen Elemente eigene, so angeordnete Knotenpunkte, daß im unverformten Zustand jeweils zwei gegenüberliegende Knotenpunkte P_i und P_k identische Koordinaten besitzen. Verformt sich die Struktur, so treten Relativverschiebungen $\underline{\Delta}$ zwischen den Elementrändern a und b auf, vgl. Abb. 2.4, und es werden Spannungen $\underline{\sigma}$ in der Kontaktlinie geweckt. Da die Verformungen klein gegenüber den Elementabmessungen sind, wird die natürliche Koordinate r auf das unverformte Element bezogen.

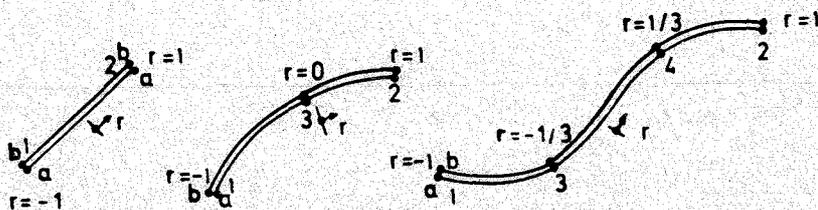


Abb. 2.3 Eindimensionale Kontaktelemente

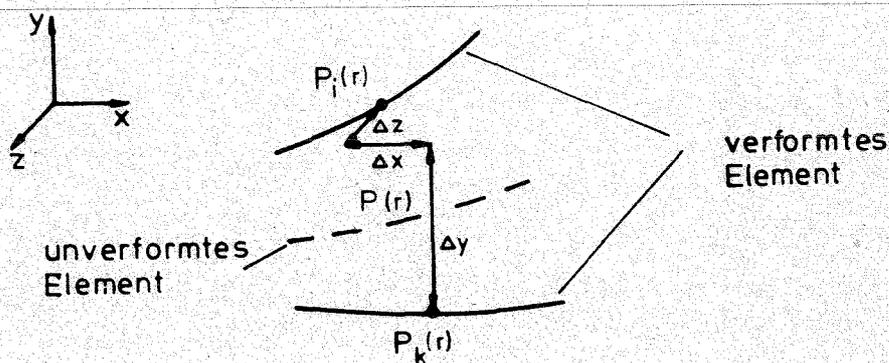


Abb. 2.4 Relativverschiebungen am verformten Element

Die erste der beiden grundlegenden Ideen des isoparametrischen Konzeptes besteht darin, daß die Verschiebungen eines beliebigen Elementpunktes über

die Formfunktion \underline{N} direkt mit den Knotenpunktverschiebungen \underline{u} verknüpft werden. Diese Formfunktionen werden auf die natürliche Koordinate r bezogen, vgl. Abb. 2.3 und sind in /10/ für Elemente mit bis zu vier Doppelknoten angegeben. In allgemeiner räumlicher Formulierung ergeben sich die lokalen Verschiebungen an einem beliebigen Punkt $P(r)$ eines Elementes mit n Doppelknoten nach (2.1).

$$\begin{aligned}u(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot u_i \\v(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot v_i \\w(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot w_i\end{aligned} \quad (2.1)$$

Der zweite Grundsatz besteht darin, die Geometrie mit Hilfe derselben Formfunktionen \underline{N} zu beschreiben. Daher stammt auch die Bezeichnung "isoparametrisch". Die Lage eines beliebigen Punktes des Elementes im globalen Koordinatensystem wird durch die Knotenpunktskoordinaten und die Formfunktionen festgelegt, vgl. (2.2).

$$\begin{aligned}x(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot x_i \\y(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot y_i \\z(r) &= \sum_{i=1}^n N_i(r) \cdot z_i\end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Relativverschiebungen $\underline{\Delta}$ in globalen Koordinaten werden über die Matrix \underline{A} mit den Knotenpunktverschiebungen $\underline{u}(r)$ des Punktes $P(r)$ verknüpft, wobei \underline{A} den Zusammenhang zwischen den globalen und lokalen Koordinaten herstellt.

$$\underline{\Delta} = \underline{A} \cdot \underline{u}(r) \quad (2.3)$$

Gl. (2.1) in (2.3) eingesetzt, stellt die Verbindung zwischen den Knotenpunktverschiebungen \underline{u} und den globalen Relativverschiebungen $\underline{\Delta}$ in der Kontaktfläche her.

$$\underline{\Delta} = \underline{A} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{\Delta} = \underline{B} \cdot \underline{u} \quad (2.4)$$

mit

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{N} \quad (2.5)$$

Analog zu Gl. (2.3) sind die Randspannungen \underline{p} entlang der Elementkanten a und b mit den Kontaktspannungen $\underline{\tau}$ verknüpft.

$$\underline{p} = \underline{A}^T \cdot \underline{\tau} \quad (2.6)$$

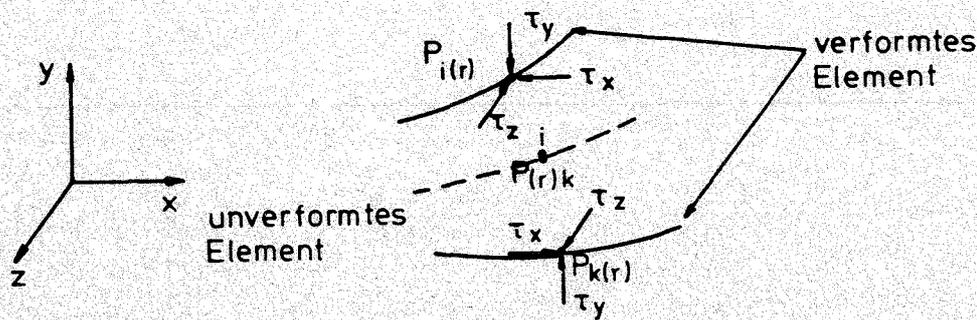


Abb. 2.5 Randspannungen im Doppelknoten $P_{ik}(r)$

In den lokalen Koordinaten des Elements ergibt sich die Beziehung zwischen Relativverschiebungen $\underline{\Delta}$ und Kontaktspannungen $\underline{\tau}$ nach der Gl. (2.7) über die Materialmatrix \underline{C} .

$$\underline{\tau} = \underline{C} \cdot \underline{\Delta} \quad (2.7)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix \underline{k}_m wird mit Hilfe von Gleichgewichtsbetrachtungen nach dem Prinzip der virtuellen Verrückungen aufgestellt. Eine allgemeine Herleitung wird z.B. in /9/ gegeben. Danach ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix \underline{k}_m in allgemeiner Form nach Gl. (2.8). Die Matrix \underline{B} stellt dabei die Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen dar.

$$\underline{k}_m = \int_A \underline{B}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{B} \, dA \quad (2.8)$$

Weiterhin ergeben sich die Knotenkräfte \underline{R}^m an den Elementknoten als Resultanten der Kontaktspannungen $\underline{\sigma}$ nach Gl. (2.9).

$$\begin{aligned}\underline{R}^m &= \int_A \underline{\sigma} \, dA \\ \underline{R}^m &= \int_A \underline{N}^T \cdot \underline{p} \, dA \\ \underline{R}^m &= \int_A \underline{N}^T \cdot \underline{A}^T \cdot \underline{\tau} \, dA \\ \underline{R}^m &= \int_A \underline{B}^T \cdot \underline{\tau} \, dA\end{aligned}\tag{2.9}$$

Die Kontaktspannung $\underline{\tau}$ ist dabei nach Gl. (2.7) einzusetzen. Hierbei wird jeweils über die Kontaktfläche A integriert. Für das hier betrachtete eindimensionale Kontaktelement gilt für dA Gl. (2.10), wobei b die Breite der Kontaktfläche und I die Determinante der Jacobi-Matrix bedeutet. Für das eindimensionale Kontaktelement ergibt sich I als die wahre Länge L des Elementes im globalen Koordinatensystem:

$$dA = b \cdot I \cdot dr\tag{2.10}$$

In der Form von Gl. (2.8) liegt die Elementsteifigkeitsmatrix des Elementes m in globalen Koordinaten vor und kann direkt in die Gesamtsteifigkeitsmatrix eingebaut werden. Dies gilt ebenfalls für die Knotenkräfte infolge der Kontaktspannungen, die zur Ermittlung der Ungleichgewichtskräfte für die Gleichgewichtsiteration benötigt werden.

Die Integration von Gl. (2.8) und (2.9) ist nur für linear elastisches Verhalten in der Kontaktfläche, d.h. für eine konstante \underline{C} -Matrix und einige einfache Fälle der Geometrie mit vertretbarem Aufwand geschlossen lösbar. So ergibt sich für eine isotrope \underline{C} -Matrix bei Verwendung von zwei Doppelknoten die Steifigkeitsmatrix des Kontaktelementes mit linearem Verschiebungsansatz und bei Verwendung von drei Doppelknoten, wobei der dritte Doppelknoten in der Elementmitte liegt, und linearer Geometrie die Steifigkeitsmatrix des Kontaktelementes mit quadratischem Verschiebungsansatz nach Schäfer /12/. Für nichtlineare Beziehungen zwischen den Kontaktspannungen und den Relativverschiebungen und bei gekrümmten Elementen bringt die numerische Integration erhebliche Vorteile. Daher werden die Integrale in Gl. (2.8) und (2.9) numerisch nach der Methode von Gauß gelöst. Die Gauß-Integration wird z.B. in /9/ beschrieben.

2.3 Verbund- und Werkstoffmodelle

2.3.1 Verbundmodell

Für die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix und die Spannungsberechnung ist die Definition des Zusammenhangs zwischen den Relativverschiebungen und den zugehörigen Spannungen in der Kontaktfläche erforderlich. In Abb. 2.5 ist die lokale Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung dargestellt, die für diese Untersuchungen verwendet wurde.

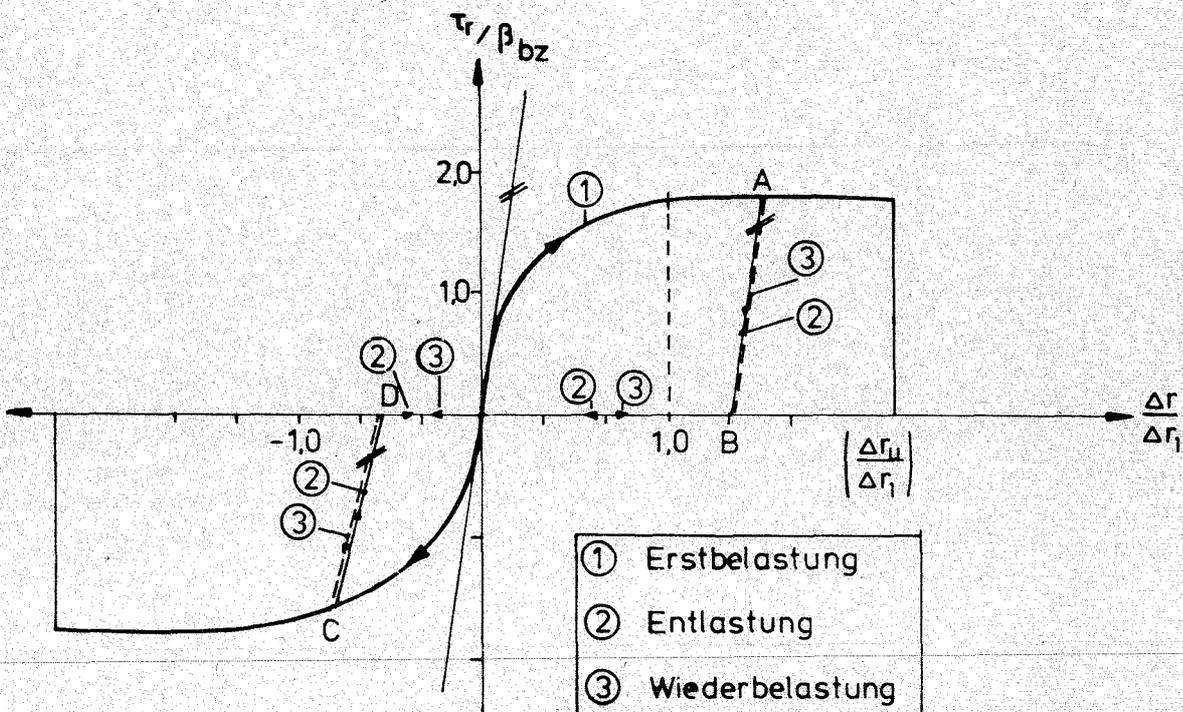


Abb. 2.5 Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung

$$\frac{\tau_r(\Delta r)}{\beta_{bz}} = \begin{cases} \alpha \cdot [5,00 \left(\frac{\Delta r}{\Delta r_1} \right) - 4,50 \left(\frac{\Delta r}{\Delta r_1} \right)^2 + 1,40 \left(\frac{\Delta r}{\Delta r_1} \right)^3] & \text{für } \left(\frac{\Delta r}{\Delta r_1} \right) \leq 1,0 \\ \alpha \cdot 1,85 & \text{für } \left(\frac{\Delta r}{\Delta r_1} \right) > 1,0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Die lokale τ - Δ -Beziehung liegt in dimensionsloser Form vor. Die analytische Formulierung ist in Gl. (2.11) gegeben und basiert auf den experimentellen Untersuchungen von Dörr /13/. Der Faktor α dient zur Berücksichtigung wesentlicher Einflüsse auf das Verbundverhalten. Im einzelnen werden die Profilierung der Bewehrung /15/, /16/, der Querdruck /14/ und die innere "sekundäre" Ribbildung berücksichtigt. Das Verbundmodell ist ausführlich in /10/ beschrieben. Der Parameter für den Rippenfaktor liegt zwischen 0,20 für glatten Stahl und 1,00 für Rippenstahl BSt 420/500, $d_s = 16$ mm, s. Abb. 2.6. Während dieser Wert als feste Eingangsgröße in die Rechnung eingeht, wird der Einflußfaktor für den Querdruck während jedes Rechenschrittes neu ermittelt und liegt zwischen 0 (kein Querdruck) und einem Maximalwert von 2,80, s. Abb. 2.7.

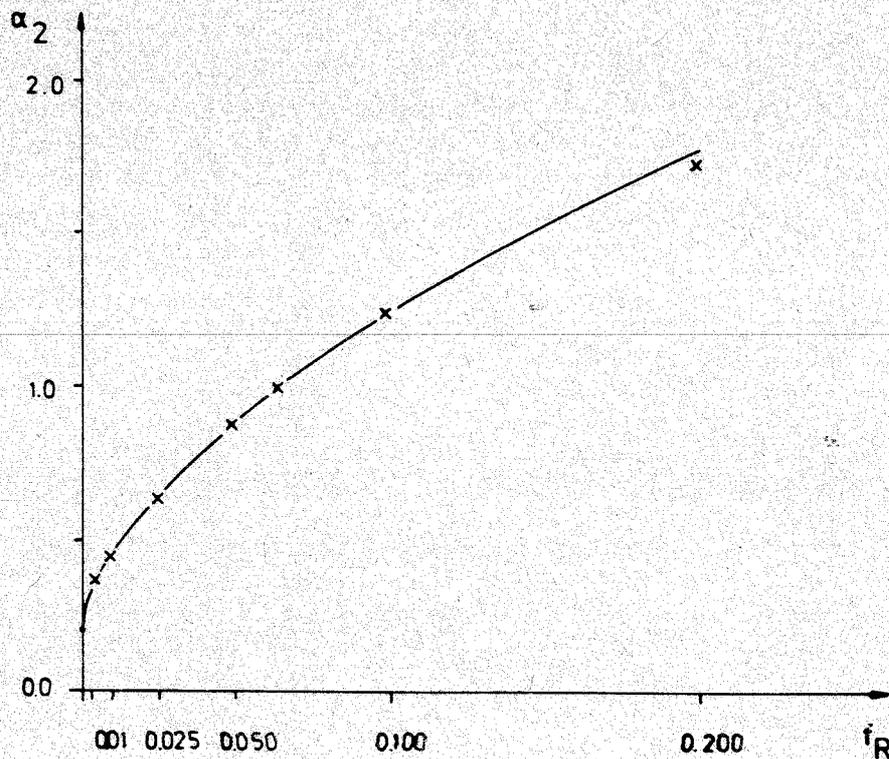


Abb. 2.6 Einfluß des bezogenen Rippenfaktors f_R

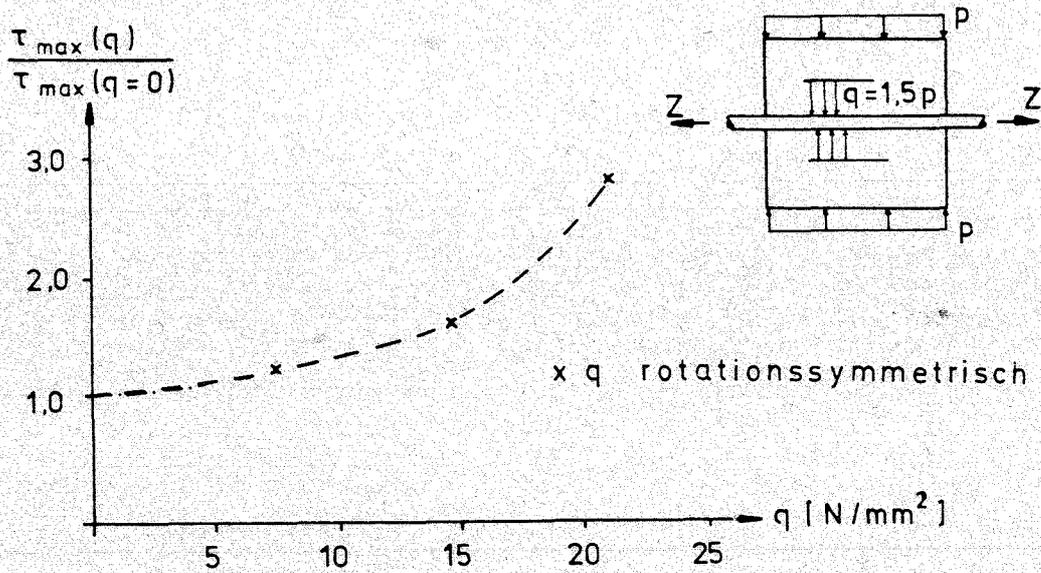


Abb. 2.7 Einfluß von Querdruckspannungen auf die Verbundfestigkeit

Die Eingangsdaten sind bei den Voruntersuchungen in Abschnitt 3.1 angegeben.

Senkrecht zur Schlupfrichtung wird ein nahezu starrer Verbund angesetzt, vgl. Abb. 2.8.

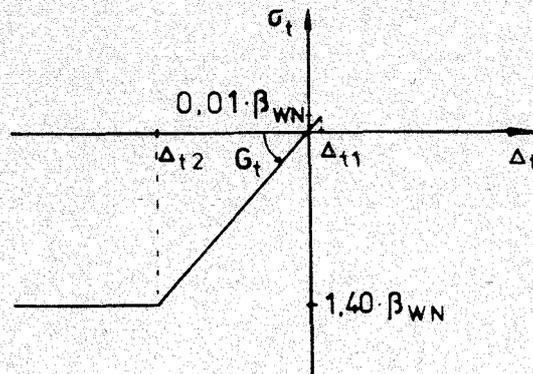
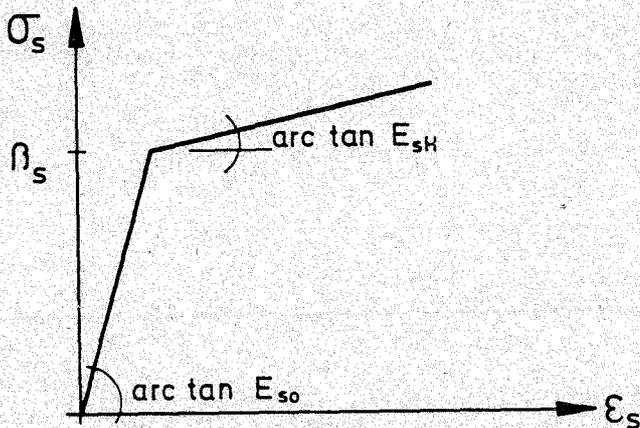


Abb. 2.8 Beziehung zwischen Normalspannung und zugehöriger Relativverschiebung in der Kontaktfläche

2.3.2 Werkstoffmodelle für Stahl und Beton

Für den Spannstahl wird ein elastisch-plastisches Materialgesetz mit der Fließbedingung nach v. Mises verwendet. Da die Spannungen im Spannstahl unterhalb der einaxialen Fließgrenze bleiben, verhält sich der Stahl in der Berechnung linear elastisch.



Materialdaten:

Spannstahl St 1570/1770

$$E_{s0} = 205000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_{sH} = 2050 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu_s = 0,30$$

$$\beta_s = 1570,0 \text{ N/mm}^2$$

Abb. 2.9 Einaxiale Werkstoffbeziehung für den Stahl

Für den Beton wird das von Schmidt-Gönner /17/ modifizierte ADINA-Betonmodell /8/ verwendet. Dabei handelt es sich um ein nichtlineares elastisches Werkstoffmodell für zwei- und dreiaxiale Spannungszustände. Abweichend von der ursprünglich in ADINA implementierten Formulierung wird die einaxiale Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Pucher /18/ verwendet, s. Abb. 2.10, Gl. (2.10).

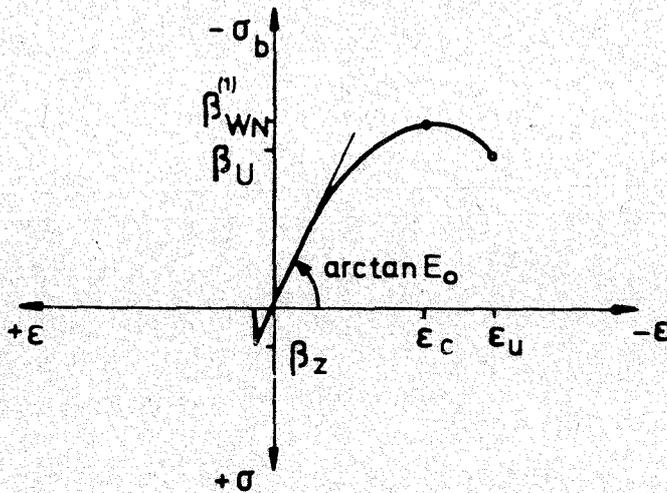


Abb. 2.10 Einaxiale Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

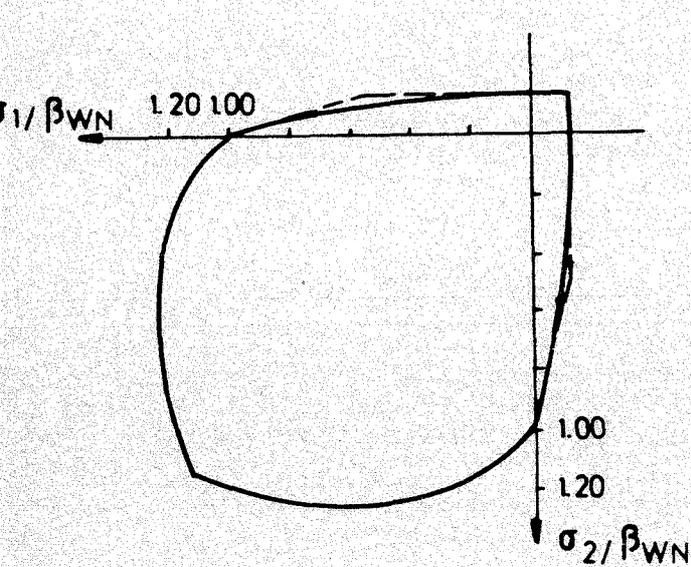
$$\sigma(\epsilon) = \beta_{WN}^{(1)} \cdot [1 - (1 - \epsilon/\epsilon_c)^k] \quad (2.10)$$

mit $k = E_0 \cdot \epsilon_c / \beta_{WN}^{(1)}$

$$E(\epsilon) = E_0 \cdot (1 - \epsilon/\epsilon_c)^{k-1} \quad (2.11)$$

Die zweiaxialen Bruchkurven, d.h. die Grenzkurven für die Betonfestigkeit in Abhängigkeit von zweiaxialen Spannungszustand, sind in Abb. 2.11 gegeben.

Für dreiaxiale Spannungszustände wird im Zugbereich der gleiche Verlauf angesetzt. Die Erhöhung der Druckfestigkeit, die bei dreiaxialem Druck sehr viel ausgeprägter ist als im ebenen Spannungszustand, wird nach /17/ berücksichtigt.



Materialdaten:

Beton B 55
 $\beta_R = 33,0 \text{ N/mm}^2$
 $E_{bo} = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu_b = 0,20$
 $\beta_z = 3,0 \text{ N/mm}^2$

Abb. 2.11 Zweiachsiale Betonfestigkeit - Bruchkurven

2.4 Elementnetze

2.4.1 Scheibenmodell

Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, kann die Untersuchung der Schubspannungsverteilung im Stegbereich mit hinreichender Genauigkeit an einem ebenen Modell, d.h. mit Scheibenelementen durchgeführt werden. Dies reduziert den Aufwand bei der Erstellung und Auswertung der Daten erheblich und erlaubt die Durchführung von Parameterstudien. Variiert werden dabei die Plattendicke von $d_0 = 15/25/35 \text{ cm}$, die Stegbreiten von $b_0 = 2,5/4,0/6,0 \text{ cm}$ sowie den doppelten Werten, die Profilierungseigenschaften des Spannstahls (Rippenfaktor) und die Spannbettvorspannung. Da für sämtliche Plattentypen prinzipiell ähnliche Elementnetze und die gleichen Elementansätze verwendet werden, wird hier lediglich die Platte mit einer Konstruktionshöhe $d_0 = 15 \text{ cm}$ und einer minimalen Stegbreite $b_0 = 2,5 \text{ cm}$ dargestellt, die mit je zwei 3/8"-Litzen pro Steg vorgespannt ist. Während in /4/ ein bilineares Verbundgesetz verwendet wurde, wird hier mit dem in /10/ beschriebenen Verbundmodell der Stufe 2 gerechnet. Dabei handelt es sich um einen Polynomansatz. Der Wert für die bezogene Rippenfläche wird zunächst in einer Parameterstudie ermittelt.

Hierzu wurde ein Scheibenmodell verwendet, bei dem die Elementdicke aus dem Querschnitt der Platte mit $d = 15$ cm bestimmt werden, vgl. Abb. 2.12.

Untersucht wird der Auflagerbereich der Platte, der auf eine Länge von 1,00 m abgebildet wird. Für Beton und Spannstahl werden isoparametrische Scheibenelemente (plane stress) mit quadratischem Verschiebungsansatz in beiden Richtungen verwendet. Damit können die hier besonders interessierenden Schubspannungen relativ gut ermittelt werden. Um die Rechenzeiten zu begrenzen, werden sieben Elementreihen übereinander angeordnet, vgl. Abb. 2.12 und 2.13. Bei dem im Verhältnis zur Plattendicke kleinen Litzendurchmesser führt dies bei den Elementen im Bereich der Litze zu einem maximalen Verhältnis Länge zu Höhe von $3,3 : 1,0$. Die gute Übereinstimmung der Verformungen mit der Lösung nach der Technischen Biegelehre zeigt jedoch, daß dieser ungünstige Wert die Ergebnisse nicht wesentlich beeinflusst. Die Ursache liegt in der Verwendung eines quadratischen Verschiebungsansatzes, der die exakte Wiedergabe eines konstanten Momentverlaufs erlaubt, sowie darin, daß nur zwei Elementreihen ein relativ großes Verhältnis von Länge zu Breite aufweisen. Die Verwendung von Scheibenelementen anstelle von Stabelementen für die Bewehrung führt insbesondere in der Nähe des Auflagers zu einer wirklichkeitsnäheren Erfassung des Tragverhaltens, da dort die Querdehnung des Spannstahls von wesentlicher Bedeutung ist. Der Kontakt zwischen Beton und Spannlitze wird durch Kontaktelemente mit quadratischem Verschiebungsansatz, die an Ober- und Unterkante der Stahlelemente angeordnet sind, hergestellt. Das Elementnetz ist in Abb. 2.13 dargestellt.

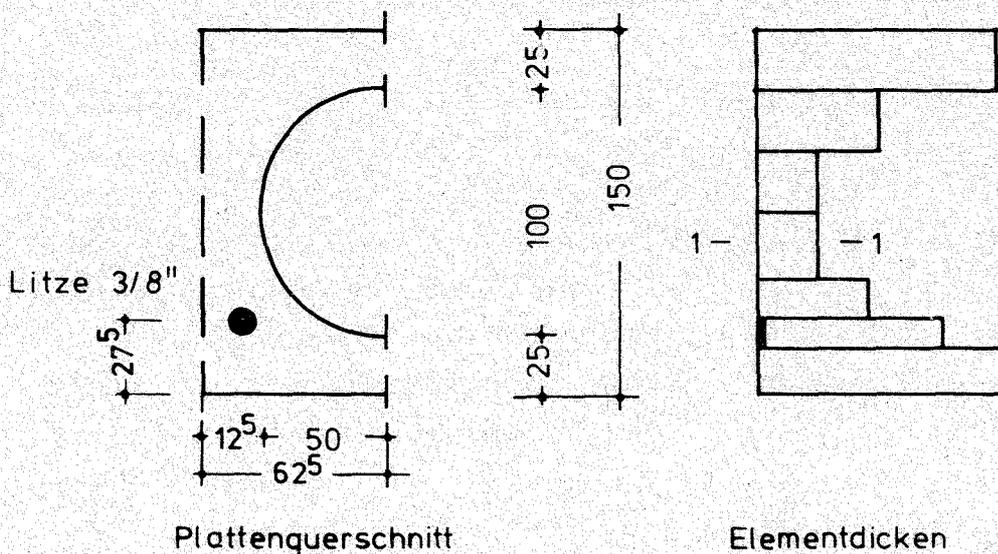


Abb. 2.12 Querschnitt der untersuchten Platte, $d_0 = 15$ cm

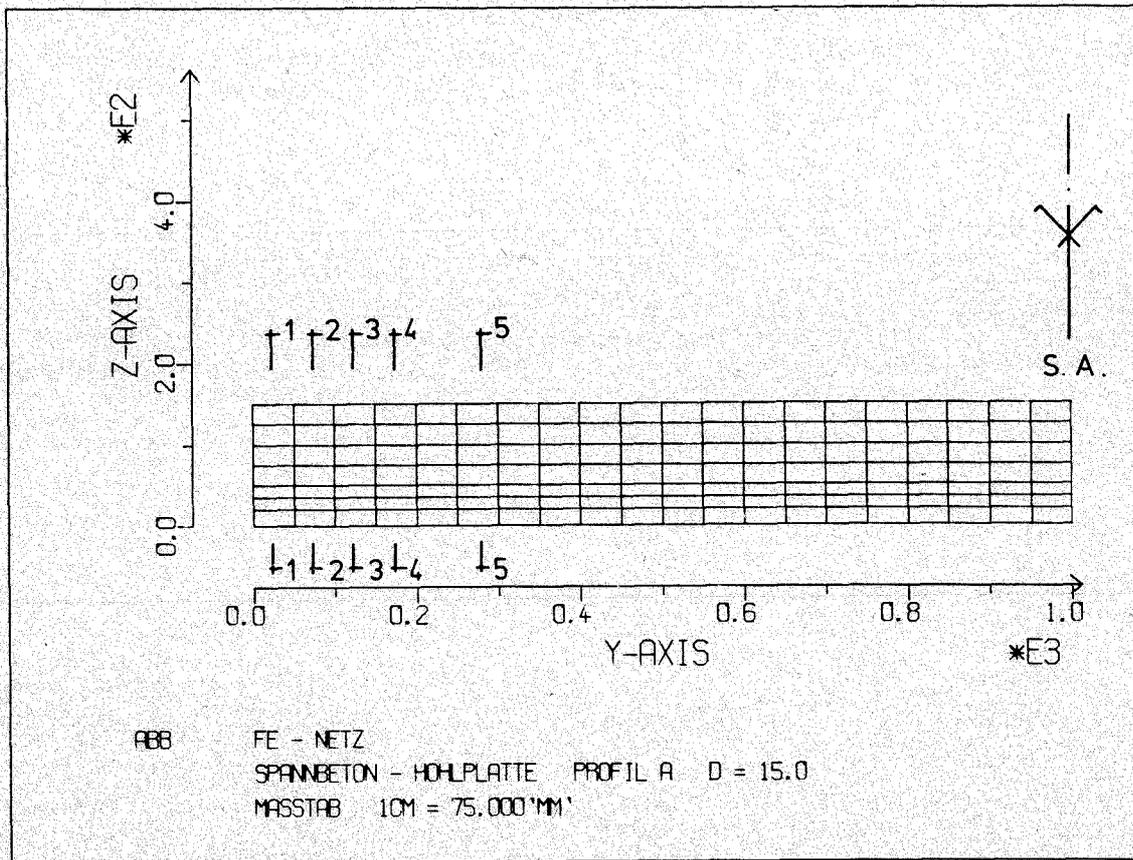


Abb. 2.13 Elementnetz für ebene Berechnungen, $d_0 = 15 \text{ cm}$

2.4.2 Räumliches Modell

Neben den Hauptspannungen im Stegbereich sind die Zugspannungen im Plattenquerschnitt von besonderer Bedeutung für eine sichere Verbundverankerung der Litzen. Dabei wird zwischen den Stirnzugspannungen im Endquerschnitt am freien Rand und den Ringzugspannungen in unmittelbarer Nähe der Litze unterschieden. Die Ermittlung dieser Spannungen ist mit dem Scheibenmodell nicht möglich. Daher wird eine räumliche Berechnung durchgeführt. Bei den hier untersuchten Zugspannungen infolge der Sprengwirkung der Litze ist die Betonüberdeckung von besonderem Interesse. Daher wird eine Platte mit einer minimalen Stegbreite von 4,0 cm und zwei Litzen 3/8" pro Steg untersucht, bei der die Betonüberdeckung 2,0 cm beträgt, s. Abb. 2.14. Ansonsten entspricht der Querschnitt dem in Abb. 2.12 dargestellten. Die Material- und Verbundkennwerte werden von dem Scheibenmodell übernommen.

Für die Berechnung werden räumliche Elemente mit linearem Verschiebungsansatz und entsprechende Verbundelemente verwendet. Das Elementnetz ist in Abb. 2.14, ein Schnitt in Querrichtung durch die erste Elementschicht in Abb. 2.15 dargestellt. Die für die Abbildung der Geometrie erforderliche große Elementanzahl erlaubt die Verwendung linearer Verschiebungsansätze, wie ein Vergleich der Mittendurchbiegung mit der Lösung nach der Technischen Biegelehre bestätigt. Der Vergleich mit einer ebenen Berechnung derselben Platte zeigt hinsichtlich der Verformungen, der Stahl- und Verbundspannungen eine gute Übereinstimmung. Wie zu erwarten, treten bei den Schubspannungsverläufen infolge Vorspannung Differenzen in unmittelbarer Nähe der Litze auf, die jedoch nur eine unbedeutende Auswirkung auf die übrige Spannungsverteilung haben.

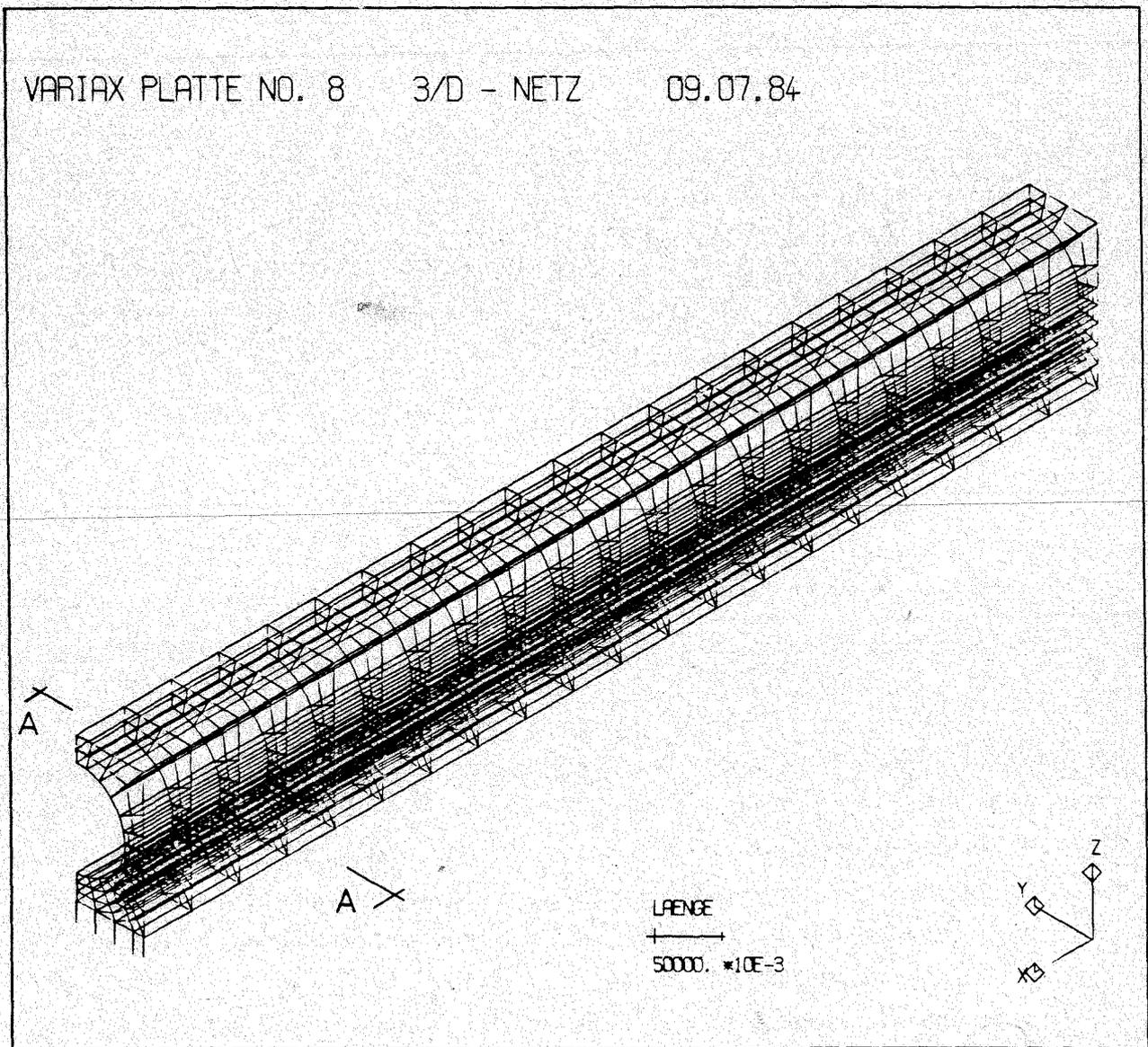


Abb. 2.14 3/D - Elementnetz

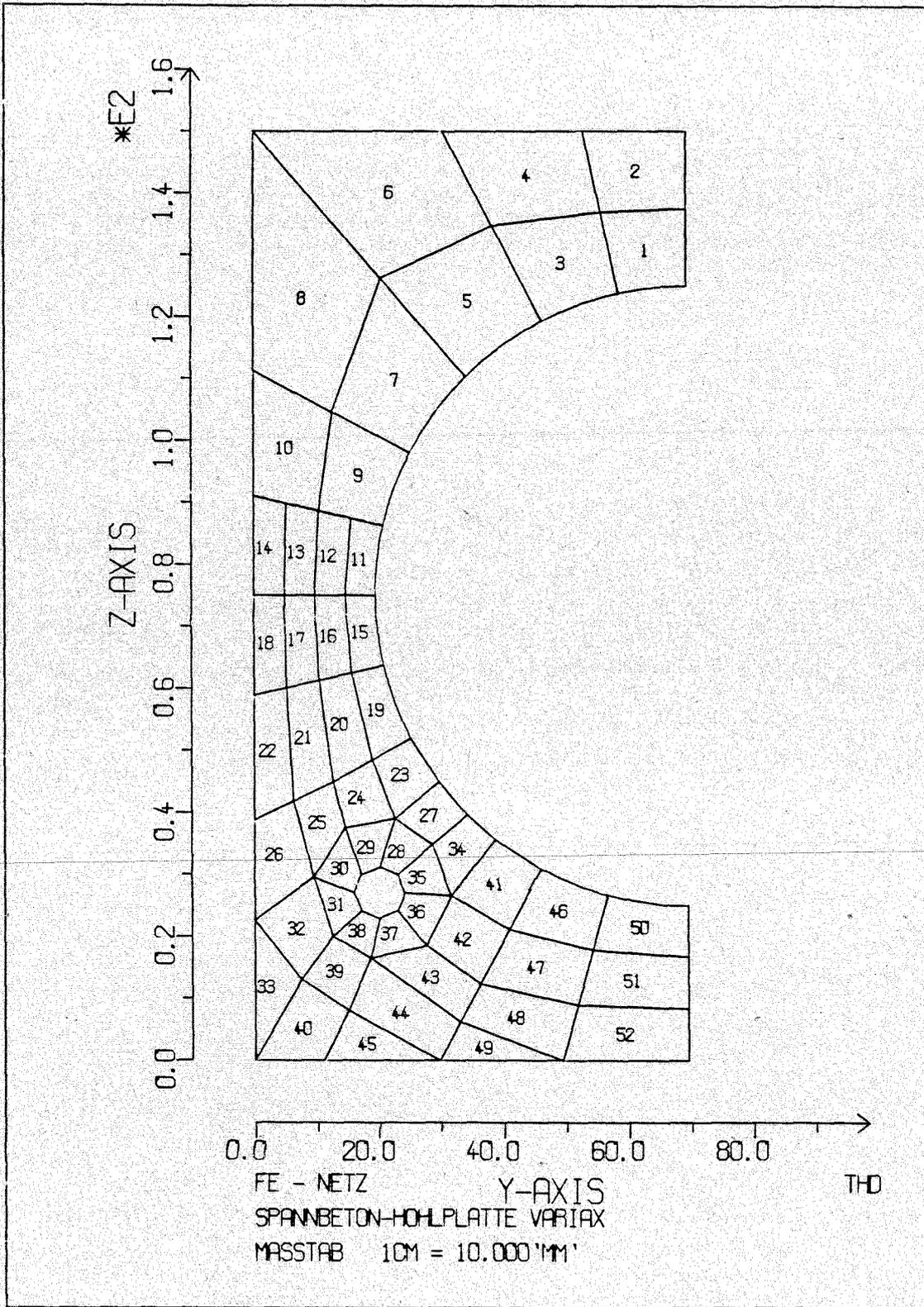


Abb. 2.15 Spannbeton-Hohlplatte 3/D-Netz Schnitt A-A

3. Ergebnisse der Untersuchung am Scheibenmodell

3.1 Voruntersuchungen

Zur Untersuchung der Überlagerungen der Schubspannungen im Stegbereich infolge Querkraft und Vorspannung wird das im Abschnitt 2.4.1 beschriebene Scheibenmodell verwendet. Der Ansatz eines konstanten Spannungszustandes in Plattenquerrichtung ist insofern gerechtfertigt, als hier primär die Beanspruchung in Längsrichtung interessiert, und außerdem ein Vergleich mit der räumlichen Berechnung gute Übereinstimmung zeigt. Dies ermöglichte eine Parameterstudie mit unterschiedlichen Querschnittsabmessungen, die mit einem räumlichen Modell wegen des hohen Aufwandes hinsichtlich Datenaufbereitung und -auswertung, sowie der Rechenzeit nicht möglich gewesen wäre. Dabei sind Platten mit Konstruktionsdicken zwischen 15 und 25 cm und unterschiedlichen minimalen Stegbreiten untersucht worden.

Bei den 2/D - Berechnungen wird das im vorhergehenden Abschnitt dargestellte Elementnetz verwendet, wobei die Elementdicken und die Koordinaten in z-Richtung jeweils der Querschnittsform der untersuchten Platte angepaßt werden. Die Aufbringung der Vorspannung vollzieht sich in drei Schritten. Zunächst wird die Spannbettvorspannkraft $Z_V^{(0)}$ auf den Spannstahl aufgebracht. In dieser ersten Laststufe sind die Verbund- und Betonelemente noch nicht vorhanden. Im zweiten Lastschritt werden die Beton- und Verbundelemente bei konstanter Last wirksam, sie sind zunächst damit noch spannungslos. Im dritten Lastschritt fällt die auf den Spannstahl einwirkende äußere Last auf Null ab, wobei sich die Vorspannkraft über Verbund auf den Beton umlagert. Am freien Rand sind Beton und Stahl spannungslos, während sich bis zum Ende der Übertragungslänge ein Eigenspannungszustand mit der Vorspannkraft Z_V im Spannstahl einstellt. Anschließend werden die Vertikallasten aufgebracht.

Für die Verbundcharakteristik stellt die Profilierung der Bewehrungsfläche eine der maßgebenden Größen dar. Bei Litzen stellt sich das Problem, daß die bezogene Rippenfläche, die hierfür kennzeichnende Größe $/15/$, nicht explizit angegeben werden kann. Daher wird die bezogene Rippenfläche f_R indirekt bestimmt, indem für mehrere Werte f_R der zugehörige Wert α_2 nach Abb. 2.6 bestimmt und mit den so ermittelten Verbunddaten eine Finite-Elemente-Berechnung durchgeführt wird. Aus den Ergebnissen dieser FE-Berechnungen werden die Verankerungslängen ermittelt und mit dem Wert aus der Zulassung für die Litze verglichen.

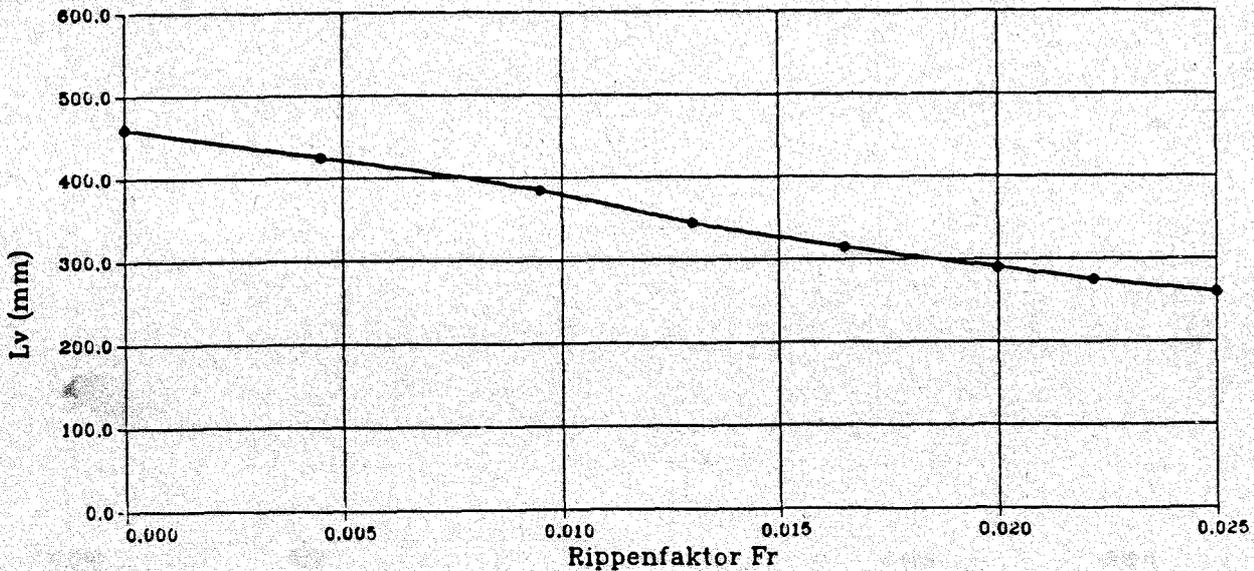


Abb. 3.1 Einfluß der Profilierung des Spannstahls auf die Verankerungslänge L_v

In Abb. 3.1 sind die aus den FE-Berechnungen resultierenden Verankerungslängen in Abhängigkeit vom Rippenfaktor aufgetragen. Dabei wird als Verankerungslänge der Abstand vom Plattenende zu dem Punkt definiert, ab dem die Stahlspannung infolge Vorspannung um weniger als 1,0 % vom Endwert abweicht. Aus dem Zulassungsbescheid für die Litze der Fa. Thyssen AG ergibt sich ein erforderlicher Wert $L_{ü} = 51,5$ cm. Unter Berücksichtigung einer 1,3-fachen Sicherheit beträgt die effektive Verankerungslänge ca. 40,0 cm. Dieser Wert wird für $\alpha_2 = 0,25$ erreicht, was einem Rippenfaktor $f_R = 0,010$ nach Gl. (4.8) in /10/ entspricht. Dieser Wert des Rippenfaktors wird in /16/ für gerippte Spanndrähte angegeben. Der so ermittelte Wert $\alpha_2 = 0,25$ wird in den nachfolgenden Berechnungen verwendet.

Die mit diesem Verfahren erzielten Ergebnisse werden im folgenden erläutert. In Abb. 3.2 und 3.3 wird nochmals der Einfluß der Profilierung des Spannstahls gezeigt. Dort sind die Verläufe der Verbund- und Stahllängsspannungen für drei unterschiedliche Profilierungen aufgetragen: $\alpha_2 = 0,20$ (glatter Stahl), $\alpha_2 = 0,25$ (Litze), $\alpha_2 = 0,50$ (gerippter Draht). Deutlich wird der Einfluß einer stärkeren Profilierung sichtbar, die sich in einem sehr hohen Anfangswert der Verbundspannung und steilem Abfall der Verbundspannungen bzw.

steilem Anstieg der Stahlspannungen äußert. Dies führt zu einer konzentrierten Beanspruchung am Plattenrand. Bei geringerer Profilierung ergibt sich eine gleichmäßigere Einleitung der Vorspannkraft und eine geringere Beanspruchung der Platte, allerdings nimmt die Verankerungslänge zu. Besonders beim glatten Stahl zeigt sich die Bedeutung der Querpressungen, die sich beim Umsetzen der Spannbettvorspannung auf den Beton infolge der Querdehnungsbehinderung des Spannstahls durch den Beton einstellen. Diese als "Hoyer-Effekt" bezeichnete Klemmwirkung ermöglicht die sichere Verankerung auch relativ schwach profilierter Bewehrung ausschließlich über Verbund.

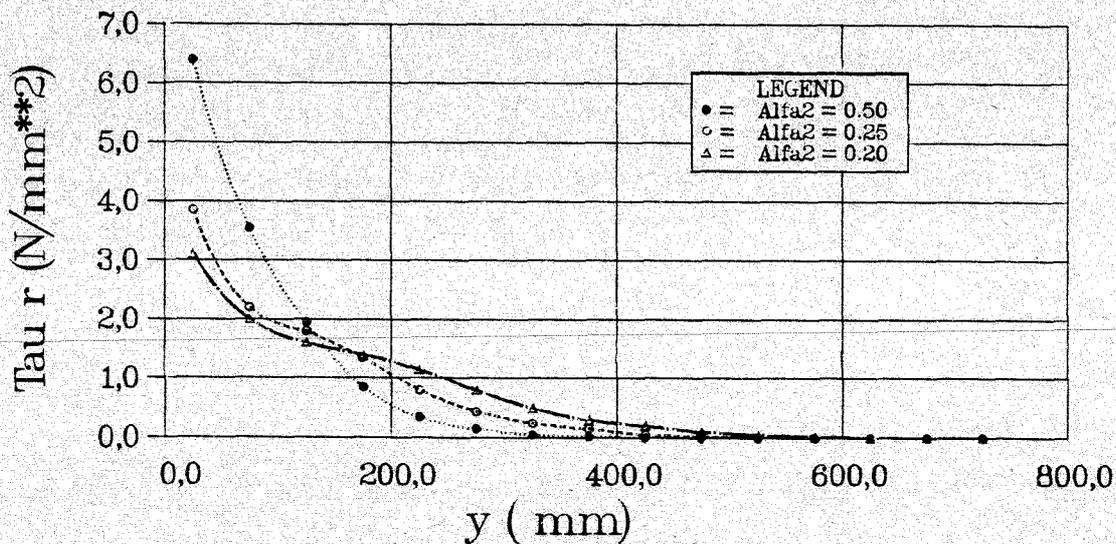


Abb. 3.2 Verlauf der Verbundspannungen in Abhängigkeit von der Profilierung des Spannstahls

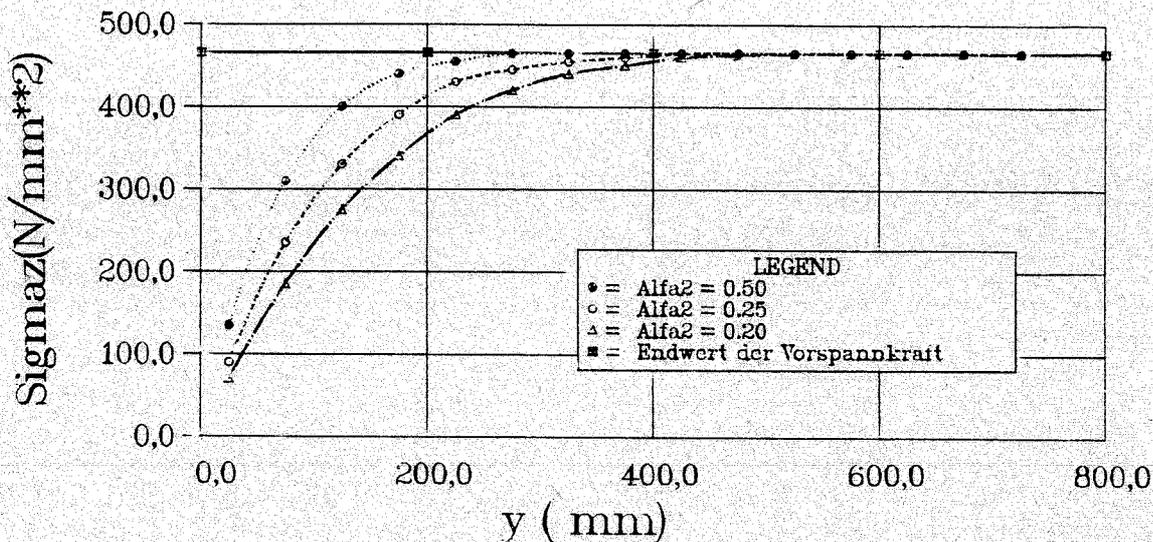


Abb. 3.3 Verlauf der Stahlspannungen in Abhängigkeit von der Profilierung des Spannstahls

3.2 Schubspannungen im Stegbereich

3.2.1 Einfluß der minimalen Stegbreite

Eines der maßgebenden Kriterien für die Ermittlung der zulässigen Vorspannkraft ist die Einhaltung der zulässigen Hauptspannungen im Stegbereich. Dies ist besonders bei dem hier untersuchten Plattentyp für die Gewährleistung der Standsicherheit maßgebend, da wegen des Verzichts auf eine Schubbewehrung keine Abtragung der Schubkräfte mit Hilfe des normalerweise bei Schubmessungen angenommenen Fachwerkmodells stattfinden kann. Stattdessen wird in diesem Bereich die Betonzugfestigkeit in Anspruch genommen, um das Gleichgewicht aus Stahlzugkraft und den geneigten Betondruckspannungen zu gewährleisten.

Bei der Spannbettvorspannung werden infolge der Querdehnungsbehinderung des Spannstahls durch den Beton bereits sofort beim Lösen der Spannbettverankerung Druckspannungen normal zum Spannstahlumfang aufgebaut.

Die resultierenden Schubspannungen ergeben sich durch Überlagerung der Anteile aus Querkraft und Vorspannungen. Die Schubspannungen infolge Querkraft lassen sich einfach nach der Dübelformel ermitteln. Lediglich in unmittelbarer Nähe des Auflagers treten Abweichungen hiervon infolge der Auflagerpressungen auf, wie die Ergebnisse der FE-Berechnungen zeigen, vgl. Abb. 3.4. Zusätzlich zu Abb. 3.4 sind in Abb. 3.5 die Schubspannungsverteilungen in 5 Schnitten, vgl. Abb. 2.13, für zwei unterschiedliche Stegbreiten dargestellt. Die Platten sind mit der maximal zulässigen Spannstahlspannung vorgespannt; die Querkraft resultiert aus einer Stützweite von $L = 6,00$ m. Untersucht wird hier der in Abb. 2.12 dargestellte Querschnitt mit einer Konstruktionshöhe $d_0 = 15$ cm und einer minimalen Stegbreite $b_0 = 2,5$ cm. In Abb. 3.5 b und d wird der gleiche Plattenquerschnitt, jedoch mit $b_0 = 5,0$ cm, untersucht.

Die in Abb. 3.4 dargestellten Kurvenverläufe geben einen Überblick über die Verteilung der Schubspannungen im Verankerungsbereich. Abb. 3.4 a, 3.5 a und 3.5 b zeigen, daß die Schubspannungen infolge Vorspannung ihr Maximum jeweils zwischen der Litze und der Plattenschwerlinie besitzen. In Längsrichtung gesehen, tritt der Höchstwert im Schnitt 1 in der Nähe der Stirnfläche auf. Zur Plattenmitte hin fallen die Schubspannungen aus Vorspannung rasch ab. Die maximale Querkraftschubspannung tritt in der Schwerlinie der Platte auf und ist, wiederum in Längsrichtung gesehen, in dem hier untersuchten Auflagerbereich nahezu konstant. Am Auflager selbst fällt die Schubspannung auf Null ab, vgl. Schnitt 1-1. Da die Schubkraftmaxima infolge der Querkraft und der Einleitung der Vorspannkraft an unterschiedlichen Stellen auftreten, sowohl hinsichtlich der Lage im Querschnitt als auch in Längsrichtung, ist einerseits eine Addition der beiden Maxima nicht erforderlich und auch nicht sinnvoll. Andererseits jedoch ist eine Bemessung unter Vernachlässigung des kleineren Anteils, wie dies für die Schubbewehrung im Verankerungsbereich nach DIN 4227 zulässig ist, hier in diesem Fall nicht erlaubt.

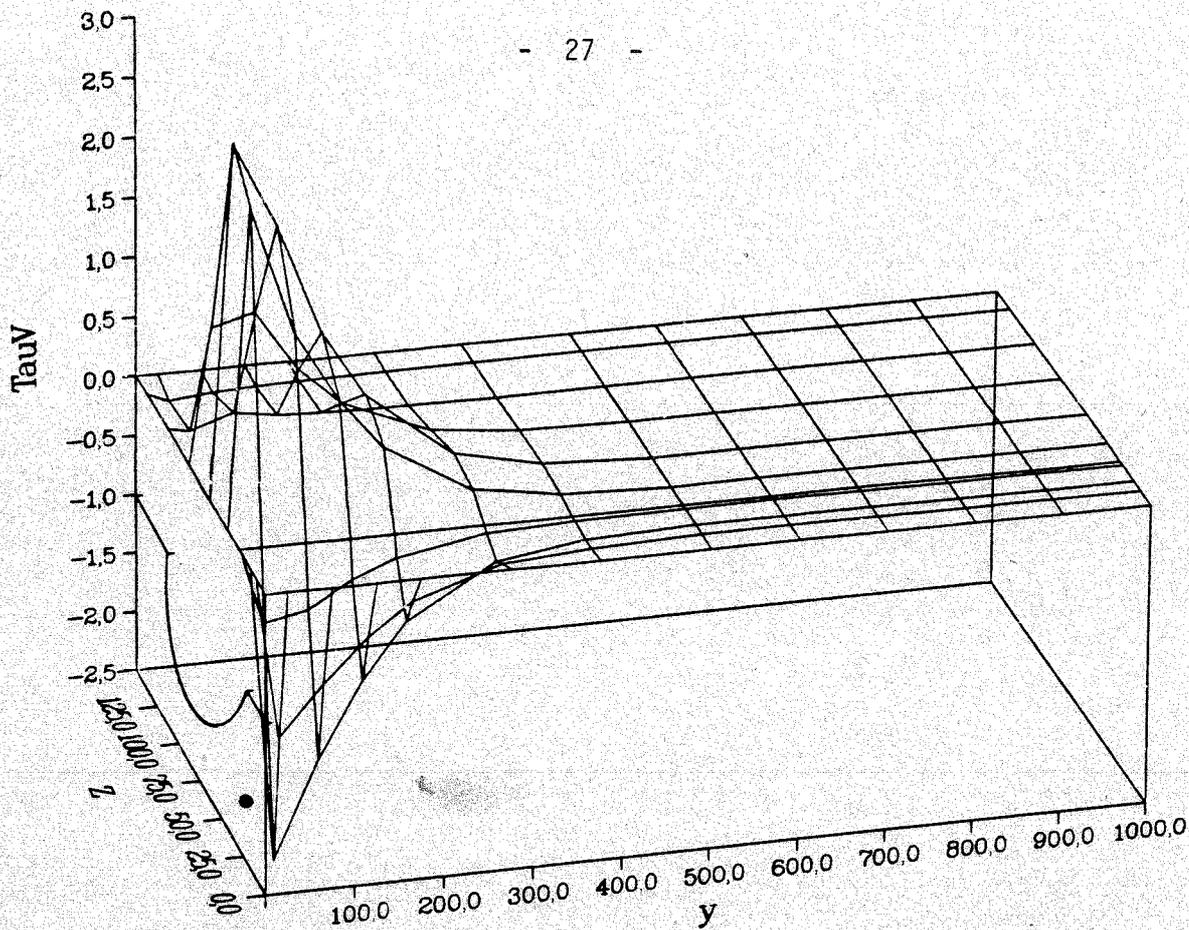


Abb. 3.4a Schubspannungen infolge Vorspannung
minimale Stegbreite 2,5 cm

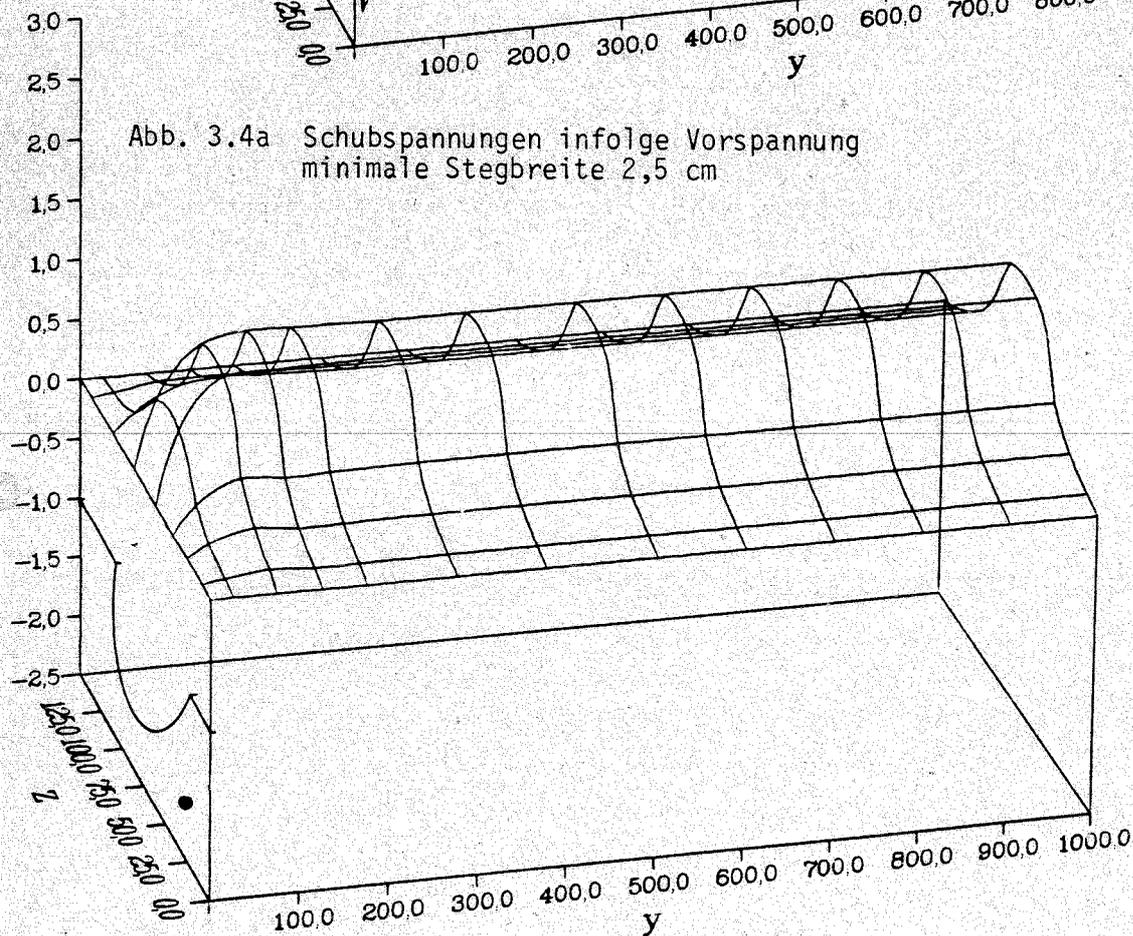


Abb. 3.4b Schubspannungen infolge Querkraft
minimale Stegbreite 2,5 cm

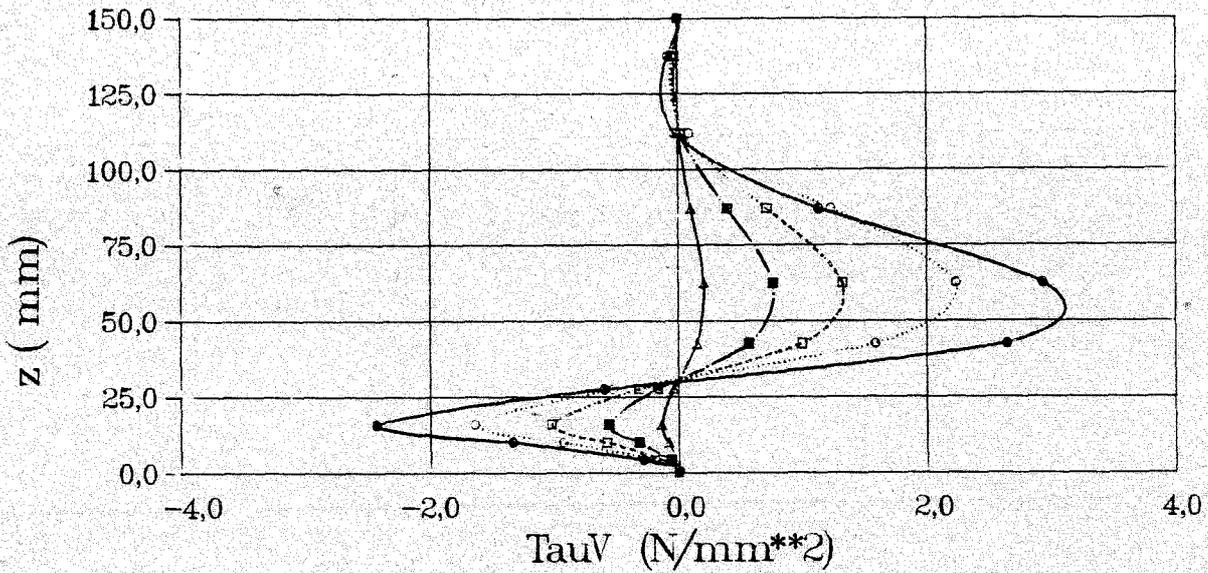


Abb. 3.5a Verlauf der Schubspannungen infolge Vorspannung
 $\sigma_{zv}(0) = 973,5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$, minimale Stegbreite 2,5 cm

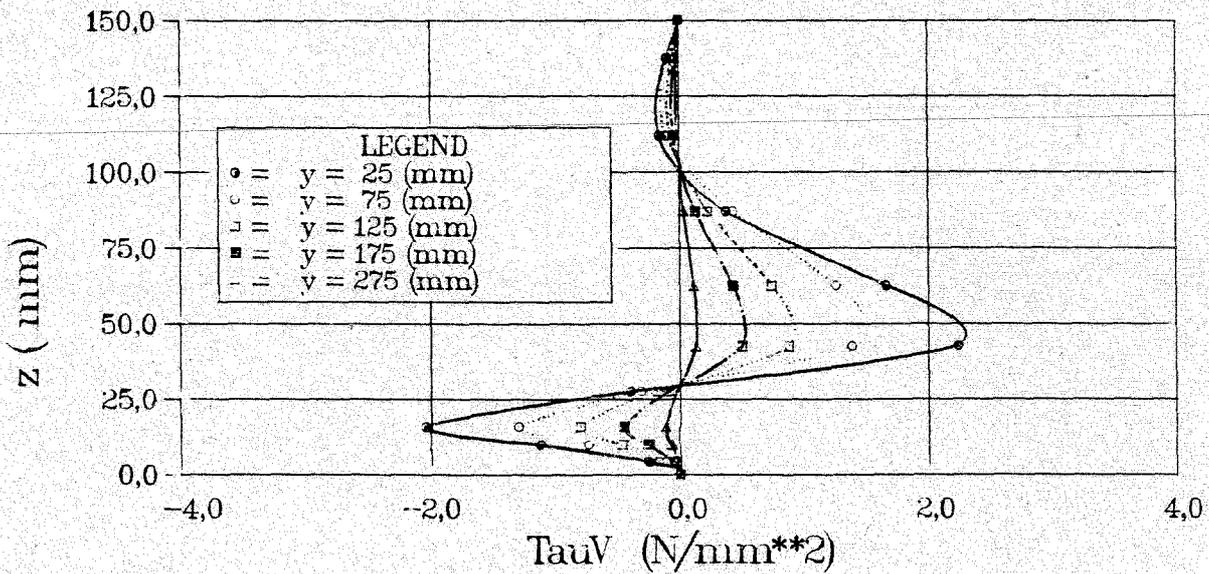


Abb. 3.5b Verlauf der Schubspannungen infolge Vorspannung
 $\sigma_{zv}(0) = 973,5 \text{ (N/mm}^2\text{)}$, minimale Stegbreite 5,0 cm

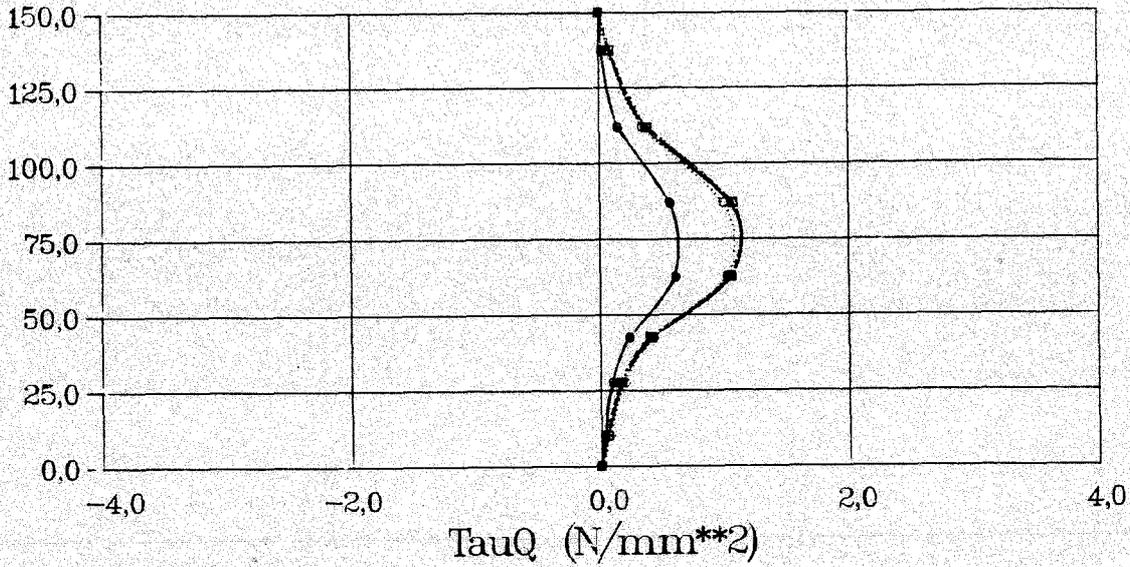


Abb. 3.5c Verlauf der Schubspannungen in den Schnitten 1-5 infolge Querkraft. $Q = 3,0$ (kN) pro Steg, minimale Stegbreite 2,5 cm

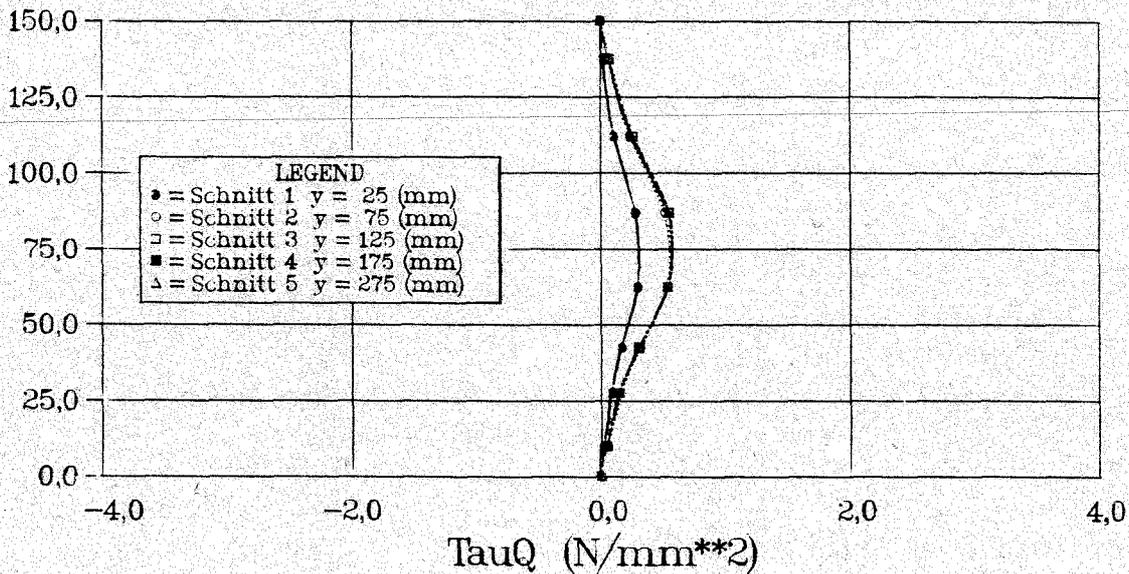


Abb. 3.5d Verlauf der Schubspannungen in den Schnitten 1-5 infolge Querkraft. $Q = 3,0$ (kN) pro Steg, minimale Stegbreite 5,0 cm

Die Größe der Schubspannungen infolge Vorspannung hängt von der Profilierung des Spannstahls, der Lage des Spannglieds im Querschnitt und der Querschnittsform ab. Der Einfluß der minimalen Stegbreite wird in Abb. 3.5 deutlich. In Abb. 3.5 b und d sind die Schubspannungen für den in Abb. 2.12 dargestellten Querschnitt mit einem um 25 mm verbreiterten Steg, ansonsten jedoch gleichen Abmessungen, in fünf Schnitten mit unterschiedlichem Abstand zur Stirnfläche aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Verdoppelung der Stegdicke eine Verringerung der Schubspannungen in der Schwerlinie um 50 % mit sich bringt, während der Maximalwert der Schubspannung aus der Einleitung der Vorspannkraft nur um ca. 30 % abfällt. Die wesentliche Ursache hierfür liegt darin, daß die Stegbreite nur in der Schwerlinie verdoppelt wird. Außerdem ändert sich das Verhältnis der Flächenanteile ober- und unterhalb der Spanngliedachse und damit auch die Verteilung der Schubspannungen aus der Einleitung der Vorspannung im Querschnitt, einschließlich der Lage des Maximalwertes. Für beide Querschnittsformen ergibt sich jedoch als maßgebender Wert die resultierende Schubspannung in der Schwerlinie zu $\tau_s = \max \tau_Q + 0,75 \cdot \max \tau_V$. Da im Bereich der Auflagerfläche die σ_y -Spannungen aus der Auflagerpressung die Querkraft-Schubspannungen erheblich reduzieren, ist der Schnitt am Auflager- rand maßgebend.

3.2.2 Einfluß der Plattendicke d_0

Um den Einfluß der Lage der Spannlitze im Querschnitt zu untersuchen, wurden drei Plattenquerschnitte mit unterschiedlichen Konstruktionsdicken und minimalen Stegbreiten gerechnet, s. Abb. 3.6, wobei der Randabstand der Litze 3/8" mit 2,75 cm konstant gehalten wurde.

Wie in Abb. 3.5 gezeigt, wirkt sich eine Veränderung der minimalen Stegbreite primär auf die Absolutwerte der Schubspannungen und weniger auf die qualitativen Verläufe der Schubspannungen aus, so daß die Ergebnisse, die an Querschnitten mit unterschiedlicher Stegdicke erzielt werden, qualitativ miteinander verglichen werden können. Die Schubspannungsverteilungen für je vier Schnitte im Auflagerbereich sind in Abb. 3.7 (Profil A), Abb. 3.8 (Profil B) und Abb. 3.9 (Profil C) dargestellt.

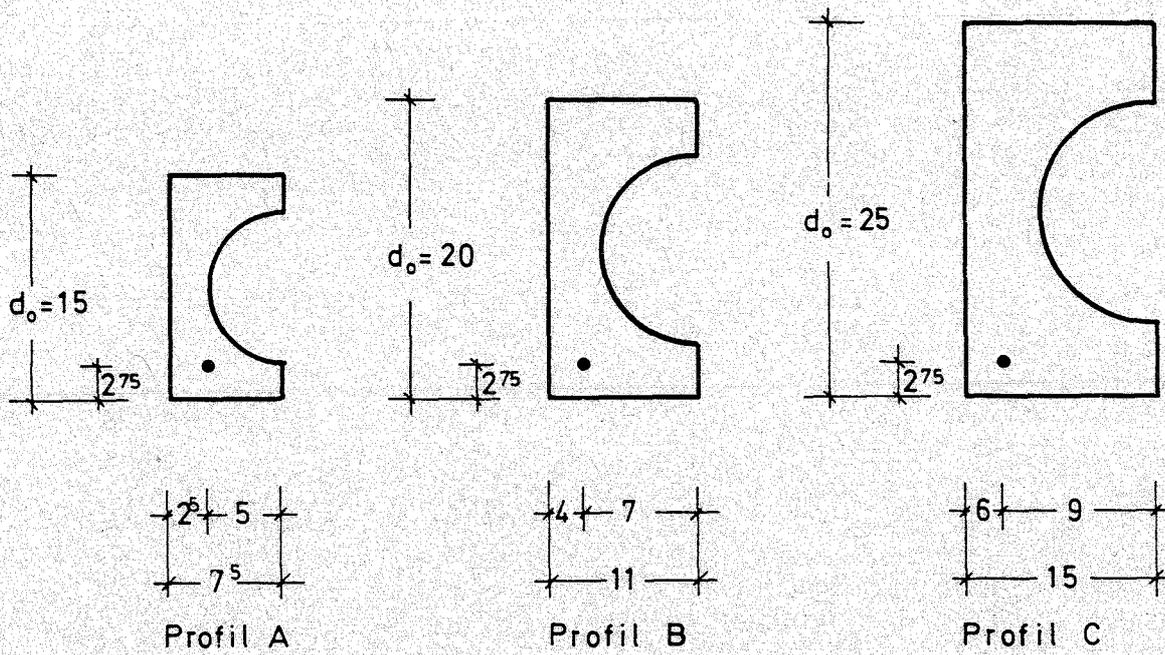


Abb. 3.6 Untersuchte Querschnittsformen

Die Schubspannungsverteilungen infolge reiner Vorspannung, vgl. Abb. 3.7 a bis 3.9 a, zeigen, daß sich mit zunehmendem Hebelarm der Litze y_{bz} die Lage des Schubspannungsmaximums von der Schwerlinie, d.h. der Stelle der minimalen Stegbreite, zur Litze hin verschiebt. Während sich für die Platte Typ A mit $d_o = 15$ cm, vgl. Abb. 3.6, das Maximum im Abstand von $1,2$ cm unter der Schwerlinie einstellt, ergibt sich dessen Lage bei Typ C mit $d_o = 25$ cm im Abstand von $6,75$ cm von der Schwerlinie. In Abb. 3.10 sind die auf die Plattendicke d_o bzw. auf den Hebelarm der Litze y_{bz} bezogenen Werte des Abstands a_o des Schubspannungsmaximums von der Schwerlinie für die drei untersuchten Querschnitte aufgetragen.

Profil A – Verlauf der Schubspannungen

$$\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2 + Q = 0$$

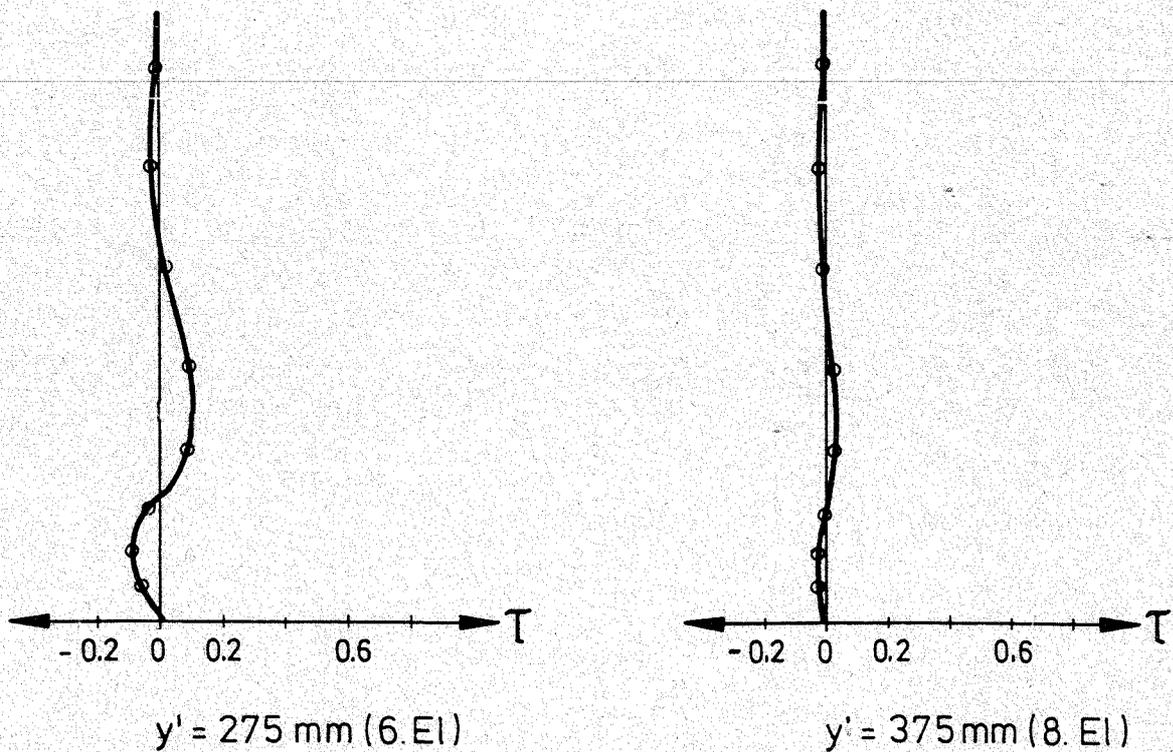
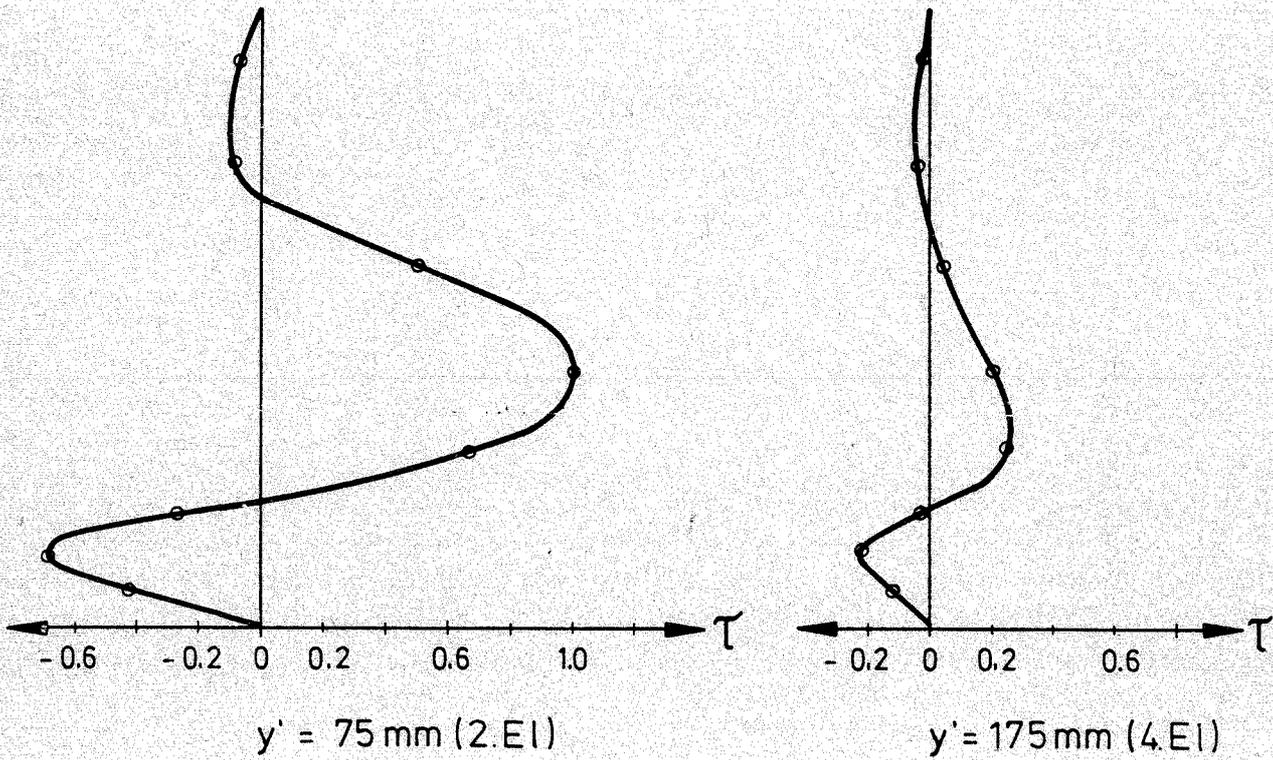
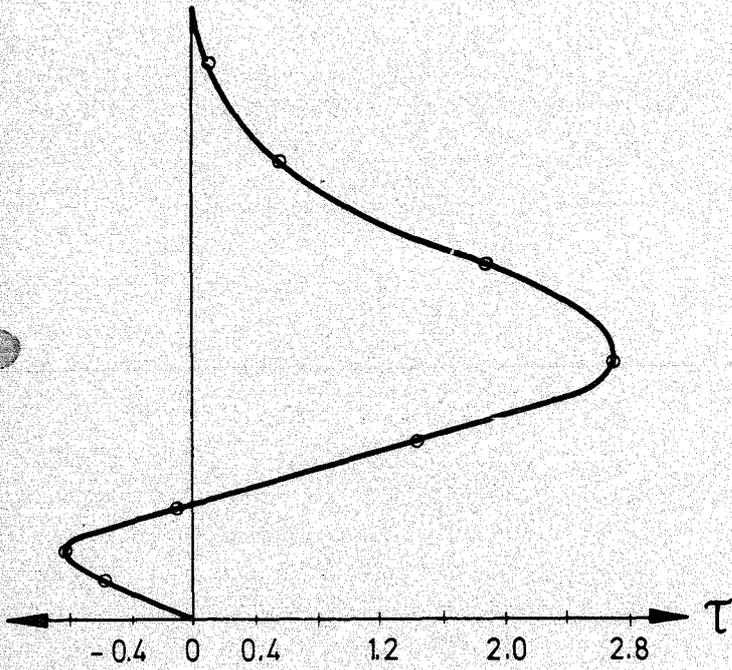


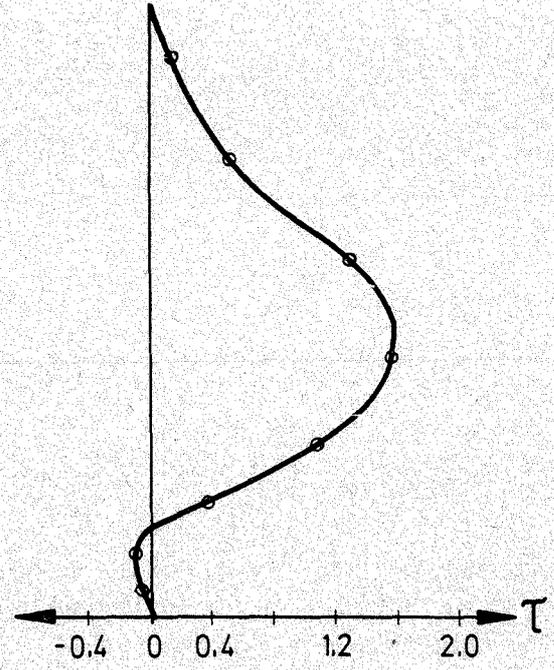
Abb. 3.7a Schubspannungen infolge Vorspannung, Profil A

Profil A — Verlauf der Schubspannungen

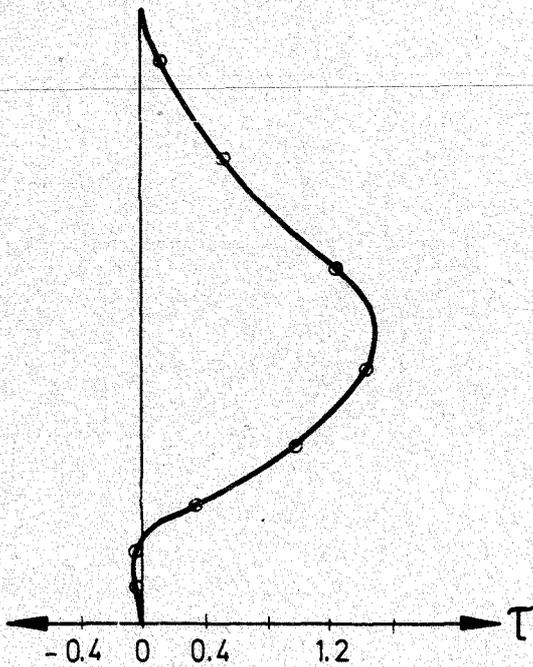
$$\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2 + Q = 3366 \text{ N}$$



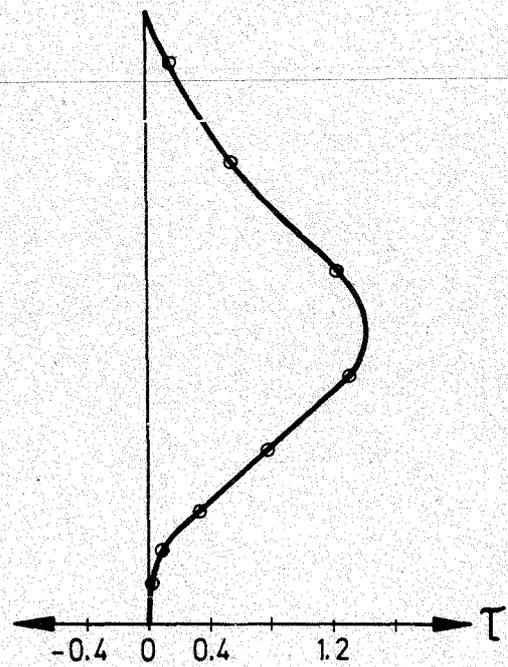
$y' = 75 \text{ mm (2.EI)}$



$y' = 175 \text{ mm (4.EI)}$



$y' = 275 \text{ mm (6.EI)}$



$y' = 375 \text{ mm (8.EI)}$

Abb. 3.7c Schubspannungen infolge Querkraft und Vorspannung, Profil A

Profil B – Verlauf der Schubspannungen

$$\underline{\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2 + Q = 0}$$

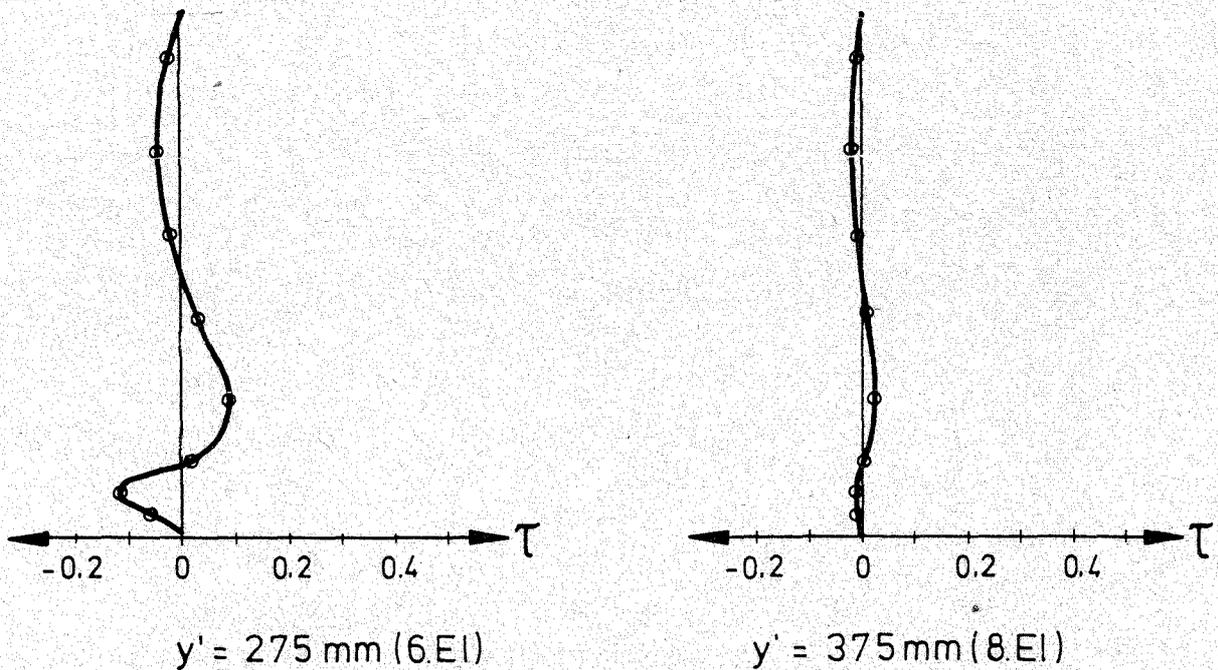
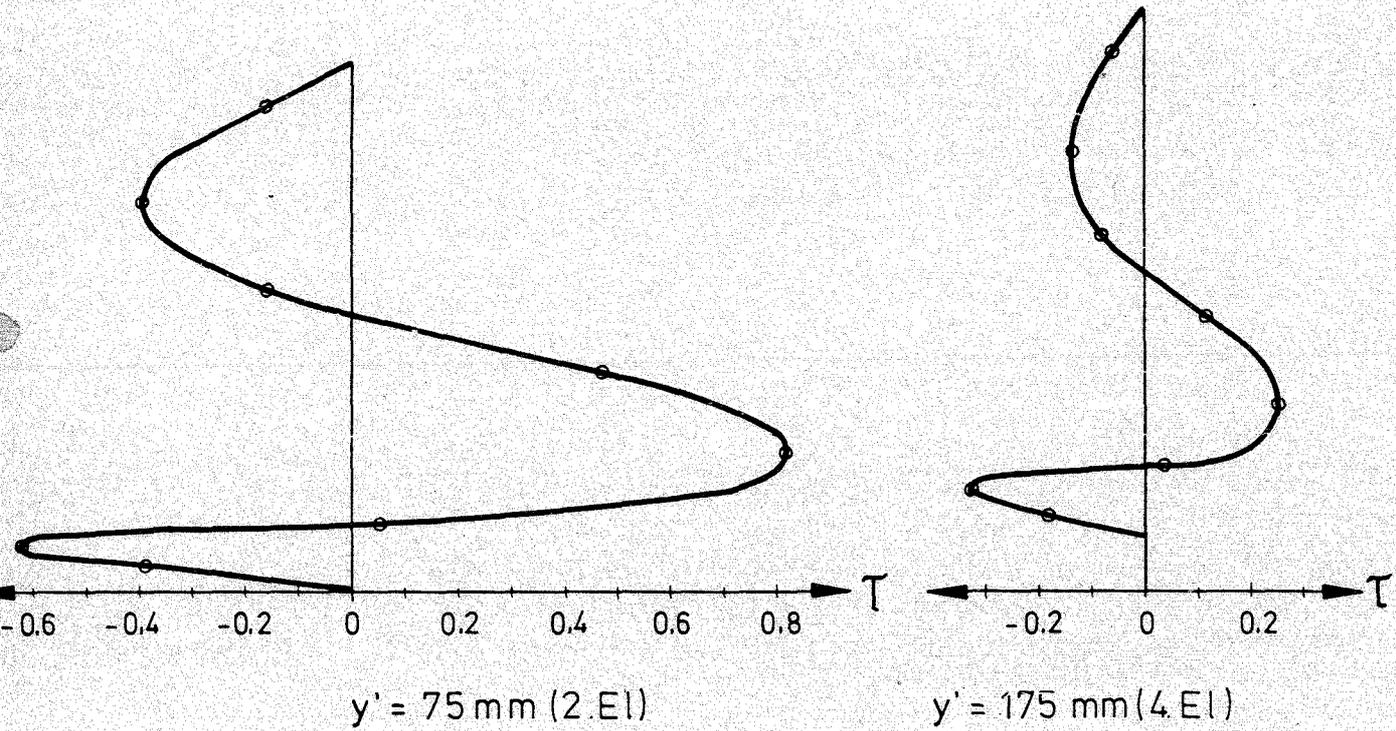
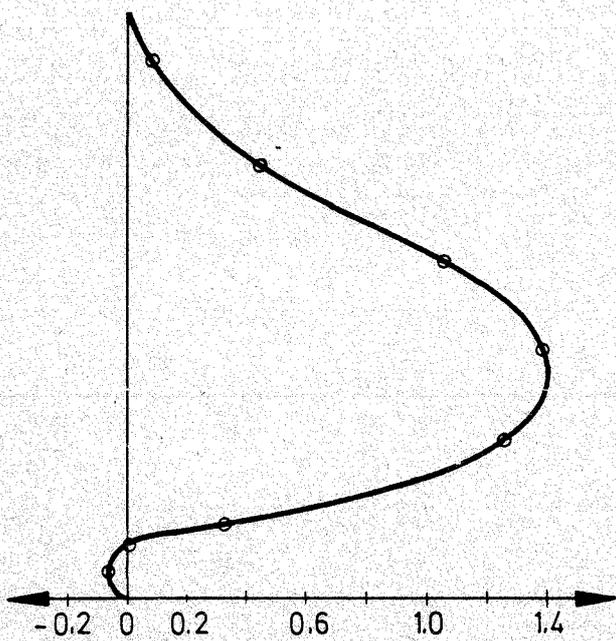


Abb. 3.8a Schubspannungen infolge Vorspannung, Profil B

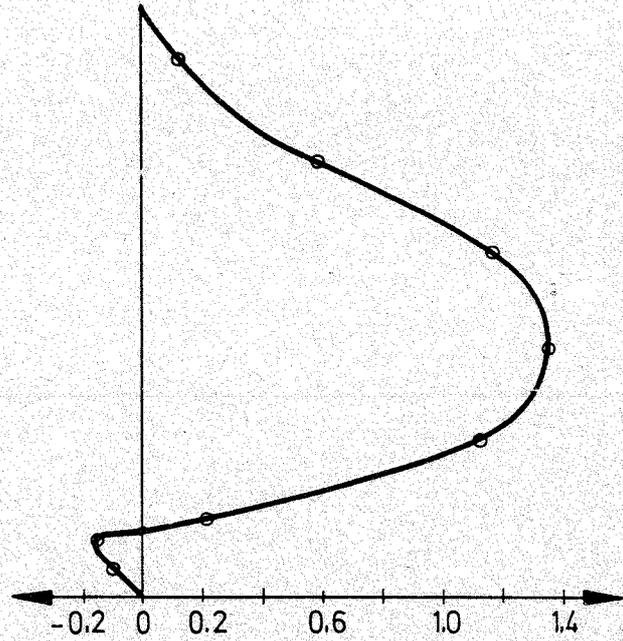
- 35 -

Profil B — Verlauf der Schubspannungen

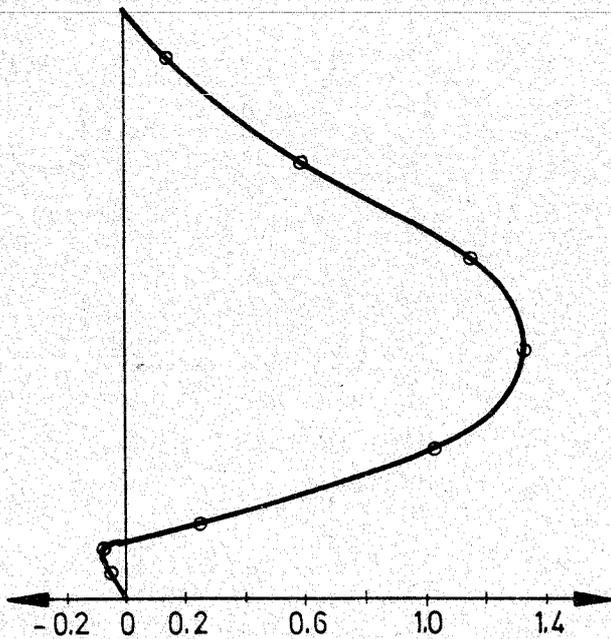
$$\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm} + Q_z = 7280 \text{ N}$$



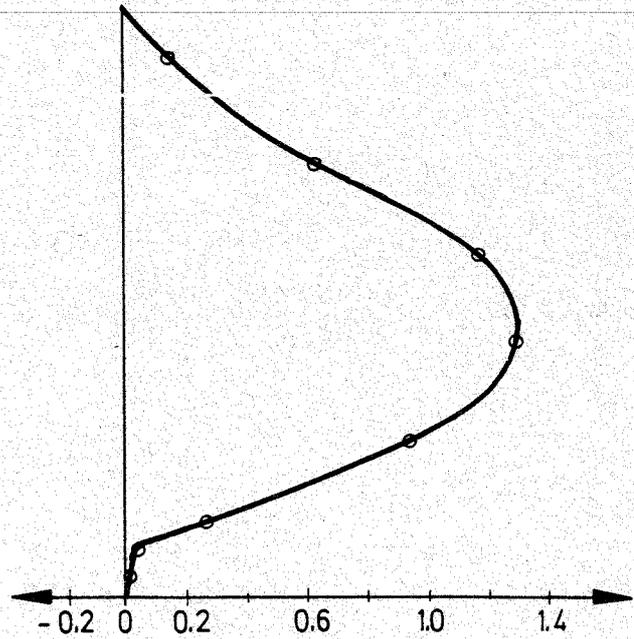
$y' = 75 \text{ mm} (2.EI)$



$y' = 175 \text{ mm} (4.EI)$



$y' = 275 \text{ mm} (6.EI)$

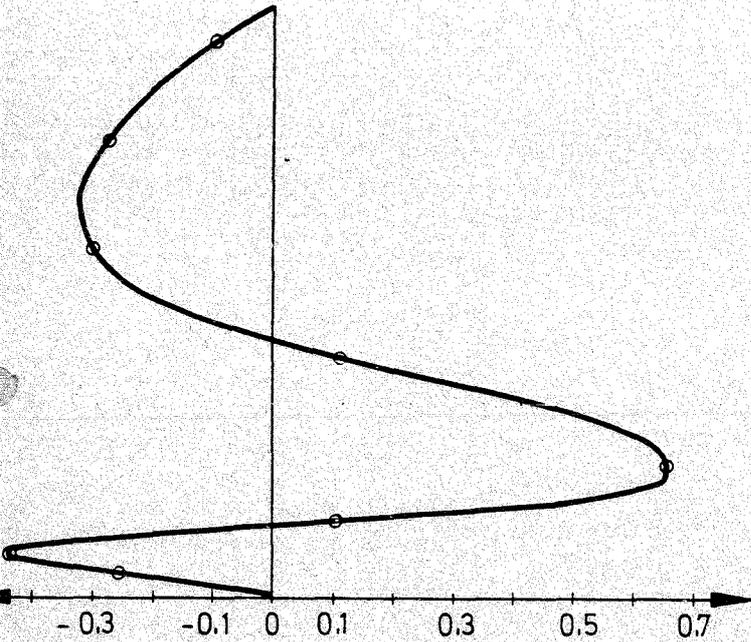


$y' = 375 \text{ mm} (8.EI)$

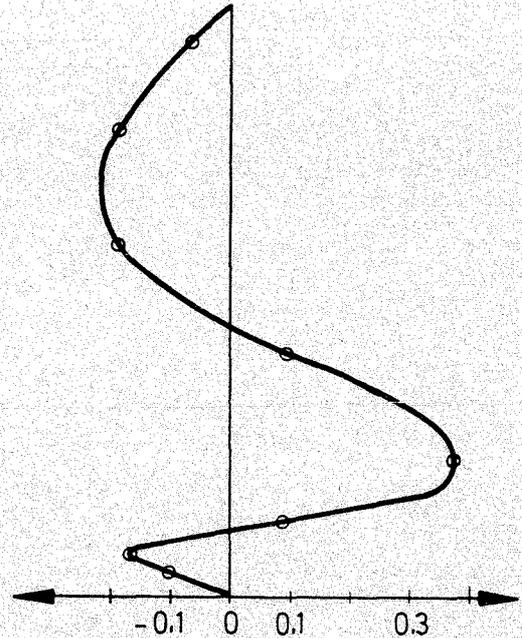
Abb. 3.8c Schubspannungen infolge Vorspannung und Querkraft, Profil B

Profil C Verlauf der Schubspannungen

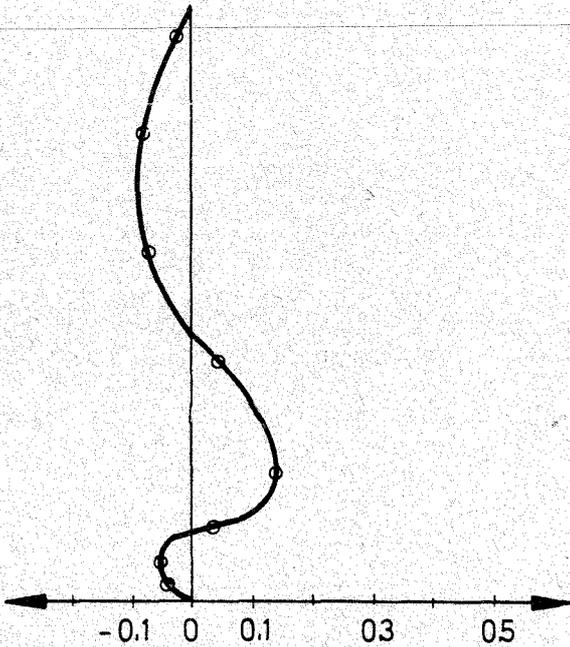
$$\underline{\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2 + Q_z = 0}$$



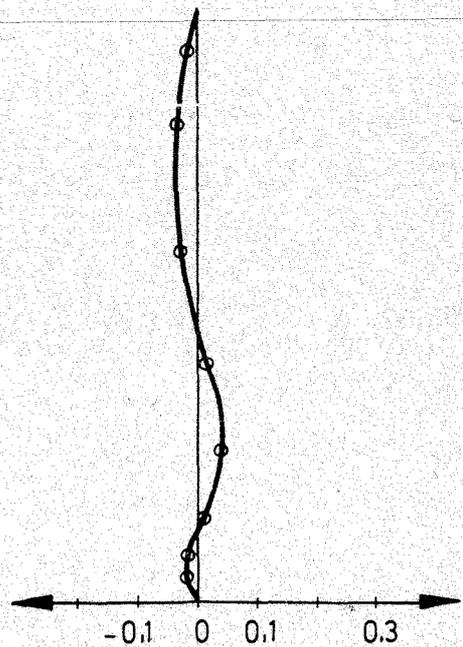
$y' = 75 \text{ mm} (2.EI)$



$y' = 175 \text{ mm} (4.EI)$



$y' = 275 \text{ mm} (6.EI)$

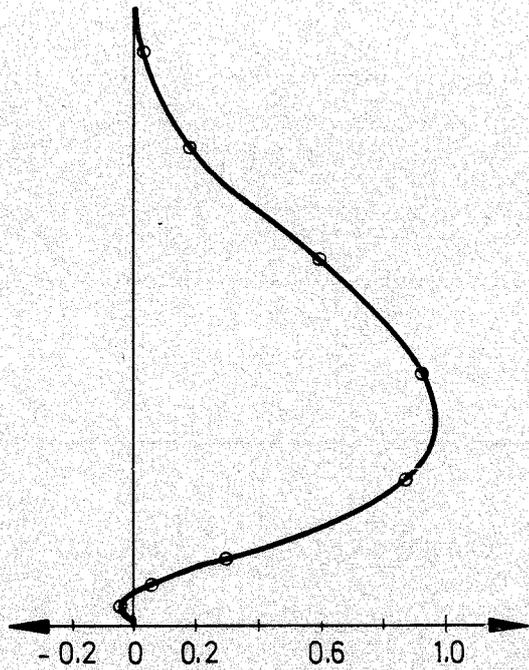


$y' = 375 \text{ mm} (8.EI)$

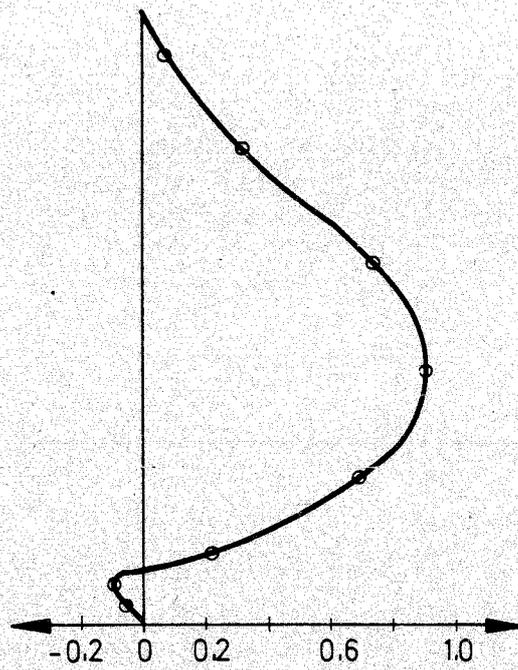
Abb. 3.9a Schubspannungen infolge Vorspannung, Profil C

Profil C — Verlauf der Schubspannungen

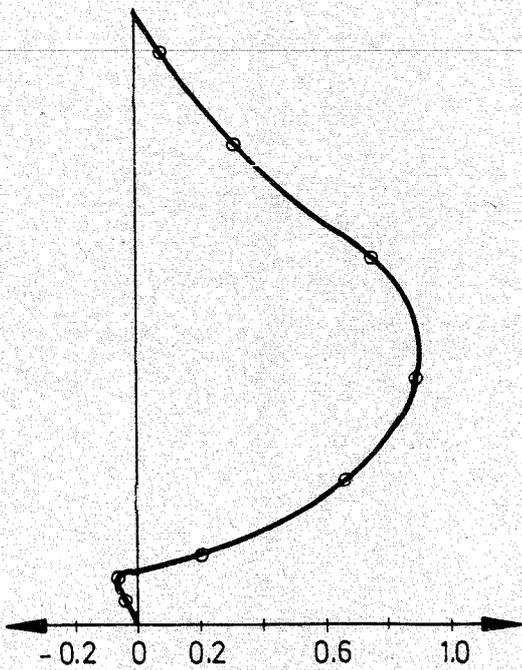
$$\sigma_z^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2 + Q = 9604 \text{ N}$$



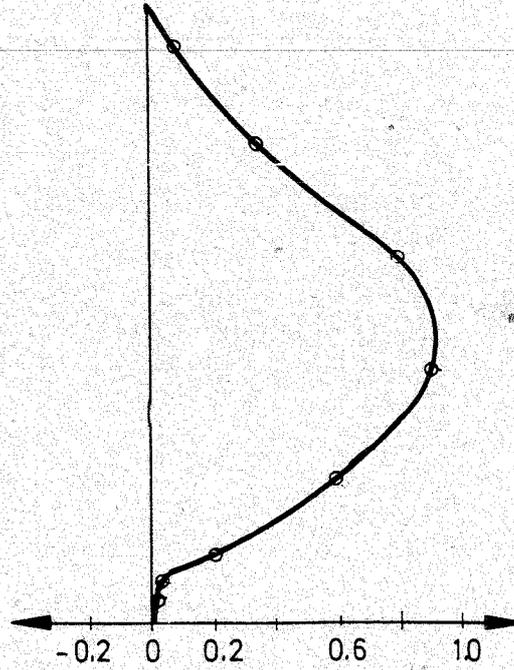
$y' = 75 \text{ mm} (2.EI)$



$y' = 175 \text{ mm} (4.EI)$

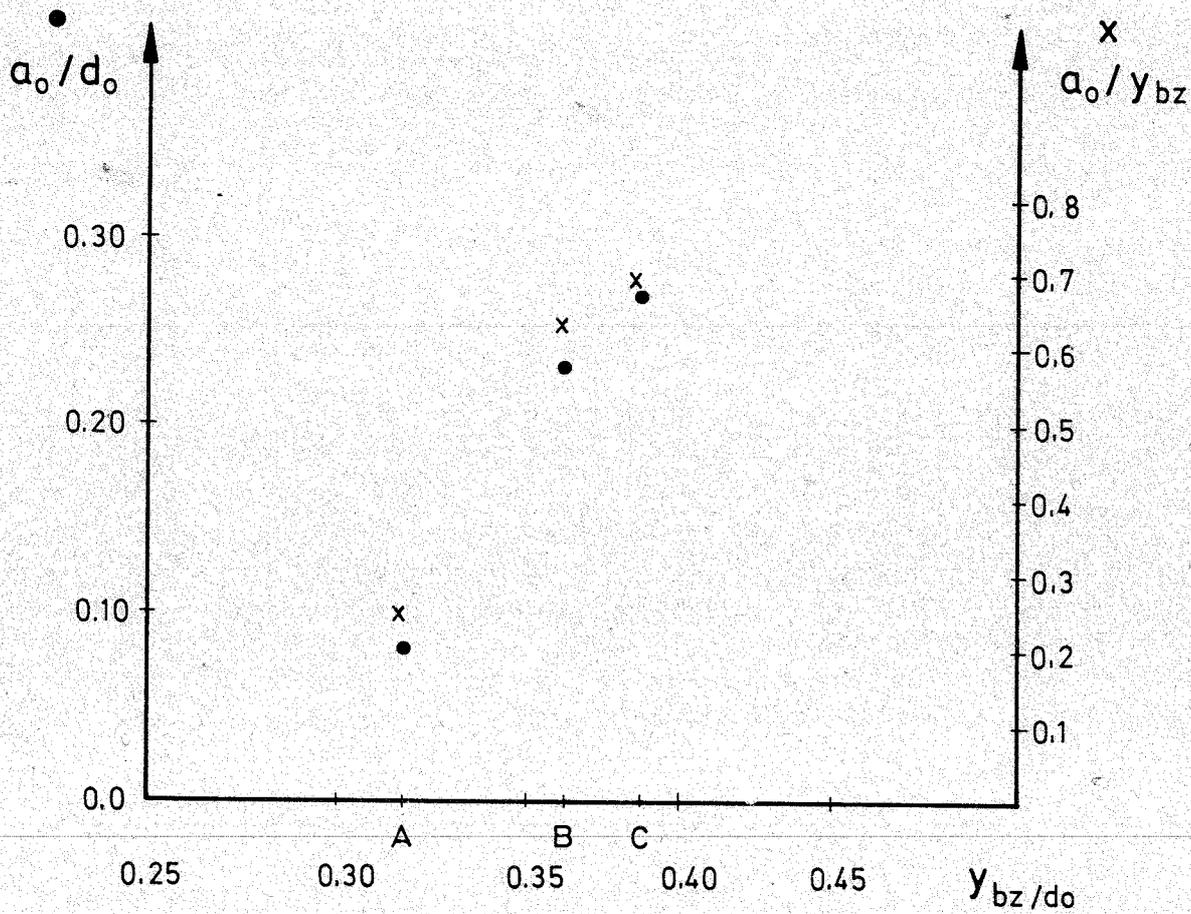


$y' = 275 \text{ mm} (6.EI)$



$y' = 375 \text{ mm} (8.EI)$

Abb. 3.9c Schubspannungen infolge Vorspannung und Querkraft, Profil C



d_0 = Plattendicke

y_{bz} = Abstand der Litze von der Schwerlinie

a_0 = Abstand des Schubspannungsmaximums von der Schwerlinie
(Lastfall Vorspannung)

Abb. 3.10 Lage des Schubspannungsmaximums infolge Vorspannung

Die Ursache hierfür liegt darin, daß sich mit zunehmendem Hebelarm der Litze und der damit verbundenen größeren Momentenbeanspruchung infolge Vorspannung die Lage x_0 des Nulldurchgangs der Schubspannungsverteilung und damit auch die des Maximums nach unten verschiebt, vgl. Abb. 3.11.

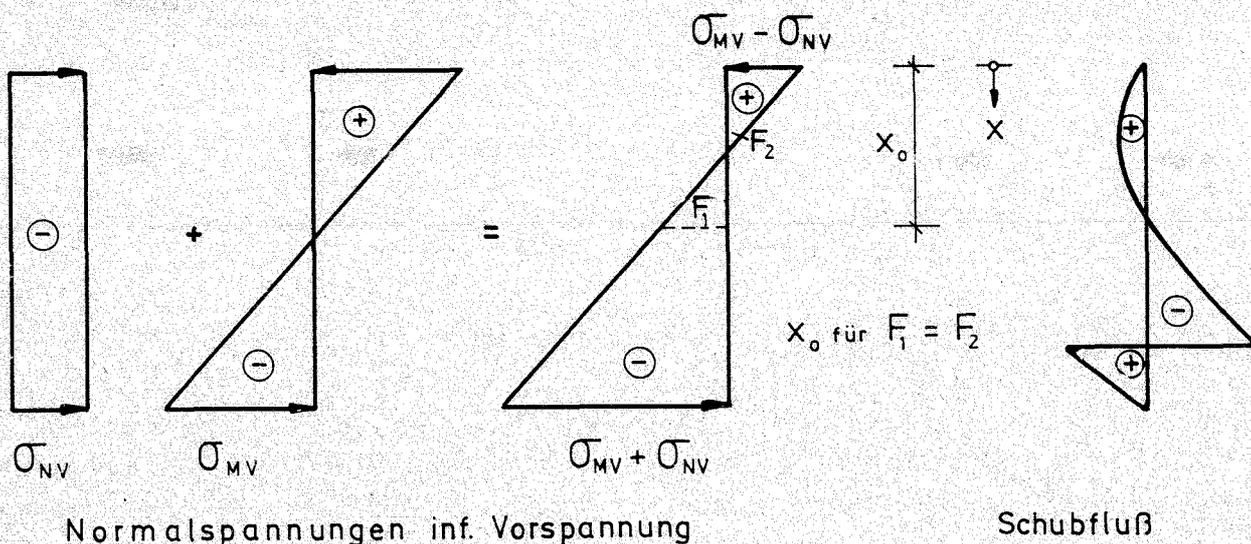


Abb. 3.11 Spannungsverläufe

Als Grenzfälle ergeben sich zum einen der zentrisch vorgespannte Stab, bei dem das Schubspannungsmaximum in der Schwerlinie liegt und zum anderen der I-Querschnitt mit dünnem Steg (\sim Zweipunkt-Querschnitt), bei dem ein Gurt vorgespannt ist. In diesem Fall liegt das Schubspannungsmaximum im Bereich des vorgespannten Gurtes, da nur geringe Anteile der Gesamtkraft in den Steg eingeleitet werden.

Es zeigt sich, daß mit zunehmender Plattendicke bei konstantem Randabstand der Litzen der Abstand der Schubspannungsmaxima infolge Vorspannung und Querkraft zunimmt. So ergibt sich an der Stelle des Maximums der Querkraftschubspannung, d.h. an der Stelle des Minimums der Stegbreite, für $d_0 = 15 \text{ cm}$

nöch ca. 90 % der maximalen Schubspannung aus Vorspannung, während für $d_0 = 25$ cm an dieser Stelle die Schubspannung aus Vorspannung etwa einen Nulldurchgang aufweist, und die Maxima der Schubspannungen aus Querkraft und Vorspannung erheblich voneinander entfernt sind.

In Längsrichtung liegen die maximalen Werte, wie die Abb. 3.7 a bis 3.9 a zeigen, an der Stirnfläche. Mit zunehmendem Abstand von der Stirnfläche ergeben sich offene Verläufe der Schubspannungen aus Vorspannung mit stark abnehmenden Absolutwerten.

4. Ergebnisse der Untersuchungen am räumlichen Strukturmodell

Neben der Ermittlung der Schubspannungsverteilung im Stegbereich mittels ebener Scheibenelemente wurde der räumliche Spannungszustand im Verankerungsbereich einer Hohlplatte untersucht. Dabei wurde das in Abschnitt 2.4.2 beschriebene räumliche Finite-Elemente-Modell verwendet. Bei der Auswertung der Ergebnisse wurde neben einer Überprüfung der Scheibenberechnung besonderer Wert auf die Verteilung der Spannungen in der Stirnfläche und auf die Ringzugspannungen im Verankerungsbereich des Spannglieds gelegt.

In Abb. 4.1 sind die Spannungen in der Stirnfläche, und in Abb. 4.2 ist der Verlauf der Ringzugspannungen in unmittelbarer Nähe der Litze in deren Verankerungsbereich dargestellt. Es wurde eine Spannbettvorspannung $\sigma_{ZV}^{(0)} = 973,5$ N/mm² aufgebracht, die nach dem Lösen der Verankerung zu einer bleibenden Vorspannung $\bar{\sigma}_{ZV} = 915,0$ N/mm² in der Litze führt. Dargestellt ist der Spannungszustand, der sich infolge Eigengewicht und Vorspannung einstellt. Abb. 4.2 zeigt, daß die Zugspannungen ihr Maximum in der Stirnfläche aufweisen und analog zu den Verbundspannungen rasch abfallen. Das Maximum der Zugspannungen erreicht dort mit $2,0$ N/mm² einen Wert, der im Bereich der Zugfestigkeit eines hochfesten Betons liegt. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, daß die aufgebrachte Vorspannung etwa der nach DIN 4227, Teil 1, zulässigen Stahlspannung entspricht.

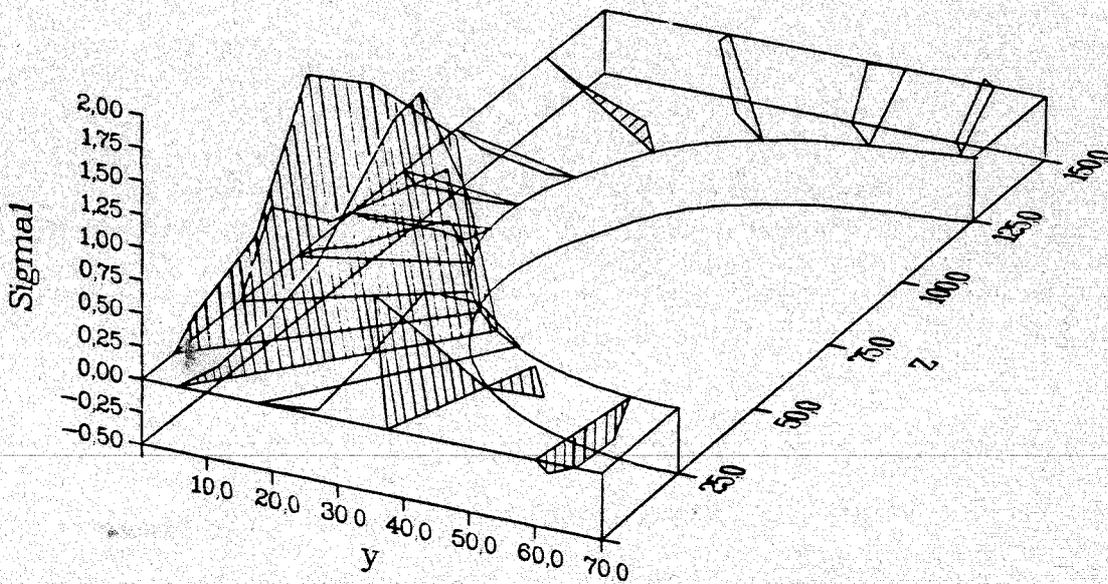


Abb. 4.1 Stirnzugspannungen infolge Vorspannung

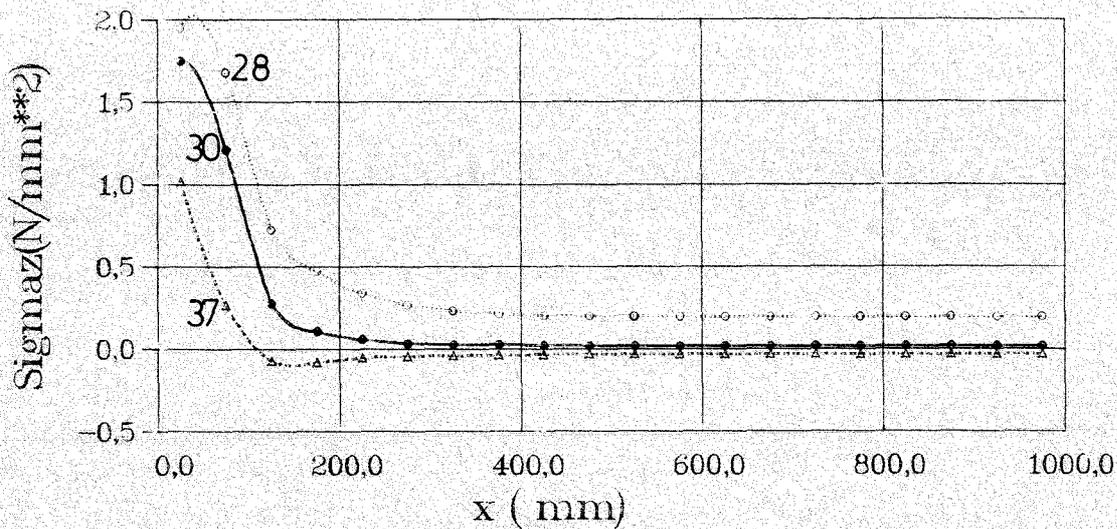


Abb. 4.2 Verlauf der Ringzugspannungen im Verankerungsbereich des Spannstahls in den Elementen 28 / 30 / 37, vgl. Abb. 2.15

Die Durchführung von dreidimensionalen Berechnungen für Untersuchungen dieser beiden Beanspruchungen erfordert einen derart hohen Aufwand in der Aufbereitung und Auswertung der Daten, daß dies für eventuelle Parameterstudien nicht gerechtfertigt erscheint. Zudem sind die auftretenden Rechenzeiten für das in Abschnitt 2.4.2 dargestellte Modell mit 1860 Elementen, 1901 Knoten und 5265 Freiheitsgraden ganz erheblich. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix besitzt 1.383.810 Elemente und weist eine maximale halbe Bandbreite von 324 und eine minimale halbe Bandbreite von 263 auf. Für einen ADINA-Rechenlauf mit 5 Zeitschritten wurden 1390 CPU-Sekunden auf der IBM 3081 des Hochschulrechenzentrums der TH Darmstadt benötigt.

Stattdessen ist es für die systematische Untersuchung des Einflusses der Lage und des Durchmessers der Vorspannlitze sowie der Querschnittsform sinnvoller, eine Scheibe zu untersuchen, die den Querschnitt wie in Abb. 4.3 abbildet, und die durch die Querpressung aus dem Spannstahl belastet ist. Diese Belastung kann entweder über Knotenkräfte oder, wodurch auch die

Berücksichtigung der Steifigkeit des Stahls ermöglicht wird, über Vordehnungen erfolgen.

Die Untersuchung des Verlaufs der Ringzugspannungen kann näherungsweise an einem Ersatzzylinder erfolgen, dessen Radius R z.B. anhand eines Vergleiches der maximalen Ringzugspannung für den untersuchten Plattenquerschnitt nach Abb. 4.3 mit der eines Zylinders unter Innendruck festgelegt wird. Eine rotationssymmetrische Berechnung erfordert den gleichen Aufwand wie eine Scheibenberechnung, da Spannungen und Verzerrungen in Umfangsrichtung linear von den Größen in Radial- und Längsrichtung abhängen. Ein Ersatzzylinder, der den interessierenden Verankerungsbereich L_v abbildet, muß deshalb auf der gesamten Länge erfaßt werden, vgl. Abb. 4.4. Zur Überprüfung der hiermit erzielten Ergebnisse ist es erforderlich, für einzelne ausgewählte Querschnitte zusätzlich räumliche Berechnungen durchzuführen, deren Anzahl jedoch relativ gering gehalten werden kann.

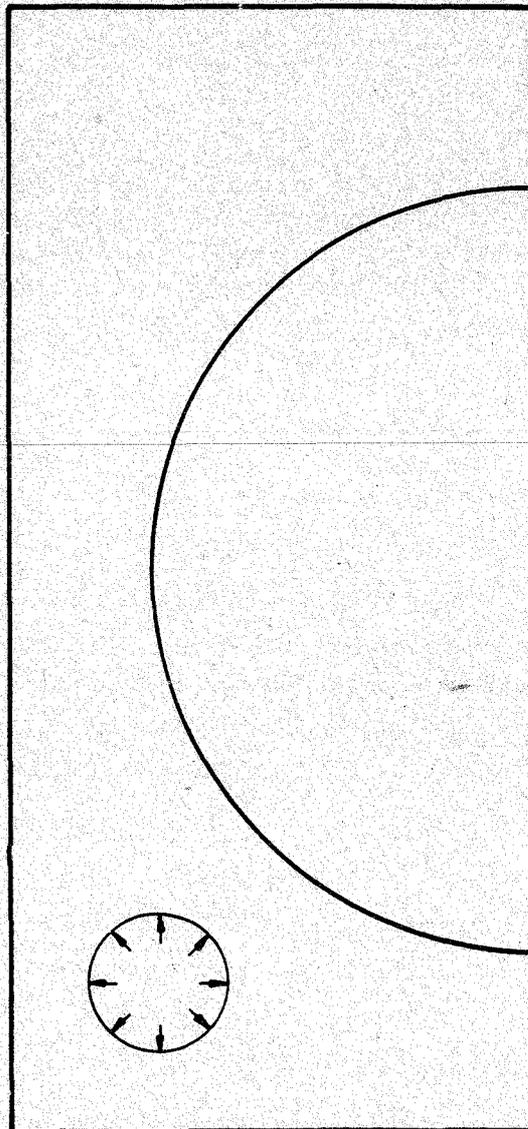


Abb. 4.3 Querschnittsscheibe

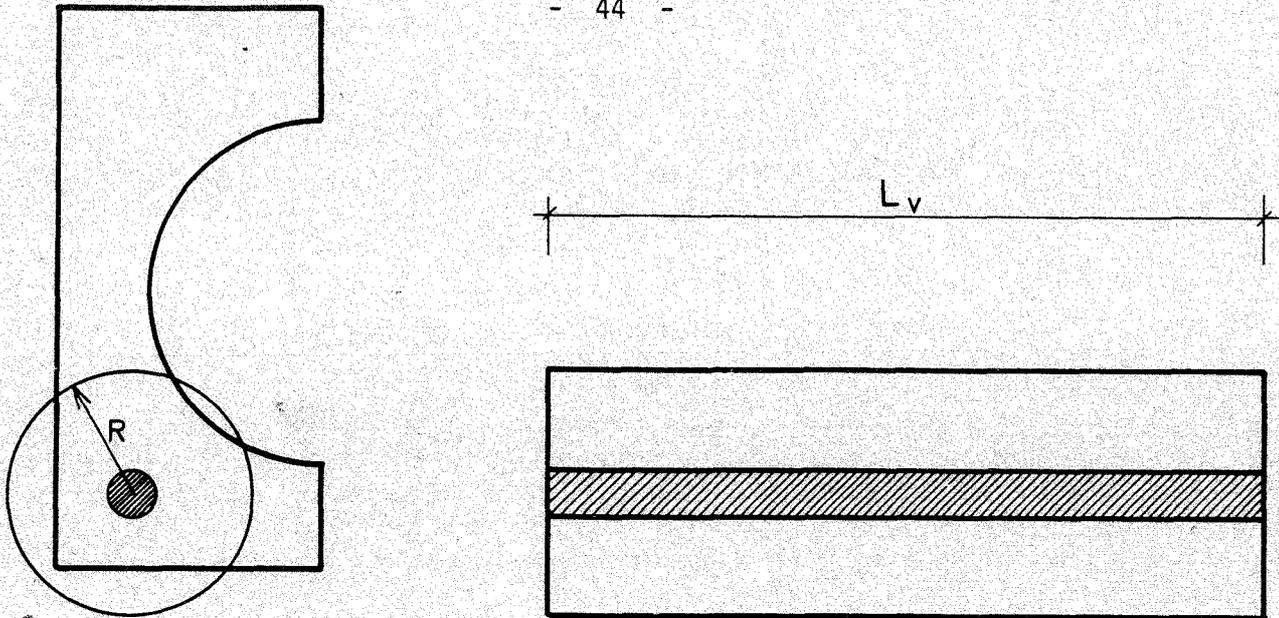


Abb. 4.4 Ersatzzylinder zur Berechnung des Spaltzuges

Die Beanspruchung kann hier nach dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahren oder über Vordehnungen aufgebracht werden.

5. Zusätzliche Untersuchungen an einem modifizierten Scheibenmodell

Neben den bisher behandelten Plattenquerschnitten mit kreisförmigen Hohlräumen wurden zusätzlich Platten untersucht, die den in Abb. 5.1 dargestellten Querschnitt mit im mittleren Bereich der Platte konstanter Stegdicke besitzen.

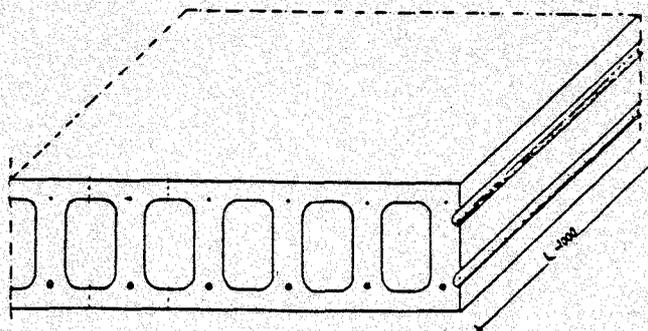


Abb. 5.1 Plattenquerschnitt für zusätzliche Untersuchungen

Ziel dieser Untersuchungen, die von Samkari am Fachgebiet Massivbau der Gesamthochschule Kassel durchgeführt wurden und die einen Einstieg in weitere Forschungsarbeiten auf diesem Gebiet darstellen, ist die Ermittlung der Spannungen im Auflagerbereich für unterschiedliche Betongüten und besonders für verschiedene Arten der Spannbewehrung, wobei neben der unteren Bewehrung auch eine obere Bewehrung angeordnet wird.

Dabei zeigt sich, daß die Spannungsverteilung wesentlich von der Betonzugfestigkeit abhängt. So treten z.B. bei Berücksichtigung eines Betons B 35 Risse auf, die zu einem völlig anderen Spannungszustand im Vergleich zu höheren Betongüten, bei denen die maximale Hauptzugspannung die Zugfestigkeit nicht erreicht, führen. Bei zentrischer Vorspannung, d.h. für $A_{z0} = A_{zu}$, ergeben sich die geringsten Hauptzugspannungen, während die größten Werte für $A_{z0} = 0$, $A_{zu} \neq 0$ erreicht werden. Eine Verringerung der maximalen Hauptzugspannung kann durch die Aufteilung der unteren Bewehrung auf mehrere Lagen erreicht werden.

6. Näherungsverfahren für die Ermittlung der Schubspannungen im Verankerungsbereich

In den Abschnitten 3 und 4 wurde der Spannungszustand im Verankerungsbereich der Spannbewehrung von Spannbetonhohlplatten mit Hilfe nichtlinearer Finite-Elemente-Berechnungen untersucht. Dem in der Baupraxis tätigen Ingenieur stehen derartige Hilfsmittel in der Regel zur Zeit kaum zur Verfügung. Darüberhinaus ist der Rechenaufwand hierbei meist für die baupraktische Anwendung unvertretbar hoch. Aus diesem Grund wird ein einfach zu handhabendes Näherungsverfahren entwickelt, das eine ausreichend genaue Ermittlung der Hauptzugspannungen im Verankerungsbereich erlaubt. Die Spannungen werden zunächst auf der Grundlage der Technischen Biegelehre (Balkentheorie) ermittelt. Anschließend werden die so ermittelten Werte mit Beiwerten multipliziert und damit der Einfluß des Scheibenspannungszustandes im Verankerungs- und Auflagerbereich berücksichtigt. Die Spannungen infolge Querkraft und Vorspannung werden getrennt ermittelt und anschließend überlagert. Da die Rissefreiheit Voraussetzung für eine sichere Verankerung ist und die Druckspannungen im Bereich der zulässigen Werte nach DIN 4227 liegen, kann linear

elastisches Verhalten vorausgesetzt werden, und es gilt das Superpositionsprinzip. Dies bringt neben einer erheblichen Vereinfachung der Berechnung den Vorteil, daß unterschiedliche Auflagerbreiten und Plattenüberstände über den Auflagerrand ohne zusätzlichen Aufwand erfaßt werden können.

Bei der Anwendung des Näherungsverfahrens sind die folgenden Annahmen und Voraussetzungen zu beachten:

1. Es wird vorausgesetzt, daß der Beton im Auflager- und Verankerungsbereich linear elastisches Werkstoffverhalten aufweist; d.h., in diesem Bereich treten keine Primärrisse auf.
2. Es gilt das Superpositionsprinzip, weshalb die Beanspruchungen aus einzelnen Lastfällen überlagert werden können.
3. Mit dem Näherungsverfahren werden nur die Hauptzugspannungen in einem Plattenlängsschnitt zwischen den Hohlräumen (x-y-Ebene) betrachtet. Andere mögliche Versagensarten, wie z.B. die Möglichkeit des Aufspaltens des Betons infolge der Sprengwirkung durch die Vorspannbewehrung, werden nicht erfaßt.
4. Die günstige Wirkung der Normalspannungen σ_y in Dickenrichtung des Querschnitts infolge der Auflagerpressung wird vernachlässigt.
5. Die Werte für den Multiplikationsfaktor β_2 in Abb. 6.8 wurden für eine Litze 3/8", St 1570/1770 ermittelt, die mit der zulässigen Spannbettvorspannung von $\sigma_{ZV}^{(0)} = 1150 \text{ N/mm}^2$ vorgespannt ist. Da die Verteilung der Schubspannungen bei dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen nichtlinearen Verbundmodell indirekt auch von der Größe der Vorspannkraft und dem Verhältnis von Querschnittsfläche zu Umfang abhängt, gelten die Werte in Abb. 6.9 zunächst nur für diese so vorgespannte Litze. Für eine geringere Vorspannung ergibt sich ein weniger fülliger Verlauf. Die Werte liegen hierfür also auf der sicheren Seite.

6.1 Beanspruchungen aus äußeren Lasten

Für die Ermittlung der Spannungen aus äußeren Lasten wird angenommen, daß die Länge s des St. Venant'schen Störbereichs der Plattendicke d_0 entspricht, vgl. Abb. 6.1. Am Innenrand des Störbereichs, d.h. für $x_1 = 0$, ergeben sich die Normal- und Schubspannungen nach der Technischen Biegelehre. Im Störbereich wird ein parabolischer Abfall der Längsnormal- und Schubspannungen angenommen, vgl. Abb. 6.2. Die Normalspannungen in Dickenrichtung der Platte werden auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

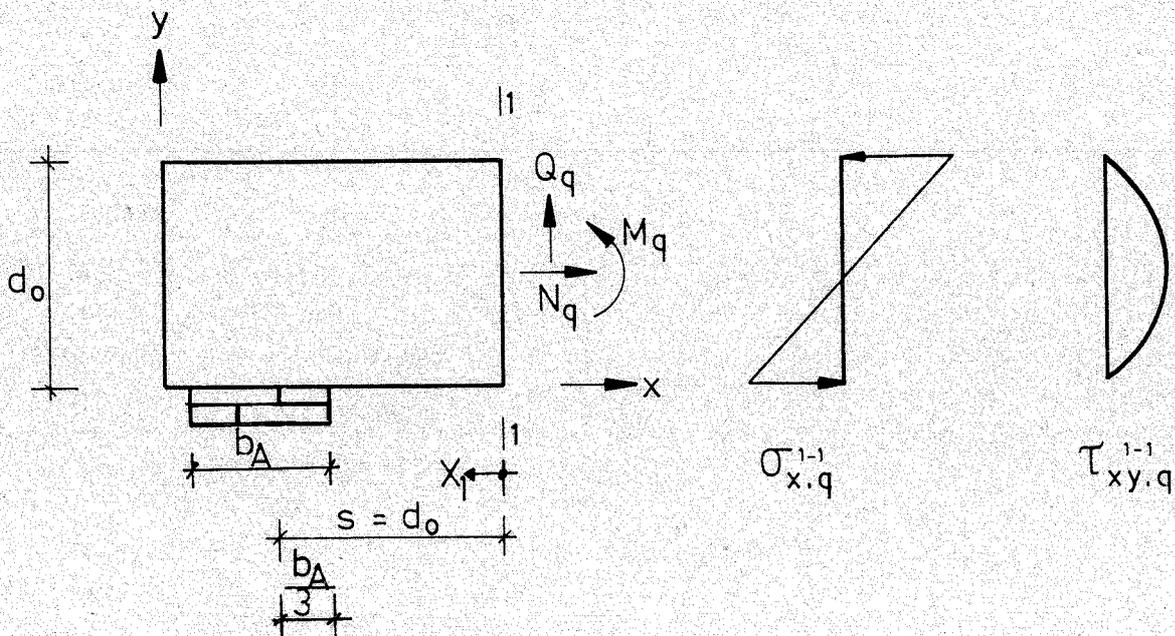


Abb. 6.1 Störzone im Auflagerbereich

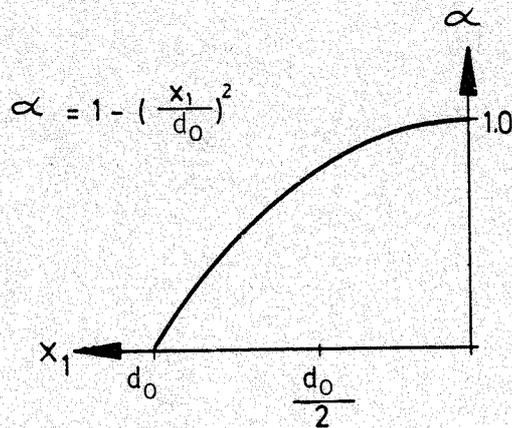


Abb. 6.2 Multiplikationsfaktor α für die Spannungen aus Vertikallasten

Die Spannungen im Störbereich ergeben sich damit nach Gl. (6.1), wobei die Spannungen nach der Technischen Biegelehre, d.h. am Ende des Störbereiches mit 1-1 indiziert sind.

$$\begin{aligned} \sigma_{x,q} &\approx d \cdot \sigma_{x,q}^{1-1} \\ \tau_{xy,q} &\approx d \cdot \tau_{xy,q}^{1-1} \end{aligned} \quad (6.1)$$

6.2 Beanspruchungen aus der Einleitung der Vorspannkraft

Im Gegensatz zu den äußeren Lasten erzeugt die Vorspannung einen Eigen­spannungszustand. Infolge der geraden Spanngliedführung ergeben sich keine Querkräfte, so daß Schubspannungen lediglich im Verankerungsbereich auf­treten. Der Spannungszustand ist in Abb. 6.3 dargestellt, wobei die Länge des Verankerungsbereichs nach DIN 4227, Teil 1, Gl. (13) zu $e = \sqrt{s^2 + (0,6 l_{\ddot{u}})^2} \geq l_{\ddot{u}}$ ermittelt wird. Hierbei ist s die Länge des Störbereichs, die, wie im vorhergehenden Abschnitt 6.1 angegeben, zu $s = d_o$ gesetzt wird. Bei den vorliegenden Verhältnissen von $d_o/l_{\ddot{u}}$ wird je­doch die Obergrenze maßgebend, d.h. es ergibt sich $e = l_{\ddot{u}}$. Mit $l_{\ddot{u}}$ wird die Verankerungslänge des Spann­stahls nach DIN 4227, Teil 1, Gl. (17) bezeichnet.

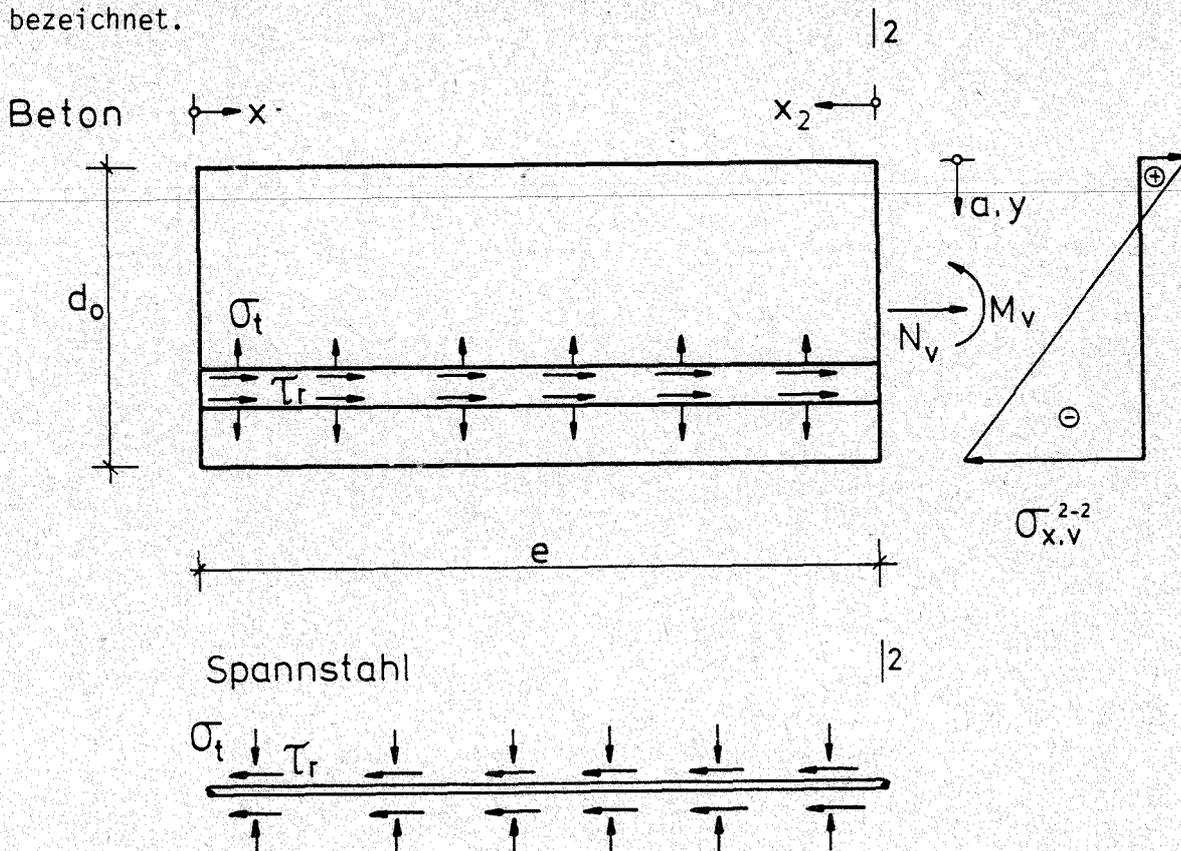


Abb. 6.3 Verankerungsbereich des Spannstahls

Im Abstand e von der Stirnfläche, d.h. nach vollständiger Einleitung der Vorspannkraft, ergibt sich nach der Technischen Biegelehre infolge Vorspannung die in Abb. 6.3 dargestellte Spannungsverteilung. Hieraus werden die Schubspannungen im Verankerungsbereich näherungsweise ermittelt. Wie in Abb. 6.4 dargestellt, ist die Gesamtschubkraft $T(a)$ in einem horizontalen Schnitt $y=a$ im Gleichgewicht mit den Normalspannungen im Abstand e von der Stirnfläche und ergibt sich nach Gl. (6.2).

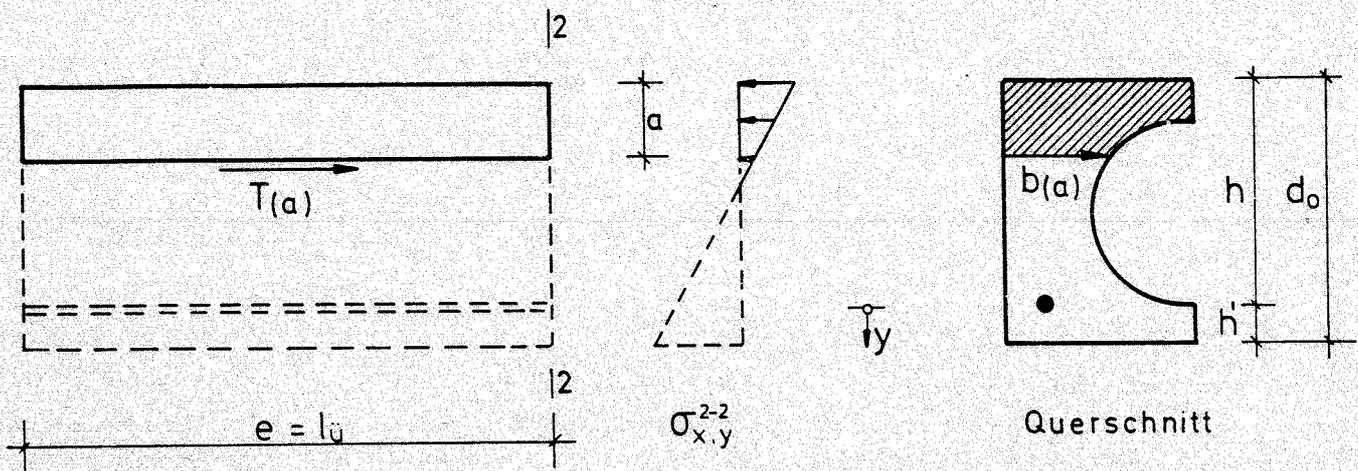


Abb. 6.4 Ermittlung der Gesamtschubkraft $T(a)$

$$T(a) = \int_{-h}^{-h+a} \sigma_{x,y}^{2-2}(y) \cdot b(y) \, dy \quad \text{für } -h \leq y \leq 0$$

$$+ \int_{h'-a}^{h'} \sigma_{x,y}^{2-2}(y) \cdot b(y) \, dy \quad \text{für } 0 \leq y \leq h'$$

(6.2)

In den Parameterstudien, vgl. Abschnitt 3.2, hat sich gezeigt, daß die Schubspannungsverteilungen über die Plattendicke im gesamten Verankerungsbereich nahezu affine Verläufe aufweisen. Sie unterscheiden sich lediglich in ihren Ordinaten, die ihren Höchstwert in der Nähe der Stirnfläche haben

und von dort abfallen. Daher wird zunächst in Gl. (6.3) ein Einheits-Schubfluß, vgl. Abb. 6.5, und daraus eine Einheits-Schubspannung Gl. (6.4) ermittelt. Diese Einheitsschubspannung gilt näherungsweise für den Fall konstanter Verbundspannungen $\tau_{r1}(x) = \tau_{r1m}$ im gesamten Verankerungsbereich.

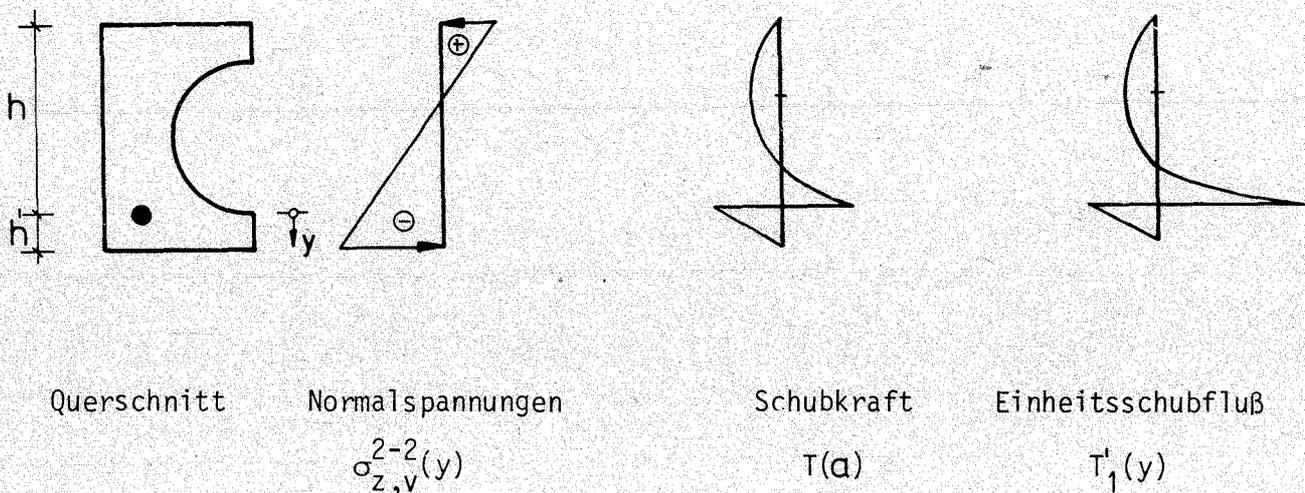


Abb. 6.5 Verlauf von Schubkraft und Einheitsschubfluß

$$T_1'(y) = \frac{T(a)}{b(y)} \quad (6.3)$$

$$\tau_{v1}(x,y) = \frac{T_1'(y)}{l_{\ddot{u}}} \quad (6.4)$$

In Wirklichkeit stellt sich jedoch keine konstante Verbundspannung zwischen Beton und Stahl ein, sondern es ergibt sich ein von der Stirnfläche aus abfallender Verlauf, vgl. Abb. 6.6, 6.7 a und 6.7 b.

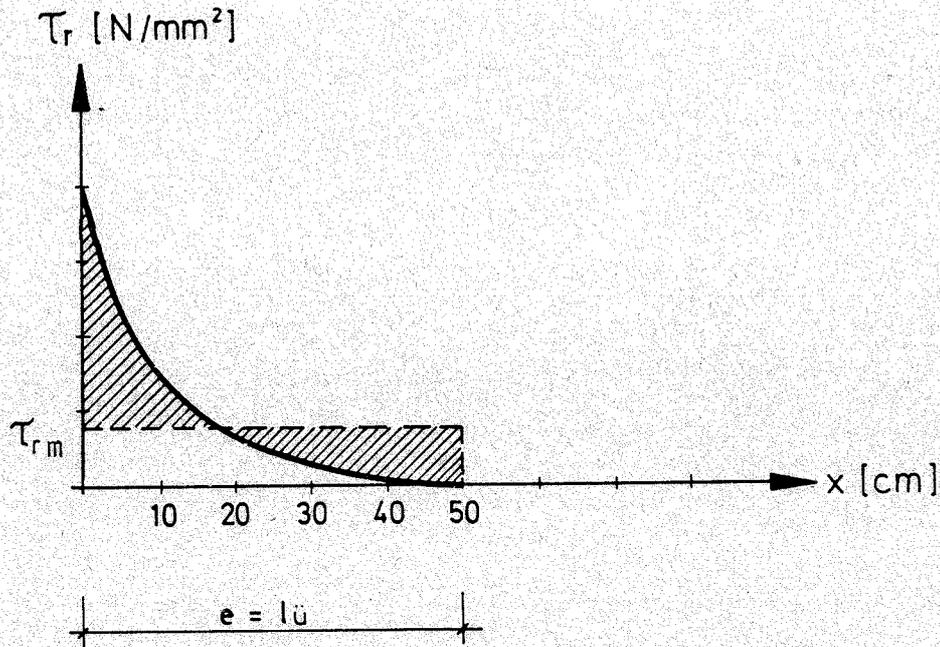


Abb. 6.6 Schematische Darstellung des Verlaufs der Verbundspannungen im Verankerungsbereich

Eine Ursache hierfür ist die Klemmwirkung infolge der Querdehnungsbehinderung ("Hoyer-Effekt").

Darüberhinaus nimmt mit wachsendem Abstand von der Stirnfläche der noch zu verankernde Teil der Vorspannkraft selbst ab, wodurch sich auch die Verbundspannungen verringern, so daß es zu einem allmählichen Abfall und nicht zu einem Sprung in den Verbundspannungen am Ende der Verankerungslänge kommt. Für die Ermittlung der Werte der Schubspannungen im Verankerungsbereich wird zunächst angenommen, daß deren Verlauf im Plattenlängsrichtung (x -Richtung) affin zum Verlauf der Verbundspannungen ist. Damit ergeben sich die Schubspannungen $\tau_v(x,y)$ infolge Einleitung der Vorspannkraft durch Multiplikation der Einheitsschubspannung $\tau_{v1}(x,y)$ mit dem Faktor $\beta_2(x)$ nach Gl. (6.5). In Abb. 6.8 a und b sind die für eine 3/8" Litze in einem Betonzylinder $\varnothing 100$ mm ermittelten Verläufe von β_2 für verschiedene Bewehrungsarten dargestellt. Dabei ist β_2 definiert als das Verhältnis der Verbundspannung $\tau_r(x)$ zur mittleren Verbundspannung $\tau_{r,m}$ im Bereich der Verankerungslänge.

$$\tau_v(x,y) \approx \beta_2(x) \cdot \tau_{v1}(x,y) \quad (6.5)$$

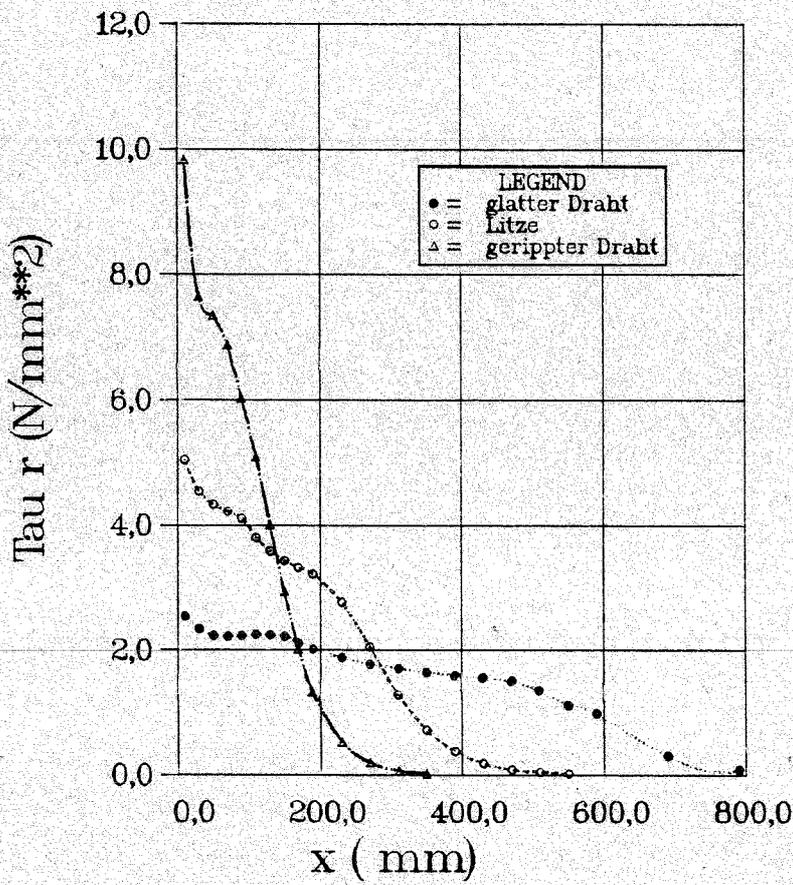


Abb. 6.7 a Verlauf der Verbundspannungen in Abhängigkeit von der Profilierung des Spannstahls
Betongüte B45

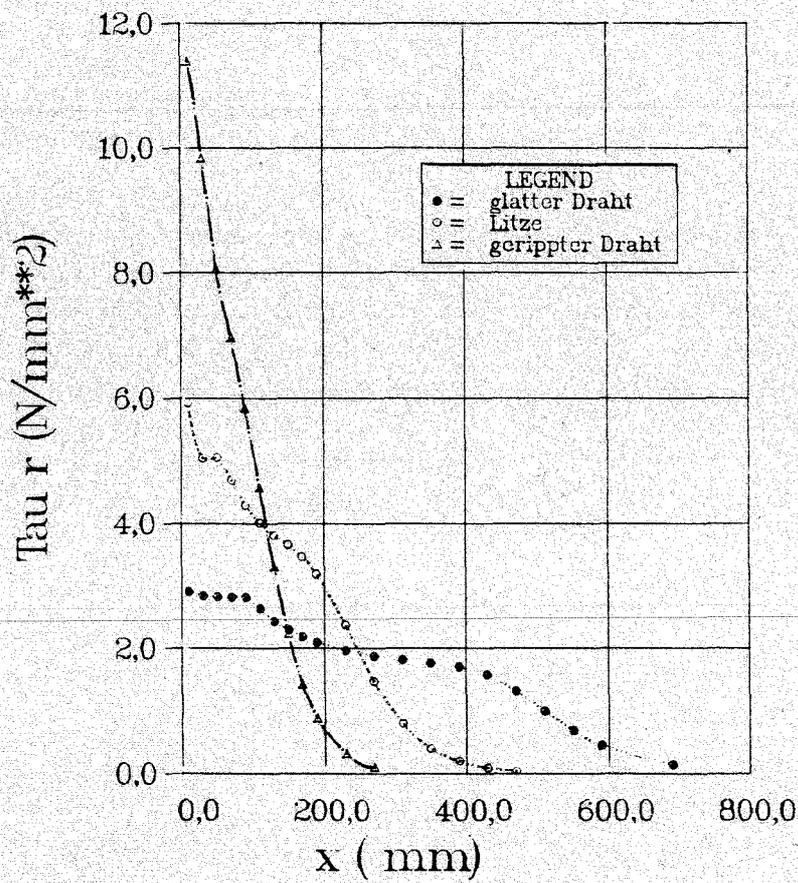


Abb. 6.7 b Verlauf der Verbundspannungen in Abhängigkeit von der Profilierung des Spannstahls
Betongüte B55

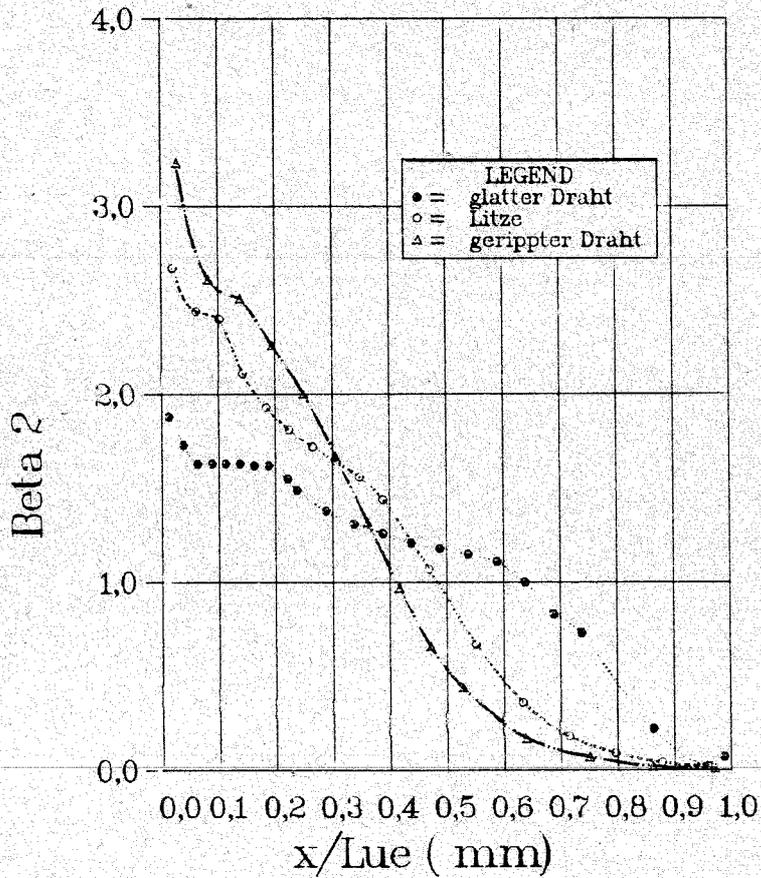


Abb. 6.8 a Einleitung der Vorspannkraft:
Verhältnis der örtlichen Verbundspannung $\tau_r(x)$ zur mittleren
Verbundspannung τ_{rm} im Verankerungsbereich
Betongüte B45

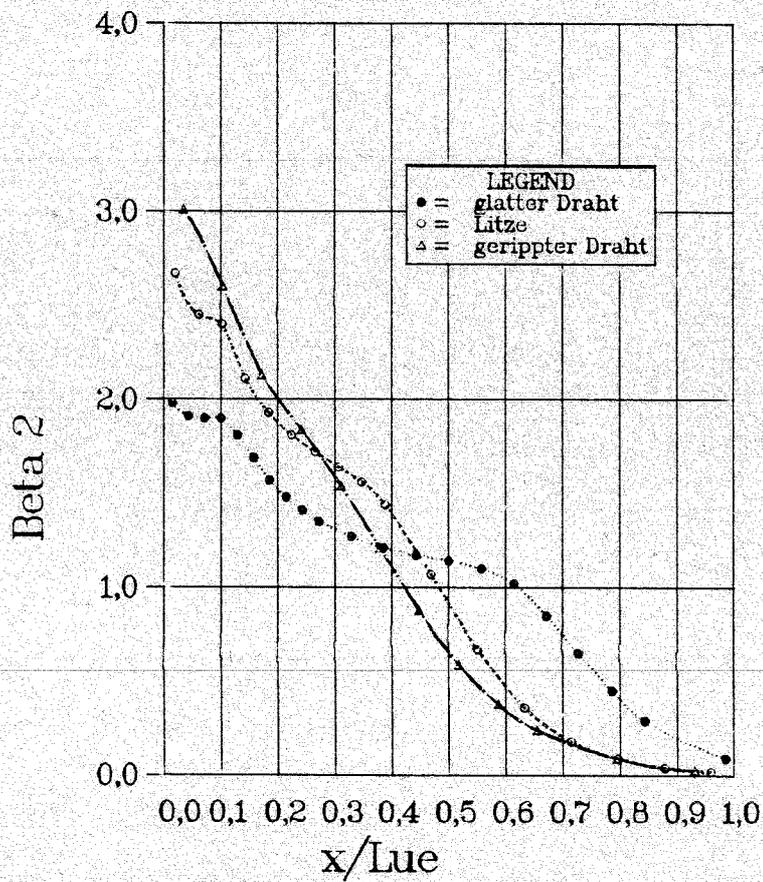


Abb. 6.8 b Einleitung der Vorspannkraft:
Verhältnis der örtlichen Verbundspannung $\tau_r(x)$ zur mittleren
Verbundspannung τ_{rm} im Verankerungsbereich
Betongüte B55

Ein Vergleich der so ermittelten Schubspannungen mit denen aus FE-Berechnungen bestätigt den Ansatz eines über die Querschnittshöhe konstanten Multiplikationsfaktors. Es zeigt sich jedoch, daß sich beim glatten Draht ein etwas gleichmäßigerer Verlauf der Schubspannungen als nach Abb. 6.8 einstellt, während bei der Litze die Schubspannungen in der Nähe der Stirnfläche geringfügig größere Werte aufweisen als dies nach Abb. 6.8 zu erwarten ist.

Daher sind in Abb. 6.9 leicht modifizierte Kurven für β_2 eingetragen. Wegen der nur geringfügigen Abhängigkeit von der Betongüte braucht für den Verlauf von $\beta_2(x) \approx \tau_v(x,y)/\tau_{v1}(x,y)$ in Abhängigkeit von x/l_u außerdem nur ein Diagramm angegeben zu werden, zumal der Einfluß der Betongüte bereits im $\tau_{v1}(x,y)$ und l_u enthalten ist.

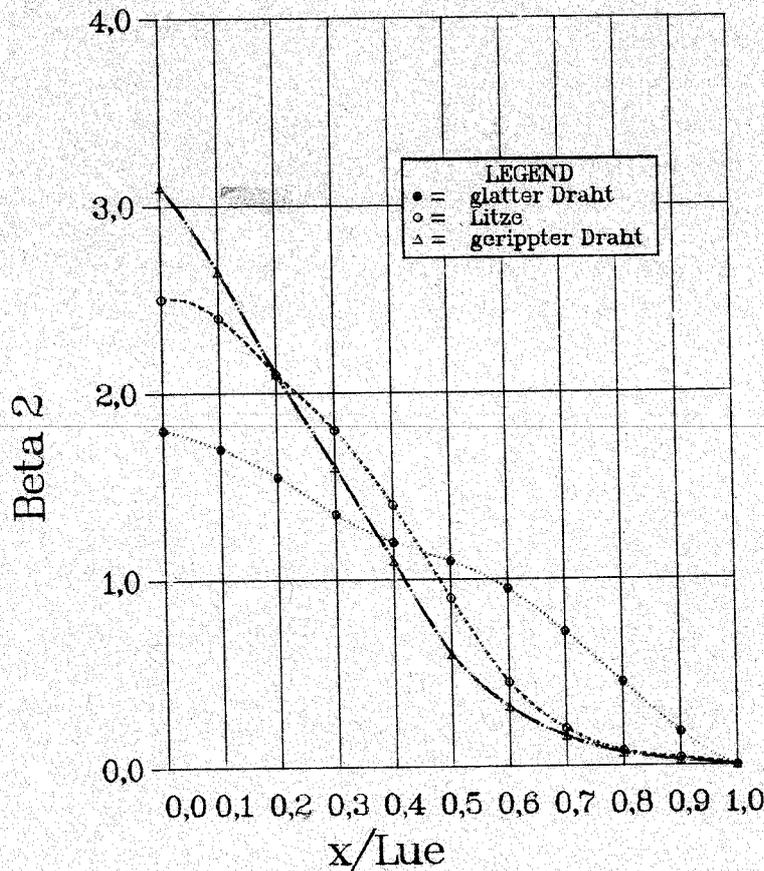


Abb. 6.9 Einflußfaktoren β_2 für die Ermittlung der Schubspannungen inf. Einleitung der Vorspannkraft

Die Berechnung der Schubspannungen im Verankerungsbereich infolge Vorspannung vollzieht sich damit in zwei Schritten:

1. Ermittlung des Verlaufs der Einheitsschubspannungen nach Gl. (6.2) - (6.4).
2. Multiplikation der Einheitsschubspannungen mit dem dimensionslosen Faktor β_2 in Abhängigkeit von der Profilierung der Spannbewehrung und des Abstands x zwischen dem betrachteten Schnitt und der Stirnfläche.

Nach diesem Verfahren werden die Schubspannungen in den Bereichen ermittelt, die sich in einem Abstand $\geq d_s$ von der Achse der Spannbewehrung befinden. Im unmittelbaren Bereich der Spannbewehrung werden die für den Abstand d_s von der Achse der Bewehrung ermittelten Werte linear verbunden.

Für die Abschätzung der Normalspannung im Beton aus Vorspannung wird für den Verankerungsbereich vorgeschlagen, die Normalspannungen $\sigma_{x,v}^{2-2}$, die im Schnitt 2-2 nach Abb. 6.4, d.h. am Ende des Verankerungsbereiches, nach der Technischen Biegelehre ermittelt werden können, im Bereich der Verankerungslänge mit dem Faktor α nach Abb. 6.2 zu multiplizieren.

$$\sigma_{x,v}(x,y) \approx \alpha \cdot \sigma_{x,v}^{2-2}(y) \quad (6.6)$$

6.3 Nachweis

Für den Nachweis der schiefen Hauptzugspannung zur Begrenzung der maximal eintragbaren Vorspannkraft werden zunächst die Normal- und Schubspannungen infolge Querkraft und Vorspannung nach Abschnitt 6.1 bzw. 6.2 getrennt ermittelt und anschließend überlagert. Danach werden die daraus resultierenden Hauptspannungen bestimmt, wobei die günstig wirkenden, sich aus der Auflagerpressung ergebenden Normaldruckspannungen σ_y in Dickenrichtung auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt werden, vgl. Gl.(6.7).

$$\sigma_{I,II} \approx \frac{(\sigma_{x,q} + \sigma_{x,v})}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_{x,q} + \sigma_{x,v})^2}{4} + (\tau_{xy,q} + \tau_{xy,v})^2} \quad (6.7)$$

Die so ermittelte Hauptzugspannung σ_I infolge Querkraft und Vorspannung darf die zulässigen Werte für zentrischen Zug nach DIN 4227 Teil 1, Tabelle 9, Zeile 18, nicht überschreiten.

6.4 Beispiel

Am Beispiel eines Balkens mit einer Länge von 2 m, mit einem Rechteckquerschnitt $b/d = 10/15$ cm und mit einer Spannbewehrung St 1570/1770, $A_z = 52 \text{ mm}^2$, wird die Anwendung des Näherungsverfahrens vorgestellt. Die hierbei erzielten Ergebnisse werden mit Resultaten von FE-Berechnungen verglichen.

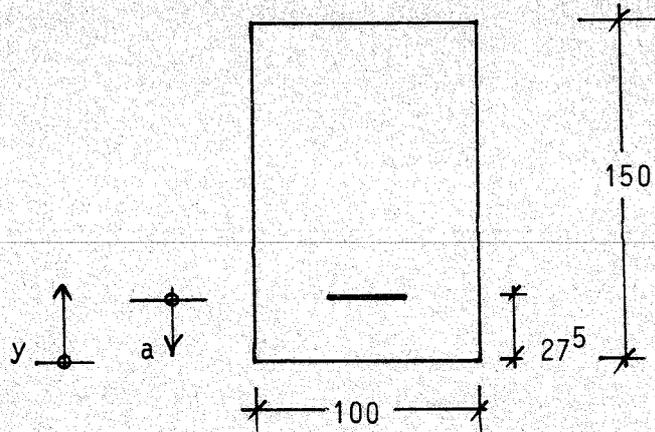


Abb. 6.10 Untersuchter Querschnitt

Materialdaten: Betongüte B55
 Spannstahl St 1570/1770
 $A_z = 52 \text{ mm}^2$
 $\sigma_{zV}^{(0)} = 950 \text{ N/mm}^2$
 $\bar{\sigma}_{zV} = 910 \text{ N/mm}^2$

Zunächst wird der Verlauf der Gesamtschubkraft $T(a)$ und der Einheitschubspannungen $\tau_{V1}(x,y)$ ermittelt:

$$N_V = -910 \cdot 52 = -47320 \text{ N} = -47,32 \text{ kN}$$
$$M_V = -910 \cdot 52 (75 - 27,5) = -2247700 \text{ N mm} = -2,25 \text{ kN m}$$

$$A_b = 0,1 \cdot 0,15 = 0,015 \text{ m}^2$$
$$W_b = 0,1 \cdot 0,15^2 / 6 = 0,000375 \text{ m}^3$$

Betonrandspannungen

$$\sigma_{bo} = -47,32 / 0,015 + 2,25 / 0,000375 = -3155 + 6000 = +2845 \text{ kN/m}^2$$
$$\sigma_{bu} = -47,32 / 0,015 - 2,25 / 0,000375 = -3155 - 6000 = -9155 \text{ kN/m}^2$$

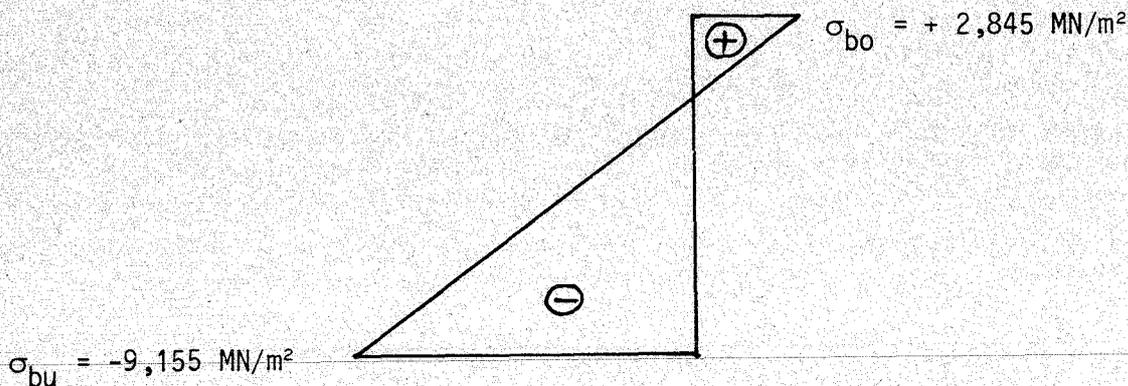


Abb. 6.11 Normalspannungsverteilung nach der Technischen Biegelehre

Aus der Normalspannungsverteilung wird die Verteilung der Gesamtschubkraft $T(a)$ im Bereich der Verankerungslänge nach Gl. (6.2) ermittelt. Hieraus ergibt sich die Einheitsschubspannung nach Gl. (6.4).

a mm	$T(a)$ kN	$\tau_{v1}(x,y)$ kN/m ²	y mm
-122,5	0	0	150
-112,5	-2,445	-47,1	140
-102,5	-4,09	-80,1	130
-92,5	-4,935	-96,7	120
-82,5	-4,98	-97,6	110
-72,5	-4,23	-82,9	100
-62,5	-2,67	-52,3	90
-52,5	-0,32	-6,3	80
-42,5	2,84	55,7	70
-32,5	6,80	133,3	60
-22,5	11,55	226,4	50
-12,5	17,11	335,4	40
7,5	-16,71	-327,5	20
12,5	-12,88	-251,5	15
17,5	-8,75	-171,5	10
22,5	-4,48	-96,6	5
27,5	0	0	0

Tab. 6 Gesamtschubkraft $T(a)$ und Einheitsschubspannungen $\tau_{v1}(x,y)$

Auf den folgenden Seiten sind für unterschiedliche Schnitte im Abstand x von der Stirnfläche die Schubspannungsverteilungen dargestellt, die sich mit Hilfe der Näherungsformel Gl. (6.5) ergeben. Diese Werte werden mit den Ergebnissen von FE-Berechnungen verglichen. Dabei werden die drei unterschiedlichen Bewehrungsarten glatter Draht, Litze und gerippter Draht untersucht. Für die Litze werden zusätzlich die Ergebnisse nach der verbesserten Näherungslösung gemäß Abb. 6.9 dargestellt.

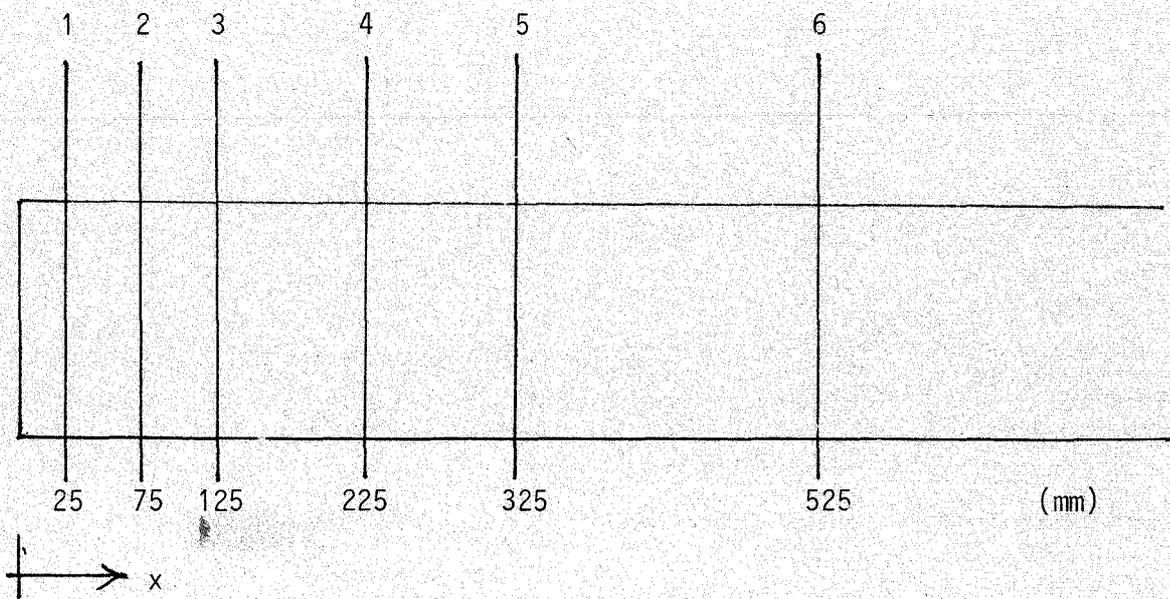


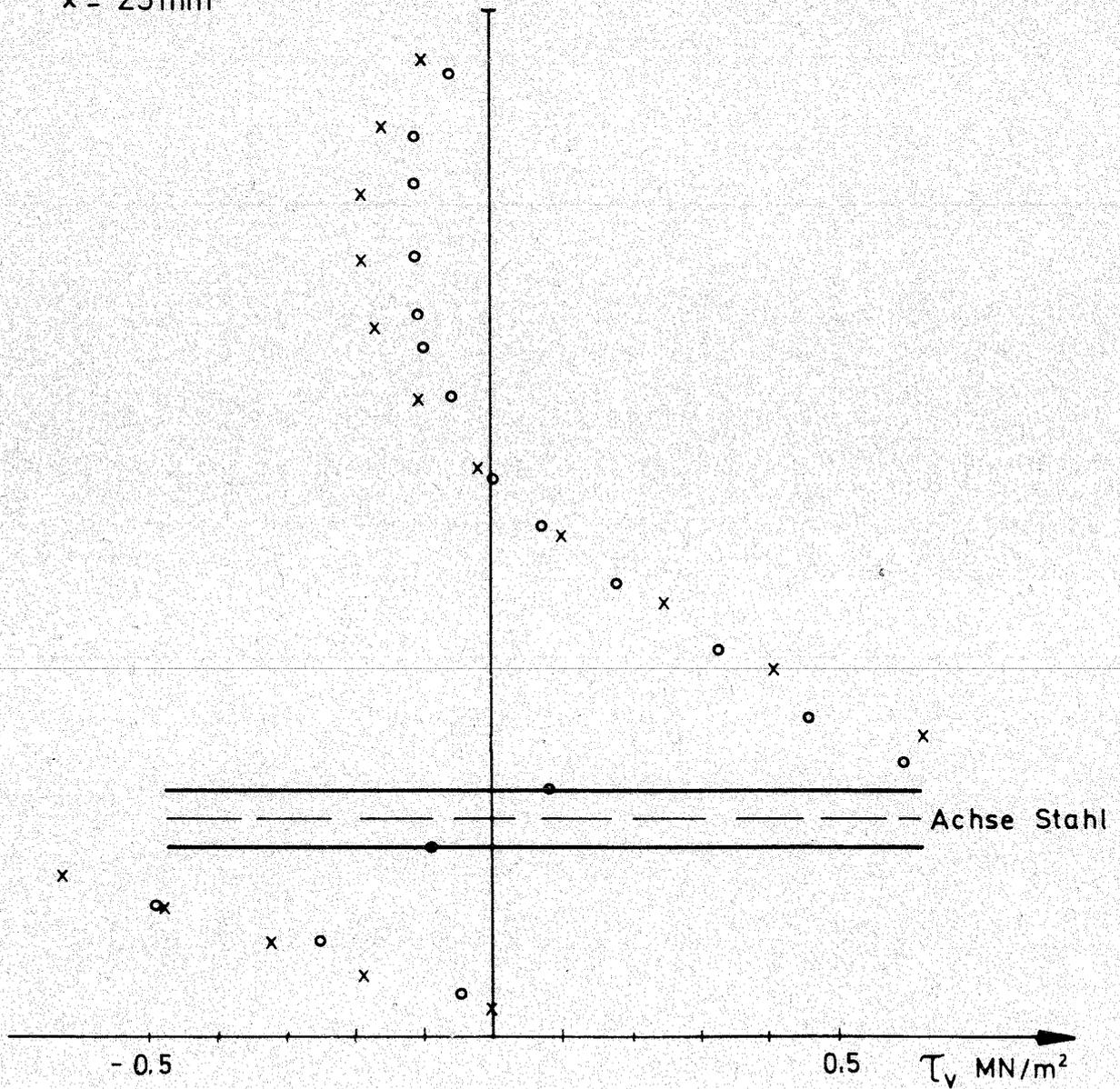
Abb. 6.12 Lage der in den folgenden Abbildungen dargestellten Schnitte

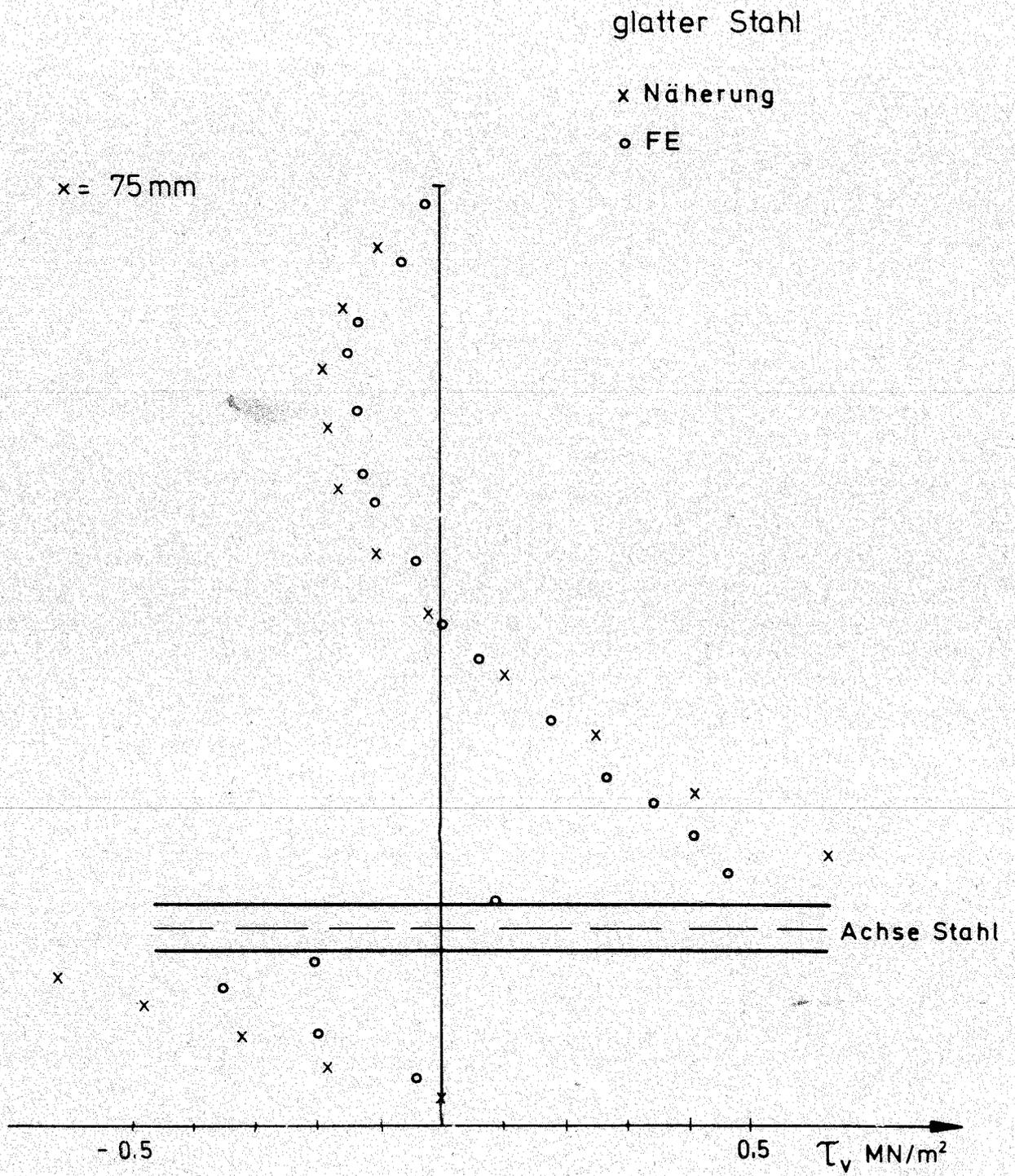
glatter Stahl

x Näherung

o FE

x = 25 mm



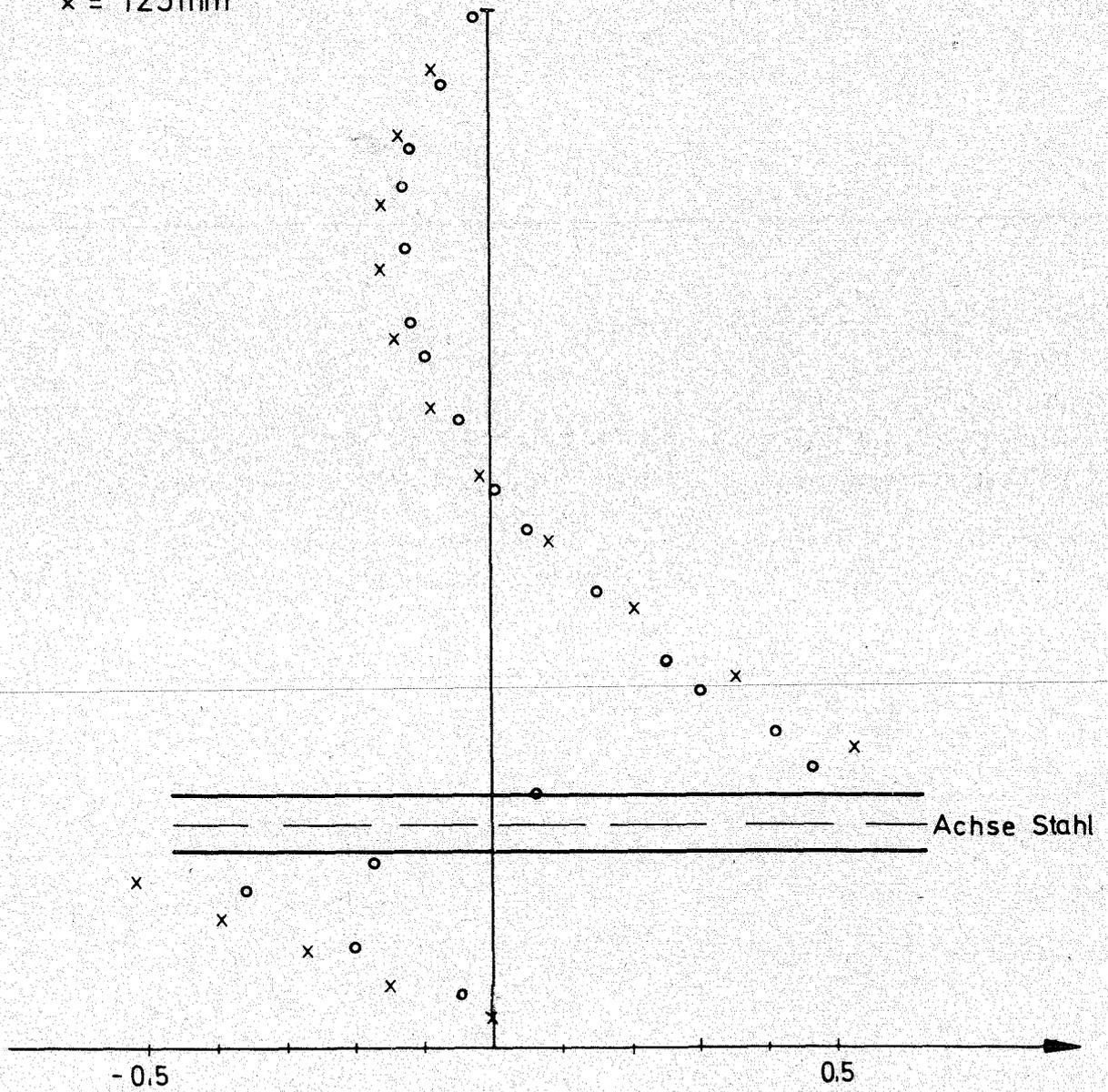


glatter Stahl

x Näherung

o FE

x = 125 mm

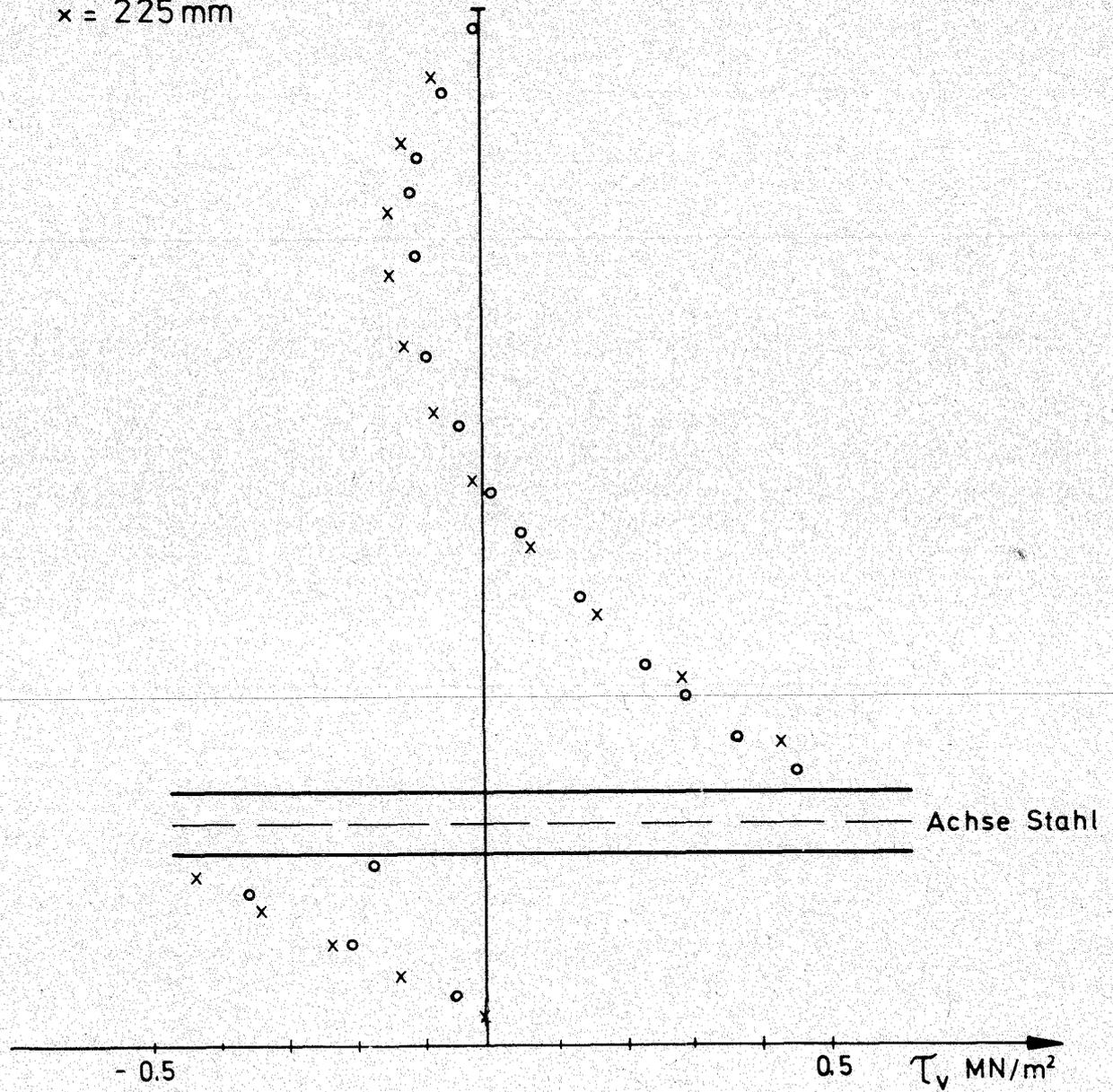


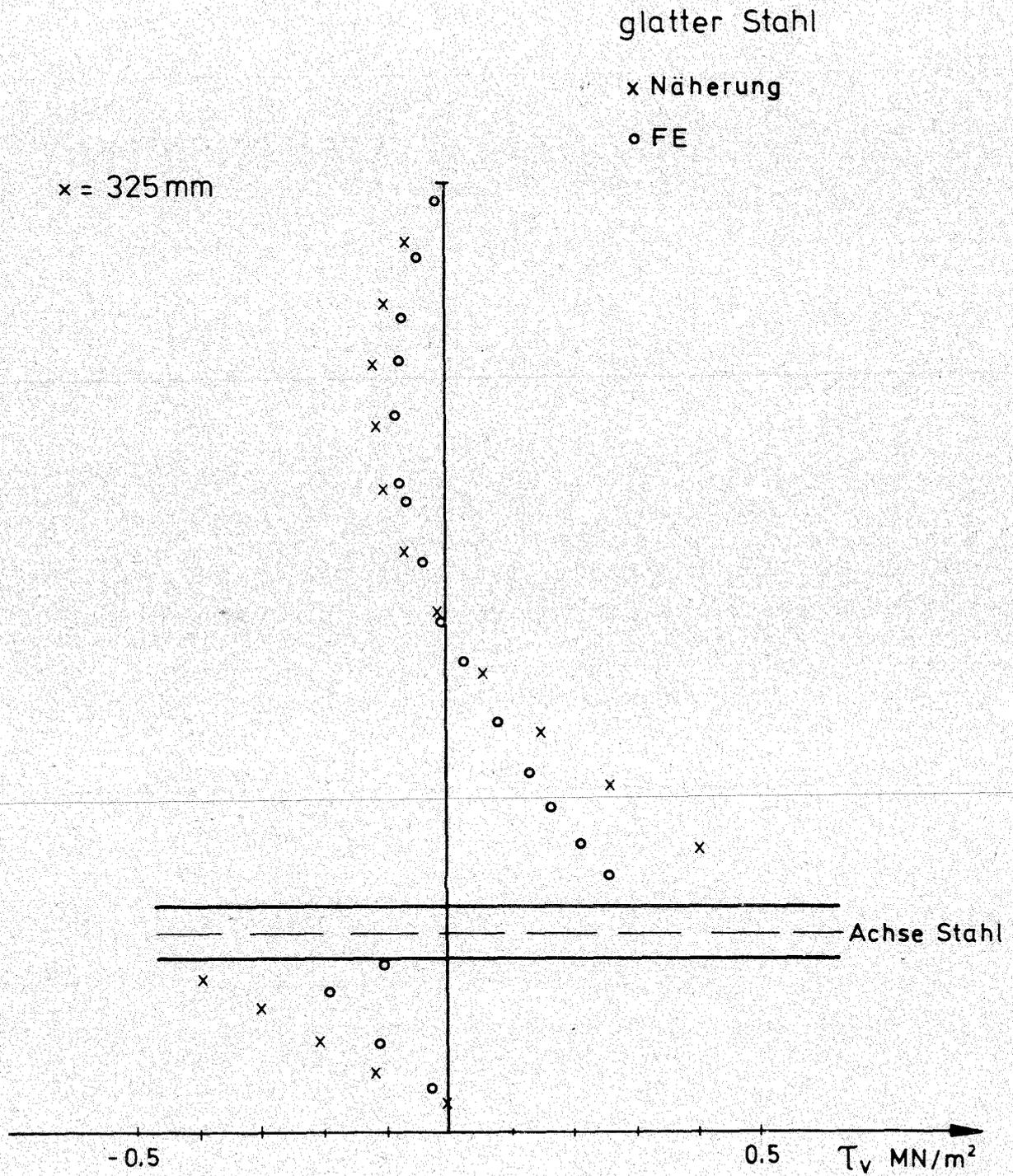
glatter Stahl

x Näherung

o FE

x = 225 mm



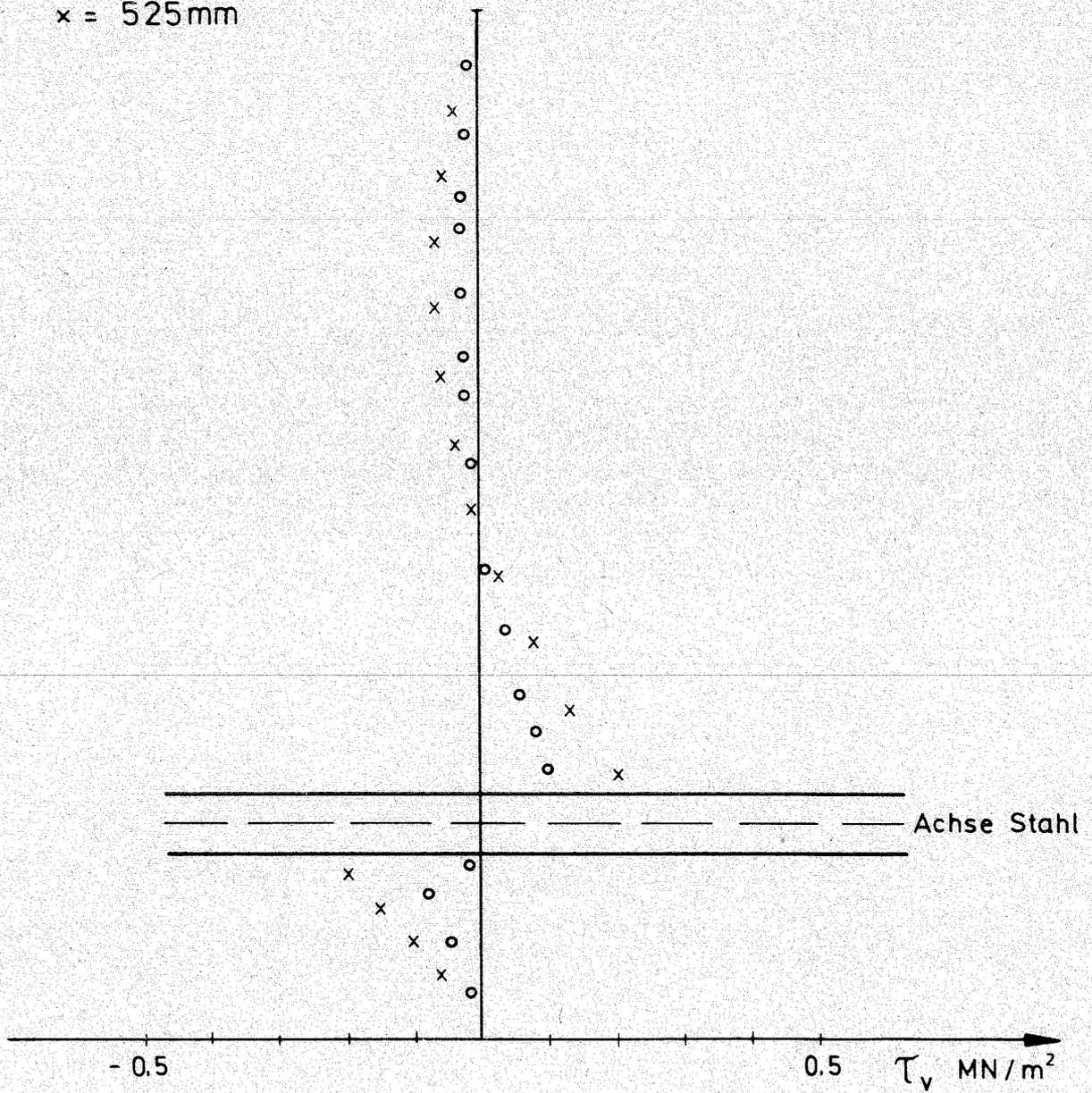


glatter Stahl

x Näherung

o FE

x = 525 mm



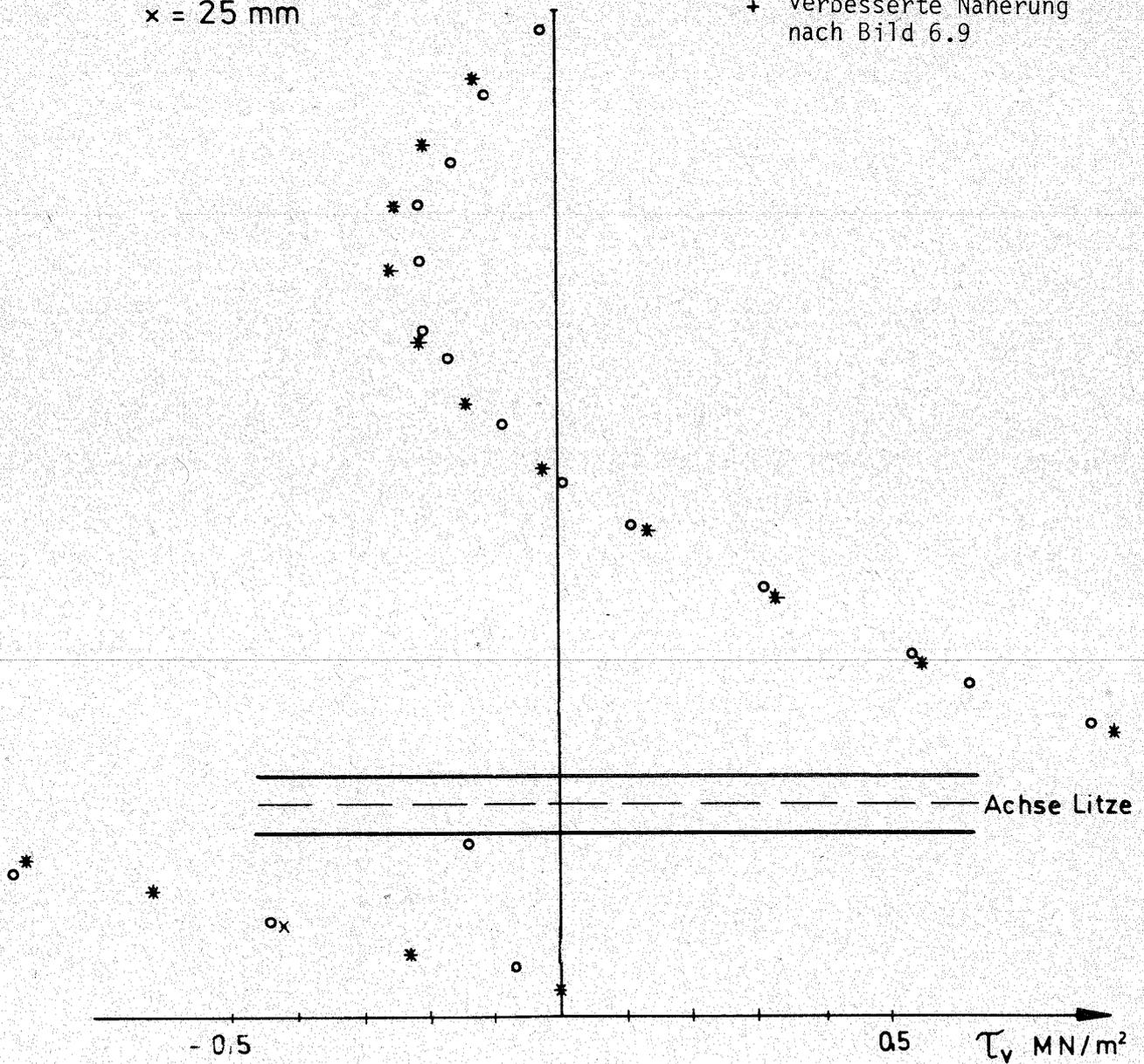
Litze

x Näherung Gl. 6.5

o FE

+ verbesserte Näherung nach Bild 6.9

x = 25 mm

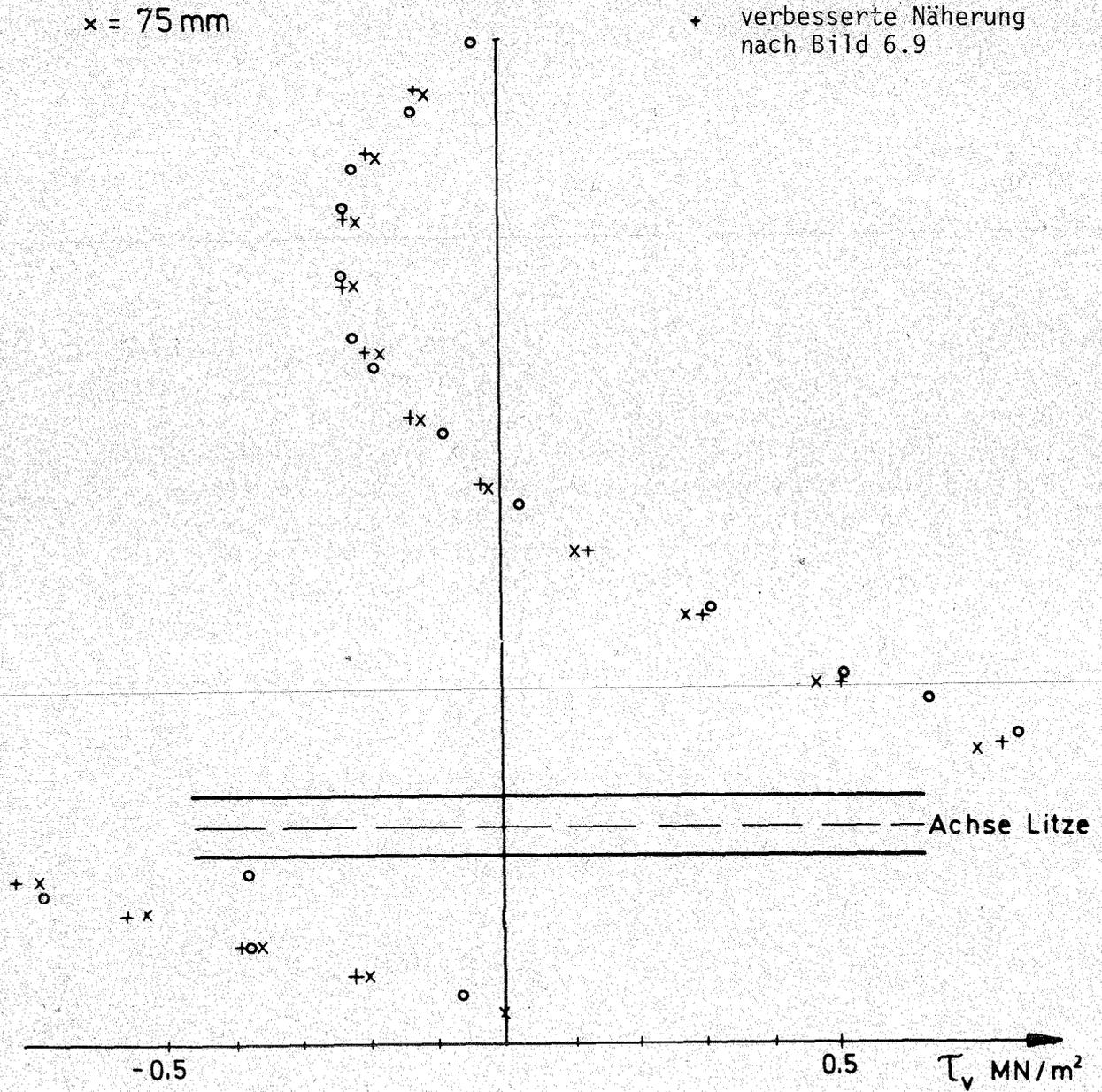


Litze

x Näherung Gl. 6.5

o FE

+ verbesserte Näherung nach Bild 6.9



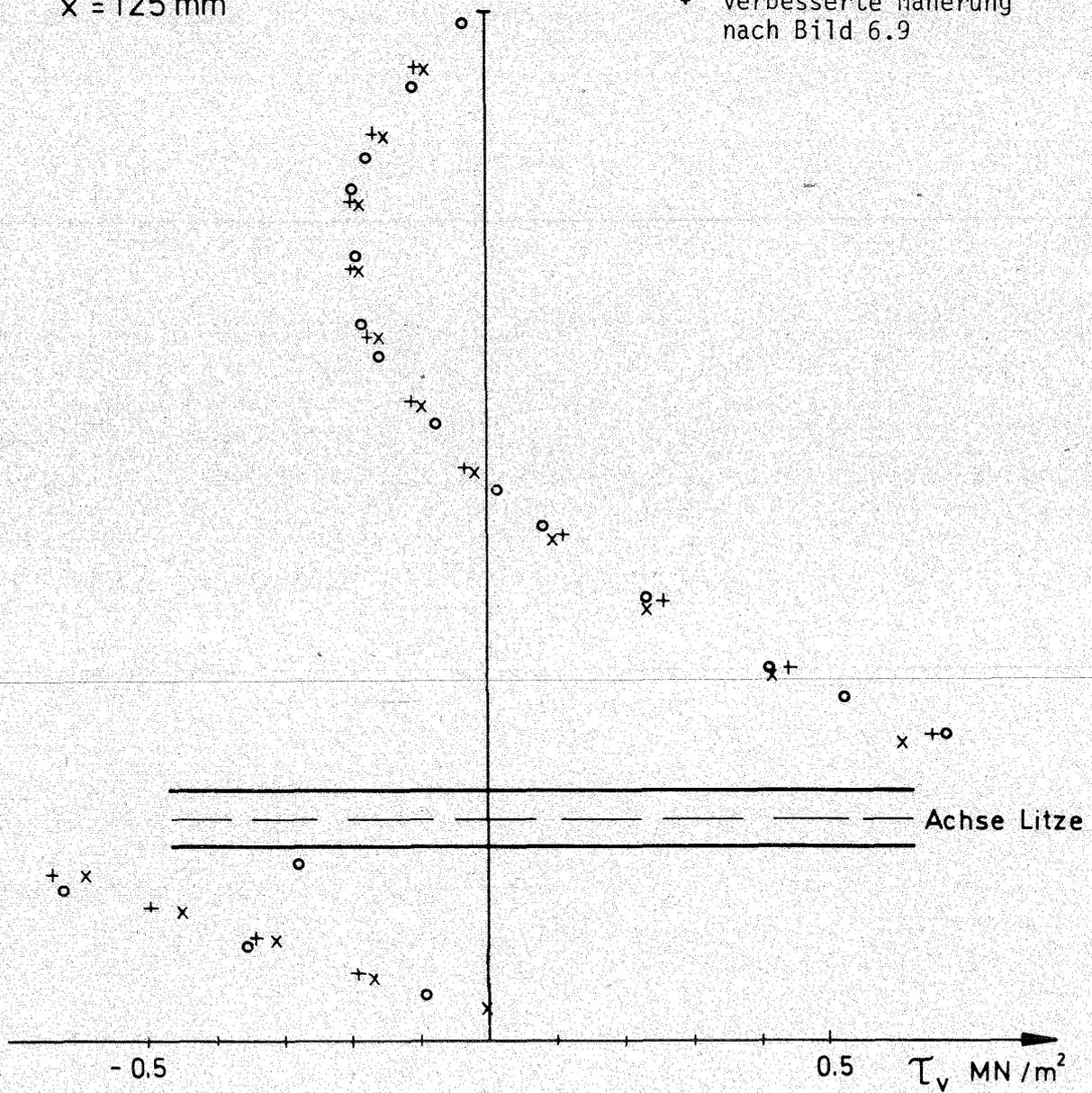
Litze

x Näherung Gl. 6.5

o FE

+ verbesserte Näherung nach Bild 6.9

x = 125 mm



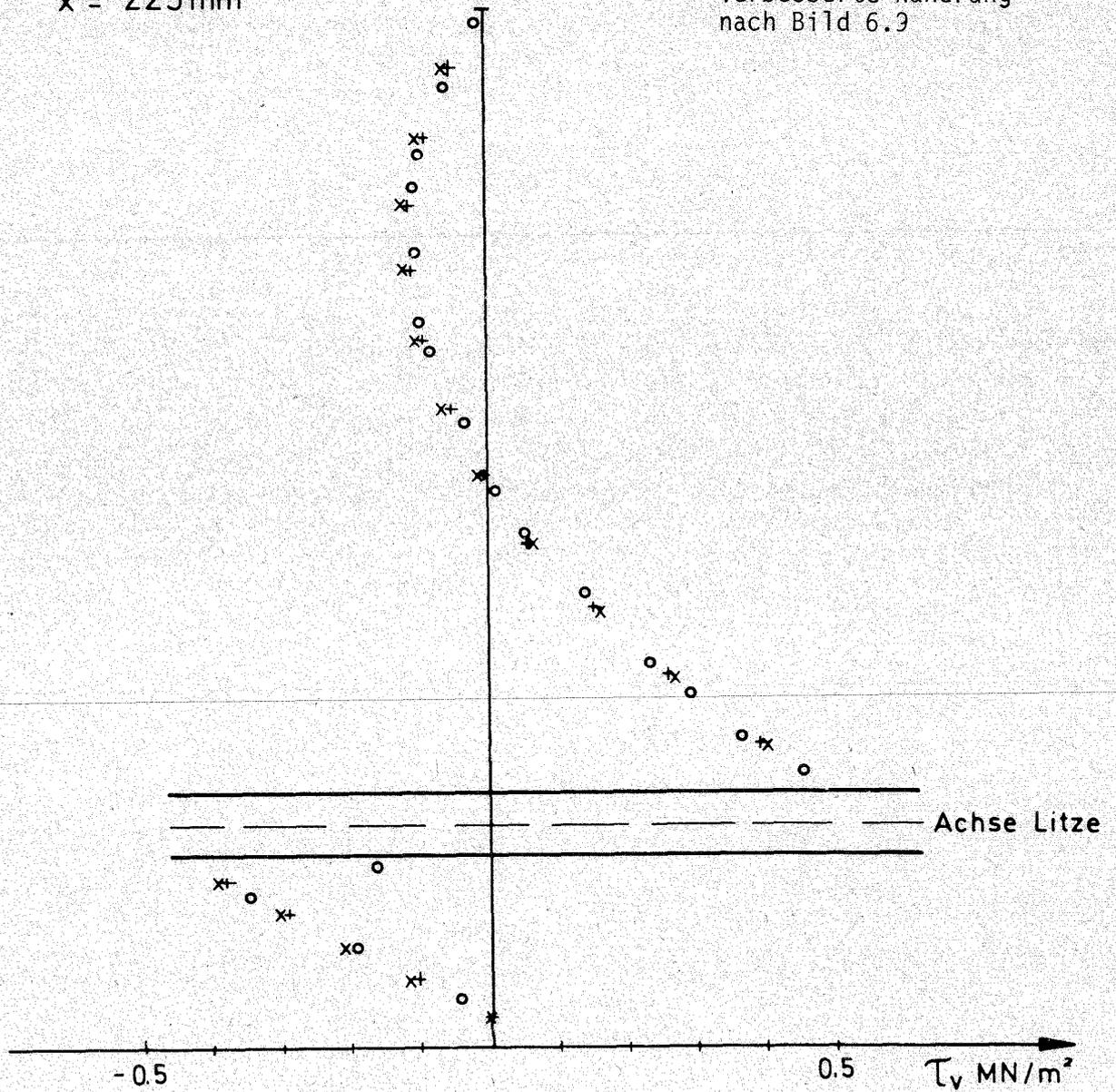
Litze

x Näherung Gl. 6.5

o FE

+ verbesserte Näherung nach Bild 6.9

x = 225 mm



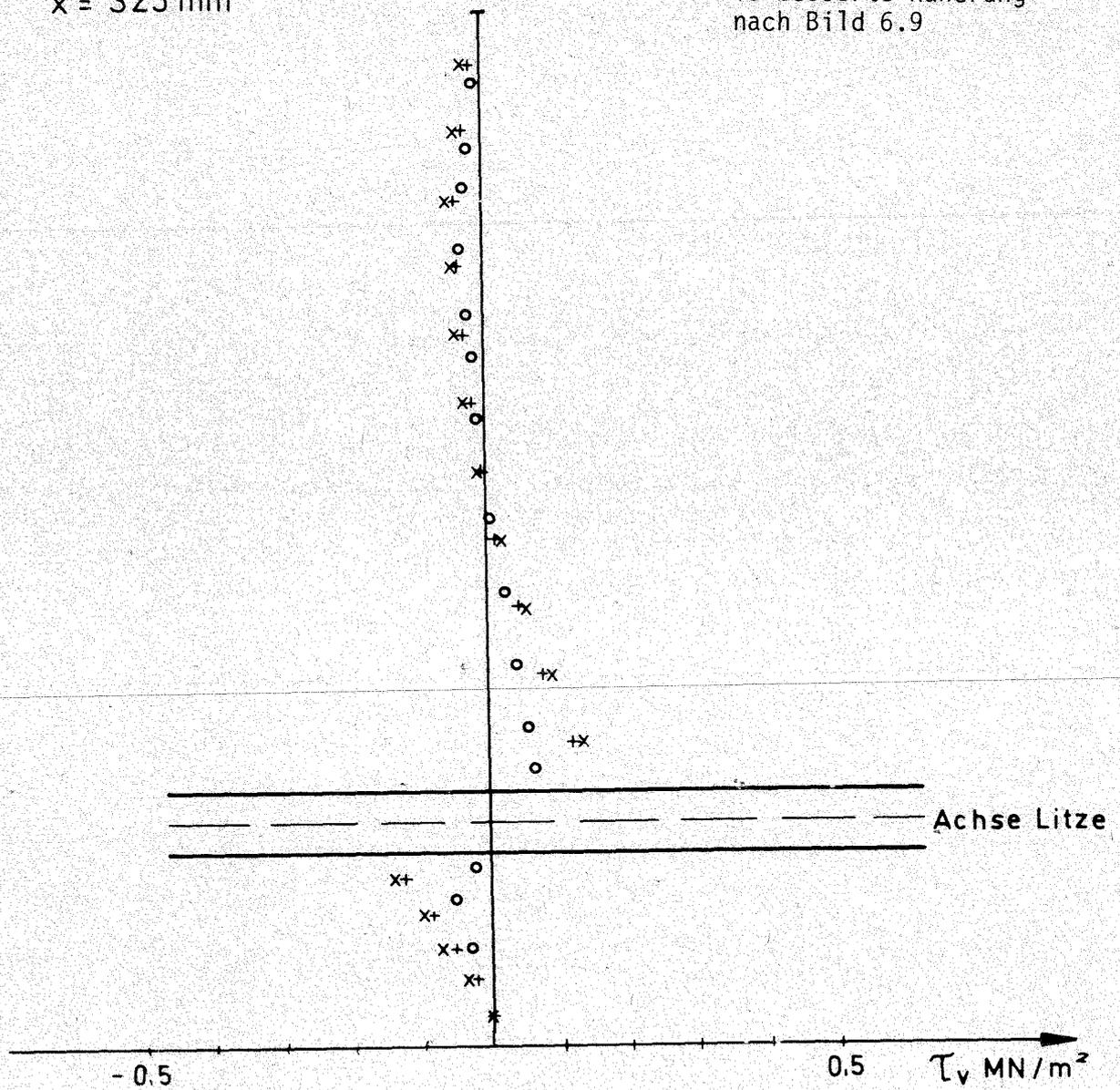
Litze

x Näherung Gl. 6.5

o FE

+ verbesserte Näherung nach Bild 6.9

x = 325 mm



7. Zusammenfassung

In dem vorliegenden Bericht wird die rechnerische Untersuchung des Spannungszustandes im Verankerungsbereich von Spannbeton-Hohlplatten behandelt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Schub- und Hauptspannungen im Steg im Bereich der Verankerungslänge.

Ein Ziel der Untersuchungen war zunächst, Datenmaterial als Grundlage für die Entwicklung eines einfach zu handhabenden, mechanisch zu begründenden Rechenmodells zur Begrenzung der maximal eintragbaren Vorspannkraft zu bekommen. Diese Berechnungen wurden mit Hilfe eines Rechenprogramms nach der Finite-Elemente-Methode unter Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoff- und Verbundverhaltens durchgeführt.

Nach der Beschreibung des Rechenmodells werden in Abschnitt 3 die Ergebnisse von Parameteruntersuchungen dargestellt und erläutert, bei denen ein Plattenstreifen durch Scheibenelemente abgebildet wurde. In Abschnitt 4 werden darüber hinaus Ergebnisse einer räumlichen Berechnung angegeben. Anschließend wird ein Verfahren für eine einfache Handrechnung vorgestellt, das die näherungsweise Ermittlung des Spannungszustands im Auflager- und Verankerungsbereich erlaubt. Damit ist es möglich, die maximalen resultierenden Hauptzugspannungen infolge Querkraft und Einleitung der Vorspannung abzuschätzen. Gegenüber der Rüschi-Formel, die die maximal einleitbare Vorspannkraft auf 13,2 kN pro cm Stegbreite begrenzt, kann diese genauere Betrachtung zu einer erhöhten zulässigen Vorspannkraft führen.

L I T E R A T U R

- /1/ Plähn, J. / Kröll, K.: Der Spannungszustand im Verankerungsbereich von Spannbetonbalken. Beitrag zum VII. Int. Spannbeton-Kongreß (FIP), New York 1974. Institut für Werkstoffkunde und Materialprüfung der TU Hannover.
- /2/ Walraven, J. / Mercx, W.: The bearing capacity for prestressed hollow core slabs. Heron Volume 28, No. 3, Delft 1983.
- /3/ Walraven, J. / Mercx, W.: Design principals for hollow-core slabs regarding shear and transverse load bearing capacity, splitting and quality control. FIP - Technical Report, Wexham Springs, Slough 1982.
- /4/ Keuser, M. / Mehlhorn, G. / Cornelius, U.: Bond between prestressed steel and concrete - computer analysis using ADINA, Computers & Structures Vol. 17, No. 5-6, pp 669-676. Pergamon Press, Oxford G.B., 1983.
- /5/ Kupfer, H. / Ruhnau, J.: Ergebnisbericht zum Forschungsvorhaben "Spaltzug und Schubbewehrung im Eintragungsbereich vorgespannter Fertigteilträger". TU München, Lehrstuhl für Massivbau, Juli 1976.
- /6/ Argyris, J.M.: Energy theorems and structural analysis. Aircraft Engineering 26, 1955, pp 347, 383, 394. Aircraft Engineering 27, 1956, pp 42, 80, 125, 145.
- /7/ Turner, H. / Clough, R. / Martin, H. / Topp L.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. J. Aer.Sci. 23, 1956, pp 805-823.
- /8/ Bathe, K.J.: ADINA - A Finite Element Program for Automatic Incremental Nonlinear Analysis. Report No. 82448-1, Acoustics Vibration Laboratory, Mech. Eng. Dep., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (Mass.), 1978.

- /9/ Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (New Jersey), 1982.
- /10/ Keuser, M.: Verbundmodelle für nichtlineare Finite Element Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen. Dissertation D 17, TH Darmstadt, Fortschritt-Berichte VDI Reihe 4 Nr. 71, Düsseldorf VDI-Verlag 1985.
- /11/ Keuser, M. / Kepp, G. / Mehlhorn, G. / Rostásy, E.: Nonlinear static analysis of end-fittings for GFRP prestressing rods. Computers & Structures Vol. 17, No. 5-6, pp 719-730. Pergamon Press, Oxford G.B., 1983.
- /12/ Schäfer, H.: A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 6, 1975, pp 335-354.
- /13/ Dörr, K.: Kraft- und Dehnungsverlauf von in Betonzylindern einbetonierten Bewehrungsstäben. Forschungsbericht Nr. 30 aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, Darmstadt 1975.
- /14/ Dörr, K.: Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter besonderer Berücksichtigung des Verbundverhaltens. Dissertation D 17, TH Darmstadt, 1980.
- /15/ Rehm, G.: Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 128, Berlin 1961.
- /16/ Martin, H.: Zusammenhang zwischen Oberflächenbeschaffenheit, Verbund und Sprengwirkung von Bewehrungsstählen unter Kurzzeitbelastung. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 228, Berlin 1973.
- /17/ Schmidt-Gönner, G.: Nichtlineare dreidimensionale Finite Element Analyse von Stahlbetonträgern unter Torsion, Biegung und Querkraft. Dissertation D 17, TH Darmstadt, 1984.
- /18/ Pucher, A.: Lehrbuch des Stahlbetonbaues. Springer Verlag Wien, 1953.

- /19/ Wunderlich, W.: Die Finite-Element-Methode in der Statik, eine einführende Übersicht. In: Finite Elemente-Anwendungen in der Bau- praxis; Vorträge anlässlich einer Tagung an der TU München am 01. und 02.03.84 / hrsg. von H. Grundmann et al. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 1985.
- /20/ Mehlhorn, G.: Anwendung der Methode der Finiten Elemente im Stahl- betonbau - Grundlagen, Anwendungen in Forschung und Praxis. In: siehe /19/.