

Eingeprägte Verformungen im Betonbau  
Entwicklung eines Bemessungs- und  
Sicherheitskonzeptes

**T 2564**

T 2564

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,  
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

**Fraunhofer IRB Verlag**

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69  
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12  
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00  
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail [irb@irb.fraunhofer.de](mailto:irb@irb.fraunhofer.de)

[www.baufachinformation.de](http://www.baufachinformation.de)

# Eingeprägte Verformungen im Betonbau Entwicklung eines Bemessungs- und Sicherheitskonzeptes

Abschlußbericht

zum Forschungsvorhaben  
IfBt, Az.: IV 1- 5 - 642/91

Dipl.-Ing. U. Vismann\*

Betreuung des Forschungsvorhabens:  
Prof. Dr.-Ing. K. Zilch\*\*

Aachen, den 18. November 1993

---

\*Lehrstuhl für Baustatik, RWTH Aachen, Mies-van-der-Rohe-Straße 1, 52056 Aachen

\*\*jetzt Lehrstuhl für Massivbau, TU München, Arcisstraße 21, 80290 München

# Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen und Abkürzungen	ix
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Beanspruchungscharakteristik von Last und Zwang bei Stahlbetontragwerken	2
1.2 Behandlung von eingepprägten Verformungen in verschiedenen Normen	5
1.2.1 Behandlung von Zwang nach DIN 1045	6
1.2.2 Behandlung von Zwang nach Eurocode 2	7
1.2.3 Behandlung von Zwang nach CEB-FIP Model Code 90	8
1.2.4 Behandlung von Zwang nach SIA 162	8
1.2.5 Behandlung von Zwang nach ACI 318M-89	9
1.3 Zusammenfassung und Zielsetzung	11
<b>2 Sicherheitskonzept im Bauwesen</b>	<b>12</b>
2.1 Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung	13
2.1.1 Erforderlicher Sicherheitsindex $\beta$	17
2.2 Sicherheitskonzepte für die Normung	20
2.3 Grundlagen der Bemessung nach EC 2	25
2.3.1 Definition der Grenzzustände, Einwirkungen und Baustoffkennwerte	26
2.3.2 Nachweis für den Grenzzustand der Tragfähigkeit	27
2.3.3 Nachweis für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit	29
2.3.4 Grundlagen der Schnittgrößenermittlung	29
<b>3 Stoffgesetze und statistische Kennwerte</b>	<b>31</b>
3.1 Materialverhalten von Betonstahl	31
3.2 Materialverhalten von Beton	33
3.2.1 Beton auf Druck	33
3.2.2 Beton auf Zug	35

3.3	Verbund zwischen Bewehrung und Beton . . . . .	36
3.4	Modell zum Tragverhalten des bewehrten Betons im Zugbereich . . . . .	41
3.4.1	Berücksichtigung der Mitwirkung über eine Stahlkennlinie . . . . .	42
3.4.2	Berücksichtigung der Mitwirkung über eine Betonzugkennlinie . . . . .	44
3.5	Statistische Materialkennwerte . . . . .	53
3.5.1	Betondruckfestigkeit . . . . .	54
3.5.2	Betonzugfestigkeit . . . . .	55
3.5.3	Elastizitätsmodul von Beton . . . . .	58
3.5.4	Betonstahl . . . . .	59
3.5.5	Betonquerschnittsabmessungen . . . . .	63
3.6	Statistische Kennwerte der Einwirkungsgrößen . . . . .	65
3.6.1	Lasten . . . . .	65
3.6.2	Eingeprägte Verformungen . . . . .	66
3.7	Tabelle der statistischen Parameter . . . . .	67
3.8	Exemplarische Stahlbetonquerschnittsuntersuchungen . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode</b>	<b>73</b>
4.1	Finites Stabelement . . . . .	73
4.1.1	Deterministische Vergleichsberechnungen zu experimentellen Untersuchungen . . . . .	75
4.2	Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Sicherheit von Stahlbetonstabtragwerken</b>	<b>85</b>
5.1	Grenzzustandsfunktionen für Stahlbetontragwerke . . . . .	85
5.1.1	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit . . . . .	86
5.1.2	Grenzzustand der Tragfähigkeit . . . . .	92
5.2	Stahlbetonträger unter Last bzw. Zwangsbeanspruchung . . . . .	94
5.2.1	Lastbeanspruchung $P_G$ . . . . .	96
5.2.2	Eingeprägte Verformung $\Delta s$ . . . . .	101
5.2.3	Erforderliche Bewehrung infolge eingepprägter Verformung . . . . .	110
5.2.4	Einfluß der Duktilitätseigenschaften auf das Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Tragfähigkeit . . . . .	116
5.3	Einseitig eingespannter Einfeldträger unter Last und eingepprägter Verformung . . . . .	121
5.3.1	Lastbeanspruchung $q_G$ . . . . .	123
5.3.2	Beanspruchungskombination aus $q_G + q_Q$ . . . . .	126
5.3.3	Beanspruchungskombination aus dominierender Last $q_G$ und eingepprägter Verformung $\Delta s$ . . . . .	128

5.3.4	Beanspruchungskombination aus Last $q_G$ und dominieren- der eingepprägter Verformung $\Delta s$ . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Bemessungs- und Sicherheitskonzept</b>	<b>135</b>
6.1	Eingepprägte Verformungen als Einwirkungsgröße . . . . .	135
6.2	Verfahren zur Schnittgrößenermittlung . . . . .	136
6.2.1	Linearelastische Schnittgrößenermittlung . . . . .	136
6.2.2	Linearelastische Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung . . . . .	136
6.2.3	Nichtlineare Schnittgrößenermittlung . . . . .	138
6.2.4	Schnittgrößenermittlung nach der Plastizitätstheorie . . .	138
6.2.5	Schnittgrößenermittlung für den Grenzzustand der Ge- brauchstauglichkeit . . . . .	139
6.3	Bemessungsvorschlag . . . . .	139
6.3.1	Bemessungsrestriktionen . . . . .	139
6.3.2	Sicherheits- und Kombinationsbeiwerte . . . . .	141
6.3.3	Bewehrungsermittlung . . . . .	141
6.3.4	Konstruktive Maßnahmen . . . . .	144
6.4	Zusammenfassung . . . . .	145

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Statisches System und Stahlbetonquerschnitt . . . . .	3
1.2	Einspannmoment für Last- und Zwangsbeanspruchung . . . . .	4
2.1	Grenzzustandsgleichung im Standardnormalraum . . . . .	17
2.2	Zusammenhang zwischen Versagenswahrscheinlichkeit $P_f$ und Sicherheitsindex $\beta$ . . . . .	21
2.3	Sicherheitsindex $\beta$ . . . . .	22
2.4	Grafische Darstellung der Sicherheitsbereiche für das $R - S$ -Modell	24
3.1	Bilineare Betonstahlkennlinie . . . . .	32
3.2	Stetige Betonstahlkennlinie nach Dilger . . . . .	32
3.3	Exponent $m$ der Stahlkennlinie nach Dilger . . . . .	33
3.4	Spannungsdehnungslinie des Betons auf Druck (Polynom-Rechteck)	34
3.5	Gegenüberstellung der Spannungsdehnungslinien des Betons . . .	35
3.6	Dehnungsverlauf und Einleitungslänge am Einzelriß . . . . .	37
3.7	Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehung . . . . .	39
3.8	Qualitativer Zusammenhang zwischen Verbundgesetz, Verschiebungsverlauf und Verbundspannungsverlauf . . . . .	40
3.9	Mitwirkung des Betons auf Zug über eine Stahlkennlinie . . . . .	43
3.10	Ansatz zur Mitwirkung des Betons auf Zug über eine Betonzugkennlinie nach Quast . . . . .	46
3.11	Spannungsdehnungslinie der Betonzugzone . . . . .	47
3.12	Abgeschlossenes Rißbild und Dehnungsverlauf . . . . .	49
3.13	Betonkennlinie im Zug- und Druckbereich unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug . . . . .	51
3.14	Effektive Zugzone $A_{c,eff}$ eines Rechteckquerschnittes . . . . .	52
3.15	Exponent $m$ sowie $\varepsilon_{sm}$ in Abhängigkeit des Bewehrungsgrades $\rho_z$	53
3.16	Vergleich der Ansätze zur Bestimmung der Betonzugfestigkeit aus der Betondruckfestigkeit . . . . .	56
3.17	Einfluß der Balkenhöhe auf die Biegezugfestigkeit . . . . .	57

3.18	Vergleich der Ansätze zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Betondruckfestigkeit . . . . .	59
3.19	Angenommene Duktilitätsparameter des Betonstahls . . . . .	62
3.20	$M$ - $\kappa$ -Beziehungen: Versuchsreihe 16 . . . . .	69
3.21	$M$ - $\kappa$ -Beziehungen: Versuchsreihe 13 . . . . .	70
3.22	Stahlbetonquerschnitt und Materialkennwerte . . . . .	71
3.23	$M$ - $\kappa$ -Beziehung: Einfluß des Bewehrungsgrades . . . . .	72
4.1	Finites Balkenelement mit 9 Freiheitsgraden . . . . .	74
4.2	System, Belastung und FEM-Diskretisierung . . . . .	76
4.3	Durchbiegung der Stahlbetonträger . . . . .	77
4.4	System und Belastung des Versuchsträgers . . . . .	79
4.5	Schnittgrößenvergleich Balken B I: Versuch und Nachrechnung . . . . .	80
4.6	Schnittgrößenvergleich Balken B II: Versuch und Nachrechnung . . . . .	81
4.7	Schematischer Ablauf der Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode . . . . .	84
5.1	Statisches System und Bewehrungsführung . . . . .	94
5.2	Sicherheitsindex $\beta$ für den Einfeldträger unter Lastbeanspruchung $P_G$ für verschiedene Grenzzustände . . . . .	96
5.3	Sensitivitätsfaktoren $\alpha_i$ für verschiedene Grenzzustände infolge Lastbeanspruchung . . . . .	97
5.4	Sicherheitsindex $\beta$ für verschiedene Grenzzustandsgleichungen. $\rho = 0,20$ bis $0,70\%$ , $\mu_{\Delta_s} = 1$ bis $12$ mm, $V_{\Delta_s} = 40\%$ . . . . .	103
5.5	Sicherheitsindex $\beta$ für verschiedene Grenzzustandsgleichungen. $\rho = 0,80$ bis $1,60\%$ , $\mu_{\Delta_s} = 2$ bis $12$ mm, $V_{\Delta_s} = 40\%$ . . . . .	104
5.6	Sicherheitsindex $\beta$ und Sensitivitätsfaktoren $\alpha_i$ für den Grenzzustand der Tragfähigkeit . . . . .	105
5.7	Sicherheitsindex $\beta$ und Sensitivitätsfaktoren $\alpha_i$ für den Grenzzustand der Rissebeschränkung . . . . .	108
5.8	Sicherheitsindex $\beta$ und Sensitivitätsfaktoren $\alpha_i$ für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung $\sigma_s = 500$ MPa . . . . .	109
5.9	Sicherheitsindex $\beta$ und Sensitivitätsfaktoren $\alpha_i$ für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung $\sigma_s = 400$ MPa . . . . .	110
5.10	Biegemoment $M$ und plastische Rotation $\Theta_{pl}$ des Einfeldträgers in Abhängigkeit der eingepprägten Verformung . . . . .	112
5.11	Rechnerische Rißbreiten in Abhängigkeit der eingepprägten Verformung . . . . .	113
5.12	Stahlspannungen und Betonrandspannungen in Abhängigkeit der eingepprägten Verformung . . . . .	114

5.13	Sicherheitsindex $\beta$ unter eingprägter Verformung bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls . . . . .	117
5.14	Sicherheitsindex $\beta$ unter eingprägter Verformung mit konstruktiver Druckbewehrung . . . . .	118
5.15	Sicherheitsindex $\beta$ unter eingprägter Verformung mit verschiedenen Variationskoeffizienten . . . . .	119
5.16	Sicherheitsindex $\beta$ unter Lastbeanspruchung bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls . . . . .	120
5.17	Statisches System, Bewehrungsführung und FEM-Diskretisierung	121
5.18	Sicherheitsindex unter ständiger Lastbeanspruchung . . . . .	125
5.19	Sicherheitsindex unter ständiger und veränderlicher Lastbeanspruchung . . . . .	127
5.20	Sicherheitsindex für den Grenzzustand der Tragfähigkeit $q_G$ , $V_{q_G} = 10\%$ und $\Delta s$ , $V_{\Delta s} = 40\%$ . . . . .	129
5.21	Sicherheitsindex für den Grenzzustand der Rissebeschränkung $q_G$ , $V_{q_G} = 10\%$ und $\Delta s$ , $V_{\Delta s} = 40\%$ . . . . .	130
5.22	Sicherheitsindex für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung $q_G$ , $V_{q_G} = 10\%$ und $\Delta s$ , $V_{\Delta s} = 40\%$ . . . . .	131
5.23	Sicherheitsindex $\beta$ für ständige Last $q_G = 2,5$ kN/m und dominierende eingpragte Verformung . . . . .	133
5.24	Sicherheitsindex $\beta$ für ständige Last $q_G = 5,0$ kN/m und dominierende eingpragte Verformung . . . . .	134

# Tabellenverzeichnis

2.1	Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	14
2.2	Erforderlicher Sicherheitsindex $\beta$ für einen Bezugszeitraum von einem Jahr nach GruSiBau . . . . .	18
2.3	Erforderlicher Sicherheitsindex $\beta$ nach NKB . . . . .	18
2.4	Erforderlicher Sicherheitsindex $\beta$ nach EC 1 . . . . .	19
2.5	Teilsicherheitsbeiwerte $\gamma_F$ für Einwirkungen nach der Anwendungsrichtlinie des DAfStb . . . . .	28
2.6	Teilsicherheitsbeiwerte $\gamma_M$ für Baustoffkennwerte nach EC 2 . . . . .	28
2.7	Kombinationsbeiwerte $\psi$ für Einwirkungen nach der Anwendungsrichtlinie des DAfStb . . . . .	28
3.1	Nennwerte von $\varepsilon_{cu}$ für Rechteckquerschnitte nach EC 2 . . . . .	34
3.2	Kennwerte der Betondruckfestigkeit . . . . .	55
3.3	Kennwerte der Betonzugfestigkeit . . . . .	58
3.4	Kennwerte des Elastizitätsmoduls von Beton . . . . .	60
3.5	Mittelwerte und Streubereiche kaltverformter Betonstähle . . . . .	61
3.6	Toleranzen der Querschnittsabmessungen und der statischen Höhe nach Oestlund . . . . .	64
3.7	Toleranzen der Querschnittsabmessungen und der statischen Höhe nach MC 90 . . . . .	64
3.8	Statistische Beschreibung der Betonquerschnittsgrößen nach JCSS . . . . .	64
3.9	Kennwerte der statistischen Variablen . . . . .	67
3.10	Lastexzentrizitäten und Materialwerte der Versuche (Sakai/Kakuta) . . . . .	68
4.1	Kennwerte der Versuchsträger . . . . .	77
4.2	Kennwerte der Versuchsträger B I und B II . . . . .	79
5.1	Systemparameter des Einfeldträgers . . . . .	95
5.2	Statistische Material- und Belastungskennwerte der Basisvariablen . . . . .	95
5.3	Erforderlicher Bewehrungsgrad des Einfeldträgers infolge $\Delta s$ . . . . .	111

5.4	Erforderlicher Bewehrungsgrad $\rho$ infolge eingepprägter Verformung nach nichtlinearer Systemanalyse . . . . .	115
5.5	Systemparameter des einseitig eingespannten Einfeldträgers . . . . .	122
5.6	Statistische Material- und Belastungsbeschreibung der Basisvariablen . . . . .	123
5.7	Gleichstreckenlasten $q_G$ nach linearer Schnittgrößenermittlung und Momentenumlagerung . . . . .	124
5.8	Gleichstreckenlasten $q_G+q_Q$ nach linearer Schnittgrößenermittlung und Momentenumlagerung . . . . .	126
5.9	Systemparameter des einseitig eingespannten Einfeldträgers mit dominierender eingepprägter Verformung . . . . .	132

## Bezeichnungen, Abkürzungen

Soweit im Text nicht explizit erläutert, gelten folgende Bezeichnungen und Abkürzungen:

### Abkürzungen

Abb.	Abbildung
Bü	Bügel
EC	Eurocode
erf.	erforderlich
FEM	Finite Element Methode
GZG	Grenzzustandsgleichung
LN	Logarithmische Normalverteilung
N	Normalverteilung
MC 90	Model-Code 90
SLS	Serviceability Limit State, Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
Tab.	Tabelle
ULS	Ultimate Limit State, Grenzzustand der Tragfähigkeit

### Aktionen und Reaktionen

F	Kraft (allgemein)
G	ständige Einwirkung
N	Normalkraft
M	Biegemoment
$M_r$	Rißmoment
$M_u$	Bruchmoment
P	Einwirkung infolge Vorspannung
Q	veränderliche Einwirkung
$\Delta_s$	eingeprägte Verformung

### Sicherheits- und Kombinationsbeiwerte

$\gamma_c$	Teilsicherheitsbeiwert für Beton
$\gamma_F$	Teilsicherheitsbeiwert für Einwirkungen F
$\gamma_M$	Teilsicherheitsbeiwert für Baustoffe
$\gamma_G$	Teilsicherheitsbeiwert für ständige Einwirkungen G
$\gamma_Q$	Teilsicherheitsbeiwert für veränderliche Einwirkungen Q
$\gamma_s$	Teilsicherheitsbeiwert für Betonstahl
$\gamma_{ind}$	Teilsicherheitsbeiwert für indirekte Beanspruchung

$\psi_0$	Kombinationsbeiwert für die Grundkombination
$\psi_1$	Kombinationsbeiwert für die häufige Kombination
$\psi_2$	Kombinationsbeiwert für die quasi-ständige Kombination

### Zuverlässigkeit, Statistik

$C_d$	Bemessungswert oder Nennwert einer Bauteileigenschaft für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
$E_X$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X
$f_X(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariablen X
$F_X(x)$	Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X
$F_X^{-1}(x)$	inverse Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X
g	Grenzzustandsfunktion im Originalraum
h	Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum
k	Fraktilwertfaktoren
$l(y)$	im Bemessungspunkte linearisierte Grenzzustandsgleichung im Standardnormalraum
P	Wahrscheinlichkeit (allgemein)
$P_f$	Versagenswahrscheinlichkeit
$P_s$	Überlebenswahrscheinlichkeit
R	Widerstand von zufälliger Größe
$R_d$	Bemessungswert des Bauteilwiderstandes
S	Beanspruchung von zufälliger Größe
$S_d$	Bemessungswert der aufzunehmenden Schnittgrößen
$V_{X_i}$	Variationskoeffizient der Zufallsgröße $X_i$
<b>X</b>	Vektor der Basisvariablen
$\mathbf{x}^*$	Bemessungspunkt im Originalraum
<b>Y</b>	Vektor der Basiszufallsvariablen im Standardnormalraum
$\mathbf{y}^*$	Bemessungspunkt im Standardnormalraum

$\alpha_i$	Sensitivitätsfaktor der Basisvariablen $X_i$	$\kappa$	Querschnittskrümmung
$\beta$	Sicherheitsindex	$\xi$	auf die Stablänge bezogene Koordinate
$\Phi$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	<b>Materialkenngrößen</b>	
$\Phi^{-1}$	inverse Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung		
$\mu$	Mittelwert	$a, N$	Verbundparameter
$\rho$	Korrelationskoeffizient	$d_s$	Stabdurchmesser
$\sigma$	Standardabweichung	$E$	Elastizitätsmodul
<b>Querschnittswerte, Geometrie</b>		$E_c$	Elastizitätsmodul des Betons
$A$	Querschnittsfläche	$E_s$	Elastizitätsmodul des Stahls
$A_c$	Betonquerschnittsfläche	$E_{cm}$	mittlerer Elastizitätsmodul des Betons
$A_{c,eff}$	effektive Betonzugfläche	$E_0$	Ursprungselastizitätsmodul
$A_s$	Betonstahlquerschnittsfläche	$f$	Durchbiegung
$b$	Querschnittsbreite	$f_c$	Betondruckfestigkeit
$c$	Betondeckung	$f_{cm}$	mittlere Betondruckfestigkeit
$d$	Nutzhöhe	$f_{ck}$	charakteristische Betondruckfestigkeit
$d_{s1}$	Schwerpunktsabstand der Bewehrung am Ort 1 zum entsprechenden Betonquerschnittsrand	$f_{ck,cube200}$	charakteristische Würfeldruckfestigkeit des Beton im Alter von 28 Tagen (20 cm Würfel)
$d_{s2}$	Schwerpunktsabstand der Bewehrung am Ort 2 zum entsprechenden Betonquerschnittsrand	$f_{ct}$	Betonzugfestigkeit
$f$	Durchbiegung, orthogonal zur Stabachse	$f_{ct,ax}$	zentrische Betonzugfestigkeit
$h$	Querschnittshöhe	$f_{ct,fl}$	Betonbiegezugfestigkeit
$I$	Flächenträgheitsmoment	$f_{ctm}$	mittlere Betonzugfestigkeit
$\ell$	Stablänge	$f_{ctk;0,05}$	unterer Grenzwert der charakteristischen Betonzugfestigkeit (5% Fraktile)
$x$	Druckzonenhöhe	$f_{ctk;0,95}$	oberer Grenzwert der charakteristischen Betonzugfestigkeit (95% Fraktile)
$\rho$	Bewehrungsgrad	$f_y$	Streckgrenze des Betonstahls
$\rho_z$	Bewehrungsgrad bezogen auf die Zugzone des Betonquerschnittes	$f_{yk}$	charakteristischer Wert der Streckgrenze des Betonstahls
<b>Stabwerksberechnung</b>		$f_{ym}$	Mittelwert der Streckgrenze des Betonstahls
$EA$	Dehnsteifigkeit	$f_t$	Zugfestigkeit des Betonstahls (zugehörige Dehnung = $\epsilon_u$ )
$EI$	Biegesteifigkeit	$m$	Exponent der Spannungsdehnungslinie nach Dilger
$\mathbf{F}$	Lastvektor	$\epsilon_c$	Betondehnung (Druck)
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix	$\epsilon_{c1}$	Betondehnung bei Erreichen des Höchstwertes der Betondruckspannung
$\mathbf{K}_t$	tangentiale Steifigkeitsmatrix	$\epsilon_{cu}$	Bruchdehnung des Betons
$\mathbf{R}_t$	Vektor der Reaktionskräfte	$\epsilon_{ct}$	elastische Zugdehnung des Betons
$\mathbf{U}$	Vektor der Ungleichgewichtskräfte		$= \frac{f_{ct}}{E_c}$
$\mathbf{v}$	Verformungsvektor		
$u, w, \phi, u'$	Freiheitsgrade des FEM-Stabelementes		
$\epsilon$	Verzerrung		

$\varepsilon_u$	Zur Zugfestigkeit $f_t$ zugehörige Stahldehnung, (Gleichmaßdehnung)	<b>Kopfindizes</b>	
$\varepsilon_y$	Dehnung des Betonstahls an der Streckgrenze $f_y$	T	transponiert
$\varepsilon_{sm}$	mittlere Stahldehnung zwischen zwei Rissen	-1	invertiert
$\sigma_c$	Betondruckspannung	*	probabilistischer Bemessungspunkt
$\sigma_{cu}$	Betondruckspannung bei Erreichen der Bruchstauchung $\varepsilon_{cu}$		
$\sigma_s$	Stahlspannung		
$\tau_v$	Verbundspannung		

**Fußindizes**

a	Elementanfangsknoten
c	Beton
cal	rechnerisch
d	Bemessungswert
e	Elementendknoten
el	elastisch
I	Zustand I
II	Zustand II
k	charakteristischer Wert
lim	limit (zulässig)
nom	nominell
m	Elementmittelknoten, Mittelwert
r	Riß
s	Betonstahl
t	tension (Zug), tangential
u	Grenzzustand der Tragfähigkeit
x, z, u, w	Bezug auf Koordinatenrichtungen
1	Bewehrungslage am unteren Quer- schnittsrand
2	Bewehrungslage am oberen Quer- schnittsrand

# Kapitel 1

## Einleitung

Im Eurocode 2 (EC 2) [26] werden für die Ermittlung der Schnittgrößen sowohl lineare als auch nichtlineare Verfahren zugelassen. Die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit und der Tragfähigkeit erfolgen durch Querschnittsbemessungen mit Teilsicherheitsbeiwerten und unter Beachtung spezieller konstruktiver Regeln. Dieses Nachweisformat ist im wesentlichen auf Lasten als Einwirkungsgrößen zugeschnitten [9][10][46]. Es setzt voraus, daß sich die vorgenannten Teilbereiche weitgehend entkoppeln lassen.

Eingeprägte Verformungen verhalten sich grundverschieden von Lasten. Die ermittelten Schnittgrößen sind in viel stärkerem Maße von der angenommenen Steifigkeitsverteilung abhängig. Schnittgrößenermittlung und Bemessung beeinflussen sich stark. Die rechnerische Erfassung von eingeprägten Verformungen im Betonbau im Hinblick auf die Nachweise zum Grenzzustand der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit nach EC 2 [26] ist vor dem Hintergrund des dieser neuen Normengeneration zugrundeliegenden Sicherheitskonzeptes zu überprüfen. Offenen Fragestellungen bestehen bezüglich des vorhandenen Sicherheitsniveaus von Tragwerken unter Beanspruchungen durch eingeprägte Verformungen bzw. unter kombinierten Beanspruchungen aus Lasten und eingeprägten Verformungen [76][77].

Eine Analyse der Interaktion von Materialverhalten, Lasten und eingeprägten Verformungen im Hinblick auf die operative Versagenswahrscheinlichkeit bietet die gesuchten Vergleichskriterien. Auf der Basis von exemplarischen sicherheitstheoretischen Untersuchungen an Stahlbetonstabtragwerken soll ein Bemessungskonzept zur Behandlung von eingeprägten Verformungen im Betonbau verifiziert werden.

## 1.1 Beanspruchungscharakteristik von Last und Zwang bei Stahlbetontragwerken

Alle Nachweise für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sowie für den Grenzzustand der Tragfähigkeit basieren letztendlich auf einer zuverlässigen Systemanalyse; das betrifft sowohl die Modellbildung bezüglich System- und Materialbeschreibung als auch das eigentliche Berechnungsverfahren (Schnittgrößenermittlung) und die zugehörigen Belastungen. Insbesondere bei der Schnittgrößenermittlung bedient man sich gerne einiger Erleichterungen, um die erforderlichen Nachweise mit begrenztem Aufwand durchführen zu können. Ein Beispiel hierfür ist vor allem die linearelastische Berechnung der Systemreaktionen. Dieses Vorgehen findet seine Begründung in der Tatsache, daß bei reinen Lastbeanspruchungen lediglich die Relativwerte der vorhandenen Systemsteifigkeiten in die Ermittlung der statisch Unbestimmten eingehen. An den Lösungsgleichungen nach dem Kraftgrößenverfahren für ein allgemeines ebenes, einfach statisch unbestimmtes System unter Lastbeanspruchung lassen sich die Zusammenhänge leicht erläutern. Der Quotient der Formänderungsgleichungen am statisch bestimmten Grundsystem (für Biegeverformungen) infolge einer äußeren Last (Index 0) und der Einheitslast ergibt die gesuchte statisch unbestimmte Größe  $X_1$ , mit der sich die gewünschten Zustandsgrößen bestimmen lassen.

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\int M_1(s) \cdot \frac{M_0(s)}{EI(s)} ds}{\int M_1(s) \cdot \frac{M_1(s)}{EI(s)} ds} \quad (1.1)$$

Die (ortsabhängigen) Steifigkeiten treten in gleicher Weise sowohl im Zähler als auch im Nenner auf, so daß im Stahlbeton- und Spannbetonbau in gewissen Grenzen zuverlässige Ergebnisse auch mit der idealisierten Annahme eines vollkommen elastischen Materialverhaltens (Steifigkeiten des Zustands I oder II) berechnet werden können. Dieses Vorgehen ist in der gängigen Massivbaupraxis nur auf die Schnittgrößenermittlung am statischen System bezogen. Bei der daran anschließenden Querschnittsbemessung wird von dem Wissen über das tatsächlich nichtlineare Materialverhalten Gebrauch gemacht.

Treten neben den Lastbeanspruchungen allerdings auch Zwangsbeanspruchungen des Systems durch eingeprägte Verformungen oder Temperaturänderungen auf, so sind die Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Systemen von den Absolutwerten der Steifigkeiten abhängig. Dies wird ebenfalls sehr gut anhand der entsprechenden Gleichungen des Kraftgrößenverfahrens zur Ermittlung der sta-

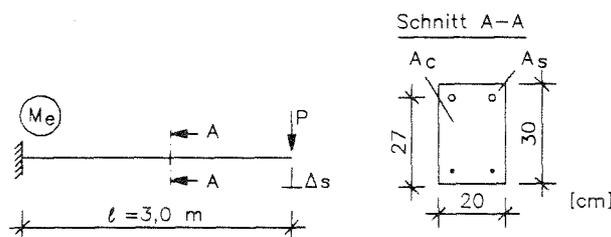
tisch Unbekannten für den Lastfall eingeprägte Verformung deutlich:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\Delta s}{\int M_1(s) \cdot \frac{M_1(s)}{EI(s)} ds} \quad (1.2)$$

wobei  $\Delta s$  eine eingeprägte Verformung in Richtung des gelösten Systemfreiheitsgrades darstellt. Die Ermittlung realistischer Steifigkeiten  $EI(s)$  hat hier erheblichen Einfluß auf die berechneten Systemreaktionen. Im Stahlbetonbau sind bei gegebenen Betonquerschnittsabmessungen die tatsächlichen Steifigkeiten im wesentlichen von folgenden Parametern abhängig:

- Materialverhalten der Baustoffe Stahl und Beton bzw. des Verbundbaustoffes Stahlbeton
- Bewehrungsgrad
- Beanspruchungsniveau
- Zeit (zeitlicher Beanspruchungsverlauf und zeitabhängiges Materialverhalten)

Diese Parameter machen eine zutreffende Systemanalyse von Betontragwerken unter Zwangsbeanspruchungen zu einer vieldeutigen Aufgabe, da insbesondere Beanspruchung (Schnittgrößen), Steifigkeit und Bemessung einander bedingen. In den heute üblichen Berechnungsverfahren bedient man sich auch hier einiger Erleichterungen, die im allgemeinen eine auf der sicheren Seite liegende Beurteilung des Tragverhaltens ergeben (vgl. Abschnitt 1.2).



**Abb. 1.1:** Statisches System und Stahlbetonquerschnitt

An dem in der Abb. 1.1 dargestellten Kragarm soll die grundsätzliche Charakteristik eines Stahlbetontragwerkes unter Last- und Zwangsbeanspruchung sowohl für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit als auch für den Grenzzustand der Tragfähigkeit erläutert werden. Bezüglich der Lastbeanspruchung mit einer

Einzellast an der Kragarmspitze handelt es sich hier um eine statisch bestimmte Systembeanspruchung. Die Schnittgrößen ergeben sich demnach ausschließlich aus den geometrischen Systemabmessungen und der Belastung<sup>1</sup>. In der linken Hälfte der Abb. 1.2 ist der entsprechende lineare Zusammenhang zwischen der Last  $P$  und dem Einspannmoment  $M_e = -P \cdot l$  dargestellt. Im rechten Teil der

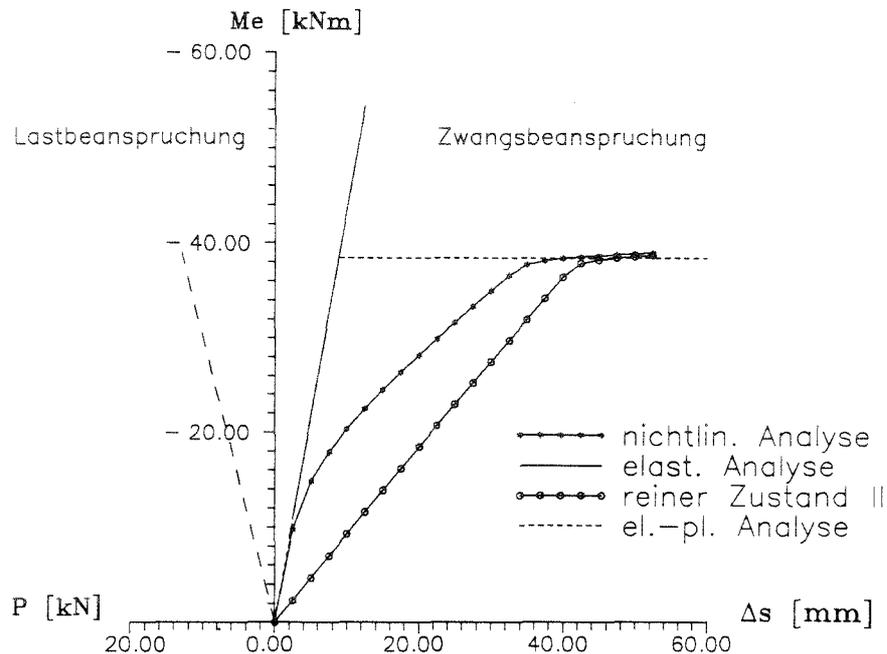


Abb. 1.2: Einspannmoment für Last- und Zwangsbeanspruchung

Abb. 1.2 ist die Abhängigkeit des Einspannmomentes von der Größe der Zwangsverschiebung an der Kragarmspitze dargestellt. Dabei sind die Ergebnisse nach verschiedenen Methoden der Schnittgrößenermittlung entsprechend EC 2 [26]

- linearelastisch mit den Steifigkeiten nach Zustand I
- nichtlinear<sup>2</sup> mit den belastungsabhängigen Steifigkeiten des reinen Zustands II (Mitwirkung des Betons auf Zug wird vernachlässigt)
- nichtlinear mit wirklichkeitsnaher Beschreibung des Materialverhaltens des Verbundbaustoffes Stahlbeton
- ideal elastisch - plastisch

<sup>1</sup>Bis zum Erreichen der Traglast

<sup>2</sup>Eine Berechnung mit den (konstanten) Steifigkeiten des Zustandes II kann im allgemeinen auch zu den linearen Verfahren der Schnittgrößenermittlung gezählt werden. In der Abb. 1.2 ist ein entsprechend linearer Verlauf bis zum Erreichen der Streckgrenze des Stahls ablesbar.

gegenübergestellt. Anhand der Darstellung werden die großen Differenzen zwischen den einzelnen Verfahren deutlich. Die linearelastische Schnittgrößenermittlung mit den Steifigkeiten des Zustandes I überschätzt die Systemreaktion nach Überschreiten der Rißbeanspruchung, während das Verfahren unter Berücksichtigung der Steifigkeiten des Zustandes II die Ergebnisse deutlich unterschätzt. Diese beiden Verfahren gelten für den kompletten Gebrauchslastbereich als obere bzw. untere Grenzwerte<sup>3</sup>. In dem hier dargestellten Fall von Biegezwang zeigt sich deutlich, daß mit Annäherung an den Grenzzustand der Tragfähigkeit (Erreichen der Stahlstreckgrenze) eine Erhöhung der Zwangsbeanspruchung das Einspannmoment nicht mehr weiter anwachsen läßt. Wird beispielsweise diese Grenztragfähigkeit allein durch eine Lastbeanspruchung erreicht, so treten durch zusätzliche Zwangsbeanspruchungen keine entsprechenden Schnittgrößen auf.

Die nichtlinearen Berechnungsverfahren haben den ganz wesentlichen Vorteil, die kompletten Beanspruchungsbereiche eines Tragwerks (Gebrauchslasten bis Traglasten) in einem Modell zu erfassen. Dabei sind neben der reinen Schnittgrößenermittlung auch die, insbesondere im Gebrauchslastbereich interessierenden Verformungen, Spannungen und Rißbreiten bestimmbar. Bei zeitabhängigem Materialverhalten sind die entsprechenden Systemreaktionen neben den reinen Kurzzeitbeanspruchungen zu berücksichtigen [5][78]. Damit ist insbesondere auch für eingeprägte Verformungen ein geeignetes Verfahren vorhanden, um wirklichkeitsnahe, d.h. die effektiven Steifigkeiten berücksichtigende Schnittgrößenverteilungen und Systemverformungen zu ermitteln.

## 1.2 Behandlung von eingepägten Verformungen in verschiedenen Normen

Im folgenden wird ein kurzer Überblick zur Behandlung von eingepägten Verformungen im Stahlbetonbau anhand verschiedener Entwurfsrichtlinien gegeben. Dabei zeigt sich, daß es unterschiedliche Vorstellungen hinsichtlich der Notwendigkeit der Berücksichtigung und rechnerischen Erfassung von Zwang gibt.

---

<sup>3</sup>Zu berücksichtigen wären bei den linearelastischen Verfahren ggf. noch die ideellen (höheren) Steifigkeiten des Zustandes I unter Berücksichtigung der Stahleinlagen, was aber im Hinblick auf die Reduktion der Steifigkeiten nach Rißbildung im allgemeinen vernachlässigt wird.

### 1.2.1 Behandlung von Zwang nach DIN 1045

In DIN 1045 [18] Abschnitt 15 „Grundlagen zur Ermittlung der Schnittgrößen“ wird die Schnittgrößenermittlung nach den Beanspruchungsarten *Last* und *Zwang* unterschieden. Die Schnittgrößen infolge Last werden bei statisch unbestimmten Systemen im allgemeinen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie mit den Steifigkeiten nach Zustand I ermittelt. Für durchlaufende Platten und Balken mit Stützweiten bis 12 m ist eine Schnittgrößenumlagerung bis zu 15% zugelassen. Die Schnittgrößen infolge Zwang (Einflüsse aus Schwinden, Temperatur und Stützensenkung) müssen, falls sie ungünstig wirken, berücksichtigt werden. Hierbei darf die Verminderung der Steifigkeit infolge Rißbildung (Zustand II) berücksichtigt werden. Ebenso kann der Abbau von Zwangsschnittgrößen infolge Kriechen einbezogen werden. Die Verminderung der Steifigkeit infolge Rißbildung muß berücksichtigt werden, wenn die Summe der Schnittgrößen durch die Zwangseinwirkung wesentlich in günstiger Richtung verändert wird (z.B. unterschiedliches Vorzeichen von Last- und Zwangsschnittgröße).

Weitere Regelungen hierzu sind im Heft 240 des DAfStb [31] angegeben. Dort wird auch darauf hingewiesen, daß der Übergang eines Betontragwerkes in den Zustand II von mehreren zufälligen Einflüssen abhängt. Infolgedessen kann die Abnahme der Biegesteifigkeit nur mit erheblichen Unsicherheiten angegeben werden. Hieraus resultiert die Empfehlung, im Falle einer ungünstigen Zwangseinwirkung die Steifigkeiten des Zustands I zu berücksichtigen. Allerdings sind dort auch mit dem Hinweis auf die Wirtschaftlichkeit des Bemessungsergebnisses Hilfsmittel angegeben, um die verminderte Steifigkeit durch Rißbildung zu erfassen. Die Berechnung der Schnittgrößen erfolgt nach DIN 1045 für Last und Zwang im Gebrauchszustand. Da aber die Zwangsschnittgrößen von der auch durch die übrigen Lasten beeinflussten Steifigkeit des Systems abhängen, wird in Heft 240 [31] empfohlen, die Lastschnittgrößen mit der vollen Biegesteifigkeit des ungerissenen Bauteils und die Zwangsschnittgrößen mit der wirksamen Biegesteifigkeit des teilweise gerissenen Bauteils getrennt zu berechnen und für die Bemessung anschließend zusammenzufassen. Die Bemessung erfolgt nach DIN 1045 [18] Abschnitt 17.2.2 mit dem Sicherheitsbeiwert 1,75 (bzw. 2,1) für Lastschnittgrößen und dem Sicherheitsbeiwert 1,0 für Zwangsschnittgrößen. Bei überwiegend auf Druck beanspruchten Bauteilen kann nach [31] ein erhöhter Sicherheitsbeiwert von  $\gamma = 1,5$  für die Zwangsbeanspruchung erforderlich sein, da hier nicht allgemein vom Steifigkeitsabbau infolge Rißbildung ausgegangen werden kann. Der reduzierte Sicherheitsfaktor für die Zwangsschnittgrößen wird durch deren Abbau bei Laststeigerung über die Gebrauchslast hinaus begründet.

Im Gegensatz zur DIN 1045 bzw. zu Heft 240 des DAfStb wird in der DIN 1075 [19] für Betonbrücken eine abweichende Regelung zur Behandlung von Zwangsbeanspruchungen angegeben. Dabei ist je nach dem, ob die Zwangsschnittgrößen nach Zustand I oder mit abgeminderten Steifigkeiten ermittelt werden, der Sicherheitsbeiwert  $\gamma = 1,0$  oder  $1,4$  zu verwenden (DIN 1075 [19] Abschnitt 9.2.2).

### 1.2.2 Behandlung von Zwang nach Eurocode 2

Nach EC 2 [26] müssen Zwangsverformungen berücksichtigt werden, wenn sie für die Bemessung maßgebend sind. Dazu wird in Abschnitt 2.3.3.1 des EC 2 festgelegt, daß bei einer nichtlinearen Schnittgrößenermittlung die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_Q$  für veränderliche Einwirkungen anzusetzen sind. Beim Nachweis auf der Grundlage einer linearen Schnittgrößenermittlung können die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_Q$  bei ungünstiger Beeinflussung um 20% reduziert werden (z.B.  $\gamma_{ind} = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2$ ). Über die hierbei anzusetzenden Steifigkeiten (Zustand I oder II) befindet sich im EC 2 für Stabtragwerke keine eindeutige Angabe. Nach Abschnitt 2.5.3.2.1 *Serviceability Analysis* soll normalerweise die linearelastische Theorie in Verbindung mit den Steifigkeiten des Zustands I (ungerissener Zustand) angewendet werden. Der Einfluß der Steifigkeitsänderung durch Ribbildung darf jedoch berücksichtigt werden. Überträgt man diese Angaben sinngemäß auf den Ultimate Limit State (ULS), so ist auch eine linearelastische Berechnung mit den Steifigkeiten des Zustandes II möglich. In diesem Fall kann dann wohl auch der Teilsicherheitsbeiwert reduziert werden.

Im Heft 425 des DAfStb [15] (Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2, Teil 1) ist das oben erläuterte Vorgehen konkretisiert. Danach kann bei linearen Verfahren (inkl. dem Näherungsverfahren mit einer vereinfachten linearen Momenten-Krümmungsbeziehung nach EC 2 [26] Anhang 2.3 für Stabtragwerke) mit dem reduzierten Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{ind} = 1,2$  für die Schnittgrößen oder die eingepprägten Verformungen gerechnet werden. Allerdings ist in Fällen mit überwiegender Zwangsbeanspruchung mit dem allgemeinen Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_Q = \gamma_{ind} = 1,5$  zu rechnen. Bei nichtlinearen Verfahren ist der Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_Q$  auf die Zwangsursache (z.B. eingepprägte Verformung) zu beziehen. Bei den plastischen Verfahren zur Schnittgrößenermittlung im Grenzzustand der Tragfähigkeit haben Zwangseinwirkungen lediglich Einfluß auf die Verdrehung der Fließgelenke, die als plastische Rotation entsprechend vorzuhalten bzw. nachzuweisen ist.

Bei Flächentragwerken ist im EC 2 [26] Abschnitt 2.5.3.6.2 eindeutig geregelt, daß unter linearelastischer Analyse eine Berechnung nach Zustand I oder Zustand II zu verstehen ist, und zwar sowohl für den Serviceability Limit State (SLS) als auch für den ULS. Dieses Vorgehen entspricht qualitativ demjenigen in DIN 1045 [18] Abschnitt 15.1.3 und 17.2.2: linearelastische Berechnung, Steifigkeiten nach Zustand I oder II, abgeminderter Sicherheitsbeiwert.

### 1.2.3 Behandlung von Zwang nach CEB-FIP Model Code 90

Für eingeprägte Verformungen (als ständige oder veränderliche Last) sind nach MC 90 [54] für die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit die Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  (vgl. auch Tab. 2.5) auf die Größe der eingepägten Verformung und nicht auf die entsprechenden Schnittreaktionen anzuwenden. Diese Regelung berücksichtigt insbesondere die verschiedenen Methoden der Schnittgrößenermittlung (linear - nichtlinear, Plastizitätstheorie). Konsequenterweise wird im MC 90 auch darauf hingewiesen, daß im allgemeinen, je nach Ursache und Auswirkung, eingepägte Verformungen nicht in die Betrachtung des Grenzzustandes der Tragfähigkeit mit einfließen. Hierzu ist zu ergänzen, daß die durch eingepägte Verformungen verursachten (im ULS im allgemeinen plastischen) Rotationen zusätzlich zu den durch Lastbeanspruchung hervorgerufenen Rotationen aufgenommen werden müssen, d.h. daß eine entsprechende Rotationskapazität vorgehalten werden muß. Falls bei einer linearen Schnittgrößenermittlung im ULS (mit oder auch ohne begrenzte Umlagerungen) die eingepägten Verformungen berücksichtigt werden, kann der Teilsicherheitsbeiwert nach MC 90 auf  $\gamma_F = 1,0$  bis 1,2 reduziert werden.

Für die Nachweise des Grenzzustandes der Gebrauchstauglichkeit sind Lasten, eingepägte Verformungen oder andere Zwangsbeanspruchungen mit  $\gamma_F = 1,0$  entsprechend den Gebrauchslastkombinationen (vgl. Abschnitt 2.3.3) zu berücksichtigen. Für die Methode der Schnittgrößenermittlung unter Gebrauchslasten gibt es im MC 90 den allgemeinen Hinweis, geeignete Materialbeschreibungen zu verwenden, worunter hierbei insbesondere der Steifigkeitsverlust infolge Ribbildung zu verstehen ist.

### 1.2.4 Behandlung von Zwang nach SIA 162

In der schweizerischen Norm für Betonbauten SIA 162 [70] wird wie im EC 2 [26] zwischen den Nachweisen hinsichtlich der Tragsicherheit und der Gebrauchstaug-

lichkeit unterschieden. Schlaff bewehrte, teilweise und voll vorgespannte Bauteile werden einheitlich in einer Norm erfaßt.

Der Nachweis ausreichender Tragsicherheit wird auf die Betrachtung des gesamten Tragsystems (Plastizitätstheorie) bezogen. Die Gebrauchstauglichkeit behandelt die Erfordernisse bezüglich der Dauerhaftigkeit, Funktionstüchtigkeit und des Aussehens. Diese Ziele können durch materialtechnische, konstruktive und bemessungstechnische Maßnahmen erreicht werden.

Bezüglich der Behandlung von Zwangsbeanspruchungen wird demnach auch getrennt auf die Nachweise der Tragsicherheit und der Gebrauchstauglichkeit eingegangen. In SIA 162 [70] Abschnitt 3 13 3 wird speziell auf „Aufgezwungene und behinderte Verformungen“ Bezug genommen. Man geht davon aus, daß im Gebrauchszustand die Tragwerkssteifigkeit und damit auch die Schnittkräfte aus behinderten Verformungen durch Ribbildung und Kriechen des Betons stark abgemindert werden. Daher müssen in der Regel diese Schnittkräfte beim Nachweis der Gebrauchstauglichkeit nicht ermittelt werden ([70] Abschnitt 3 13 32). Zur Gewährleistung eines günstigen Risseverhaltens genügt im allgemeinen eine Mindestbewehrung. Für die Nachweise der Tragsicherheit geht man davon aus, daß die Schnittkräfte aus behinderter Verformung auch durch die Bildung plastischer Gelenke weitgehend abgebaut werden. Insofern können die entsprechenden Schnittkräfte vernachlässigt werden. Allerdings muß das zugehörige Verformungsvermögen des betrachteten Bauteils sichergestellt sein.

Zusätzlich wird in der SIA 160 [69] *Einwirkungen auf Tragwerke* zum Ausdruck gebracht, daß Baugrundverformungen wie Setzungen und Verschiebungen ggf. nicht als unabhängige Einwirkungen, sondern als systemabhängiges Verformungsproblem zu behandeln sind.

### 1.2.5 Behandlung von Zwang nach ACI 318M-89

Die amerikanische Norm ACI 318 [1] *Building Code Requirements for Reinforced Concrete* umfaßt die Konstruktions- und Bemessungsregeln von bewehrten Betonbauten oder Betonbauteilen des Stahl- und Spannbetonbaus für den allgemeinen Hochbau. Die Schnittgrößenermittlung erfolgt auf der Grundlage der Elastizitätstheorie, wobei für Durchlaufträger und Rahmen auch Schnittgrößenumlagerungen bis zu 20% vorgesehen sind. Zudem gibt es für die Schnittgrößenermittlung von Durchlaufträgern Näherungsverfahren.

Die Bemessung erfolgt mit dem Nachweis, daß der Bemessungswert der Tragfähigkeit in jedem Querschnitt mindestens der erforderlichen Tragfähigkeit entspricht. Die erforderliche Tragfähigkeit ist über die mit entsprechenden Teilsicherheitsfaktoren vergrößerten Gebrauchslasten bzw. Schnittgrößen definiert. Der Bemessungswert der Tragfähigkeit eines Bauteils oder Querschnitts, ausgedrückt durch Kräfte oder Spannungen, ist der mit einem konstanten Reduktionsfaktor  $\phi < 1$  abgeminderte Nennwert der Tragfähigkeit. Dieser Reduktionsfaktor kann je nach Beanspruchungsart einen unterschiedlichen Wert haben (z.B. reine Biegung 0,90 oder Biegung mit Längsdruck 0,70). Insofern unterscheidet sich das allgemeine Nachweisformat nicht von demjenigen nach EC 2 [26] oder SIA 162 [70] (vgl. auch Abschnitt 2.2). Die Definition der Teilsicherheitsbeiwerte weist allerdings einige Unterschiede auf. So ist für die ständigen Lasten beispielsweise ein Teilsicherheitsbeiwert von 1,4 (ungünstige Einwirkung) und 0,9 (günstige Einwirkung) vorhanden. Die Verkehrslasten sind mit dem Teilsicherheitsfaktor 1,7 zu vergrößern. Auf der Materialseite wird im Gegensatz zum EC 2 oder MC 90, wie oben erläutert mit nur einem Reduktionsfaktor gearbeitet. Nach ACI, Abschnitt 8.1.2 ist für nicht vorgespannte Bauteile auch ein alternatives Nachweiskonzept zugelassen. Dies beruht auf dem Nachweis zulässiger Spannungen und Verformungen unter Gebrauchslasten.

Bezüglich der hier betrachteten Zwangsbeanspruchungen wird in ACI Abschnitt 8.2.4 zunächst der allgemeine Hinweis gegeben, daß entsprechende Einwirkungen zu berücksichtigen sind. In Abschnitt 8.6 des ACI wird für die anzusetzende Steifigkeit ergänzt, daß sinnvolle Annahmen zur Berechnung der Biege- und Torsionssteifigkeiten von Stützen, Wänden, Decken und Dachkonstruktionen getroffen werden dürfen. In dem zugehörigen Kommentar wird eine grobe Abschätzung der Steifigkeit zwischen dem 1,0 und 0,5 fachen Bruttoquerschnittswert angegeben. In Abschnitt 9.2.7 des ACI wird die Lastkombination für die erforderliche Tragfähigkeit bei Beanspruchungen infolge unterschiedlicher Setzungen, Kriechen, Schwinden oder Temperatur definiert. Diese ergibt sich aus der Kombination<sup>4</sup>  $S = 0,75 \cdot (1,4G + 1,4T + 1,7Q)$  jedoch muß  $S > 1,4 \cdot (G + T)$  sein. Der Einfluß aus Zwang  $T$  ist aufgrund einer wirklichkeitsnahen Abschätzung der zugehörigen Beanspruchung zu ermitteln. Im Kommentar wird eine Abschätzung dieser Beanspruchung bzw. der Steifigkeit mit einem wahrscheinlichen Wert in Abgrenzung zum oberen Grenzwert für die Berechnung im SLS empfohlen.

---

<sup>4</sup> $S$  = Einwirkung,  $G$  = ständige Einwirkung,  $T$  = Einwirkung aus Zwang,  $Q$  = Veränderliche Einwirkung

### 1.3 Zusammenfassung und Zielsetzung

Die Durchsicht der hier vorgestellten und weiterer Stahlbeton- und Spannbetonnormen aus Großbritannien [6] [7], Dänemark [22] und Spanien [23] zeigt, daß allen (neueren) Normen eine Bemessung nach Grenzzuständen für die Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit auf der Basis des Teilsicherheitskonzeptes gemeinsam ist. In allen Vorschriften werden allgemeine Hinweise zur Berücksichtigung von Zwangseinwirkungen gegeben, auf detaillierte Angaben zur Erfassung der effektiven Steifigkeiten wird verzichtet. Zudem wird zur Vermeidung von Zwangsbeanspruchungen auf Konstruktionsgesichtspunkte verwiesen, worunter insbesondere Dehnungsfugen zu verstehen sind.

Die Teilsicherheitsbeiwerte für Beanspruchungen aus Zwang schwanken für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit zwischen 1,0 und 1,5, der MC 90 [54] enthält den Hinweis, daß unter Umständen auf eine Bemessung für Zwang verzichtet werden kann. Für den Gebrauchstauglichkeitsnachweis beträgt der Teilsicherheitsbeiwert einheitlich bei ungünstiger Wirkung 1,0. Je nach Dominanz einzelner Einwirkungen können für Zwangsbeanspruchungen im Rahmen der Kombinationsregeln für ständige und veränderliche Lasten auch Kombinationsbeiwerte berücksichtigt werden. Im allgemeinen geht man im Fall der eingepprägten Verformungen von einer ständigen Einwirkung mit einem Kombinationswert  $\psi = 1$  aus.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in allen hier erwähnten Normen zur Behandlung von Zwangsbeanspruchungen gewisse Unsicherheiten im Zusammenhang mit dem Ansatz wirklichkeitsnaher Steifigkeiten bestehen. Diese Unsicherheiten entstehen aus dem Bestreben nach einer einerseits wirtschaftlichen Bemessung, die aber andererseits eine ausreichende Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit gewährleisten muß. Es bleibt dem entwerfenden Ingenieur die Entscheidung, mit welchen rechnerischen und konstruktiven Mitteln ein entsprechend zuverlässiges und gebrauchstaugliches Tragwerk erstellt werden kann. Im Hinblick auf eingepprägte Verformungen sind hierzu grundlegende Untersuchungen und Beispiele, insbesondere bezüglich des Sicherheitsniveaus, das in dieser Arbeit schwerpunktmäßig behandelt wird, hilfreich, da zu diesem Thema kaum Literatur vorhanden ist [75]. Das Ziel dieser Arbeit ist es daher, vergleichende Untersuchungen zum Sicherheitsniveau von Stahlbetonstabtragwerken unter eingepprägten Verformungen durchzuführen. Dabei soll den Grenzzuständen der Gebrauchstauglichkeit besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, da diese im Zusammenhang mit der nichtlinearen Systemanalyse zentrale Bedeutung erlangen.

## Kapitel 2

# Sicherheitskonzept im Bauwesen

Nach einem Vorschlag des Joint Committee on Structural Safety (JCSS) [8] wird in der Literatur zur probabilistischen Normungstheorie im Bauwesen zwischen drei Kategorien von Sicherheitsnachweisen unterschieden. Die Abstufungen gliedern sich nach ihrem Grad der Approximierung und werden mit Stufe (Level) I, II und III bezeichnet. Die Verfahren der Stufe III beinhalten eine exakte probabilistische Analyse eines Systems unter Verwendung aller Informationen aus der Dichteverteilung einzelner Parameter. Wegen des erheblichen Rechenaufwandes bleiben diese Methoden im allgemeinen Spezialfällen vorbehalten [8]. Unter den Näherungsverfahren der Stufe II versteht man diejenigen Methoden, die zum Sicherheitsnachweis lediglich punktuelle Untersuchungen vornehmen und zudem die Grenzzustandsgleichung nur approximativ abbilden. Hierzu gehört beispielsweise das hier in Abschnitt 2.1 beschriebene und dieser Arbeit zugrundeliegende Verfahren der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung. Aus den Verfahren der Stufe II werden im allgemeinen die Nachweise der Stufe I abgeleitet. Mit Hilfe von Teilsicherheitsbeiwerten und zugehörigen charakteristischen Werten gelangt man zu den semiprobabilistischen Nachweisen der Stufe I, wie sie heute in vielen Entwurfsnormen des Bauwesens zu finden sind, z.B. in EC 2 [26], SIA 162 [70], ACI-318 [1] und DIN 18800 [20].

Ausgehend von statistischen Kennwerten der System-, Einwirkungs- und Festigkeitsparameter der betrachteten Tragwerke sowie einem geeigneten Modell zur rechnerischen Beschreibung des Systemverhaltens kann mit Hilfe sicherheitstheoretischer Methoden das vorhandene Sicherheitsniveau bestimmt werden. Auf diese Art und Weise lassen sich beispielsweise bestimmte normative Regelungen vergleichen oder auch neue Sicherheitselemente kalibrieren. Im folgenden wird daher das hier angewendete Verfahren der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung erläutert und anschließend ein Überblick über die normativen Anwendungen der

Sicherheitstheorie am Beispiel des EC 2 und des semiprobabilistischen Sicherheitskonzeptes gegeben.

## 2.1 Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung

Die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung ist eine Näherungsmethode zur rechnerischen Ermittlung von Versagenswahrscheinlichkeiten für allgemeine, lineare und nichtlineare sowie normal- und nichtnormalverteilte Probleme [3]. Um Versagenswahrscheinlichkeiten zu berechnen (z.B. für ein gegebenes Tragwerk oder auch nur für ein bestimmtes Tragwerksteil), ist es erforderlich, die maßgebenden Einflußparameter für den Berechnungsalgorithmus als zufallsbedingte Variablen zu betrachten. Hiermit sind z.B. die Lasten, Festigkeiten oder Systemabmessungen angesprochen. Diese Basisvariablen werden in einem Vektor  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top$  zusammengefaßt. Die Realisation jeder Basisvariablen lautet dann  $X_i = x_i$  bzw.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ . Mit anderen Worten: Die Realisation des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  ist die Variable  $\mathbf{x}$ . Diese stellt einen Punkt in dem  $n$ -dimensionalen Raum der Basisvariablen dar.

Für die Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten ist die Formulierung einer Grenzzustandsfunktion erforderlich. Diese hängt von den oben angesprochenen statistischen Variablen  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$  ab. Eine allgemeine Formulierung einer Grenzzustandsfunktion ist:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0. \quad (2.1)$$

Ein Grenzzustand ist ein Zustand, bei dessen Überschreiten das Tragwerk aufhört, den gestellten Anforderungen zu genügen, d.h. falls  $g(\mathbf{x}) \geq 0$ , ist die gestellte Anforderung erfüllt (*Nicht-Versagen, Überlebensbereich*), falls  $g(\mathbf{x}) < 0$ , ist von einem *Versagen*<sup>1</sup> des Tragwerkes auszugehen. Die Formulierung dieser Grenzzustände kann sich beispielsweise auf das Überschreiten der Fließdehnung des Stahls in einem Stahlbetonquerschnitt oder auf eine übermäßige Setzung eines Fundamentes beziehen. Die Grenzzustandsgleichung erscheint im Raum der Basisvariablen als eine Hyperfläche, die den Gesamttraum in zwei Bereiche teilt, und zwar in den *sicheren* und den *unsicheren* Bereich. Der Bemessungspunkt innerhalb des von den Basisvariablen aufgespannten Raumes wird durch die Gleichung

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Der Begriff *Versagen* ist entweder im Sinne der Tragfähigkeit oder der Gebrauchstauglichkeit zu verstehen. Er kann sich auf ein gesamtes Tragwerk oder auf einzelne Elemente des Tragwerkes beziehen.

beschrieben, wobei  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$  die einzelnen Bemessungswerte des betrachteten Problems sind.

Die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ist durch ein  $n$ -faches Integral über das Versagensgebiet der Grenzzustandsfunktion im Raum der Basisvariablen  $\mathbf{X}$  definiert. Dabei ist jedem Punkt  $\mathbf{x}$  eine  $n$ -Dimensionale gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  zugeordnet.

$$P_f = \int_{\{\mathbf{x}|g(\mathbf{x})<0\}} \dots \int f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{\{\mathbf{x}|g(\mathbf{x})<0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit dann zu  $P_s = 1 - P_f$ . In der Sicherheitstheorie bzw. in den normativen Anwendungen der Sicherheitstheorie wird die Versagenswahrscheinlichkeit oft auch durch den Sicherheitsindex  $\beta$  angegeben. Der Zusammenhang zwischen der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  und dem Sicherheitsindex  $\beta$  ist über die Standardnormalverteilung folgendermaßen definiert:

$$P_f = \Phi(-\beta) \Rightarrow \beta = -\Phi^{-1}(P_f). \quad (2.4)$$

Dabei ist  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Der Sicherheitsindex ist also eine alternative Größe zu der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  und somit ein Maß für die Zuverlässigkeit.  $\beta$  ist vom Zahlenwert etwas angenehmer handhabbar als  $P_f$ , da für allgemeine Fälle der Tragwerksanalyse ein Sicherheitsindex zwischen  $\beta = 1$  und  $5$  vorhanden ist. Die zugehörige Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  liegt dann im Bereich von  $10^{-1}$  bis  $10^{-7}$ . Die Zuordnung von  $\beta$  und  $P_f$  ist exemplarisch in Tab. 2.1 angegeben. Die analytische Lösung

$\beta$	$P_f = \Phi(-\beta)$
0	0,5
1	$1,587 \cdot 10^{-1}$
2	$2,275 \cdot 10^{-2}$
3	$1,350 \cdot 10^{-3}$
4	$3,169 \cdot 10^{-5}$
5	$2,871 \cdot 10^{-7}$
6	$9,901 \cdot 10^{-10}$
7	$1,288 \cdot 10^{-12}$
8	$1,145 \cdot 10^{-16}$

Tab. 2.1: Sicherheitsindex und Versagenswahrscheinlichkeit

des Integrals in Gl. 2.3 zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit bereitet im allgemeinen Fall erhebliche Schwierigkeiten, weil die gemeinsame Verteilungsdichte  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  oft nicht genau bekannt ist und eine geschlossene Integration daher auf Sonderfälle beschränkt bleibt. Zudem ist die Lösung für große  $n$  im allgemeinen sehr aufwendig. Hier bietet die *Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung* (first order reliability method) eine praktikable Lösung. Dabei wird die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit auf die Ermittlung des Bemessungspunktes  $\mathbf{x}^*$  reduziert. Der Bemessungspunkt ist durch die höchste Auftretenswahrscheinlichkeit (Maximum der gemeinsamen Verteilungsdichte) aller vorhandenen Punkte innerhalb des Versagensbereiches der Grenzzustandsfunktion charakterisiert, d.h.  $\mathbf{x}^*$  ist der wahrscheinlichste Versagenspunkt.

Grundlagen der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung sind die folgenden Voraussetzungen und Annahmen. Die Basisvariablen  $\mathbf{X}$  sind Zufallsvariablen, deren Verteilungsdichten (z.B. Normalverteilung oder logarithmische Normalverteilung) mit ihren Kennwerten  $\mu_i$  (Mittelwert) und  $\sigma_i$  (Standardabweichung) bekannt sind. Die Basisvariablen  $X_i$  werden in standardnormalverteilte Basisvariablen  $Y_i$  transformiert. Die transformierten Variablen  $y_i$  müssen dabei die gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit haben wie die Variable  $x_i$ , d.h.  $F_{X_i}(x_i) = \Phi_{Y_i}(y_i)$ . Hier ist  $F_{X_i}$  die Verteilungsfunktion von  $X_i$ , und  $F_{X_i}(x_i)$  ist die Wahrscheinlichkeit, daß  $X_i \leq x_i$ . Der Raum der standardnormalverteilten Variablen  $\mathbf{Y}$  ist durch die Kennwerte  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  definiert. Die wesentlichen Eigenschaften des Standardnormalraumes, die auch insbesondere für die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung genutzt werden [45], sind:

1. Die Rotationssymmetrie, d.h. die Höhenlinien konstanter Wahrscheinlichkeit bilden konzentrische Kreise ( $n = 2$ ), Kugeln ( $n = 3$ ) oder Hypersphären ( $n > 3$ ) um den Koordinatenursprung.
2. Die Wahrscheinlichkeiten aller Punkte einer Hyperebene innerhalb dieses Raumes nehmen exponentiell mit ihrem Abstand vom Koordinatenursprung ab.
3. Der Wahrscheinlichkeitsbereich, der durch eine Hyperebene definiert ist, ist gleich  $\Phi(-b)$ .  $b$  ist hier der Abstand der Hyperebene vom Koordinatenursprung.

Beispielsweise ist für den Fall der statistisch unabhängigen und nicht normalverteilten Variablen die nichtlineare Transformation in den Standardnormalraum gegeben durch:

$$x_i = F_{X_i}^{-1}[\Phi(y_i)] \Leftrightarrow y_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Die Formulierung der Grenzzustandsfunktion lautet dann:

$$g(F_{X_1}^{-1}[\Phi(y_1)], F_{X_2}^{-1}[\Phi(y_2)], \dots, F_{X_n}^{-1}[\Phi(y_n)]) \geq 0 \quad (2.6)$$

bzw.

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) \geq 0. \quad (2.7)$$

Die Methode der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung beruht auf den oben beschriebenen Eigenschaften des Standardnormalraumes. Derjenige Punkt, der die Bedingung  $h(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  erfüllt und gleichzeitig den geringsten Abstand zum Koordinatenursprung des Standardnormalraumes hat, ist der Bemessungspunkt, weil er die höchste Auftretenswahrscheinlichkeit unter allen möglichen Punkten auf der Grenzzustandsfläche aufweist. Aufgrund der Eigenschaften des Standardnormalraumes liefern die Punkte in der näheren Umgebung des Bemessungspunktes den maßgeblichen Anteil zur Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  nach Gl. 2.3 (vgl. auch Abb. 2.1). Dies führt zu der grundlegenden Approximation der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung. Die in den Standardnormalraum transformierte Grenzzustandsfläche wird durch ihre  $n$ -dimensionale tangentielle Hyperebene  $l(\mathbf{y})$  im Bemessungspunkt  $\mathbf{y}^*$  mit  $h(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) = 0$  ersetzt.

$$l(\mathbf{y}) = h(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*) \cdot \left. \frac{\partial h}{\partial y_i} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} \quad (2.8)$$

(Taylorreihenentwicklung der Grenzzustandsgleichung im Bemessungspunkt unter Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung). Hierbei wird vorausgesetzt, daß die Grenzzustandsgleichung im Bemessungspunkt differenzierbar ist.

Mit einer geometrischen Interpretation ist die Ermittlung des Bemessungspunktes  $\beta$  bzw. der Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f \approx \Phi(-\beta)$  mit  $\beta = \sqrt{\sum (y_i^*)^2}$  leicht nachvollziehbar. In der Abb. 2.1 ist die Grenzzustandsfläche in dem transformierten  $\mathbf{Y}$ -Raum dargestellt (zweidimensionales Beispiel). Die Approximation der Grenzzustandsfläche durch ihre Tangentialebene im Bemessungspunkt  $\mathbf{y}^*$  ist durch die strichpunktierte Linie angedeutet. Der Sicherheitsindex  $\beta$  ( $\equiv$  Normale auf die Tangentialebene durch  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ) ist im Standardnormalraum der kürzeste Abstand vom Ursprung ( $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ) zur Grenzzustandsfläche ( $h(\mathbf{y}) = 0$ ) und entspricht dem Abstand zwischen dem Koordinatenursprung und dem Bemessungspunkt  $\mathbf{y}^*$ ). Diese Betrachtungen erläutern die Suche nach dem Bemessungspunkt bzw. nach der Versagenswahrscheinlichkeit. Die Lösung ist ein Optimierungspro-

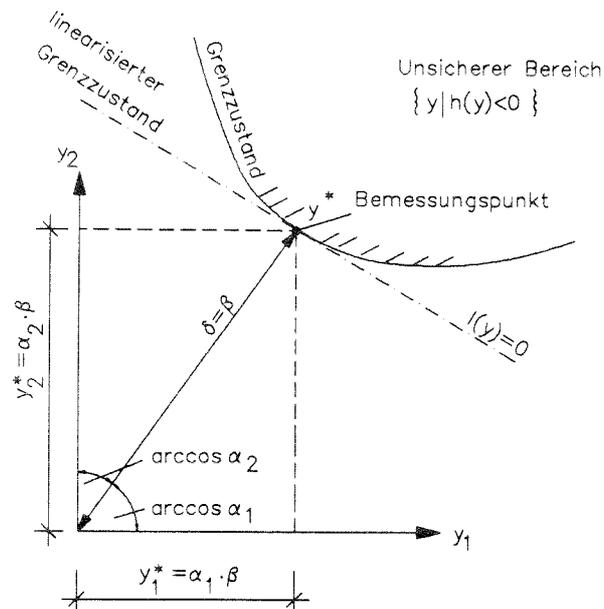


Abb. 2.1: Grenz Zustandsgleichung im Standardnormalraum

blem mit Nebenbedingung in der Form:

$$\beta = \min \left\{ \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \mid h(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \right\}. \quad (2.9)$$

Das Vorzeichen von  $\beta$  ist positiv, falls  $h(0) > 0$  (der Koordinatenursprung  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$  befindet sich im sicheren Bereich der Grenz Zustandsgleichung) und negativ, falls  $h(0) < 0$  (der Ursprung befindet sich im unsicheren Bereich der Grenz Zustandsgleichung). Im allgemeinen ist diese Näherung völlig ausreichend, weil die Grenz Zustandflächen im Bereich des Bemessungspunktes hinreichend flach verlaufen. Zusätzliche Bedingung ist aber, daß es auf der Grenz Zustandfläche neben dem Bemessungspunkt keine weiteren Punkte mit ähnlich geringem Abstand vom Koordinatenursprung gibt [45][73].

### 2.1.1 Erforderlicher Sicherheitsindex $\beta$

In der Sicherheitstheorie bzw. Normungstheorie ist der Sicherheitsindex  $\beta$  eine wichtige Größe, da er zu Vergleichen und Kalibrierungen von Entwurfs- und Berechnungsvorschriften dient. Das Ziel in der Normung besteht u.a. darin, in gewissen Grenzen ein einheitliches Sicherheitsniveau zu gewährleisten. Dieses kann durch den Sicherheitsindex ausgewiesen werden. In diesem Zusammenhang ist allerdings auf den operativen Charakter des Sicherheitsindex hinzuweisen. Die

Berechnung von  $\beta$  bzw.  $P_f$  kann sehr empfindlich auf Veränderungen im stochastischen Modell reagieren, insbesondere wenn es um die Ermittlung sehr kleiner Versagenswahrscheinlichkeiten geht. Daher ist mit dem Wert  $\beta$  nur eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die nur unter einem Komplex von Voraussetzungen (z.B. Verteilungstypen der Basisvariablen) gilt, formuliert. Ein Vergleich ist strenggenommen nur möglich, wenn er sich auf das gleiche theoretische Modell bzw. auf die gleichen Annahmen bezieht [73]. In der GruSiBau [33] sind erforderliche

	Sicherheitsklasse		
	1	2	3
ULS	4,2	4,7	5,2
SLS	2,5	3,0	3,5

**Tab. 2.2:** Erforderlicher Sicherheitsindex  $\beta$  für einen Bezugszeitraum von einem Jahr nach GruSiBau

Sicherheitsindexe als Maß für eine gewünschte Zuverlässigkeit unter der Einbeziehung der Erfahrung an ausgeführten baulichen Anlagen, die auch bisher den allgemeinen Sicherheitsanforderungen und den Forderungen nach Wirtschaftlichkeit genügten, festgelegt worden. Diese wurden für verschiedene Sicherheitsklassen (1 bis 3) jeweils für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit<sup>2</sup> (SLS) und den Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS) angegeben (Tab. 2.2).

	Sicherheitsklasse		
	niedrig	normal	hoch
ULS	3,71 $P_f = 10^{-4}$	4,26 $P_f = 10^{-5}$	4,75 $P_f = 10^{-6}$
SLS	1,28 ... 2,32 $P_f = 10^{-1} \dots 10^{-2}$		

**Tab. 2.3:** Erforderlicher Sicherheitsindex  $\beta$  nach NKB (duktilen Versagen)

Ähnliche Festlegungen wurden auch vom Nordic Committee on Building Regu-

<sup>2</sup>Die Angaben in Tab. 2.2 zum erforderlichen Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit beziehen sich hier auf eine Formulierung der Grenzzustandsgleichung, die nicht schon implizit einen Sicherheitsabstand enthält.

lations (NKB) in [57] getroffen. Dort werden wie bei der GruSiBau drei Sicherheitsklassen unterschieden, allerdings werden die Sicherheitsklassen nur auf den Grenzzustand der Tragfähigkeit bezogen. Für die Gebrauchstauglichkeitsnachweise wird eine zulässige Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  von  $10^{-1}$  bis  $10^{-2}$  angegeben. In Tab. 2.3 sind die entsprechenden Anforderungen zusammenfassend dargestellt.

Die im Rahmen der Entwicklung der europäischen Baunormen formulierten Grundsätze sind im Eurocode 1, *Basis of Design and Actions on Structures* [25] veröffentlicht. Im Teil 1 von EC 1 wird auch speziell auf den erforderlichen Sicherheitsindex eingegangen. In Tab. 2.4 sind die entsprechenden Werte zusammengestellt. Die Zeitangabe *Lebensdauer* bezieht sich hier auf 50 Jahre für allgemeine

Grenzzustand	$\beta$ (Lebensdauer)	$\beta$ (ein Jahr)
ULS	3,8	4,7
SLS	1,5	3,0
Ermüdung	1,5 - 3,8	–

**Tab. 2.4:** Erforderlicher Sicherheitsindex  $\beta$  nach EC 1

Hochbauten und auf 100 Jahre für Brücken. Die angegebenen Werte verstehen sich als Mindestanforderung für allgemeine Fälle. Auf eine explizite Unterteilung nach Sicherheitsklassen wird verzichtet und stattdessen ein Abstand von 0,5 bis 1,0 als Schrittweite für eine Klassenbreite angegeben. Die Werte basieren auf Kalibrierungen nach den Bemessungsnormen verschiedener Länder. Dabei wurden logarithmische Normalverteilungen und Weibullverteilungen für die Beschreibung des Widerstandes und der Modellunsicherheiten, sowie Normalverteilungen für das Eigengewicht und Extremwertverteilungen für veränderliche Lasten verwendet.

Ein Vergleich der Tabellen 2.2, 2.3 und 2.4 zeigt, daß die Festlegung der erforderlichen Sicherheiten in Form eines Sicherheitsindex nicht nur von nationalen Erfahrungen und Anforderungen, sondern in wesentlichem Maße vom gewählten mechanischen Modell und von der angestrebten Lebensdauer bestimmt wird. Eine Zielvorstellung bezüglich des erforderlichen Sicherheitsindex dient daher im wesentlichen als Grundlage zur Entwicklung konsistenter Bemessungsregeln und nicht unbedingt als explizite Angabe der vorhandenen Versagenswahrscheinlichkeit.

## 2.2 Sicherheitskonzepte für die Normung

In der ISO-Norm 2394 [39] sind die Grundlagen für die Anwendung der Sicherheitstheorie in der Normung zusammengefaßt. Prinzipiell lassen sich die erforderlichen Sicherheitselemente für das Teilsicherheitskonzept auf verschiedene Art und Weise ableiten.

1. Kalibrierungen anhand historischer oder empirisch bekannter Bemessungsmethoden durch einfache vergleichende Gegenüberstellung der Berechnungsergebnisse.
2. Kalibrierung anhand von probabilistischen Berechnungsmethoden.
3. Durch eine vereinfachte Anwendung der Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung, indem konstante Sensitivitätsfaktoren und ein erforderlicher Sicherheitsindex  $\beta$  vorgegeben werden.

Zur Ableitung des semiprobabilistischen Sicherheitskonzeptes, wie es in den aktuellen Normen verwendet wird, soll hier zunächst auf eine anschauliche Formulierung einer Grenzzustandsgleichung mit dem Sicherheitsabstand  $Z = R - S$  mit

$$g(\mathbf{x}) = r - s = 0 \quad (2.10)$$

zurückgegriffen werden ( $R - S$  - Modell). Der Sicherheitsabstand  $Z$  ist abhängig von den hier als normalverteilt angenommen Variablen  $X_1 = R$  (Widerstand) und  $X_2 = S$  (Beanspruchung).  $R = g_R(X_{R_1}, X_{R_2}, \dots)$  und  $S = g_S(X_{S_1}, X_{S_2}, \dots)$  selbst können im allgemeinen Fall Funktionen weiterer Zufallsgrößen sein. Die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  ergibt sich nach Gl. 2.3 mit der Gl. 2.10 des Grenzzustandes zu

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^s f(r, s) dr ds, \quad (2.11)$$

bzw. wenn man zuerst über  $s$  integriert, zu

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_r^{+\infty} f(r, s) ds dr. \quad (2.12)$$

Für die hier desweiteren vorausgesetzte stochastische Unabhängigkeit von  $R$  und  $S$  ergibt sich dann aus Gl. 2.11

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(s) f_S(s) ds. \quad (2.13)$$

Für den speziellen Fall normalverteilter, unkorrelierter Variablen ist dieses Integral geschlossen lösbar. Transformiert man die Variablen  $r$  und  $s$  zunächst in den

Standardnormalraum mit

$$\hat{r} = \frac{r - \mu_R}{\sigma_R} \quad \text{und} \quad \hat{s} = \frac{s - \mu_S}{\sigma_S},$$

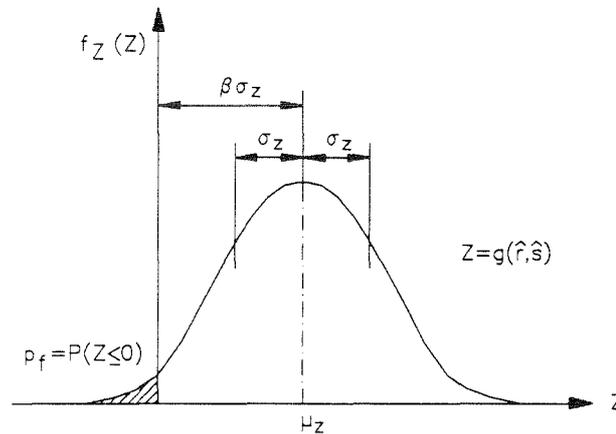
so lautet die Grenzzustandsgleichung (Gl. 2.10) im Standardnormalraum:

$$g(\hat{r}, \hat{s}) = \hat{r} \cdot \sigma_R - \hat{s} \cdot \sigma_S + \mu_R - \mu_S = 0. \quad (2.14)$$

Der Sicherheitsindex  $\beta > 0$  ist definiert mit (vgl. Abb. 2.2):

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \quad (2.15)$$

wobei  $\mu_Z$  und  $\sigma_Z$  Mittelwert und Standardabweichung der Verteilungsfunktion des Sicherheitsabstandes  $Z = R - S$  darstellen.



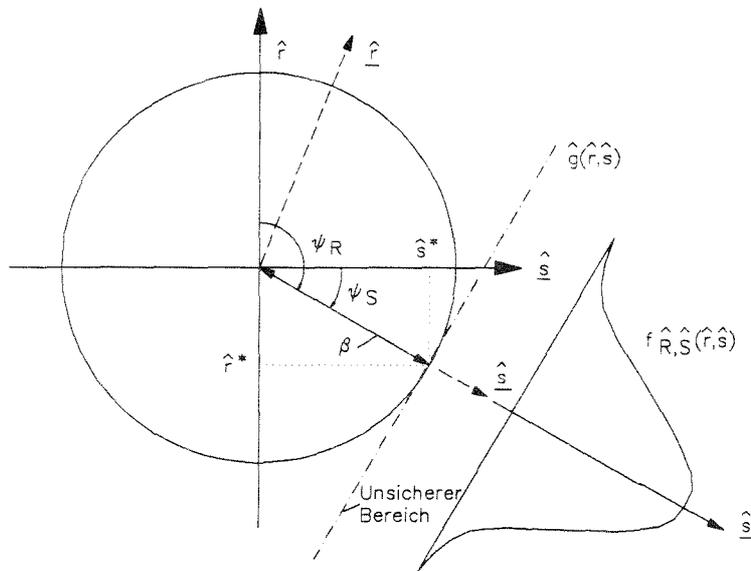
**Abb. 2.2:** Zusammenhang zwischen Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  und Sicherheitsindex  $\beta$

Nach Gl. 2.4 ist der Zusammenhang zwischen  $P_f$  und  $\beta$  definiert mit

$$P_f = \Phi(-\beta), \quad (2.16)$$

wobei  $\Phi$  die Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung ist. In Abb. 2.3 ist die lineare Grenzzustandsgleichung im zweidimensionalen Standardnormalraum dargestellt. Dreht man das Koordinatensystem in Abb. 2.3 von  $\hat{r}$  und  $\hat{s}$  um den Winkel  $\psi_s$ , so daß die neue Koordinate  $\hat{z}$  in senkrechter Richtung auf der linearen (oder im Bemessungspunkt linearisierten) Grenzzustandsfläche steht, so läßt sich die Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f$  nach Gl. 2.11 wegen der Rotationssymmetrie des Standardnormalraumes mit

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{(-\frac{1}{2}z^2)} dz = \Phi(-\beta) \quad (2.17)$$


 Abb. 2.3: Sicherheitsindex  $\beta$ 

ermitteln. Die Lösung des Integrals ist der Abb. 2.3 mit  $\beta$  als dem kürzesten Abstand zwischen der Grenzzustandsfläche und dem Koordinatenursprung zu entnehmen. Aus der Umformung der Gl. 2.14 in die Hessesche Normalform einer Geradengleichung ergibt sich:

$$-\frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \cdot \hat{r} + \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \cdot \hat{s} - \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = 0. \quad (2.18)$$

Mit  $\mu_Z = \mu_R - \mu_S$  und  $\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} = \sigma_Z$  (Fehlerfortpflanzung<sup>3</sup>) und  $\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$  ist das Absolutglied in Gl. 2.18

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}. \quad (2.19)$$

Mit Blick auf die Abb. 2.3 stellen die Koeffizienten von  $\hat{r}$  und  $\hat{s}$  in Gl. 2.18 die Richtungskosinus der Normalen auf die Grenzzustandsgerade dar:

$$\cos(\psi_S) = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \alpha_S \quad (2.20)$$

$$\cos(\psi_R) = \frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \alpha_R \quad (2.21)$$

<sup>3</sup>Fehlerfortpflanzungsgesetz für unabhängige Größen:  $\sigma_g = \left[ \sum_{i=1}^k \left( \sigma_{x_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

Die Vorzeichen der Sensitivitätsfaktoren  $\alpha$  sind in der Literatur nicht einheitlich definiert. Hier sind sie so eingeführt, daß sie für Größen auf der Lastseite positiv und für Größen auf der Widerstandssseite negativ sind. Der Bemessungspunkt hat mit dieser Schreibweise die Koordinaten

$$\hat{s}^* = \cos(\psi_S) \cdot \beta = \alpha_S \cdot \beta \quad (2.22)$$

$$\hat{r}^* = \cos(\psi_R) \cdot \beta = \alpha_R \cdot \beta. \quad (2.23)$$

Durch Rücktransformation in das Koordinatensystem  $r, s$  ergeben sich die Koordinaten  $r^*, s^*$  für den Bemessungspunkt (Index \*) zu

$$s^* = \mu_S + \alpha_S \cdot \beta \cdot \sigma_S \quad (2.24)$$

$$r^* = \mu_R + \alpha_R \cdot \beta \cdot \sigma_R. \quad (2.25)$$

Im Falle einer nichtlinearen Grenzzustandsgleichung ist, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, eine Approximation im Bemessungspunkt erforderlich. In Analogie zur obigen Herleitung erhält man:

$$x_i^* = \mu_{X_i} + \alpha_{X_i} \cdot \beta \cdot \sigma_{X_i}, \quad (2.26)$$

mit

$$\alpha_{X_i} = \frac{-\left. \frac{\partial g(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{x}^*} \cdot \sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \left. \frac{\partial g(X)}{\partial X_j} \right|_{\mathbf{x}^*} \cdot \sigma_{X_j} \right)^2}} \quad (2.27)$$

und

$$\sqrt{\sum_i (\alpha_{X_i})^2} = 1. \quad (2.28)$$

Der Zusammenhang zwischen dieser Herleitung und den semiprobabilistischen Verfahren bzw. der Ermittlung von Teilsicherheitsbeiwerten kann anhand der Abb. 2.4 verdeutlicht werden. In den normativen Anwendungen der Sicherheitstheorie wird zunächst von charakteristischen Werten (Nennwerten) der zu berücksichtigenden statistischen Variablen ausgegangen. Die charakteristischen Werte  $r_p, s_q$  entsprechen bestimmten Fraktilwerten.

$$r_p = \mu_R + k_R \cdot \sigma_R = \mu_R(1 + k_R \cdot V_R) \quad (2.29)$$

$$s_q = \mu_S + k_S \cdot \sigma_S = \mu_S(1 + k_S \cdot V_S) \quad (2.30)$$

Dabei sind  $V_R$  bzw.  $V_S$  die entsprechenden Variationskoeffizienten  $V_i = \sigma_i/\mu_i$  der Variablen  $R$  und  $S$ . Die Faktoren der Standardnormalverteilung  $k$  betragen beispielsweise für die Fraktile  $q$ :

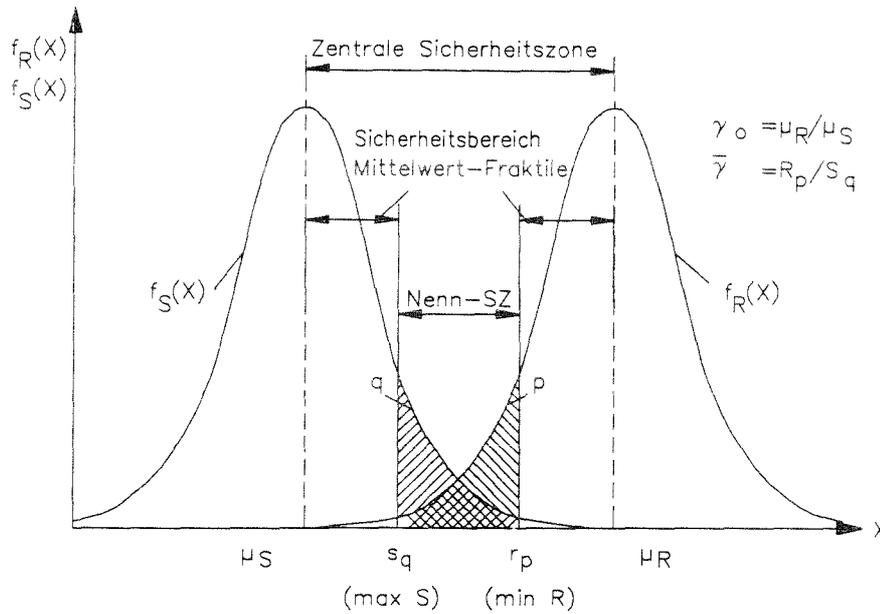


Abb. 2.4: Grafische Darstellung der Sicherheitsbereiche für das  $R - S$ -Modell

q [%]	k
99	+2,326
95	+1,645
50	0
5	-1,645
1	-2,326

Der globale Sicherheitsfaktor bzw. Nennsicherheitsfaktor  $\bar{\gamma}$  ist definiert als Quotient von Beanspruchbarkeit und Beanspruchung, berechnet mit den charakteristischen Werten  $X_k$ . Die Grenzzustandsgleichung 2.10 läßt sich damit umformen in

$$g(x_k, \bar{\gamma}) = r_p - \bar{\gamma} \cdot s_q = 0 \quad (2.31)$$

bzw.

$$\bar{\gamma} = \frac{r_p}{s_q} \quad (2.32)$$

Der zentrale Sicherheitsfaktor  $\gamma_0$  ist definiert als der Quotient von Beanspruchbarkeit und Einwirkung, berechnet mit den mittleren Werten.

$$\gamma_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (2.33)$$

Der mathematische Zusammenhang zwischen diesen Sicherheitsfaktoren ergibt sich zu

$$\bar{\gamma} = \frac{r_p}{s_q} = \gamma_0 \frac{(1 + k_R \cdot V_R)}{(1 + k_S \cdot V_S)} = \frac{\mu_R}{\mu_S} \cdot \left( \frac{1 + k_R \cdot V_R}{1 + k_S \cdot V_S} \right) \quad (2.34)$$

Die Berechnung von  $\beta$  nach Gl. 2.19 läßt sich wie folgt linearisieren:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\alpha_S \sigma_S - \alpha_R \sigma_R}. \quad (2.35)$$

Durch Umformen erhält man

$$\gamma_0 = \frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{1 + \beta \alpha_S V_S}{1 + \beta \alpha_R V_R}. \quad (2.36)$$

Mit den Gl. 2.36 und 2.34 ergibt sich der Nennsicherheitsfaktor zu

$$\bar{\gamma} = \frac{r_p}{s_q} = \frac{1 + \beta \alpha_S V_S}{1 + \beta \alpha_R V_R} \cdot \left( \frac{1 + k_R \cdot V_R}{1 + k_S \cdot V_S} \right). \quad (2.37)$$

Die allgemeine Nachweisgleichung des semiprobabilistischen Konzeptes mit den nach Einwirkung und Widerstand getrennten Teilsicherheitsfaktoren  $\gamma_S$  und  $\gamma_R$  lautet dann:

$$\frac{r_p}{\frac{1 + k_R \cdot V_R}{1 + \beta \alpha_R V_R}} = S_q \cdot \frac{1 + \beta \alpha_S V_S}{1 + k_S \cdot V_S} \quad (2.38)$$

$$\frac{r_p}{\gamma_R} = s_q \cdot \gamma_S \quad (2.39)$$

mit den Teilsicherheitsbeiwerten für die Beanspruchung  $\gamma_S$  und Beanspruchbarkeit  $\gamma_R$ :

$$\gamma_R = \frac{1 + k_R \cdot V_R}{1 + \beta \alpha_R V_R} \quad (2.40)$$

$$\gamma_S = \frac{1 + \beta \alpha_S V_S}{1 + k_S \cdot V_S}. \quad (2.41)$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen dem Nennsicherheitsfaktor und den Teilsicherheitsbeiwerten hergeleitet. Über die Wichtungsfaktoren  $\alpha_i$  nach Gl. 2.27 werden die Einflüsse der einzelnen statistischen Variablen (hier  $R$  und  $S$ ) erfaßt.

## 2.3 Grundlagen der Bemessung nach EC 2

Der EC 2 Teil 1 [26] bildet die allgemeine Grundlage für die Bemessung von unbewehrten, bewehrten und vorgespannten Betonbauwerken des Hoch- und Ingenieurbaues. Er enthält detaillierte Bemessungsregeln für hauptsächlich im üblichen Hochbau vorkommende Bauteile. Die allgemeinen Bemessungsgrundlagen umfassen u.a. das bauartenübergreifende Sicherheitskonzept, die Definition von

Grenzzuständen, Angaben über die Baustoffeigenschaften, die rechnerische Behandlung der Vorspannung, betontechnische Fragen sowie Regeln für die Bewehrungsführung und die bauliche Durchbildung. Das Sicherheitskonzept der Eurocodes beruht im wesentlichen auf den in Abschnitt 2.2 beschriebenen Grundlagen. Es werden Sicherheitselemente (z.B. charakteristische Werte der Materialeigenschaften und Belastung, Teilsicherheitsbeiwerte und additive Sicherheitselemente) eingeführt, um ein einheitliches Sicherheitsniveau zu gewährleisten. Im Hinblick auf eine praktikable Anwendung werden bei der Festlegung von Sicherheitselementen auch gewisse Konzessionen gemacht. Dies betrifft beispielsweise die konstanten Teilsicherheitsbeiwerte, die rein theoretisch, wie aus den tatsächlichen Bemessungspunkten abgeleitet werden kann, nicht immer konstant sind.

### 2.3.1 Definition der Grenzzustände, Einwirkungen und Baustoffkennwerte

Der EC 2 unterscheidet zwei Grenzzustände, und zwar den rechnerischen Versagenszustand (ULS) und den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (SLS). Der ULS umfaßt die Grenzzustände der Tragfähigkeit für Biegung, Biegung mit Längskraft und Längskraft allein sowie Querkraft, Torsion, Durchstanzen oder durch Tragwerksverformungen bedingte Grenzzustände der Tragfähigkeit (Stabilität). Der Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit umfaßt Ribbildung, Tragwerksverformungen sowie Überschreiten zulässiger Spannungen im Beton, Betonstahl oder Spannstahl unter Gebrauchslastbedingungen. Die Einwirkungen werden hinsichtlich der Häufigkeit ihres Auftretens in

- ständige Einwirkungen  $G$  und Vorspannung  $P$
- veränderliche Einwirkungen  $Q$
- außergewöhnliche Einwirkungen  $A$

unterschieden. Indirekte Einwirkungen wie z.B. Setzungen ( $G_{ind}$ ) oder Temperatur ( $Q_{ind}$ ) werden entsprechend als ständig oder veränderlich betrachtet. Die Kombination von mehreren veränderlichen und voneinander unabhängigen Einwirkungsgrößen (z.B. Verkehr, Wind und Schnee) wird durch Multiplikation der entsprechenden charakteristischen Werte  $Q_k$  mit zugehörigen Kombinationswerten  $\psi_i \leq 1$  erreicht. Die Bemessungswerte der Einwirkungen (Index  $d$ ) ergeben sich allgemein durch Multiplikation der charakteristischen Werte (Index  $k$ ) mit dem zugehörigen Teilsicherheitsfaktor.

$$G_d = \gamma_G \cdot G_k$$

$$\begin{aligned} Q_d &= \gamma_Q \cdot Q_k \text{ bzw. } \gamma_Q \cdot \psi_i \cdot Q_{k,i} \\ P_d &= \gamma_P \cdot P_k \\ A_d &= \gamma_A \cdot A_k \end{aligned}$$

$\gamma_G$  (ständig),  $\gamma_Q$  (veränderlich),  $\gamma_P$  (Vorspannung) und  $\gamma_A$  (Unfall) sind die zugehörigen Teilsicherheitsbeiwerte.

Die Baustoffkennwerte werden mit Hilfe charakteristischer Werte  $X_k$  eingeführt. Diese ergeben sich als Fraktilwert einer statistischen Häufigkeitsverteilung der entsprechenden Baustoffkenngröße. Der Bemessungswert ergibt sich daraus durch Division mit dem zugehörigen Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_M$ :

$$X_d = \frac{X_k}{\gamma_M}.$$

### 2.3.2 Nachweis für den Grenzzustand der Tragfähigkeit

Der Nachweis wird durch Vergleich des Bemessungswertes der Einwirkungen (Beanspruchungen) mit dem Bemessungswert des Materialwiderstandes (Beanspruchbarkeit) geführt:

$$S_d \leq R_d. \quad (2.42)$$

Der Bemessungswert der Beanspruchung und der Beanspruchbarkeit wird mit Hilfe der Teilsicherheitsfaktoren  $\gamma$  ermittelt, die die Unsicherheiten (Einwirkungen, Bemessungsmodell und Baustoffkennwerte) abdecken. In allgemeiner Form lautet die Gleichung folgendermaßen:

$$S_d \left[ \sum (\gamma_G \cdot G_k) + \gamma_Q \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} (\gamma_Q \cdot \psi_{0i} \cdot Q_{k,i}) + \gamma_P \cdot P_k \right] \leq R_d \left[ \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \frac{f_{yk}}{\gamma_s}, \frac{0,9 \cdot f_{pk}}{\gamma_s} \right]. \quad (2.43)$$

Dabei ist:

$G_k$	charakteristischer Wert der ständigen Einwirkungen
$P_k$	charakteristischer Wert der Vorspannung
$Q_{k,1}$	Leitwert der veränderlichen Einwirkungen
$Q_{k,i}$	Begleitwert der veränderlichen Einwirkungen
$f_{ck}, f_{yk}, f_{pk}$	charakteristische Festigkeit von Beton, Betonstahl und Spannstahl
$\gamma_G, \gamma_Q, \gamma_P$	Teilsicherheitsbeiwerte für ständige oder veränderliche Einwirkungen bzw. für Vorspannung $P_k$ , siehe Tab. 2.5
$\gamma_c, \gamma_s$	Teilsicherheitsbeiwerte für Beton und Betonstahl bzw. Spannstahl, siehe Tab. 2.6
$\psi_{0i}$	Kombinationsbeiwert der veränderlichen Lasten nach [14], siehe Tab. 2.7

Zeile	Auswirkung ist	Art der Einwirkung		
		ständig $\gamma_G$	veränderlich $\gamma_Q$	Vorspannung $\gamma_P$
1	ungünstig	<b>1,35</b>	<b>1,5</b>	<b>1,0</b>
2	günstig	<b>1,00</b>	<b>0</b>	<b>1,0</b>

**Tab. 2.5:** Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_F$  für Einwirkungen nach der Anwendungsrichtlinie des DAfStb

Zeile	Lastkombination	Beton	Stahl
		$\gamma_c$	$\gamma_s$
1	Grundkombination	<b>1,5</b>	<b>1,15</b>
2	Außergewöhnliche Kombination	<b>1,3</b>	<b>1,00</b>

**Tab. 2.6:** Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma_M$  für Baustoffkennwerte nach EC 2

Art der Einwirkung	Kombinationsbeiwert		
	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2$
<b>Verkehrslast auf Decken</b> Wohnräume; Büroräume; Verkehrsräume bis 50 m <sup>2</sup> ; Flure; Balkone; Räume in Krankenhäusern	0,7	0,5	0,3
Versammlungsräume; Garagen und Parkhäuser; Turnhallen; Tribünen; Flure in Lehrgebäuden; Büchereien, Archive	0,8	0,8	0,5
Ausstellungs- und Verkaufsräume; Geschäfts- und Warenhäuser	0,8	0,8	0,8
<b>Windlasten</b>	0,6	0,5	0
<b>Schneelasten</b>	0,7	0,2	0
<b>alle anderen Einwirkungen</b>	1,0	0,7	0,5

**Tab. 2.7:** Kombinationsbeiwerte  $\psi$  für Einwirkungen nach der Anwendungsrichtlinie des DAfStb

### 2.3.3 Nachweis für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

Allgemein wird gefordert, daß ein Nennwert ( $C_d$ ) des betrachteten Bauwerks oder der Bauteileigenschaft einzuhalten ist:

$$S_d \leq C_d. \quad (2.44)$$

Dabei ist  $S_d$  der entsprechende Vergleichswert, der aus einer zugehörigen Gebrauchslastkombination abgeleitet wird:

a) seltene Lastkombination

$$S_d = S_d \left[ \sum_i G_{k,i} + P_k + Q_{k,1} + \sum_{i>1} (\psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}) \right] \quad (2.45)$$

b) häufige Lastkombination

$$S_d = S_d \left[ \sum_i G_{k,i} + P_k + \psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} (\psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}) \right] \quad (2.46)$$

c) quasi-ständige Lastkombination

$$S_d = S_d \left[ \sum_i G_{k,i} + P_k + \sum_{i \geq 1} (\psi_{2,i} \cdot Q_{k,i}) \right]. \quad (2.47)$$

Die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit umfassen im allgemeinen:

- Spannungsbegrenzung im Beton und/oder Stahl
- Rissebeschränkung
- Verformungsbegrenzung.

### 2.3.4 Grundlagen der Schnittgrößenermittlung

Die Beanspruchungen des Tragwerks infolge Last und Zwang können generell mit folgenden Verfahren ermittelt werden (EC 2 [26] Abschnitt 2.5.1.1(5)):

- lineare Verfahren (basierend auf der Elastizitätstheorie)
- lineare Verfahren mit begrenzter Momentenumlagerung
- nichtlineare Verfahren
- plastische Verfahren (ULS)

Für den Gebrauchszustand werden die Berechnungen im allgemeinen auf der Grundlage der Elastizitätstheorie durchgeführt (EC 2 [26] Abschnitt 2.5.3.2.1(1)), aber auch nichtlineare Verfahren sind hier zugelassen. Plastische Verfahren der Schnittgrößenermittlung sind für die Gebrauchstauglichkeitsnachweise hingegen nicht sinnvoll und daher ausgeschlossen. Für den Grenzzustand der Tragfähigkeit sind alle Berechnungsverfahren zulässig. Die plastischen Verfahren werden ausschließlich für die Betrachtung der Grenzzustände der Tragfähigkeit verwendet. Sie sind als Vereinfachung oder Idealisierung auch in den nichtlinearen Verfahren enthalten und deshalb auch allgemein unter dem Begriff *nichtlineare Schnittgrößenermittlung* erfaßbar.

# Kapitel 3

## Stoffgesetze und statistische Kennwerte von Material und Beanspruchung

### 3.1 Materialverhalten von Betonstahl

Die Kennwerte zur Beschreibung des Materialverhaltens von Betonstahl unter Zugbeanspruchung sind Zugfestigkeit  $f_t$ , Streckgrenze  $f_y$  (bzw. das Verhältnis  $f_t/f_y$ ), Elastizitätsmodul  $E_s$  und Bruchdehnung  $A_{10}$ . Maßgebend für die maximale Verformungsfähigkeit ist die Gleichmaßdehnung  $\varepsilon_u$  (die unter Höchstlast auftretende bleibende Dehnung)<sup>1</sup>. Die Werte von  $\varepsilon_u$  schwanken zwischen 1% bei stark kaltverformten Stählen und ca. 10% bei naturharten Stählen. Nach Überschreiten der Streckgrenze ist bis zum Erreichen der Zugfestigkeit die Dehnung gleichmäßig über die Länge einer Zugprobe verteilt, nach Überschreiten der maximalen Zugfestigkeit (bzw. der Gleichmaßdehnung) schnürt sich der Stahl an seiner schwächsten Stelle unter örtlich größerer Dehnung ein und bricht. Die Spannungsdehnungslinien naturharter und kaltverformter Stähle unterscheiden sich in ihrem Verhalten oberhalb der Streckgrenze. Kaltverformter Stahl besitzt gegenüber naturhartem Stahl keine ausgeprägte natürliche Streckgrenze mit anschließendem Verfestigungsbereich.

Unterhalb der Streckgrenze kann man für alle Betonstähle in ausreichender Genauigkeit von einem linearelastischen Materialverhalten ausgehen. Der Elastizitätsmodul wird im EC 2 [26] mit  $2,0 \cdot 10^5$  MPa angegeben. Oberhalb der Streck-

---

<sup>1</sup>In der Literatur werden teilweise auch die Bezeichnungen  $f_t = R_m$ ,  $f_y = R_e$ ,  $\varepsilon_u = A_{gt}$  verwendet

grenze wird der Betonstahl bis zum Erreichen der Gleichmaßdehnung rechnerisch erfaßt. In Abb. 3.1 ist die allgemein übliche, in bilinearer Form idealisierte Spannungsdehnungslinie des Betonstahls, wie sie auch in vielen Normen zu finden ist, dargestellt. Die in Abb. 3.2 dargestellte stetige Spannungsdehnungsbeziehung

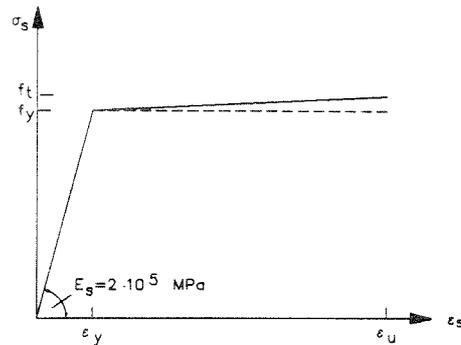


Abb. 3.1: Bilineare Betonstahlkennlinie

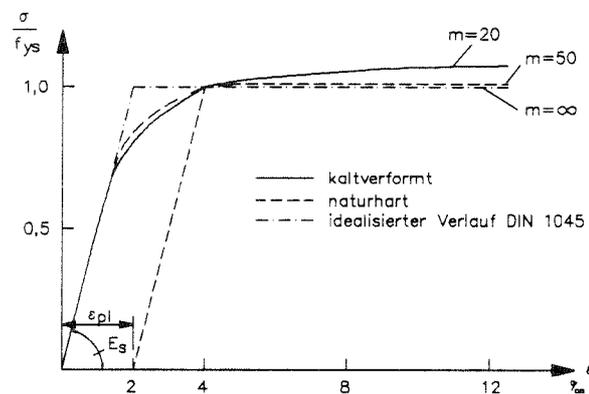


Abb. 3.2: Stetige Betonstahlkennlinie nach Dilger

stammt von Dilger [17]. Die sie beschreibende Exponentialfunktion lautet:

$$\epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + 0,002 \cdot \left( \frac{\sigma_s}{f_y} \right)^m \quad (3.1)$$

$$\text{mit} \quad (3.2)$$

$$m = \frac{\ln(\epsilon_u/0,002)}{\ln(f_t/f_y)}$$

Diese Beziehung gilt für kaltverformte Stähle und wird den weiteren Berechnungen zugrundegelegt. Für naturharte Stähle kann die Gl. 3.1 nach Überschreiten der Streckgrenze durch ein additives Glied mit dem Betrag einer Fließdehnung  $A_F$  ergänzt werden. Für die praktische Anwendung muß die Gl. 3.1 invertiert werden. Dies geschieht hier mit einer bereichsweise eingeteilten Newton-Iteration.

In Abb. 3.3 ist der Exponent  $m$  der Stahlkennlinie für verschiedene Verhältnisse von  $f_t/f_y$  als Funktion der Gleichmaßdehnung ( $\varepsilon_u$ ) aufgetragen. Für druckbeanspruchte Bewehrungsstäbe wird näherungsweise von den gleichen Kennlinien wie für die Zugbeanspruchung ausgegangen.

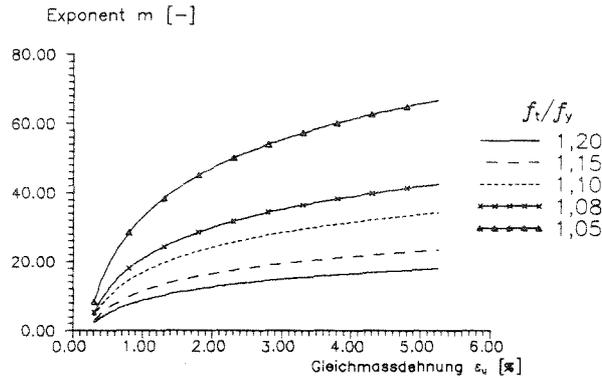


Abb. 3.3: Exponent  $m$  der Stahlkennlinie nach Dilger für verschiedene Verhältnisse von  $f_t/f_y$  und Gleichmaßdehnungen  $\varepsilon_u$

## 3.2 Materialverhalten von Beton

### 3.2.1 Beton auf Druck

Für die Schnittgrößenermittlung unter Kurzzeitbeanspruchung kann für die nicht-linearen Berechnungen ein dem Parabel-Rechteckdiagramm ähnliche Beziehung abgeleitet werden. Dabei wird die Parabel durch ein Polynom<sup>2</sup> ersetzt, dessen Parameter aus den Kennwerten Elastizitätsmodul, Druckfestigkeit und einer gewählten charakteristischen Dehnung  $\varepsilon_{c1} = -0,002$  bestimmt werden (siehe Abb. 3.4).

$$0 \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{c1} \quad \sigma_c = -f_c \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right)^n \right] \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{c1} > \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu} \quad \sigma_c = -f_c \quad (3.4)$$

In den Gl. 3.3 und 3.4 sind  $\varepsilon_c$  und  $\varepsilon_{c1}$  negativ einzusetzen. Durch die Wahl des

<sup>2</sup>Aus diesem Grund wird im folgenden diese Materialkennlinie mit Polynom-Rechteck-Beziehung bezeichnet.

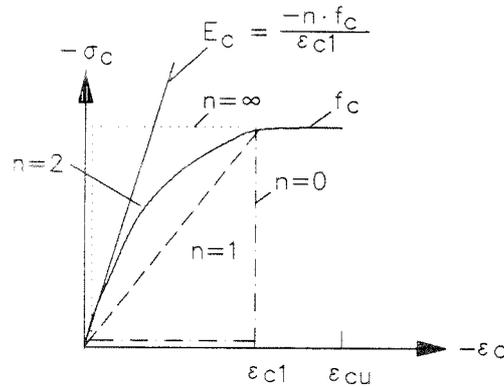


Abb. 3.4: Spannungsdehnungslinie des Betons auf Druck (Polynom-Rechteck)

Exponenten  $n$  kann die Form der Spannungsdehnungslinie sehr flexibel bestimmten Gegebenheiten angepaßt werden. Insbesondere kann über die Beziehung

$$n = -\frac{\varepsilon_{c1} \cdot E_c}{f_c} \quad (3.5)$$

der Exponent einem beliebigen Ursprungs-Elastizitätsmodul zugeordnet werden. Für  $n = 2$  entspricht die Gl. 3.3 der Parabel aus dem Parabel-Rechteckdiagramm nach DIN 1045 bzw. EC 2.

Die Verwendung einer rechteckigen Spannungsdehnungsbeziehung für Dehnungen  $\varepsilon_{c1} > \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu}$  kann mit hinreichender Genauigkeit angenommen werden (vgl. auch EC 2,[26]), sofern man die Dehnung  $\varepsilon_{cu}$  begrenzt. Die hier in Tab. 3.1 wiedergegebenen Werte für  $\varepsilon_{cu}$  entsprechen denjenigen nach EC 2. Ein Vergleich

Festigkeits- klasse	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
$f_{cm}$	20	24	28	33	38	43	48	53	58
$\varepsilon_{cu}$ [mm/m]	-3,6	-3,5	-3,4	-3,3	-3,2	-3,1	-3,0	-2,9	-2,8

Tab. 3.1: Nennwerte von  $\varepsilon_{cu}$  für Rechteckquerschnitte nach EC 2

dieser Materialkennlinie mit Berechnungen der Spannungsdehnungsbeziehung des EC 2 für nichtlineare Schnittgrößenermittlung und Verformungsberechnungen (Abschnitt 4.2.1.3.3(2) [26]) zeigte keine signifikanten Unterschiede. Die dort angegebene Beziehung lautet für  $0 \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu}$ :

$$\sigma_c = -f_c \cdot \left( \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right). \quad (3.6)$$

Hierin sind:

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \quad (\varepsilon_c \text{ und } \varepsilon_{c1} \text{ sind negativ anzusetzen})$$

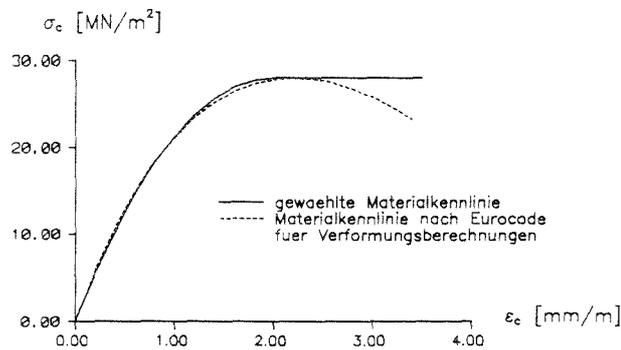
$$\varepsilon_{c1} = -0,0022 \quad (\text{Stauchung bei Erreichen des Höchstwertes der Betondruckspannung } f_c)$$

$$k = -1,1 \cdot E_{c,nom} \cdot \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c}$$

$$E_{c,nom} = \text{Mittelwert } E_{cm} \text{ oder Bemessungswert } E_{cd} \text{ des Elastizitätsmoduls}$$

$$\varepsilon_{cu} = \text{Bruchstauchung nach Tab. 3.1}$$

Einen Vergleich der beiden Materialkennlinien zeigt Abb. 3.5. Dort sind die beiden Kennlinien für  $E_c = 29000 \text{ MPa}$  und  $f_c = 28 \text{ MPa}$  gegenübergestellt. Der



**Abb. 3.5:** Gegenüberstellung der Spannungsdehnungslinien des Betons (C 20/25) auf Druck

wesentliche Grund für die Wahl der hier vorgestellten Spannungsdehnungslinie nach Gl. 3.3 ist das einfachere Konvergenzverhalten nach der Newton-Raphson-Methode. Durch einen abfallenden Ast in der Materialkennlinie kann es schon auf der Ebene von Querschnittsbetrachtungen zu einem *Softening-Verhalten* in der Momenten-Krümmungs-Beziehung kommen. Dies macht besondere numerische Betrachtungen erforderlich, deren Berechnungsaufwand im Vergleich zur Genauigkeitsteigerung im Rahmen dieser Arbeit nicht akzeptabel ist.

### 3.2.2 Beton auf Zug

Die Betonzugfestigkeit bzw. der Einfluß der Betonzugfestigkeit auf das Tragverhalten ist insbesondere bei den Vorgängen zur Ribbildung und damit für die Ermittlung der effektiven Steifigkeiten von erheblichem Einfluß. Damit hat dieser

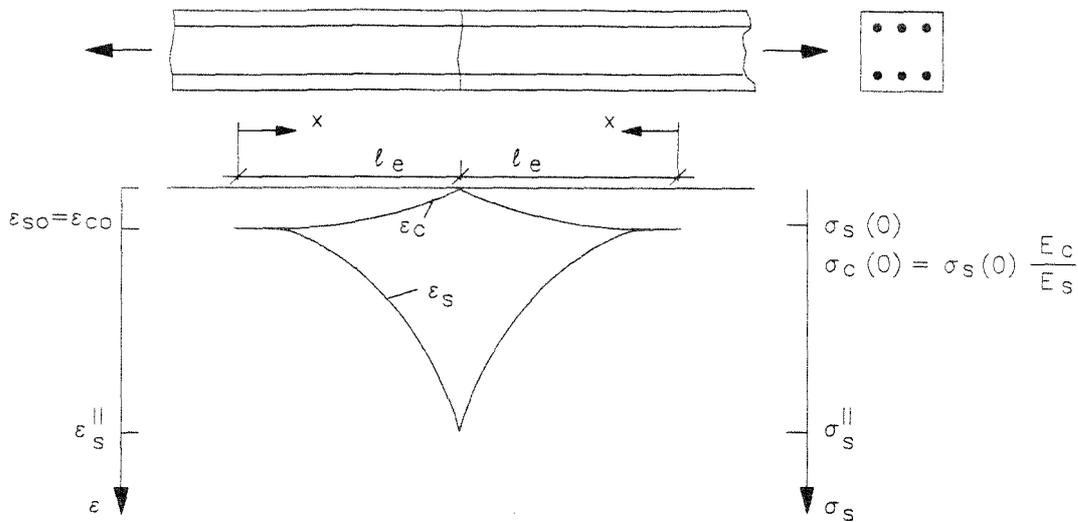
Parameter für die hier betrachteten eingepprägten Verformungen besondere Bedeutung. In den bekannten Bemessungsnormen wird die Zugfestigkeit für die Bruch-sicherheitsnachweise bzw. für die Bemessung im allgemeinen vernachlässigt. Im Rahmen dieser Arbeit ist für eine wirklichkeitsnahe Materialbeschreibung des Verbundbaustoffes Stahlbeton aus den oben genannten Gründen eine Berücksichtigung der Zugfestigkeit erforderlich.

Das Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchung ist bis zum Erreichen der (elastischen) Zugdehnung  $\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct}}{E_c}$  durch nahezu linearelastisches Verhalten charakterisiert. Bei Erreichen der zugehörigen Höchstlast kommt es zur Ausbildung einer eng begrenzten Rißprozeßzone. Nach Hillerborg [36] läßt sich das Last-Verformungsverhalten nach Überschreiten der Höchstzuglast durch eine Beziehung zwischen Betonspannung und Rißweite beschreiben und mit Hilfe der linearen Bruchmechanik behandeln [43][37]. Im Rahmen dieser Arbeit wird allerdings auf eine aufwendige bruchmechanische Bearbeitung verzichtet und mit einem linearen Verhalten des Betons bis zum Erreichen der Zugfestigkeit gerechnet. Das Verhalten des Verbundbaustoffes Stahlbeton im Zugbereich bei Überschreiten der Rißbeanspruchung wird durch einen phänomenologischen Ansatz erfaßt. Die entsprechenden Zusammenhänge werden in Abschnitt 3.4 erläutert. In Abschnitt 3.5.2 werden im Zusammenhang mit der statistischen Beschreibung der Betonzugfestigkeit die verschiedenen Einflußparameter beschrieben.

### 3.3 Verbund zwischen Bewehrung und Beton

Der Verbund zwischen Bewehrung und umgebenden Beton hat wesentlichen Einfluß auf das Tragverhalten von Stahlbetontragwerken. Die zur Beschreibung der Verbundeigenschaften erforderlichen Parameter bestimmen das Verhalten des bewehrten Betons bei der Rißbildung. Die Verbundwirkungen unterliegen ebenso wie die Zugfestigkeiten erheblichen Streuungen. Anhand des in Abb. 3.6 dargestellten Stahlbetonprismas unter zentrischer Zugbeanspruchung lassen sich die Vorgänge bei der Rißbildung beschreiben. Die Basis zur rechnerischen Beschreibung des Verbundes wurde von Rehm in [62] formuliert. Demnach entspricht die Änderung der Verschiebung  $u$  zwischen Stahl  $\varepsilon_s(x)$  und Beton  $\varepsilon_c(x)$  auf der Länge  $dx$  der Dehnungsdifferenz zwischen Stahl und Beton.

$$\frac{du(x)}{dx} = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x) \quad (3.7)$$



**Abb. 3.6:** Dehnungsverlauf und Einleitungslänge am Einzelriß

Die veränderliche Betonspannung innerhalb der Einleitungslänge<sup>3</sup>  $l_e$  beträgt (vgl. Abb. 3.6):

$$\sigma_c(x) = \sigma_c(0) - [\sigma_s(x) - \sigma_s(0)] \cdot \frac{A_s}{A_c}. \quad (3.8)$$

Unter der Voraussetzung des linearen Zusammenhanges zwischen Spannung und Dehnung (Hooke:  $\varepsilon = \sigma/E$ ) erhält man aus den Gl. 3.7 und 3.8

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma_s(x)}{E_s} - \frac{\sigma_c(0)}{E_c} + [\sigma_s(x) - \sigma_s(0)] \cdot \frac{A_s}{A_c \cdot E_c}. \quad (3.9)$$

Eine Änderung der Stahlspannung kann nur durch eingeleitete Verbundspannungen  $\tau_v$  bewirkt werden. Deshalb gilt mit  $U =$  Stabumfang:

$$d\sigma_s(x) = \tau_v(x) \cdot U \cdot dx \cdot \frac{1}{A_s} \quad (3.10)$$

bzw.

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = \tau_v(x) \cdot \frac{U}{A_s} = \tau_v(x) \cdot \frac{4}{d_s}. \quad (3.11)$$

Für die zweite Ableitung der Verschiebung  $u$  nach  $x$  ergibt sich aus Gl. 3.9

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{d\sigma_s(x)}{dx} \cdot \left( \frac{1}{E_s} + \frac{A_s}{A_c \cdot E_c} \right). \quad (3.12)$$

<sup>3</sup>Länge, die erforderlich ist, um die Stahlkraft im Riß über Verbundkraftübertragung vom Stahl in den Beton zu transferieren, so daß zwischen Stahl und Beton keine Relativverschiebungen mehr vorhanden sind.

Aus den Gl. 3.11 und 3.12 erhält man die Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \tau_v(x) \cdot \frac{4}{d_s \cdot E_s} \cdot (1 + \rho \cdot n) \quad (3.13)$$

mit  $\rho = \frac{A_s}{A_c}$  = geometrischer Bewehrungsgrad und  $n = \frac{E_s}{E_c}$  = Verhältnis der Elastizitätsmoduln. Bei bekanntem Verlauf von  $\tau_v(x)$  ist Gl. 3.13 lösbar.

Durch die Verbundwirkung erfolgt die Kraftübertragung zwischen Bewehrung und Beton. Ändert sich die Stahlspannung infolge einer Belastungsänderung, so müssen aus Gleichgewichtsgründen Verbundspannungen wirksam sein. Bei der Entstehung eines Risses muß die Bewehrung im Rißquerschnitt alle Kräfte aufnehmen. Dabei dehnt sich der Stahl im Riß wesentlich höher als der umgebende Beton. Aufgrund der Oberflächenbeschaffenheit des Bewehrungsstahls (Rippen) werden über Betondruckkegel Längszugspannungen und Ringzugspannungen in den Beton eingeleitet. Über eine „verschmierte“ Betrachtungsweise dieser Kraftübertragung kommt man zu einer Formulierung der Verbundspannungen.

Die wesentlichen Einflüsse auf die Verbundspannung sind:

- Bewehrung (bezogene Rippenfläche )
- Beton (Festigkeiten, Zuschläge, Verarbeitung)
- Lage der Bewehrungsstäbe beim Betonieren
- Betondeckung
- Querdruckbeanspruchung.

Die infolge der unterschiedlichen Dehnungen von Beton und Stahl auftretenden Relativverschiebungen (Schlupf) dienen als Eingangsgröße zur Beschreibung der Verbundspannungs–Verschiebungsbeziehungen. Diese können experimentell aus Untersuchungen an Ausziehkörpern bestimmt werden. Eine brauchbare mathematische Formulierung des Verbundgesetzes ist nach [48] [56] [63]

$$\tau_v(u) = f_{c,cube200} \cdot a \cdot u^N. \quad (3.14)$$

$f_{c,cube200}$  = charakteristische Würfeldruckfestigkeit des Betons nach 28 Tagen  
(20 cm Würfel)

a, N = Verbundparameter

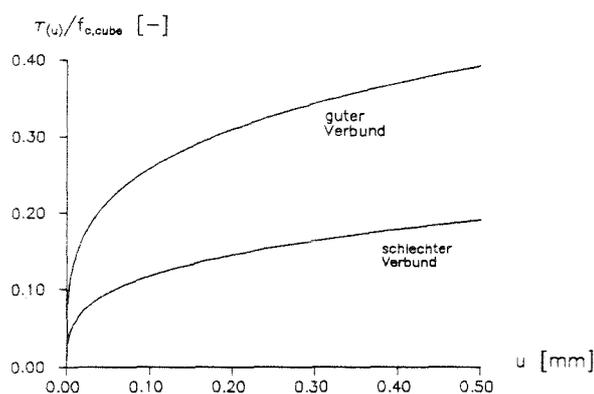
Nach verschiedenen Autoren [53] [48] [65] können diese Verbundparameter für gute Verbundverhältnisse und Kurzzeitbeanspruchungen mit

$$N = 0,26 [-] \quad \text{und} \quad a = 0,47 [\text{mm}^{-N}]$$

und für mäßige bis schlechte Verbundverhältnisse mit

$$N = 0,30 [-] \quad \text{und} \quad a = 0,235 [\text{mm}^{-N}]$$

angesetzt werden. Damit erhält man die in Abb. 3.7 dargestellten Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehungen. Zur Lösung der Differentialgleichung 3.13



**Abb. 3.7:** Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehung

ist aus dem Verbundgesetz  $\tau_v(u)$  der Verlauf der Verbundspannungen entlang der Stabachse  $\tau_v(x)$  abzuleiten. In Abb. 3.6 ist hierzu der Beton- und Stahldehnungsverlauf für den Erstrißzustand sowie in Abb. 3.8 der qualitative Zusammenhang zwischen Verbundgesetz, Verschiebung und Verbundspannungsverlauf dargestellt. Die Dehnungsverläufe erhält man aus:

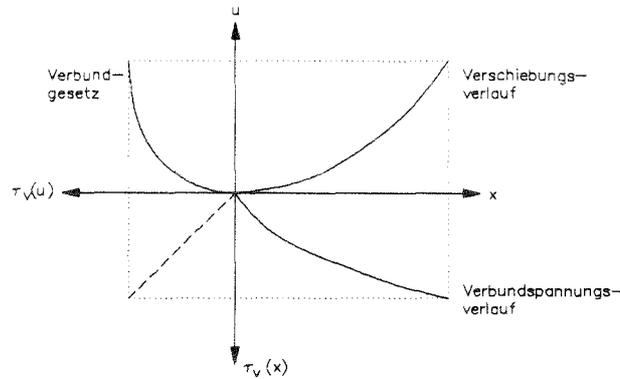
$$\varepsilon_s(x) = \varepsilon_{s0} + \frac{U}{E_s \cdot A_s} \cdot \int_0^x \tau_v(x) dx \quad (3.15)$$

$$\varepsilon_c(x) = \varepsilon_{c0} - \frac{U}{E_c \cdot A_c} \cdot \int_0^x \tau_v(x) dx. \quad (3.16)$$

Die Relativverschiebung  $u$  zwischen Stahl und Beton ergibt sich aus der Differenz der entsprechenden Dehnungen zu:

$$u(x) = \int_0^x [\varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x)] dx \quad (3.17)$$

$$= \frac{4}{ds} \cdot \left[ \frac{1 + \rho \cdot n}{E_s} \right] \cdot \int_0^x \int_0^x \tau_v(x) dx dx. \quad (3.18)$$



**Abb. 3.8:** Qualitativer Zusammenhang zwischen Verbundgesetz, Verschiebungsverlauf und Verbundspannungsverlauf

Mit dem Ansatz  $\tau_v(x) = k \cdot x^p$  für den Verbundspannungsverlauf mit den Freiwerten  $k$  und  $p$  und der Verbundspannungs-Verschiebungsbeziehung nach Gl. 3.14 erhält man folgende Verbundgleichung:

$$\left( \frac{k \cdot x^p}{f_{c,cube} \cdot A} \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{4}{d_s} \cdot \left[ \frac{1 + \rho \cdot n}{E_s} \right] \cdot \int_0^x \int_0^x k \cdot x^p dx dx \quad (3.19)$$

$$\left( \frac{k \cdot x^p}{f_{c,cube} \cdot A} \right)^{\frac{1}{N}} = \frac{4}{d_s} \cdot \left[ \frac{1 + \rho \cdot n}{E_s} \right] \cdot \frac{k \cdot x^{p+2}}{(p+1)(p+2)}. \quad (3.20)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$p = \frac{2N}{1-N} \quad (3.21)$$

$$k = \left[ \frac{(a \cdot f_{c,cube})^{1/N} \cdot 2(1+n\rho)(1-N)^2}{E_s d_s (N+1)} \right]^{\frac{N}{1-N}}. \quad (3.22)$$

Damit ist der Verbundspannungsverlauf  $\tau_v(x)$  bekannt. Aus Gl. 3.13 erhält man durch zweifache Integration den gesuchten Verschiebungsverlauf  $u(x)$  als allgemeine Lösung der Differentialgleichung, d.h. ohne Berücksichtigung von Randbedingungen.

$$u(x) = \tau_v(x) \cdot \frac{4}{d_s E_s} (1 + \rho n) \quad (3.23)$$

$$= \left[ \frac{2(1 + \rho n)}{E_s d_s} \cdot a \cdot f_{c,cube} \cdot \frac{(1-N)^2}{1+N} \right] \cdot x^{\left(\frac{2}{1-N}\right)} \quad (3.24)$$

Der Stahlspannungsverlauf ergibt sich aus Gl. 3.11 unter Berücksichtigung der

Randbedingung  $\sigma_s(x=0) = \sigma_{s0}$  zu:

$$\sigma_s(x) = \int_0^x \tau_v(x) \cdot \frac{4}{d_s} dx + \sigma_{s0} \quad (3.25)$$

$$= \frac{2}{1-N} \left[ \frac{2(1-N)^2}{d_s(N+1)} \cdot \left( \frac{1+n\rho}{E_s} \right)^N \cdot a \cdot f_{c,cube} \right]^{\frac{1}{1-N}} \cdot x^{\left( \frac{N+1}{1-N} \right)} + \sigma_{s0}. \quad (3.26)$$

Den Betonspannungsverlauf erhält man aus Gl. 3.7 mit  $\sigma_c(x=0) = \sigma_{c0}$  zu:

$$\sigma_c(x) = \sigma_{c0} - \frac{2\rho}{1-N} \left[ \frac{2(1-N)^2}{d_s(N+1)} \left( \frac{1+n\rho}{E_s} \right)^N \cdot a \cdot f_{c,cube} \right]^{\frac{1}{1-N}} \cdot x^{\frac{N+1}{1-N}}. \quad (3.27)$$

### 3.4 Modell zur Beschreibung des Tragverhaltens von bewehrtem Beton im Zugbereich

Unter der Mitwirkung des Betons auf Zug (tension stiffening) versteht man die Zugkraftübertragung des Bewehrungsstahles in den Beton zwischen Rissen. Über die Verbundkräfte zwischen der Stahloberfläche und dem umgebenden Beton werden Zugspannungen in den Beton übertragen, wodurch eine Verminderung der Dehnung in Richtung des zugbeanspruchten Stahls erfolgt. Dieses Verhalten führt zu einem *steiferen Tragwerk*.

Die Berechnungen im ungerissenen Zustand (Zugranddehnung kleiner als die elastische Zugdehnung) können in guter Näherung auf der Grundlage der Elastizitätstheorie durchgeführt werden. Dabei kann der Elastizitätsmodul des Betons aus der Druckbeanspruchung auch im Zugbereich verwendet werden. Die zugehörige Zugdehnung ermittelt man aus der Beziehung:

$$\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct}}{E_c}. \quad (3.28)$$

Nach Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons ist mit einer weiteren versteifenden Mitwirkung des Betons in der bewehrten Zugzone zu rechnen, sofern die erforderliche Mindestbewehrung vorhanden ist. Gegenüber der Annahme des reinen Zustands II unter Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit ist eine höhere Steifigkeit vorhanden. Untersuchungen zum Verbundverhalten von zentrisch gezogenen Stahlbetonstäben zeigten, daß die Mitwirkung des Betons bis zum Erreichen der Fließdehnung der Bewehrung anhält. Nach Überschreiten der Fließdehnung kann die Zugfestigkeit in erster Näherung vernachlässigt werden. Neuere Arbeiten [47]

[49] [53] berücksichtigen auch eine Mitwirkung jenseits der Stahlstreckgrenze, wobei dann der Verlauf der Stahlkennlinie wesentlichen Einfluß hat. Im Rahmen dieser Arbeit wird im Hinblick auf die Gebrauchstauglichkeit die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen allerdings nur bis zum Erreichen der Stahlstreckgrenze berücksichtigt.

Die Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug kann in Stabwerksprogrammen auf zwei Weisen erfolgen:

- a) Modifikation der Materialbeziehung des zugbeanspruchten Stahls [26] [32] [47] [54] [61].
- b) Modifikation der Materialbeziehung des zugbeanspruchten Betons [12] [34] [60] [71].

Beide Verfahren werden im folgenden erläutert.

### 3.4.1 Berücksichtigung der Mitwirkung über eine Stahlkennlinie

Bei dem bewehrungsbezogenen Ansatz wird die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen durch Formulierung einer mittleren Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  erreicht. Dieser Ansatz geht auf Vorschläge von Rao (1966) [61] zurück und wurde sowohl im MC 90 [54] als auch im EC 2 [26] aufgegriffen. Aus der Beziehung für die mittlere Stahldehnung eines (mehrfach) gerissenen Stahlbetonzugstabes

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_{s,II} - \Delta\varepsilon_s \quad (3.29)$$

wird durch einen hyperbolischen Ansatz die Stahldehnung im reinen Zustand II ( $\varepsilon_{s,II}$ ) durch das Abzugsglied  $\Delta\varepsilon_s$  reduziert. Nach EC 2 gilt für Rechteckquerschnitte

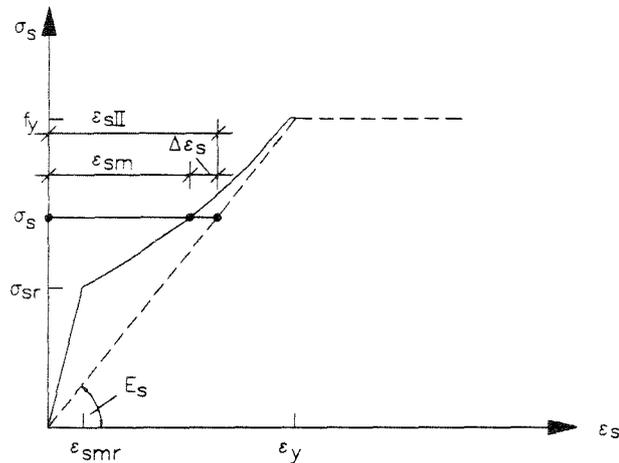
$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sm,r} + \frac{\sigma_s}{E_s} \cdot \left[ 1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right], \quad (3.30)$$

wobei

- $\varepsilon_{sm}$  = mittlere Stahldehnung unter Berücksichtigung des Betons auf Zug zwischen den Rissen
- $\varepsilon_{sm,r}$  = mittlere Stahldehnung im ungerissenen Querschnitt bei Erreichen der Rißlast
- $\sigma_{sr}$  = Stahlspannung im gerissenen Querschnitt (Zustand II) unter der Rißbeanspruchung

- $\sigma_s$  = Stahlspannung im gerissenen Querschnitt (Zustand II) für die betrachtete Belastung
- $\beta_1$  = Beiwert zur Berücksichtigung der Verbundeigenschaften der Bewehrung
- $\beta_1 = 1,0$  für Rippenstahl  
 $\beta_1 = 0,5$  für glatte Stähle
- $\beta_2$  = Beiwert zur Berücksichtigung der Art und Dauer der Belastung
- $\beta_2 = 1,0$  für Kurzzeitbelastung  
 $\beta_2 = 0,5$  für langfristig wirkende oder häufig wiederholte Belastung.

In Abb. 3.9 wird die Beziehung für  $\varepsilon_{sm}$  erläutert. Ein gegenüber Gl. 3.30 veränder-



**Abb. 3.9:** Ansatz zur Mitwirkung des Betons auf Zug über eine modifizierte Stahlkennlinie nach EC 2 bzw. MC 90

ter Vorschlag wird in [78] [27] verwendet. Die Ansätze gehen ebenfalls auf die Arbeit von Rao [61] zurück. Dabei wird die mittlere Stahldehnung aus der Beziehung

$$\varepsilon_{sm} = \left[ \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \cdot \varepsilon_{s,I} + \left[ 1 - \beta_1 \beta_2 \cdot \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \right] \cdot \varepsilon_{s,II} \quad (3.31)$$

abgeleitet. Hierbei ist

- $\varepsilon_{s,I}$  = Stahldehnung im Zustand I für die gegebene Belastung  
 $\varepsilon_{s,II}$  = Stahldehnung im Zustand II für die gegebene Belastung.

Die restlichen Parameter stimmen mit denjenigen nach Gl. 3.30 überein. Die beiden Ansätze unterscheiden sich in der Formulierung der Ausgangsdehnung des Stahls. Während in Gl. 3.30 von der Reißdehnung im Zustand II ausgegangen wird, wird in Gl. 3.31 diese Ausgangsdehnung mit dem hyperbolischen Ansatz aus der Stahldehnung im Zustand I ermittelt.

### 3.4.2 Berücksichtigung der Mitwirkung über eine Betonzugkennlinie

#### 3.4.2.1 Erweiterung der Polynom-Rechteckbeziehung für den Zugbereich

Eine Berücksichtigung der Verbundwirkungen über ein integrierbares Materialgesetz für den Zugbereich von Betonquerschnitten ist für die Anwendung von nichtlinearen FEM-Lösungen besonders attraktiv, weil eine geschlossene Spannungsdehnungsbeziehung für den Zug- und Druckbereich einer integralen Last-Verformungs-Beziehung entgegenkommt. Für die Anwendung der nichtlinearen Rechenverfahren ist es erforderlich, daß neben der wirklichkeitsnahen Beschreibung des physikalischen Werkstoffverhaltens von Beton und Stahl auch die Ableitung der Spannung nach der Dehnung  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$  hinreichend gut mit dem realen belastungsabhängigen tangentialen Elastizitätsmodul übereinstimmt. Auf der Basis der Ableitung der Spannungen nach den Dehnungen auf einem gegebenen Gleichgewichtszustand beruht der nichtlineare Iterationsalgorithmus. Der Vorschlag von Quast [60] mit einer modifizierten Parabel-Rechteck- bzw. Polygon-Rechteck-Beziehung für die Mitwirkung des Betons auf Zug erfüllen diese Anforderungen. Gegenüber den Ansätzen mit der modifizierten Spannungsdehnungsbeziehung für den Stahl nach Gl. 3.30 bietet dieser Ansatz die Vorteile einer integralen Werkstoffbeziehung.

In Abb. 3.10 ist die vorgeschlagene Form der Spannungsdehnungsbeziehung für den Beton auf Druck und Zug dargestellt. Die Parameter der Betondruckzone sind in Abschnitt 3.2.1 erläutert. Die Form der Spannungsdehnungslinie für den Betonzugbereich wird ebenso wie im Druckbereich durch die Wahl des Exponenten  $n = \frac{-E_c \cdot \varepsilon_{s1}}{f_c}$  einem vorgegebenen Ursprungsmodul angepaßt. Der charakteristische Wert zur Beschreibung des Verhaltens des Betons im Zugbereich ist die Zugdehnung  $\varepsilon_{ct}$ . Diese wird von Quast, verifiziert durch Vergleichsrechnungen zu Versuchen, als konstant mit  $\varepsilon_{ct} = 0,10 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  für alle Betonfestigkeitsklassen angegeben. Bis zum Erreichen der Zugdehnung im am stärksten gezogenen Quer-

schnittsrand wird der Spannungsverlauf in der Zugzone über die Beziehung:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \quad \sigma(\varepsilon) = f_{ct,cal} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ct}} \right)^n \right] \quad (3.32)$$

beschrieben. Für Dehnungen  $\varepsilon > \varepsilon_{ct}$  gilt:

$$\varepsilon > \varepsilon_{ct} \quad \sigma(\varepsilon) = f_{ct,cal} \quad (3.33)$$

Dabei ist

$f_{ct,cal}$	rechnerische Zugfestigkeit
$\varepsilon_{ct}$	elastische Zugdehnung
$n$	$n = -\frac{E_c \cdot \varepsilon_{ct}}{f_c}$ (vgl. Abschnitt 3.2.1)
$\varepsilon$	aktuelle Betonzugdehnung.

Der Wert der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  wird aus der Beziehung

$$f_{ct} = -\frac{\varepsilon_{ct}}{\varepsilon_{c1}} \cdot f_c \quad (3.34)$$

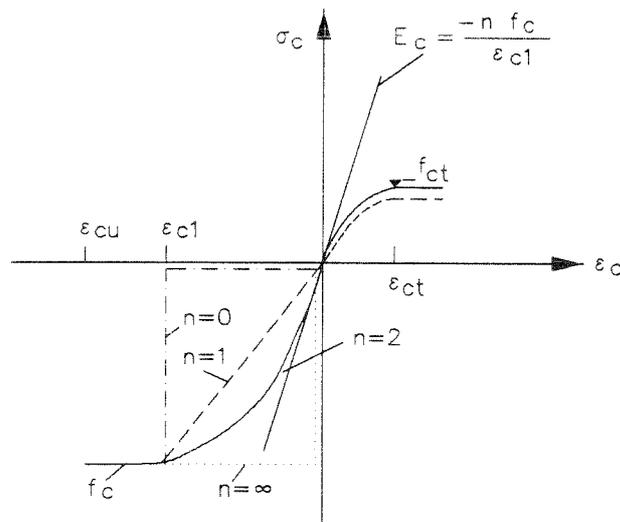
abgeleitet (im allgemeinen ist  $\varepsilon_{c1} = -0,002$ ). Aus dem Wert  $f_{ct}$  wird die rechnerisch zu berücksichtigende Zugfestigkeit  $f_{ct,cal}$  abgeleitet. In Abhängigkeit der Stahldehnung  $\varepsilon_s$  der Zugbewehrung gilt:

$$f_{ct,cal} = f_{ct} \quad \text{für} \quad 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{ct} \quad (3.35)$$

Nach Überschreiten der Zugdehnung  $\varepsilon_{ct}$  in Höhe der Stahllage wird die rechnerische Zugfestigkeit  $f_{ct,cal}$  zwischen  $\varepsilon_{ct}$  und  $\varepsilon_y$  linear mit folgendem Ansatz abgemindert:

$$f_{ct,cal} = f_{ct} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_s}{\varepsilon_s - \varepsilon_{ct}} \right] \quad \text{für} \quad \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y. \quad (3.36)$$

Bei Erreichen der Streckgrenze des Stahls ( $\varepsilon_s = \varepsilon_y$ ) ist damit keine weitere Mitwirkung vorhanden. Durch diese Modifikation der rechnerischen Zugfestigkeit kann die mit zunehmender Dehnung der Zugbewehrung verminderte Verbundwirkung zwischen Bewehrung und Beton berücksichtigt werden. Als nachteilig bei dieser Materialbeschreibung erweist sich der rein phänomenologische Ansatz. Die wesentlichen Einflußgrößen auf die Mitwirkung des Betons auf Zug, nämlich Bewehrungsgrad, Zugfestigkeit und Verbund werden hier nicht exakt erfaßt. Die Bewehrung geht allenfalls über die Abminderung der Zugfestigkeit mit wachsender Stahldehnung ein, die Zugfestigkeit selber wird hier pauschal über eine konstante Zugdehnung  $\varepsilon_{ct}$  berücksichtigt. Die tatsächlichen Werte der Zugfestigkeit werden damit nicht erfaßt. Die Gl. 3.32 ist mit einem aus dem Elastizitätsmodul  $E_c$  abgeleiteten Exponenten  $n$ , mit vorgegebener elastischer Zugdehnung



**Abb. 3.10:** Ansatz zur Mitwirkung des Betons auf Zug über eine Betonzugkennlinie nach Quast

$\epsilon_{ct} = 0,10 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und bekannter Druckfestigkeit  $f_c$  überbestimmt, da der ebenfalls bekannte Wert der Zugfestigkeit (z.B.  $f_{ct} = 0,3 \cdot f_c^{2/3}$ ) im allgemeinen nicht mit demjenigen nach Gl. 3.34 übereinstimmt. Trotzdem lassen sich mit diesem Ansatz, wie Quast in [60] beschreibt und eigene Berechnungen bestätigen, gute Übereinstimmungen mit Versuchsergebnissen erzielen.

### 3.4.2.2 Spannungsdehnungsbeziehungen für Beton auf Zug unter Berücksichtigung von Rißbildung, Bewehrung und Betonzugfestigkeit

In Anlehnung an die Arbeit von Schwennicke [71] und Grzeschkowitz/Quast [34] soll im folgenden eine Spannungsdehnungsbeziehung für die Betonzugzone abgeleitet werden. Die Form der angenommenen Spannungsdehnungsbeziehung ist der Abb. 3.11 zu entnehmen. Ähnliche Beziehungen für die Betonzugzone wurden auch von Gilbert/Warner [29] untersucht, wobei dünne Stahlbetonplatten mittels eines Schichtenmodells betrachtet wurden. Zur Berechnung der erforderlichen Kennwerte wird auf das in Abschnitt 3.3 beschriebene Verbundgesetz nach Gl. 3.14 bezug genommen. Die entsprechenden Parameter zur Beschreibung der Kennlinie sind mittels der Kenntnis von

- Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$
- Verbundspannungsverlauf  $\tau_v$

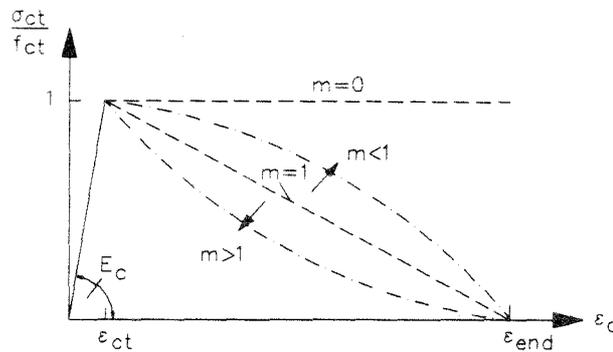


Abb. 3.11: Ansatz zur Erfassung der Mitwirkung des Betons auf Zug mit einer Spannungsdehnungslinie der Betonzugzone

- Ursprungsmodul des Betons  $E_c$
- E-Modul des Stahls  $E_s$
- Bewehrungsgrad der (effektiven) Betonzugzone  $\rho_z = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$
- mittlerer Stabdurchmesser  $d_s$  der Bewehrung
- Dehnung, an der keine weitere Mitwirkung des Betons auf Zug wirksam ist,  $\epsilon_{end}$  (z.B. Streckgrenze)

ableitbar. Schwennicke [71] hat gezeigt, daß mit hinreichender Genauigkeit einem Stahlbetonprisma mit normalverteilter Zugfestigkeit dem Erstriß die 5%-Fraktile der Zugfestigkeit zugeordnet werden kann. Mit der weiteren Voraussetzung, daß sich genau 20 Risse im Zustand der abgeschlossenen Rißbildung im betrachteten Prisma einstellen werden, wird dem letzten entstehenden Riß die 95%-Fraktile der Zugfestigkeit zugeordnet. Dementsprechend kann der erste linear steigende Ast der in Abb. 3.11 dargestellten Kennlinie über das lineare Verhalten der Betonzugzone ( $\sigma_c = E_c \cdot \epsilon$ ) bis zum Erreichen des ersten Risses, dem hier der 5%-Fraktilewert der Zugfestigkeit  $f_{ct;0,05}$  zugeordnet wird, beschrieben werden. Mit der Berechnung des Fraktilewertes der Zugfestigkeit aus dem Mittelwert  $f_{ct;0,05} = f_{ct} \cdot [1 + k \cdot V]$  (vgl. Gl. 2.29) und dem Ursprungsmodul  $E_c$  sind für den linearen Ast der Kennlinie alle Parameter bekannt.

$$\sigma(\epsilon) = E_c \cdot \epsilon \quad 0 < \epsilon \leq \epsilon_{ct} = \frac{f_{ct;0,05}}{E_c} \quad (3.37)$$

Der abfallende Ast der Kennlinie kann mit einem hyperbolischen Ansatz beschrieben werden. Geht man davon aus, daß mit Erreichen der Streckgrenze des Stahls

keine weitere Mitwirkung berücksichtigt werden soll ( $\varepsilon_{end} = \varepsilon_y$ ), so sind mit  $\sigma_{ct}(\varepsilon_{ct}) = f_{ct;0,05}$  und  $\sigma_{ct}(\varepsilon_y) = 0$  schon zwei Punkte dieser Beziehung bekannt. Für den Ansatz

$$\sigma_{ct}(\varepsilon) = f_{ct;0,05} \left[ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right]^m \quad \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad (3.38)$$

fehlt eine weitere Spannungsordinate mit zugehöriger Dehnung zur Bestimmung des Exponenten  $m$ . Hierfür wird auf elementare Gleichungen und Gleichgewichtsbedingungen an einem Stahlbetonprisma unter Berücksichtigung der Verbundspannung-Verschiebungsbeziehung nach Gl. 3.14 zurückgegriffen. Die zum Erstriß gehörende Stahldehnung beträgt entsprechend den Annahmen über die Zuordnung von Zugfestigkeit und Rißbildung:

$$\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct;0,05}}{E_c}.$$

Die zugehörige Stahlzugspannung  $\sigma_s$  beträgt

$$\sigma_{s;0,05} = \varepsilon_{ct} \cdot E_s.$$

Mit dem auf die effektive Biegezugzone  $A_{c,eff}$  bezogenen Bewehrungsverhältnis  $\rho_z = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$  beträgt die Biegezugkraft  $N_{Ri\beta,1}$  für den Erstriß bei ebenem Spannungsverlauf im Querschnitt

$$\begin{aligned} N_{Ri\beta,1} &= A_{c,eff} \cdot f_{ct;0,05} + \sigma_{s;0,05} \cdot A_s \\ N_{Ri\beta,1} &= A_{c,eff} (f_{ct;0,05} + \sigma_{s;0,05} \cdot \rho_z). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Hierbei wird die Dehnungsdifferenz zwischen der Stahllage und dem Betonquerschnittszugrand vernachlässigt. Die zur Bildung des letzten Risses gehörende Stahlspannung ergibt sich aus der getroffenen Annahme bezüglich der zugehörigen Betonspannung  $f_{ct;0,95}$  zu

$$\sigma_{s;Ri\beta,e} = \frac{f_{ct;0,95}}{A_s} \cdot A_{c,eff} + \frac{f_{ct;0,95}}{E_c} \cdot E_s. \quad (3.40)$$

Die direkt vor der Rißbildung auftretende Stahlkraft beträgt dann

$$\sigma_{s;0,95} = \frac{f_{ct;0,95}}{E_c} \cdot E_s. \quad (3.41)$$

Hierbei wird immer noch lineares Verhalten von Beton und Stahl vorausgesetzt. Zur Bestimmung des mittleren Rißabstandes bei abgeschlossener Rißbildung wird

auf den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Verlauf der Stahlspannung nach Gl. 3.26 zurückgegriffen.

$$\sigma_s(x) = \sigma_{s;0,95} + \frac{2}{1-N} \cdot x^{\frac{N+1}{1-N}} \cdot \left[ \frac{2(1-N)^2}{d_s(N+1)} \cdot \left( \frac{1+n\rho_z}{E_s} \right)^N \cdot a \cdot f_{c,cube} \right]^{\frac{1}{1-N}} \quad (3.42)$$

Nachdem sich der erste Riß gebildet hat, können so lange neue Risse entstehen, bis keine Bereiche mehr mit starrem Verbund vorliegen. Der kleinste Rißabstand entspricht dann näherungsweise der einfachen Einleitungslänge  $\ell_e$  (vgl. Abb. 3.12), der größte mögliche Rißabstand entspricht der doppelten Einleitungslänge. Die

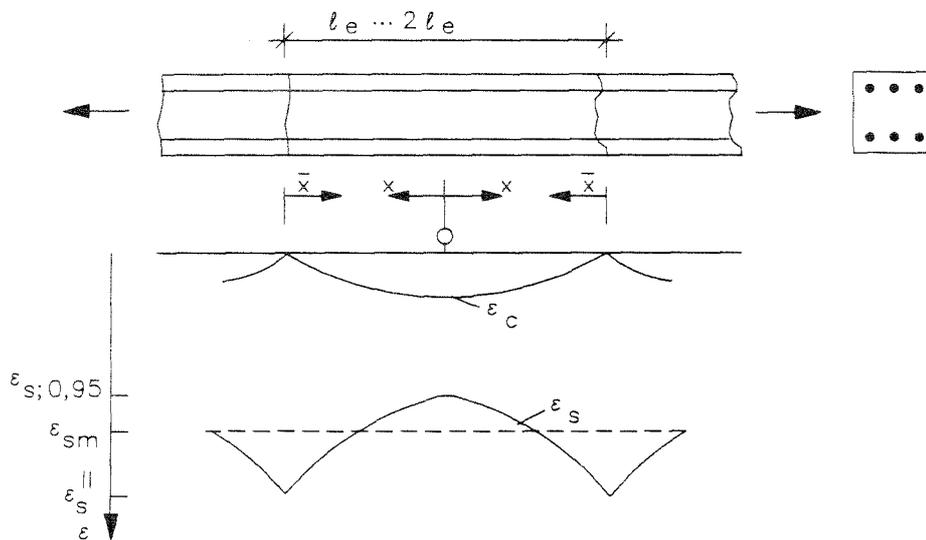


Abb. 3.12: Abgeschlossenes Rißbild und Dehnungsverlauf

Einleitungslänge  $\ell_e$  erhält man aus Gl. 3.42, wenn  $\sigma_s(x = \ell_e) = \sigma_{s;Ri\beta,e}$  gesetzt und nach  $\ell_e$  aufgelöst wird.

$$\ell_e = \frac{2}{1-N} \left[ \left( \frac{f_{ct;0,95}}{\rho_z} \right)^{(1-N)} \cdot \frac{d_s(N+1)}{8 \cdot a \cdot f_{c,cube}} \cdot \left( \frac{E_s}{1+n\rho_z} \right)^N \right]^{\frac{1}{N+1}} \quad (3.43)$$

Zur Bestimmung der mittleren Stahldehnung wird zunächst ein Ansatz von Leonhardt [50] für die verbundfreie Störlänge  $V_0$  im Rißquerschnitt aufgegriffen:

$$V_0 = \frac{\sigma_{s;Ri\beta,e} - \sigma_{s;0,95}}{f_y} \cdot d_s \quad (3.44)$$

Demnach ist die Störlänge  $V_0$  im wesentlichen abhängig vom Spannungssprung im Stahl bei der Rißbildung. Die zugehörige Stahldehnung auf dieser Länge beträgt

$$\epsilon_{V_0} = \frac{\sigma_{s;Ri\beta,e}}{E_s}$$

Die mittlere Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  erhält man unter der Annahme eines abgeschlossenen Rißbildes (Rißabstand entspricht der  $\alpha$ -fachen Einleitungslänge mit  $1 \leq \alpha \leq 2$ ) aus

$$\varepsilon_{sm} = \frac{2}{E_s \alpha \ell_e} \left[ \int_{\bar{x}=V_0/2}^{\bar{x}=\alpha \ell_e/2} \sigma_s(\bar{x}) d\bar{x} + \sigma_{s;Ri\beta,e} \cdot \frac{V_0}{2} \right] \quad (3.45)$$

mit  $\bar{x} = \frac{\alpha \ell_e}{2} - x$  und  $\sigma_s(\bar{x} = 0) = \sigma_{s;Ri\beta,e}$  zu

$$\varepsilon_{sm} = \frac{2}{E_s \alpha \ell_e} \left[ \left( \sigma_{s;Ri\beta,e} - \frac{2 \cdot \mathcal{B}}{1-N} \left( \frac{\alpha \ell_e}{2} \right)^{\frac{N+1}{1-N}} \right) \cdot \left( \frac{\alpha \ell_e - V_0}{2} \right) + \mathcal{B} \left( \frac{\alpha \ell_e - V_0}{2} \right)^{\frac{2}{1-N}} + \sigma_{s;Ri\beta,e} \cdot \frac{V_0}{2} \right] \quad (3.46)$$

$$\text{mit } \mathcal{B} = \left[ \frac{2(1-N)^2}{d_s(N+1)} \cdot \left( \frac{1+n\rho_z}{E_s} \right)^N \cdot a \cdot f_{c,cube} \right]^{\frac{1}{1-N}}.$$

Aus der mittleren Stahldehnung erhält man die vom Beton zu tragende Zugkraft zu

$$N_{c;Ri\beta,e} = (\sigma_{s;Ri\beta,e} - E_s \cdot \varepsilon_{sm}) \cdot A_s \quad (3.47)$$

bzw. die mittlere Betonzugspannung zu

$$\sigma_{c;Ri\beta,e} = \frac{N_{c;Ri\beta,e}}{A_{c,eff}}. \quad (3.48)$$

Mit der Kenntnis dieser Spannung und der zugehörigen Dehnung läßt sich der bislang freie Parameter  $m$  des Ansatzes für die Kennlinie des Betons auf Zug nach Gl. 3.38 ermitteln.

$$\sigma_{c;Ri\beta,e} = f_{ct;0,05} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{sm}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right]^m \quad (3.49)$$

$$m = \frac{\log \left[ \frac{\sigma_{c;Ri\beta,e}}{f_{ct;0,05}} \right]}{\log \left[ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{sm}}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right]} \quad (3.50)$$

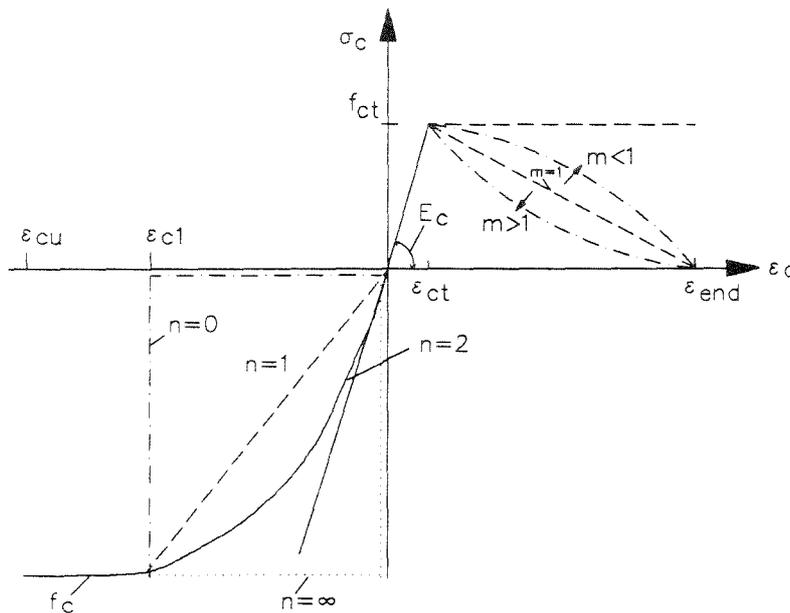
Als Ergebnis erhält man folgende Spannungsdehnungslinie:

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{ct} \quad \sigma(\varepsilon) = E_c \cdot \varepsilon \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_{ct} < \varepsilon < \varepsilon_y \quad \sigma(\varepsilon) = f_{ct;0,05} \cdot \left[ \frac{\varepsilon_y - \varepsilon}{\varepsilon_y - \varepsilon_{ct}} \right]^m. \quad (3.52)$$

Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die erforderliche Mindestbewehrung (vgl. Abschnitt 5.1.1) vorhanden ist. Andernfalls kann der Exponent  $m$  nicht auf diese Weise ermittelt werden, da bei Erreichen des ersten Risses im Beton die Stahlstreckgrenze direkt überschritten wird.

Die gesamte Betonkennlinie für den Zug- und Druckbereich ist in Abb. 3.13 dargestellt. Der Bereich der Zugspannungen ist in der Darstellung etwas überhöht abgebildet. Für die praktische Anwendung dieser Kennlinie ist eine Definition der

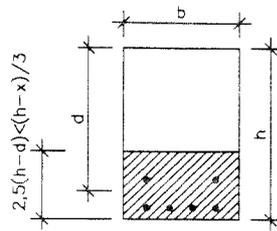


**Abb. 3.13:** Betonkennlinie im Zug- und Druckbereich unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug

effektiven Zugzone  $A_{c,eff}$  insbesondere für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Stabtragwerke erforderlich. In Übereinstimmung mit dem MC 90 [54] und dem EC 2 [26] kann diese mit der in Abb. 3.14 grafisch dargestellten Beziehung ermittelt werden. Die Flächenbestimmung

$$A_{c,eff} = 2,5 \cdot (h - d) \cdot b < \frac{h - x}{3} \cdot b \quad (3.53)$$

beruht auf einer empirischen Formulierung der durch Verbundkräfte eingeleiteten Zugspannungsverteilung am Ende der Einleitungslänge in einem Stahlbetonquerschnitt.



**Abb. 3.14:** Effektive Zugzone  $A_{c,eff}$  eines Rechteckquerschnittes

Eine Auswertung der Beziehungen für den Exponent  $m$  der Materialkennlinie für die Betonzugzone (Gl. 3.50) und für die mittlere Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  (Gl. 3.46) zeigt die Abb. 3.15. Die der Ableitung zugrundeliegenden Materialkennwerte entsprechen einem Beton der Klasse C 20/25 mit  $f_{cm} = 28$  MPa,  $E_c = 29000$  MPa,  $f_{ctm} = 2,8$  MPa, sowie einem Betonstahl BSt 500 mit  $E_s = 200000$  MPa,  $f_{ym} = 560$  MPa und  $d_s = 12$  mm. Für die Ermittlung der Fraktilwerte der Zugfestigkeiten aus dem Mittelwert wurde nach [71] und [34] eine Normalverteilung mit einem Variationskoeffizienten von  $V = 10\%$  zugrundegelegt.

$$\begin{aligned} f_{ct;0,05} &= (1 - 1,645 \cdot 0,1) \cdot f_{ct,m} = 0,835 \cdot f_{ct,m} \\ f_{ct;0,95} &= (1 + 1,645 \cdot 0,1) \cdot f_{ct,m} = 1,165 \cdot f_{ct,m} \end{aligned}$$

Hierbei wird berücksichtigt, daß die Betonzugfestigkeiten innerhalb eines Bauteils nicht so stark schwanken, wie beispielsweise die Zugfestigkeiten verschiedener Herstellungschargen oder zwischen unterschiedlichen Bauwerken. Die Bestimmung des Exponenten  $m$  kann man nach der Art der Beanspruchung unterscheiden. In der Anfangsphase der Ribbildung sowie bei reiner Zwangsbeanspruchung lassen sich oft einzelne, etwas weiter auseinanderliegende Risse beobachten, wohingegen bei reiner Lastbeanspruchung oder auch einer gemischten Beanspruchung die Erstribbildung wegen dem relativ kleinen Spannungsbereich zwischen dem ersten und letzten Rib kontinuierlich in die abgeschlossene Ribbildung übergeht. So kann als Näherung für reine Zwangsbeanspruchungen von  $\alpha = 1,75 - 2$  ausgegangen werden, ansonsten wird der Ribabstand zwischen  $1,0 \cdot \ell_e$  und  $1,5 \cdot \ell_e$  angenommen.

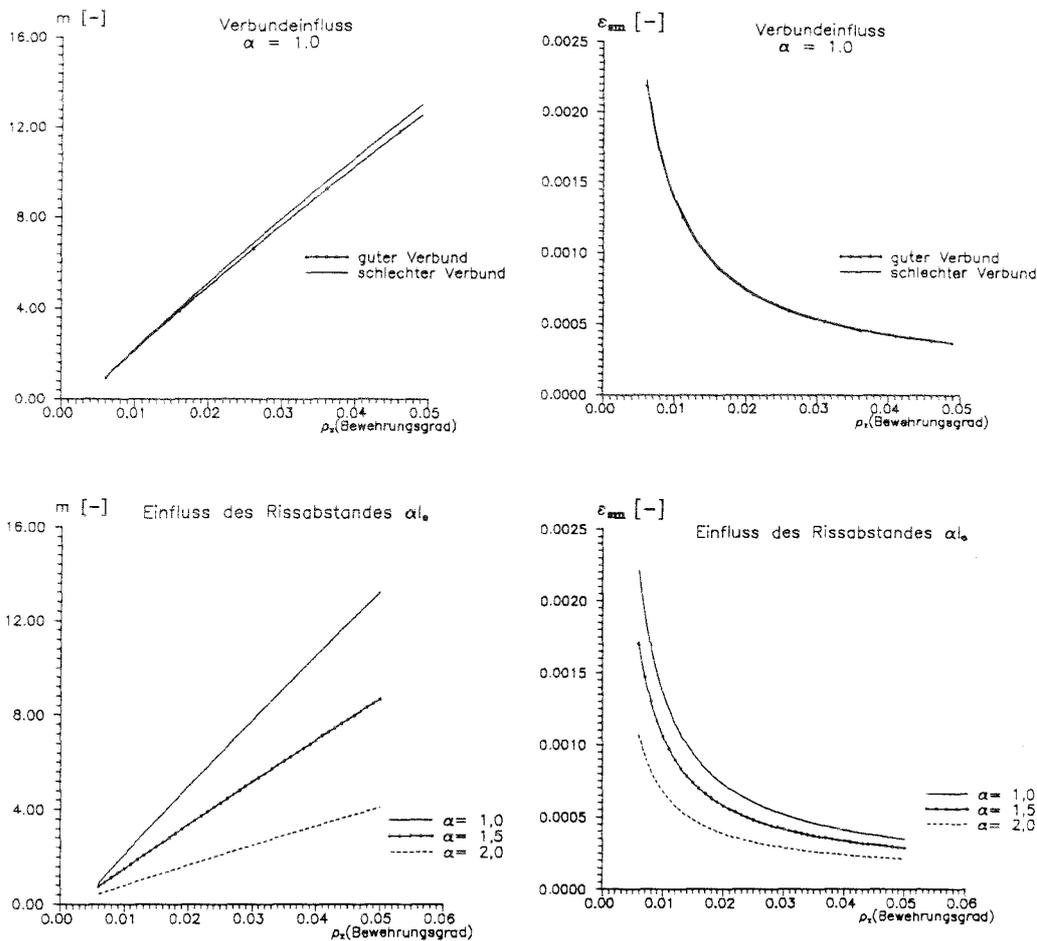


Abb. 3.15: Exponent  $m$  sowie  $\epsilon_{sm}$  in Abhängigkeit des Bewehrungsgrades  $\rho_z$  (Rissabstand =  $\alpha \cdot l_e$ )

### 3.5 Statistische Materialkennwerte

Für allgemeine sicherheitstheoretische Untersuchungen ist es einerseits wichtig, zuverlässige statistische Kennwerte für die Berechnungen zu nutzen. Andererseits ist aber auch eine übertriebene Genauigkeit bei der Recherche nach den exakten Kenndaten unnötig, da es ja darum geht, vergleichbare Berechnungsergebnisse im Sinne der operativen Versagenswahrscheinlichkeit zu bestimmen. Will man detailliertere Berechnungsergebnisse, so ist es notwendig, Einzelfälle zu behandeln. Will man aber allgemeine Sicherheitsaussagen zur Tragwerksanalyse und Bemessung treffen, so ist es sinnvoll, einen streng definierten Satz von Basisvariablen zusammenzustellen, auf den im Laufe der Berechnungen immer wieder zurückgegriffen werden kann. In diesem Sinne werden im folgenden die für die si-

cherheitstheoretische Tragwerksanalyse erforderlichen Kennwerte definiert. Dies geschieht auf der Basis einer Literaturlauswertung und schließt in Ermangelung eines genaueren Forschungs- und Wissensstandes Schätzungen insbesondere hinsichtlich der Verteilungsfunktionen mit ein. Auch das JCSS (Joint Committee on Structural Safety) hat sich im Rahmen der angestrebten sicherheitstheoretischen Vergleichsrechnungen der Eurocodes bezüglich der zu berücksichtigenden statistischen Kennwerte und Variablen abgestimmt [44]. Die hier gewählten Variablen und Verteilungstypen stimmen weitgehend mit diesen Vorschlägen überein. In Abschnitt 3.7 wird eine tabellarische Zusammenfassung der statistischen Variablen und Verteilungen gegeben.

### 3.5.1 Betondruckfestigkeit

Entsprechend den im EC 2 [26] bzw. in ENV 206 [24] festgelegten Festigkeitsklassen des Betons sind für probabilistische Berechnungen zugehörige statistische Kennwerte anzugeben. Aus verschiedenen Literaturstellen (z.B. [16][35][37][58][79]) läßt sich entnehmen, daß die Standardabweichung der Betondruckfestigkeit relativ unabhängig von der Festigkeitsklasse angegeben werden kann. Die Werte schwanken zwischen 4,0 und 6,1 MPa. Aus diesem Grund wird für die folgenden Berechnungen eine mittlere Standardabweichung von 5 MPa angenommen. Als Verteilungsfunktion wird eine logarithmische Normalverteilung für alle Betonfestigkeiten zugrundegelegt. Der wesentliche Vorteil liegt in dem ausschließlich positiven Wertebereich dieser Funktion.

Die Mittelwerte der Betondruckfestigkeiten werden im EC 2 [26] in Bezug auf die Würfeldruckfestigkeit bzw. Zylinderdruckfestigkeit angegeben, wobei keine weiteren Einflüsse der tatsächlichen Bauteilfestigkeit (wie etwa beim Bemessungswert der Festigkeit durch den Reduktionsfaktor  $\alpha = 0,85$  zur Berücksichtigung von Langzeitwirkungen auf die Druckfestigkeit ( $\alpha \cdot f_{cd}$ ) sowie anderen ungünstigen Wirkungen, die von der Art der Belastung herrühren) berücksichtigt werden. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß aufgrund der Erfahrungen aus Baustoffprüfungen der 28-Tage-Wert der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit  $f_{ck}$  als Basiswert zur Bestimmung des Mittelwertes der Bauwerksfestigkeit herangezogen werden kann [35][26][54][79]. Demnach berechnet sich der Mittelwert einer Betonfestigkeitsklasse aus dem bekannten charakteristischen Wert über die Beziehung:  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa [26]. Das JCSS [44] schlägt hier als Mittelwert  $f_{cm} = f_{ck} + 10$  MPa vor. Hier wird auf den Vorschlag EC 2 zurückgegriffen. Die statistischen Kennwerte der Betondruckfestigkeiten sind in Tab. 3.2 angegeben.

Festigkeits- klasse	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
$f_{ck,cycl}$	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$f_{ck,cube}$	15	20	25	30	37	45	50	55	60
$f_{cd}$	8	10,66	13,33	16,66	20,0	23,33	26,66	30,0	33,33
$f_{cm}$	20	24	28	33	38	43	48	53	58
Verteilungs- funktion	LN								
Standardab- weichung	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Variations- koeff. [%]	25	20,8	17,9	15,2	13,1	11,6	10,4	9,4	8,6

Tab. 3.2: Kennwerte der Betondruckfestigkeit in [MPa]

### 3.5.2 Betonzugfestigkeit

Die Zugfestigkeit des Betons hängt im wesentlichen von denselben Parametern ab, die auch für die Betondruckfestigkeit maßgebend sind. Dies sind die Eigenschaften des Zementsteins und die Haftung zwischen Zementstein und Betonzuschlag. Zugfestigkeit und Druckfestigkeit sind zueinander allerdings nicht proportional. Die Betonzugfestigkeit ist im EC 2 [26] als axiale (zentrische) Zugfestigkeit  $f_{ct,ax}$  definiert. Im allgemeinen ist davon auszugehen, daß die Zugfestigkeit größere Streuungen als die Druckfestigkeit des Betons besitzt. Aus diesem Grunde sind z.B. auch im EC 2 [26] Mittelwerte sowie obere und untere Grenzwerte der Zugfestigkeit angegeben. Dort wird für allgemeine Fälle die Berechnung der zentrischen Zugfestigkeiten (Ober-, Unter- und Mittelwert) aus dem charakteristischen Wert der Betondruckfestigkeit durch folgende Gleichungen empfohlen.

$$f_{ctm} = c \cdot (f_{ck})^{2/3}; \quad c = 0,30 \quad (3.54)$$

$$f_{ctk;0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (3.55)$$

$$f_{ctk;0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (3.56)$$

In den Faktoren 0,7 und 1,3 sind hierbei nicht nur die Streuungen der Zugfestigkeit innerhalb eines Bauteils sondern insbesondere auch diejenigen zwischen verschiedenen Bauteilen und Bauwerken erfaßt. Die Streuungen der Zugfestigkeiten innerhalb eines Betonbauteils sind im allgemeinen kleiner. Für den Fall, daß die Zugfestigkeit aus dem Mittelwert der Betondruckfestigkeit berechnet werden soll, gilt näherungsweise mit  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa die Beziehung:

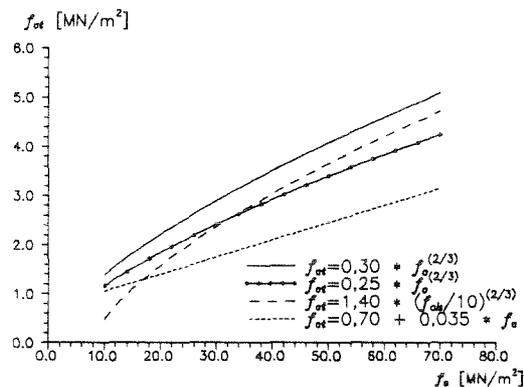
$$f_{ctm} = 0,25 \cdot (f_{cm})^{2/3} \text{ MPa.} \quad (3.57)$$

Ähnliche Beziehungen zur Ermittlung der Zugfestigkeit werden auch in [18] [26] [54] [79] verwendet. Das JCSS [44] gibt zur statistischen Beschreibung der Be-

tonzugfestigkeit aus der Druckfestigkeit die Beziehung

$$f_{ct} = 0,70 + 0,035 \cdot f_c \text{ MPa} \quad (3.58)$$

an. Dies führt zu insgesamt kleineren Werten, wie die vergleichende Darstellung verschiedener Ansätze in Abb. 3.16 zeigt. Neben den oben genannten Beziehun-



**Abb. 3.16:** Vergleich der Ansätze zur Bestimmung der Betonzugfestigkeit aus der Betondruckfestigkeit

gen zwischen Druck- und Zugfestigkeit ist in der Abb. 3.16 noch ein Vorschlag des MC 90 [54] mit  $f_{ctm} = 1,40 \cdot \left(\frac{f_{ck}}{10}\right)^{2/3}$  MPa ausgewertet. In der Darstellung ist die charakteristische Festigkeit mit der Beziehung  $f_{ck} = f_c - 8$  ermittelt worden.

Für überwiegend biegebeanspruchte Bauteile ist versuchstechnisch die Biegezugfestigkeit  $f_{ct,fl}$  der maßgebende Wert. Diese ist als die maximal aufnehmbare Spannung am Zugrand eines biegebeanspruchten Querschnittsrandes definiert, die sich unter Annahme linearelastischen Verhaltens des Betons nach der Biegetheorie ergibt. Nach [37] liegt sie für alle Betonfestigkeitsklassen zwischen 3 und 8 MPa. Von besonderem Einfluß auf die Biegezugfestigkeit ist die Höhe des belasteten Balkens bzw. Querschnitts [43]. Mit steigender Querschnittshöhe nimmt die Biegezugfestigkeit ab und nähert sich der zentrischen oder axialen Zugfestigkeit. Im EC 2 wird von einem konstanten Verhältnis  $f_{ct,fl}/f_{ct,ax} = 2,0$  ausgegangen. Nach Model Code 90 [54] läßt sich der Einfluß der Querschnittshöhe für die Ermittlung der Betonzugfestigkeit durch folgende Formel erfassen:

$$\frac{f_{ct,fl}}{f_{ct,ax}} = \frac{1 + 1,5 \left(\frac{h_b}{h_0}\right)^{0,7}}{1,5 \left(\frac{h_b}{h_0}\right)^{0,7}} \quad (3.59)$$

Diese Beziehung beruht u.a. auf bruchmechanischen Erkenntnissen aus [43].  $h_b$  ist die Höhe des Biegebalkens in mm, an dem die Zugfestigkeit bestimmt werden soll,  $h_0$  ist eine Bezugshöhe von 100 mm. In Abb. 3.17 ist der Verhältniswert von  $f_{ct,fl}/f_{ct,ax}$  über der Balkenhöhe  $h_b$  aufgetragen.

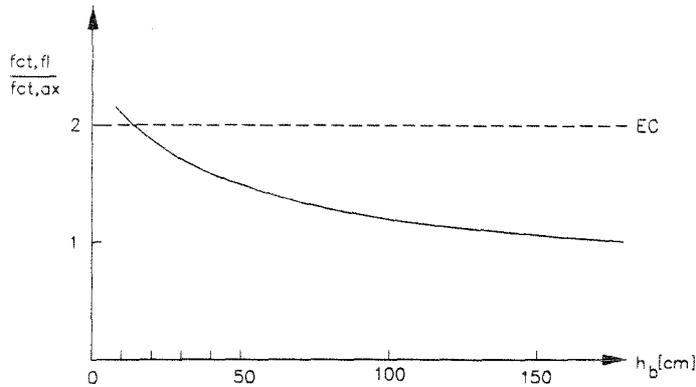


Abb. 3.17: Einfluß der Balkenhöhe auf die Biegezugfestigkeit

Die Zugfestigkeit des Betons  $f_{ctm}$ , wie sie in der im Abschnitt 3.4 beschriebenen Materialkennlinie zur Berücksichtigung des Betons auf Zug verwendet wird, wird in dieser Arbeit mit der Beziehung nach Gl. 3.57 aus der Betondruckfestigkeit bestimmt. Versuche haben gezeigt, daß für die Betonzugfestigkeit wegen der Wirkung der Bewehrung für Biegung und Zug gleichermaßen die zentrische Zugfestigkeit angesetzt werden kann [67][63]. Für allgemeine Fälle, in denen keine genaueren Versuchsergebnisse vorliegen, kann der Variationskoeffizient der Betonzugfestigkeit in Übereinstimmung mit dem MC 90 [54] und EC 2 [26] mit 18% als konstant für alle Festigkeitsklassen angenommen werden. Dies entspricht im wesentlichen auch den Annahmen von Degerman [16] und Östlund [58], wobei letzterer allerdings für höhere Festigkeitsklassen einen etwas geringeren Variationskoeffizienten annimmt. Den Wert von 18% erhält man, wenn unter Berücksichtigung der in Gl. 3.55 angegebenen 5%-Fraktilwerte und einer Normalverteilung als Prüfverteilung von Betonüberwachungen über die Beziehung  $x_m - 1,645 \cdot \sigma = x_{ck;0,05}$  auf den Variationskoeffizienten  $\frac{\sigma}{x_m} = \frac{0,3}{1,645} \approx 0,18$  zurückgerechnet wird. Als Verteilungstyp kann ebenso wie für die Betondruckfestigkeit eine logarithmische Normalverteilung angenommen werden. In Tab. 3.3 sind die Kennwerte der Betonzugfestigkeit für die verschiedenen Betonfestigkeitsklassen zusammengestellt. In anbetracht der Reduzierung des numerischen Aufwandes bei den zuverlässigkeitstheoretischen Berechnungen wird die Betonzugfestigkeit im Rahmen dieser Arbeit als voll korreliert mit der Betondruckfestigkeit über die Beziehung nach Gl. 3.57 ermittelt.

Festigkeits- klasse	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
Kennwerte nach EC 2 [26]									
$f_{ctm}$	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
$f_{ctk;0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9
$f_{ctk;0,95}$	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3
angenommene statistische Kennwerte ( $V = 10\%$ )									
$f_{ctm}$	1,84	2,08	2,31	2,57	2,83	3,07	3,30	3,53	3,75
Verteilungs- funktion	LN								

Tab. 3.3: Kennwerte der Betonzugfestigkeit in [MPa]

### 3.5.3 Elastizitätsmodul von Beton

Eine sehr wichtige Kennlinie eines Werkstoffes ist die Spannungsdehnungslinie, die z.B. als Berechnungsgrundlage der Tragwerksanalyse dient. Im einfachen (linearen) Fall gilt für einachsige Beanspruchung das Hookesche Gesetz:  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ . Nach [37] gilt für Beton bei einachsiger Beanspruchung die lineare Beziehung für Druckbeanspruchungen bis etwa 40% der Druckfestigkeit und für Zugbeanspruchungen bis zu 70% der Betonzugfestigkeit. Bei höheren Spannungen steigt die Dehnung mit der Spannung überproportional an. Zur Ermittlung von Verformungen oder Steifigkeiten ist eine genauere Kenntnis des Elastizitätsmoduls unerlässlich. Die Kenntnis über den gesamten Verlauf des Spannungsdehnungsverhaltens ist für die Ermittlung von Querschnitts- oder Systemversagen erforderlich. Zur Beschreibung des elastischen Verhaltens von Beton wird entweder der Tangentenmodul im Ursprung der Spannungsdehnungsbeziehung oder ein Sekantenmodul zwischen  $\sigma = 0$  und  $\sigma \approx 0,4 \cdot f_c$  angegeben. Der Elastizitätsmodul wird dabei wesentlich durch das Materialverhalten der enthaltenen Betonkomponenten (Zuschlag, Zementstein) bestimmt. Hieraus wird deutlich, daß die Werte für den Elastizitätsmodul von Beton erheblich schwanken können (z.B. je nach geographischer Herkunft des Zuschlags). Im Gebrauchslastbereich kann davon ausgegangen werden, daß der Elastizitätsmodul für die Zug- und Druckbeanspruchung gleich ist [37]. Mit steigender Betonfestigkeit steigt auch der Elastizitätsmodul, insofern können diese beiden Kennwerte in einem statistischen Modell als streng korreliert betrachtet werden.

Da die speziellen Einflüsse auch nur in Einzelfällen berücksichtigt werden können, werden in den bekannten Normen mittlere Werte für die Elastizitätsmoduln der einzelnen Betonfestigkeitsklassen angegeben. Östlund empfiehlt in [58] für den Elastizitätsmodul einen Variationskoeffizienten von  $V = 10\%$ , wobei er auf schwe-

dische Forschungsarbeiten verweist. In [16] wird je nach Festigkeitsklasse mit Variationskoeffizienten von  $V = 14 - 5\%$  für Mittelwerte des Elastizitätsmoduls von 29000 - 42000 MPa gearbeitet. In anderen Arbeiten wird die Streuung des Elastizitätsmoduls mit dem Hinweis auf ausschließliche Traglastuntersuchungen komplett vernachlässigt [2]. In der Abb. 3.18 sind verschiedene Ansätze [1][26][44][54] zur Berechnung des Elastizitätsmoduls aus der mittleren Betondruckfestigkeit aufgetragen. Die Unterschiede der einzelnen Ansätze können auf verschiedene

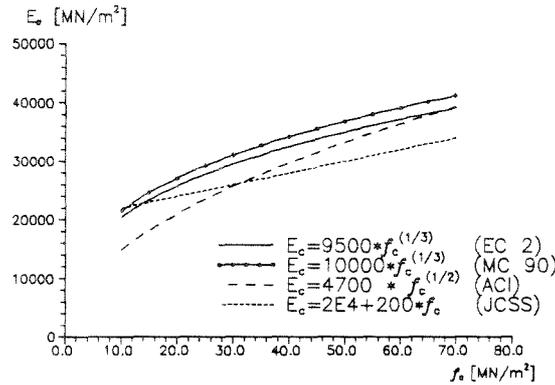


Abb. 3.18: Vergleich der Ansätze zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Betondruckfestigkeit

Versuchsdurchführungen, die Höhe des Zementleimgehaltes und die Verformungseigenschaften des verwendeten Zuschlages zurückgeführt werden. Die in Tab. 3.4 angegebenen Mittelwerte des Elastizitätsmoduls aus dem EC 2 [26] und MC 90 [54] entsprechen in etwa der Beziehung

$$E_c = k \cdot f_c^{(1/3)} \text{ MPa} \quad (3.60)$$

mit  $k = const. = 9500 - 10000$ , die auch mit  $k = 9500$  den weiteren Berechnungen zugrundeliegt. Demnach ergibt sich mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz ein Variationskoeffizient für den Elastizitätsmodul von  $V_{E_c} = \frac{\sigma_c}{3 \cdot f_c}$ . Die entsprechenden Werte sind ebenfalls in Tab. 3.4 mit der Standardabweichung  $\sigma_c = 5$  MPa zusammengestellt.

### 3.5.4 Betonstahl

#### Streckgrenze $f_y$

Die Streckgrenze des Betonstahls gilt als wesentliche Festigkeitsgröße im Stahlbetonbau. An ihr bzw. an ihrem charakteristischen Wert  $f_{yk}$  wird beispielsweise der

Festigkeits- klasse	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
	Kennwerte nach EC 2 [26]								
$E_{cm}$ [MPa]	26000	27500	29000	30500	32000	33000	35000	36000	37000
	Kennwerte nach $E_c = k \cdot f_c^{(1/3)}$ [MPa]								
$f_c$	20	24	28	33	38	43	48	53	58
$E_c$ [MPa]	25787	27403	28848	30472	31939	33282	34525	35685	36773
Variations- koeff. [%]	8,33	6,94	5,95	5,05	4,39	3,88	3,47	3,14	2,87

**Tab. 3.4:** Kennwerte des Elastizitätsmoduls von Beton in [MPa]

Übergang von elastischer zu plastischer Krümmung eines Stahlbetonquerschnittes oder der Nachweis zulässiger Stahlspannungen definiert. Die Streuungen der Streckgrenze hängen natürlich von der speziellen Herstellungscharge und weiteren Herstellungseinflüssen ab. Da hier aber grundsätzliche Zuverlässigkeitsuntersuchungen durchgeführt werden sollen, werden allgemeine statistische Kennwerte benötigt, die die Gruppe der Betonstähle insgesamt zufriedenstellend beschreiben.

Der Variationskoeffizient der Streckgrenze von Stählen aus unterschiedlichen Herstellerwerken schwankt zwischen 6 bis 12%. Östlund [58] gibt einen mittleren Wert von  $V = 8\%$  an, wobei hierin auch die Streuungen des Stabquerschnittes enthalten sind. Bach [2] ermittelt Variationskoeffizienten zwischen 4 und 7,1% aus eigenen statistischen Auswertungen. Als Verteilungsfunktion werden in der Literatur Normalverteilungen, Beta-Verteilungen vom Typ I und logarithmische Normalverteilungen verwendet [64][73]. Der charakteristische Wert der Streckgrenze von BSt 500 S wird allgemein mit 500 MPa angegeben. Legt man eine logarithmische Normalverteilung zugrunde, so erhält man den Mittelwert der Streckgrenze aus dem charakteristischen Wert durch

$$f_{ym} = f_{yk} \cdot e^{-1,645 \cdot V},$$

wenn der charakteristische Wert  $f_{yk}$  als 5%- Fraktile definiert ist. Bei Annahme eines Variationskoeffizienten  $V = 6\%$  ergibt sich der Umrechnungsfaktor  $\lambda = \frac{f_{yk}}{f_{ym}}$  zu 0,906. Damit erhält man die statistischen Parameter der logarithmisch verteilten Streckgrenze für den BSt 500 zu:

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}, \quad f_{ym} = 550 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 33 \text{ MPa}.$$

Das JCSS [44] gibt für den Mittelwert der Streckgrenze die Beziehung  $f_{ym} = f_{yk} + 60 \text{ MPa}$  und für die Standardabweichung  $\sigma = 30 \text{ MPa}$  an. Diese Werte

stimmen näherungsweise mit obigen Betrachtungen überein und werden den folgenden Berechnungen zugrundegelegt.

**Duktilitätseigenschaften**

Zur weiteren Materialbeschreibung des Betonstahls dient der Verhältniswert von Zugfestigkeit zur Streckgrenze  $f_t/f_y$ , der neben der Gleichmaßdehnung maßgebend für die maximale Trag- und Verformungsfähigkeit ist. Der Einfluß dieses Parameters auf die Rotationsfähigkeit von Stahlbetonquerschnitten ist beispielsweise von Langer in [49] untersucht worden, in den Veröffentlichungen des CEB [11] sind weitere Parameterstudien und Versuchsergebnisse dokumentiert. Demnach kann eine höhere Verdrehfähigkeit durch hohe Gleichmaßdehnungen, einen gleichmäßigen Anstieg der Stahlkennlinie zwischen Streckgrenze und Zugfestigkeit sowie durch ein größeres Zugfestigkeits-Streckgrenzenverhältnis erreicht werden.

Im EC 2 [26] und MC 90 [54] werden die Betonstähle in verschiedene Duktilitätsklassen eingeteilt. Dabei wird auf die charakteristischen Festigkeitseigenschaften bezug genommen.

normale Duktilität (Klasse A)	$\varepsilon_{uk} >  2,5\% $	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k >  1,05 $
hohe Duktilität (Klasse B)	$\varepsilon_{uk} >  5,0\% $	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k >  1,08 $
hochduktil (Klasse C)	$\varepsilon_{uk} >  5,0\% $	$\left(\frac{f_t}{f_y}\right)_k >  1,15 $

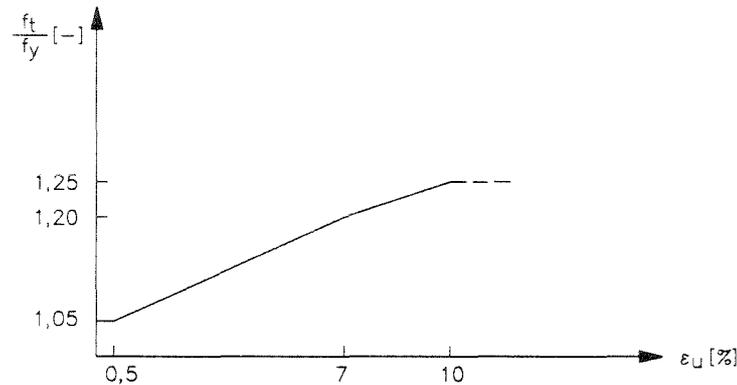
Die Klasse C (in dieser Form nur im MC 90 definiert) ist für die Verwendung in Erdbebengebieten vorgesehen. In [11][47] sind für die Parameter  $f_t/f_y$  und  $\varepsilon_u$  statistische Kennwerte angegeben, von denen einige ausgewählte Werte für BSt 500 in Tab. 3.5 wiedergegeben sind. Allerdings gibt es für die zugehörigen Verteilungsfunktionen keine Angaben.

Stahlsorte BSt 500	Streckgrenze			Verhältnis $f_t/f_y$			$\varepsilon_u$	
	$\mu$	$\sigma$	$V$	$\mu$	$\sigma$	$V$	$\mu$	$\sigma$
	MPa	MPa	%	[-]	[-]	%	%	%
Matten	612	43	7,0	1,06	0,02	1,9	3,0	1,0
Stabstahl Ø 6-8	555	16	3,0	1,14	0,02	1,3	7,1	0,72
Stabstahl Ø 14-28	551	20	3,7	1,21	0,02	1,9	7,0	0,97

**Tab. 3.5:** Mittelwerte und Streubereiche kaltverformter Betonstähle

Für die zuverlässigkeitstheoretischen Berechnungen wird im Rahmen dieser Arbeit als Eingangsparameter zur Beschreibung der Duktilität die Gleichmaßdehnung  $\varepsilon_u$  gewählt. Diesem Wert wird dann jeweils ein eindeutig definierter Wert

von  $f_t/f_y$  zugeordnet. Dies entspricht in Analogie zum EC 2 und MC 90 einer Einteilung in Duktilitätsklassen. Auf eine Berücksichtigung der entsprechenden Werte als Basiszufallsvariablen wird verzichtet, da im Rahmen dieser Arbeit nicht primär die speziellen Einflüsse unterschiedlicher Stahlduktilität auf das Sicherheitsniveau von Stahlbetontragwerken untersucht werden soll. Die hier angenommene Zuordnung zwischen  $\varepsilon_u$  und dem Verhältniswert  $f_t/f_y$  zeigt Abb. 3.19.



**Abb. 3.19:** Angenommene Duktilitätsparameter des Betonstahls;  
Zusammenhang zwischen  $\varepsilon_u$  und  $f_t/f_y$

### Elastizitätsmodul $E_s$

Der Elastizitätsmodul von Betonstahl wird in der Literatur im allgemeinen als deterministischer Parameter behandelt [38][58][59]. Spaethe [73] gibt Variationskoeffizienten zwischen 2% und 6% für den Elastizitätsmodul von Betonstahl an. In den hier durchgeführten Berechnungen wird von einem im EC 2 angegebenen Mittelwert des Elastizitätsmoduls von  $2,0 \cdot 10^5$  MPa ausgegangen. Streuungen des Elastizitätsmoduls des Stahls werden nicht berücksichtigt. Diese Annahme ist durch die relativ geringen Streuungen gerechtfertigt, zudem haben eigene sicherheitstheoretische Vergleichsrechnungen an Stahlbetonquerschnitten gezeigt, daß ein Einfluß dieser Streuungen auf das erreichbare Sicherheitsniveau von untergeordneter Bedeutung ist.

### Betonstahlquerschnittswerte

Die Querschnittswerte von Betonstählen werden in DIN 488 [21] als Nennwerte angegeben, wobei von einer normalverteilten Grundgesamtheit ausgegangen wird. Man kann diese Nennwerte näherungsweise auch als Mittelwerte betrachten. Der Variationskoeffizient des gesamten Querschnitts einer Stahllage wird hier mit 2,5% angenommen. In den Erläuterungen zur DIN 488, Teil 2, Ausgabe

84 wird im Hinblick auf die bautechnische Sicherheit eine zulässige Unterschreitung des Nennquerschnitts von 4% angegeben. In der neueren Ausgabe von 1986 hat man, um das Lieferniveau nicht zu beeinträchtigen, auf konkrete Zahlenangaben verzichtet. Es wird allerdings darauf hingewiesen, daß in den internationalen Lieferbedingungen [41] eine 5%ige symmetrische Abweichung auf den Nenndurchmesser  $d_s = 10$  mm enthalten sein kann. Insgesamt geht man davon aus, daß der Nennquerschnitt im statistischen Mittel der Lieferungen leicht überschritten wird [4]. Insofern stellt die hier getroffene Annahme von Nennwert = Mittelwert eine konservative Abschätzung dar. Will man einen Variationskoeffizienten unabhängig vom Stabdurchmesser für alle Stabquerschnitte angeben, so bietet es sich an, den Mindestquerschnitt als 5%-Fraktile einer normalverteilten Grundgesamtheit anzunehmen. Damit ergibt sich der Variationskoeffizient zu  $V = 2,5\%$  wie oben angenommen. Über die Stablänge verteilt kann die Veränderlichkeit der Eigenschaften innerhalb eines Stabes vernachlässigt werden [73].

### 3.5.5 Betonquerschnittsabmessungen

Die Veränderlichkeit von Querschnittsabmessungen hat insbesondere für die Untersuchung von Zwangsbeanspruchungen höhere Bedeutung. Die tatsächlich auftretende Beanspruchung ist, im Gegensatz zur Lastbeanspruchung, erheblich deutlicher von den effektiven Querschnittssteifigkeiten abhängig. Bei den üblicherweise angegebenen (nominellen) Abmessungen  $x_{nom}$  von linear berandeten Querschnitten kann man mit ausreichender Genauigkeit auch von Mittelwerten  $x_m$  ausgehen [54][59]. Diesen Mittelwerten wird eine gewisse Toleranz  $t$  zugestanden. Mit  $x_m = x_{nom}$  gilt:

$$x_{eff} = x_m \pm t. \quad (3.61)$$

Östlund [58] gibt als Variationskoeffizienten für Querschnittsabweichungen

$$V = \frac{t}{2 \cdot x_m} \quad (3.62)$$

an. Hosser [38] rechnet mit einem Variationskoeffizient von 2% für alle Abmessungen bis 1,0 m. Folgt man dem Vorschlag von Östlund, so kann man mit den in Tab. 3.6 angegebenen Toleranzen rechnen. In den angegebenen Werten sind auch Imperfektionen enthalten, die daher in den Berechnungen nicht gesondert berücksichtigt zu werden brauchen. Ebenfalls in Tab. 3.6 sind die Toleranzen für die Höhen der Stahllagen (statische Höhe)  $d$  nach Östlund [58] zusammengestellt. Sie können sowohl für Einzelstäbe als auch für Stabgruppen verwendet werden. Im MC 90 [54] wird insbesondere darauf hingewiesen, daß bei Querschnittsabmessungen kleiner 100 mm die Streuungen der geometrischen Querschnittsgrößen als

Abmessungen [mm]	$t$ [mm]	stat. Höhe $d$ [mm]	$t$ [mm]
$a \leq 100$	$\pm 0,10 \cdot a$	$d \leq 100$	$\pm 10$
$100 < a \leq 2000$	$\pm(9,5 + 0,005 \cdot a)$	$100 \leq d \leq 500$	$\pm(5 + 0,05 \cdot d)$
$a \geq 2000$	$\pm(17,5 + 0,001 \cdot a)$	$d \geq 500$	$\pm 30$

**Tab. 3.6:** Toleranzen der Querschnittsabmessungen und der statischen Höhe nach Oestlund

statistische Variablen berücksichtigt werden sollten. Die dort angegebenen Toleranzen  $t$  für Balken- und Stützenquerschnitte zeigt Tab. 3.7. Hosser [38] geht

Abmessungen [mm]	$t$ [mm]	stat. Höhe $d$ [mm]	$t$ [mm]
$a \leq 200$	$\pm 5$	$d \leq 1000$	$\pm 10$
$200 < a \leq 2000$	$\pm(3,5 + 0,008 \cdot a)$	$1000 < d \leq 2000$	$\pm 0,01 \cdot d$
$a > 2000$	$\pm(17,5 + 0,001 \cdot a)$	$d > 2000$	$\pm 20$

**Tab. 3.7:** Toleranzen der Querschnittsabmessungen und der statischen Höhe nach MC 90

in seinen Berechnungen von einer konstanten Standardabweichung der Betondeckung von 0,75 cm (Fertigteile: 0,5 cm) aus. Pottharst [59] rechnet in bezug auf die Randabstände  $d$  (statische Höhe) mit einem Variationskoeffizienten von 2%. In allen Fällen wird von einer normalverteilten Größe ausgegangen. Die Empfehlungen des JCSS [44] für Vergleichsrechnungen zu den Eurocodes enthalten für die geometrischen Querschnittsgrößen die in Tab. 3.8 wiedergegebene statistische Beschreibung. Vergleicht man diese Angaben mit den Angaben von Oestlund und

Statistische Größe	V-Type	Mittelwert [mm]	Standardabweichung [mm]
Querschnittsabmessungen $a$	N	$_{nom}a$	5
Betondeckung $c$	N	$_{nom}c + 5$	5

**Tab. 3.8:** Statistische Beschreibung der Betonquerschnittsgrößen nach JCSS

MC 90 (Tab. 3.6 und 3.7), so sind zunächst die konstanten Standardabweichungen auffallend. Durch die vom nominellen Wert abweichenden Mittelwerte bei der Betondeckung wird hingegen schon in gewisser Weise die Modellunsicherheit in

die statistische Beschreibung der Querschnittsgeometrie mit aufgenommen, die bei den vergleichbaren Vorschlägen aus der Literatur im allgemeinen nur über höhere Standardabweichungen erfaßt werden. Hier wird daher der Vorschlag des JCSS [44] aufgegriffen.

## 3.6 Statistische Kennwerte der Einwirkungsgrößen

### 3.6.1 Lasten

Bezüglich der Belastungen wird im Rahmen dieser Arbeit allgemein zwischen ständigen und veränderlichen Lasten unterschieden. Ständige Lasten sind zeitinvariant und werden durch Verteilungstyp und Verteilungsparameter beschrieben. Veränderliche Einwirkungen wie klimatische Lasten und Verkehrslasten sind im allgemeinen zeit- und raumabhängig. Ihre Veränderlichkeit wird üblicherweise anhand von Lastmodellen beschrieben. Die zeitlichen Abhängigkeiten sind prinzipiell durch stochastische Prozesse erfaßbar.

Der Mittelwert der Eigengewichtslasten kann näherungsweise aus den (nominellen) Abmessungen des Systems und dem mittleren spezifischen Gewicht des Materials berechnet werden. Der Variationskoeffizient der Eigengewichtslasten setzt sich genaugenommen vektoriell aus den Variationskoeffizienten der Abmessungen und des spezifischen Gewichtes zusammen. In den ständigen Lasten sind natürlich außer den direkten Eigengewichtslasten des Systems auch die Anteile anderer ständiger Systembeanspruchungen wie beispielsweise Lastweiterleitungen aus Decken oder Wänden, Ausbaulasten oder Erddruck enthalten. Zur statistischen Beschreibung der ständigen Lasten für Tragwerke aus Stahlbeton wird in dieser Arbeit in Übereinstimmung mit verschiedenen Autoren [44][58][68][72] ein möglichst einfaches Modell mit einer normalverteilten Grundgesamtheit und einem Variationskoeffizienten von  $V_G = 10\%$  gewählt. Der Variationskoeffizient  $V_G$  ist hierbei bewußt groß angesetzt, um größere Streuungen von Ausbaulasten und Systembeschreibungen mitzuerfassen.

Verkehrslasten streuen im allgemeinen wesentlich stärker als ständige Lasten. Unter der Annahme, daß die Materialfestigkeiten unabhängig von der Veränderlichkeit der Beanspruchung ist, sind für den Nachweis von Grenzzuständen nur die Maximalwerte der veränderlichen Einwirkungen maßgebend. Diese Maximalwerte können durch Extremwertverteilungen, die auf einen Bezugszeitraum

bezogen sind, beschrieben werden. Für eine solche Lastbeschreibung ist es allerdings erforderlich, zwischen den verschiedenen Belastungsursachen genauer zu unterscheiden. So sind beispielsweise für Windlasten, Schneelasten und Verkehrslasten in Parkhäusern oder Bürobauten Messungen bekannt [68], die eine derartige statistische Charakterisierung erlauben. Im Rahmen allgemeiner vergleichender Berechnungen zum Sicherheitsniveau ist eine derartige Lastbeschreibung zu aufwendig. Hierzu schlägt Oestlund [58] vor, die charakteristischen Werte der Verkehrslasten  $Q$  aus den bestehenden Normen als 98%-Fraktile (jährliches Maximum) einer normalverteilten Grundgesamtheit mit einem Variationskoeffizient von 40% zu betrachten. Damit erhält man ein Verhältnis vom charakteristischem Wert zum Mittelwert von:

$$\lambda_Q = \frac{Q_k}{Q_m} = 1 + 2,06 \cdot V_q = 1,824. \quad (3.63)$$

Diese sehr allgemeine Lastbeschreibung wird hier zugrundegelegt.

### 3.6.2 Eingeprägte Verformungen

Die statistische Beschreibung von eingepägten Verformungen ist insofern unbefriedigend, als einerseits keine zuverlässigen allgemeinen Kennwerte bekannt sind und andererseits die Ursachen von Bauwerksverformungen sehr verschieden sind. Zu nennen sind hier exemplarisch Verformungen aus Baugrundbewegungen, aus Temperaturänderungen oder aus dem zeitabhängigen Materialverhalten (Kriechen und Schwinden).

Für die im Rahmen dieser Untersuchung zu betrachtenden eingepägten Verformungen werden gewisse Voraussetzungen getroffen, die das Spektrum möglicher Einwirkungen und Ursachen beinhalten soll. Als Leitgedanke für aufgezwungene Bauwerksverformungen dienen differentielle Setzungen aus Baugrundbewegungen. Diese werden in der Bemessungspraxis oftmals als konstante aufgezwungene Verformung bei der Tragwerksanalyse berücksichtigt. Geht man davon aus, daß es sich bei den berücksichtigten eingepägten Verformungen um mittlere Werte handelt, so erscheint es sinnvoll, für die weiteren sicherheitstheoretischen Untersuchungen ein gewisses Spektrum von Streuungen zu erfassen. Bei Betrachtung von Baugrundbewegungen ist dabei von größeren Unsicherheiten für die Vorhersage der Verformungen auszugehen. Den eingepägten Verformungen  $\Delta_s$  wird eine Normalverteilung zugrunde gelegt, wobei mit Variationskoeffizienten von  $V_{\Delta_s} = 20$  bis 40% gerechnet wird, um möglichst große Streubereiche zu erfassen.

### 3.7 Tabelle der statistischen Parameter

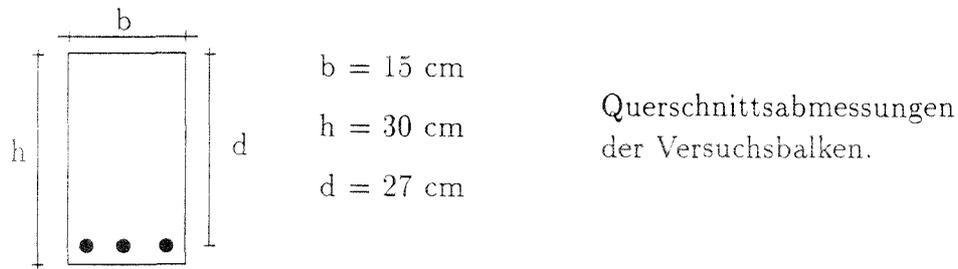
In der folgenden Tabelle werden die beschriebenen statistischen Variablen noch einmal übersichtlich dargestellt.

	Zufallsvariable	Verteilungstyp	Mittelwert	Standardabweichung	Variationskoeffizient
1	$f_c$ $f_{ct,ax}$ $E_c$	LN	$f_{ck} + 8$ [MPa] $0,25 \cdot f_c^{2/3}$ [MPa] $9,5 \cdot 10^3 \cdot f_c^{1/3}$ [MPa]	5 [MPa]	18 [%] 10 [%]
2	$f_y$	LN	$f_{yk} + 60$ [MPa]	30 [MPa]	
3	$A_s$	N	$nom A_s$		2,5 [%]
4	Querschnittsabmessungen $a$	N	$nom a$ [mm]	5 [mm]	
5	Betondeckung $c$	N	$nom c + 5$ [mm]	5 [mm]	
6	ständige Last $G$	N	$nom G$		10 [%]
7	veränderliche Last $Q$	N	$\frac{Q_k}{1,824}$		40 [%]
8	eingeprägte Verformung $\Delta s$	N	$nom \Delta s$		20 - 40 [%]

Tab. 3.9: Kennwerte der statistischen Variablen

### 3.8 Exemplarische Stahlbetonquerschnittsuntersuchungen

Im folgenden werden einige Vergleichsberechnungen zur Verifikation der integralen Werkstoffbeziehungen zwischen experimentell und rechnerisch ermittelten Momentenkrümmungsbeziehungen vorgestellt. Dazu wird auf die Versuchsergebnisse von Sakai/Kakuta [66] zurückgegriffen. Dort wurden anhand eines 3,40 m langen Stahlbetonbalkens mit Rechteckquerschnitt, der in einem Meßbereich von 2,0 m mit einem konstanten Verhältnis von Biegemoment zu Normalkraft beansprucht war, die auftretenden Dehnungen im Gebrauchslastbereich gemessen. Über diese Meßwerte wurde auf die Querschnittskrümmungen zurückgerechnet.



Die vorhandenen Materialeigenschaften der Versuchs balken und die vorhandenen Lastexzentrizitäten sind in Tab. 3.10 zusammengestellt. Die entsprechenden Werte liegen auch den Vergleichsrechnungen zugrunde. Die axialen Zugfestigkeiten wurden rechnerisch aus den Druckfestigkeiten der Betone über die Beziehung  $f_{ct,ax} = 0,3 \cdot f_c^{2/3}$  ermittelt.

Die vergleichenden Gegenüberstellungen der Berechnungs- und Versuchsergebnisse

	Versuch	Lastexzentrizität $M/N$ [m]	Druckfestigkeit $f_c$ [MPa]	Elastizitätsmodul $E_c$ [MPa]	Zugfestigkeit $f_{ct,ax}$ [MPa]
Versuchsreihe 16: $E_s = 193000 \text{ MPa}$ , $A_s = 3,78 \text{ cm}^2$ , $f_y = 500 \text{ MPa}$					
1.	MN-35-16	0,35	30,7	27000	2,94
2.	MN-55-16	0,55	31,3	27800	2,98
3.	MN-65-16	0,65	29,2	28500	2,84
4.	MN-75-16	0,75	33,3	28300	3,11
5.	MN-85-16	0,85	31,1	30300	2,98
6.	M-16	-	31,4	28900	2,99
Versuchsreihe 13: $E_s = 193000 \text{ MPa}$ , $A_s = 2,41 \text{ cm}^2$ , $f_y = 500 \text{ MPa}$					
1.	MN-35-13	0,35	31,0	29400	2,96
2.	MN-55-13	0,55	31,3	28800	2,98
3.	MN-75-13	0,75	31,7	29100	3,00
5.	M-13	-	29,0	28500	2,83

**Tab. 3.10:** Lastexzentrizitäten und Materialwerte der Versuche (Sakai/Kakuta)

sind in Abb. 3.20 und 3.21 dargestellt. Dabei wurden verschiedene Ansätze zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug berücksichtigt, um insbesondere den für die weiteren Berechnungen gewählten neuen Rechenansatz (vgl. Abschnitt 3.4.2) zu verifizieren. In den Darstellungen sind die bezogenen Momente  $m = \frac{100 \cdot M}{bd^2 \cdot f_c}$  über der bezogenen Krümmung  $\kappa \cdot d \cdot 1E3$  aufgetragen.

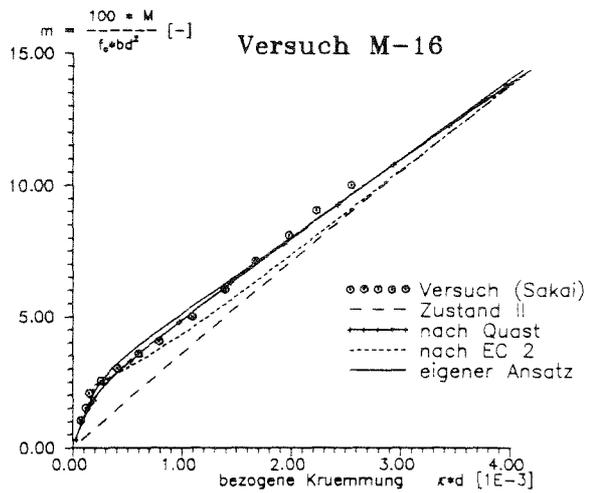
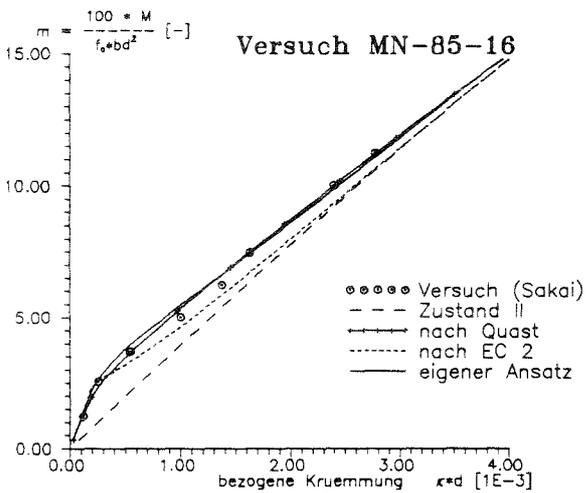
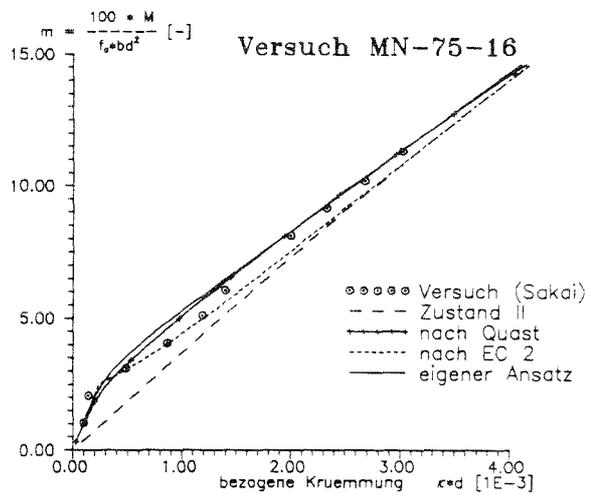
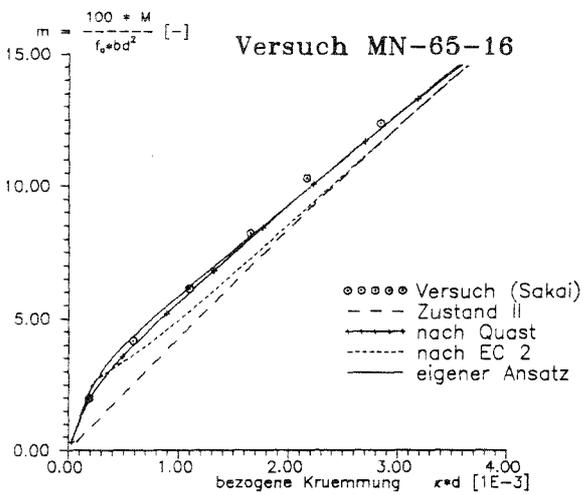
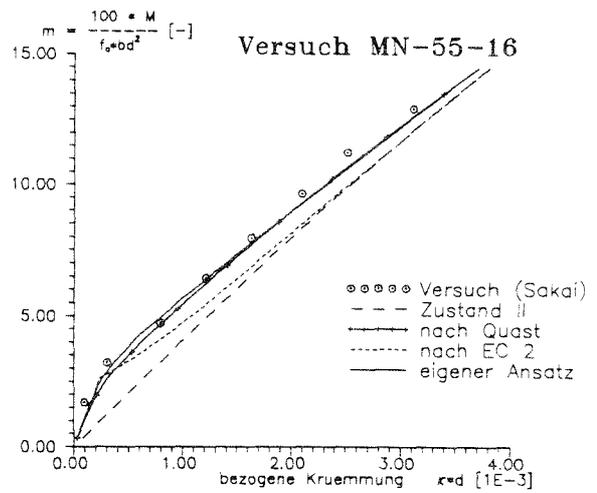
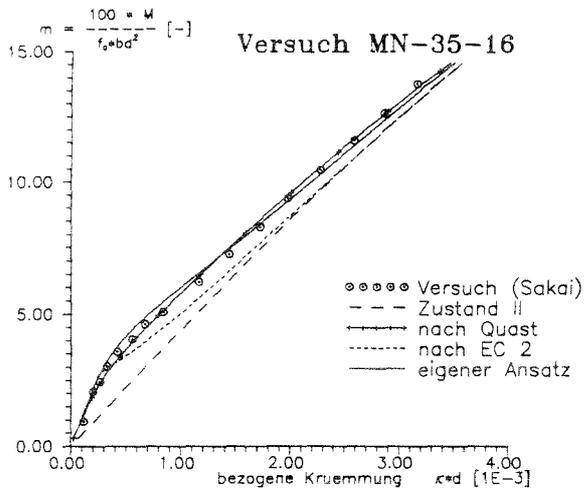


Abb. 3.20:  $M$ - $\kappa$ -Beziehungen: Versuchsreihe 16

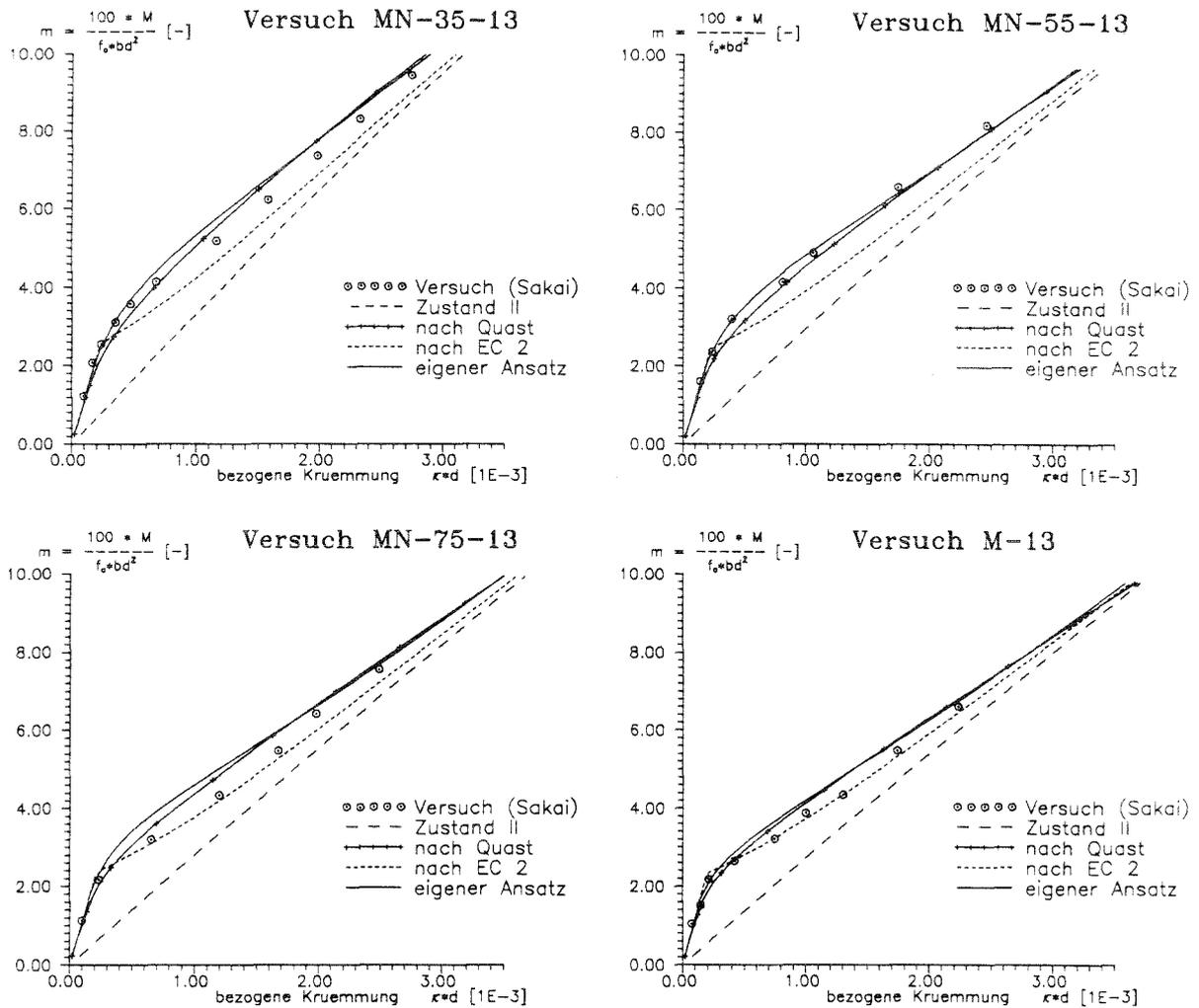


Abb. 3.21:  $M$ - $\kappa$ -Beziehungen: Versuchsreihe 13

Die Beziehungen sind für die Versuche bzw. eine Berechnung

1. nach den Versuchen von Sakai/Kakuta [66]
2. nach Zustand II (Zugfestigkeit des Betons wird vernachlässigt)
3. mit einer Spannungsdehnungsbeziehung für die dehnungsabhängige mittlere Zugspannungsverteilung im Beton nach Quast (Gl. 3.32)
4. mit einer modifizierten Stahlkennlinie nach EC 2 [26] (vgl. auch Gl. 3.30)
5. mit einer Spannungsdehnungsbeziehung für die dehnungsabhängige mittlere Zugspannungsverteilung der bewehrten Betonzugzone nach Gl. 3.51 und 3.52

dargestellt. Im Druckbereich wurde die verallgemeinerte Polynom-Rechteck-Kennlinie für den Beton nach Gl. 3.3 und 3.4 angenommen, dem Betonstahl liegt die linearelastisch-idealplastische Kennlinie nach Abb. 3.1 zugrunde (in den Darstellungen der Abb. 3.20 und 3.21 wird der elastische Bereich des Stahls allerdings nicht verlassen). Die Beziehung für den Zustand II dient hier nur der Orientierung (untere Grenzwerte) und soll nicht für Vergleichszwecke genutzt werden. Insgesamt ist für die nach der Methode 5 (s.o) ermittelten Werte eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu erkennen. Der Vorschlag des EC 2 (Methode 4, s.o.) ergibt in den unteren Beanspruchungsbereichen (Zustand I bis zum Erreichen der Reißschnittgrößen) auch eine gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten. Es zeigt sich aber, daß mit steigender Beanspruchung der Querschnitt zu *weich* eingeschätzt wird. Der Vorschlag nach Quast (Methode 3, s.o.) führt gegenüber dem EC-Ansatz zu deutlich besseren Werten, die auch näherungsweise mit den Ergebnissen des gewählten neuen Berechnungsansatzes übereinstimmen. Der Übergang bei Überschreiten der Betonzugfestigkeit am Querschnittszugrand ist bei den Methoden 3 und 5 (modifizierte Betonzugkennlinie) im Vergleich zur Methode 4 (modifizierte Stahlkennlinie) nicht durch einen Knick gekennzeichnet.

Ergänzend zu den vorher durchgeführten Vergleichsberechnungen werden noch weitere Momenten-Krümmungsbeziehungen für einen Rechteckquerschnitt mit verschiedenen Bewehrungsgraden untersucht. Der betrachtete Querschnitt mit den zugehörigen Materialwerten ist in Abb. 3.22 dargestellt. Die Ergebnisse sind

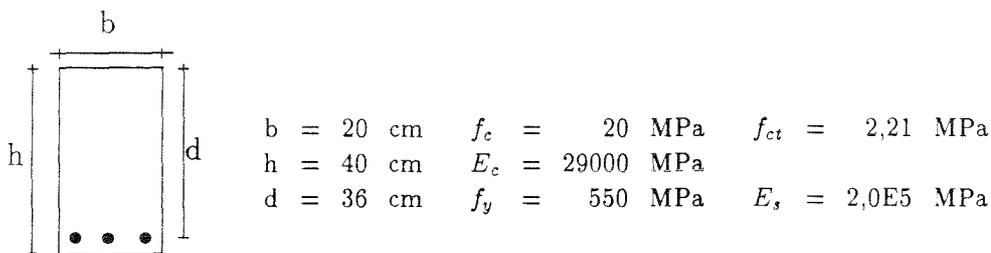


Abb. 3.22: Stahlbetonquerschnitt und Materialkennwerte

der Abb. 3.23 zu entnehmen. Sie zeigen exemplarisch den Einfluß der Mitwirkung des Betons auf Zug und des Bewehrungsgrades bei reiner Biegebeanspruchung. Mit kleiner werdendem Bewehrungsgrad ist der Einfluß des Betonmitwirkung unter Zugbeanspruchung wesentlich deutlicher ausgeprägt. Dies wird durch die Darstellung der 4 Bilder in Abb. 3.23 in einem einheitlichen Maßstab besonders deutlich. Bei Überschreiten der Stahlstreckgrenze im Zugbereich wird mit den

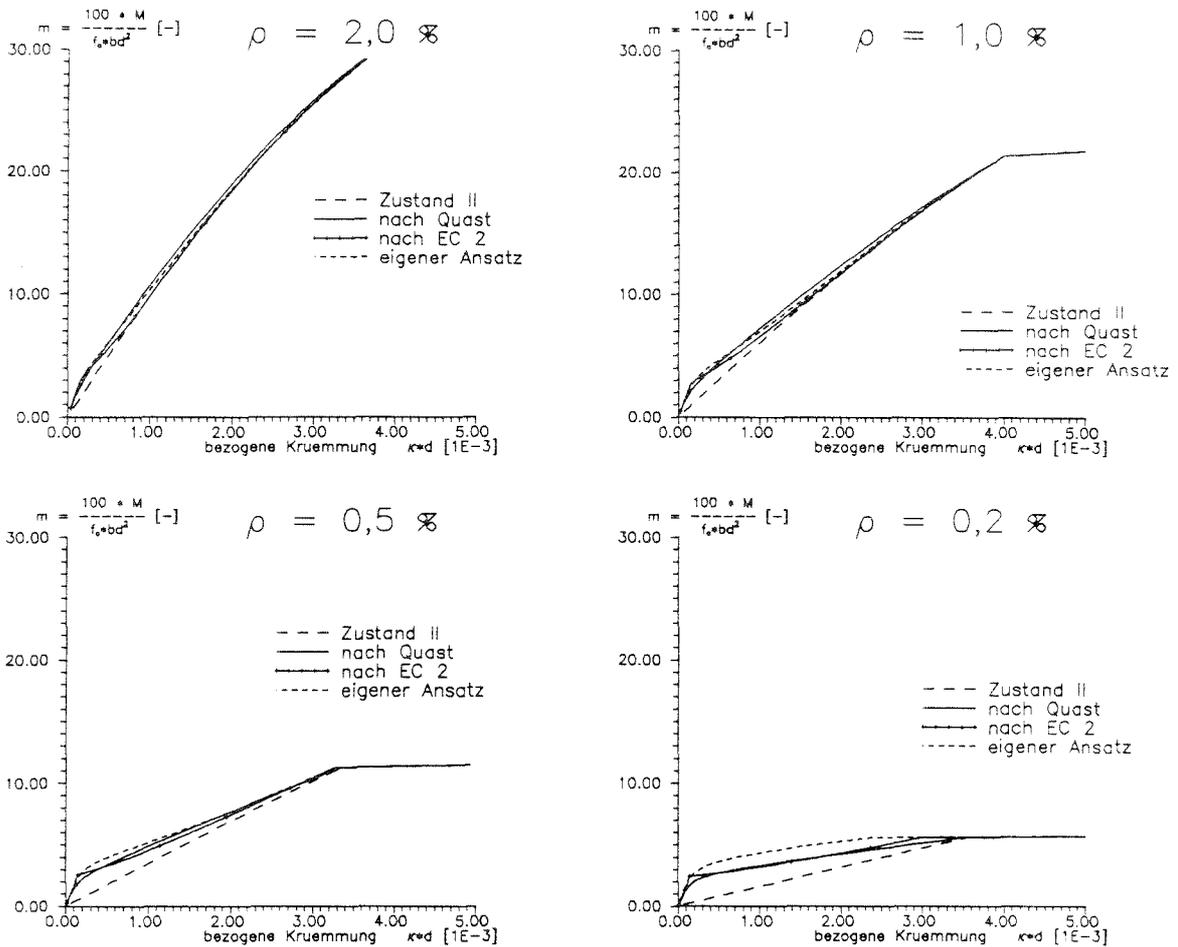


Abb. 3.23:  $M$ - $\kappa$ -Beziehung: Einfluß des Bewehrungsgrades

hier betrachteten Mitwirkungsgesetzen kein weiterer Einfluß berücksichtigt. Dargestellt sind in der Abb. 3.23 jeweils die Beziehungen für den reinen Zustand II, für die Berücksichtigung des Betons auf Zug nach dem Vorschlag von Quast (vgl. Gl. 3.32), für den Ansatz nach EC 2 mit der modifizierten Stahlkennlinie und dem Ansatz mit einer Spannungsdehnungsbeziehung für die dehnungsabhängige mittlere Zugspannungsverteilung der bewehrten Betonzugzone nach Gl. 3.51 und 3.52. Für den Betonstahl wurde die linearelastisch-idealplastische Spannungsdehnungsbeziehung angenommen.

# Kapitel 4

## Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode für Stahlbetonstabtragwerke mit nichtlinearem Materialverhalten

Die Berechnungsverfahren zur Analyse von Tragwerken mit nichtlinearen Eigenschaften erfordern den Einsatz von numerischen Methoden. Die Gradientenberechnungen zur Ermittlung des Bemessungspunktes für die Zuverlässigkeitstheorie 1. Ordnung macht eine wiederholte nichtlineare FEM-Berechnung notwendig. Durch eine Kopplung der Rechenmodule zur nichtlinearen FEM-Analyse und der Zuverlässigkeitsberechnungen 1. Ordnung ist es prinzipiell möglich, die stochastischen Eigenschaften eines Tragwerkes rechnerisch zu erfassen. Dabei sind effiziente Berechnungsverfahren erforderlich, um den numerischen Aufwand in einem vertretbaren Rahmen zu halten. Im folgenden werden daher die Grundzüge des verwendeten FEM-Stubmodells sowie einige (deterministische) Vergleichsrechnungen zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung mit dem verwendeten FEM-Modell vorgestellt. Im Anschluß daran wird die Verknüpfung der nichtlinearen FEM-Berechnung mit der Theorie der Tragwerkszuverlässigkeit zu der sogenannten Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode erläutert.

### 4.1 Finites Stabelement

Dieser Arbeit liegt die Entwicklung eines nichtlinearen finiten Stabelement für Stahlbetontragwerke zugrunde. Element- und Materialroutinen wurden an eine offene Schnittstelle zu einem bestehenden FEM-Programm angepaßt. Als grund-

legendes Progammodul wird hier das FEM-Programm *FEAP* (*Finite Element Analysis Program*) verwendet. Dessen Aufbau und Arbeitsweisen ist in [80] und [74] beschrieben. Dieses Programm kennzeichnet sich durch seine Macrosprache und seine offene Elementschnittstelle aus. Durch die Macrosprache können verschiedene Lösungsstrategien für nichtlineare Aufgabenstellungen entwickelt werden. Die Elementschnittstelle erlaubt die Programmierung eigener Element- und Materialroutinen.

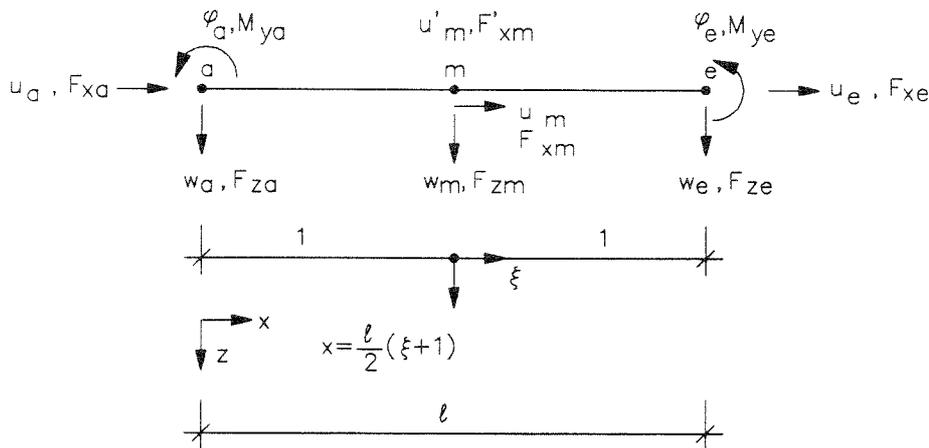


Abb. 4.1: Finites Balkenelement mit 9 Freiheitsgraden

Das verwendete und in Abb. 4.1 dargestellte finite Stabelement besitzt 9 Freiheitsgrade. Es basiert auf Arbeiten von Weiler/Zilch [78] [81], in der detaillierte Angaben zur Herleitung und Charakteristik dieses Elementes gegeben werden. Wesentlich ist, daß der vorhandene Grad des Verschiebungsansatzes (vollständige quadratische Polynome) innerhalb des Stabelementes eine gute Anpassung an die tatsächlichen Verzerrungen ermöglicht. Die Verschiebung  $u(x)$  wird durch ein Polynom dritten Grades, die Verschiebung  $w(x)$  durch ein Polynom vierten Grades approximiert. Hieraus ergibt sich für die Verzerrung  $\varepsilon = u' = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$  in der Stablängsachse und die Krümmung  $\kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  jeweils ein Polynom zweiten Grades. Im Rahmen dieses Forschungsberichtes werden nur die wesentlichen Berechnungsvoraussetzungen genannt, vertiefte Erläuterungen können [78] entnommen werden.

Grundlegende Voraussetzungen sind die Annahmen der allgemeinen Balkentheorie:

- a) Voraussetzung der Balkentheorie

- Stabkontinuum wird durch die mit Querschnitten belegte Stabachse ersetzt.
- Lasten wirken im Schubmittelpunkt des Querschnitts, so daß eine Beanspruchung in Form einer einachsigen, torsionsfreien Biegung mit Längskraft auftritt.
- Querschnitte bleiben auch nach der Verformung eben und senkrecht zur Stabachse. Schubverzerrungen werden vernachlässigt.
- Die auftretenden Verzerrungen sind klein.
- Verschiebungen sind ausreichend klein gegenüber den Systemabmessungen.

b) Voraussetzungen für die nichtlineare Systemanalyse

- Es werden ausschließlich Kurzzeitbeanspruchungen betrachtet (quasi-statische und richtungstreue Belastungen).
- Das Verhalten des Verbundbaustoffes Stahlbeton wird über die Kennlinien der Komponenten Beton und Stahl unter Voraussetzung eines starren Verbundes beschrieben. Die effektive Steifigkeit der Querschnitte wird über eine für den Zugbereich erweiterte Materialkennlinie des Betons erfaßt.

Zur Lösung der nichtlinearen Beziehungen werden im wesentlichen Newton-Raphson-Iterationen oder Kombinationen aus der Standardform und der modifizierten Form der Newton-Raphson-Iteration verwandt. Die Materialbeschreibung für den Werkstoff Stahlbeton wurde im Kapitel 3 erläutert. Im Rahmen der Finite-Element-Berechnungen werden die dort beschriebenen Materialkennlinien für eine nichtlineare Schnittgrößenermittlung benutzt. Insgesamt steht hiermit ein Berechnungsmodell zur Verfügung, mit dem nichtlineare Stabtragwerke in ihrem gesamten Beanspruchungsbereich berechnet werden können. Die elastischen oder plastischen Lösungen sind hierin als Sonderfälle enthalten.

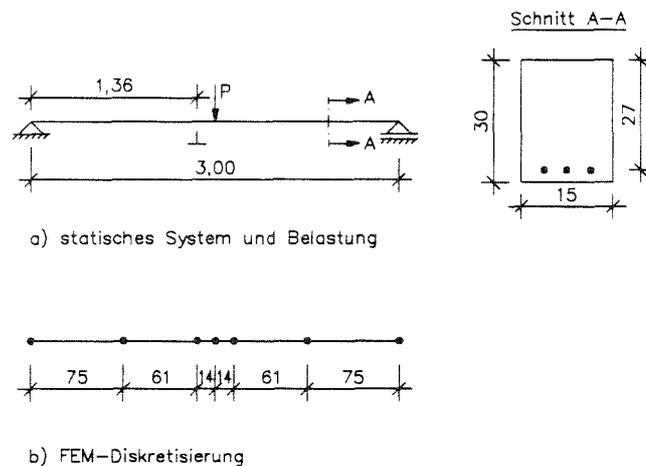
#### 4.1.1 Deterministische Vergleichsberechnungen zu experimentellen Untersuchungen

Anhand von experimentell durchgeführten und entsprechend dokumentierten Versuchen an Stahlbetonbalken sollen die Eigenschaften des vorgestellten, wirklichkeitsnahen FEM-Berechnungsmodells verifiziert werden. Hierdurch ist es beispielsweise möglich, bestimmte Eingabeparameter zu eichen und insgesamt die Plausibilität der getroffenen Annahmen zu überprüfen. Die Vergleichsrechnungen

beziehen sich ausschließlich auf Stahlbetonstabtragwerke unter *Kurzzeitbelastung*. Die Einflüsse aus zeitabhängigem Verhalten von Material und Beanspruchung bleiben späteren Untersuchungen vorbehalten.

#### 4.1.1.1 Stahlbetonträger unter Lastbeanspruchung

Franz und Brenker haben im Heft 188 des DfStb [28] die Ergebnisse von Verformungsversuchen an Stahlbetonbalken dokumentiert. Darin waren 3 Serien zu je 3 Versuchsträgern mit verschiedenen Belastungen und Bewehrungen bis zum „Bruch“ belastet worden. Für die hier vorgestellten Vergleichsberechnungen sind hiervon drei Balken ausgewählt worden. Die System- und Querschnittsabmessungen der Träger sind in Abb. 4.2 dargestellt. Verglichen werden die Last-Verformungs-Beziehungen der Versuchsträger mit denjenigen des Berechnungsmodells. Aus versuchstechnischen Gründen wurden die Durchbiegungen nicht am Lastangriffspunkt sondern in einem Abstand von 14 cm beidseitig des Lastangriffspunktes sowie in einem Abstand von 75 cm vom Auflager gemessen. Das für die Vergleichsrechnung gewählte Balkenmodell wurde in Übereinstimmung mit der Versuchseinrichtung wie in Abb 4.2 dargestellt gewählt. Dabei



**Abb. 4.2:** System, Belastung und FEM-Diskretisierung

wird der Einfeldträger mit 6 Elementen diskretisiert, wobei sich die Knotenpunkte in Feldmitte und an den Stellen der gemessenen Durchbiegung befinden. In der Tab. 4.1 sind die tatsächlichen Kennwerte der Versuchsbalken zusammengestellt. Die Baustoffkennwerte wurden aus entsprechenden Probeuntersuchungen gewonnen.

Serie	Querschnitt			Beton			Betonstahl				Last	
	b	h	d	$f_c$	$E_c$	$f_{ct}, f_t$	$f_y$	$E_s$	$A_s$	$\rho$	$P_u$	$P_g$
	[cm]			[MPa]			[MPa]				[kN]	
A3	20,0	39,9	35,9	23,37	24320	3,91	446,1	$2,1 \cdot 10^5$	10,8	1,5	191	110
B3	20,1	39,0	36,2	23,37	24320	4,41	419,2	$2,1 \cdot 10^5$	6,81	0,94	152	78
C3	20,1	38,6	36,1	19,02	23046	3,48	467,3	$2,1 \cdot 10^5$	2,31	0,33	55,9	31

Tab. 4.1: Kennwerte der Versuchsträger

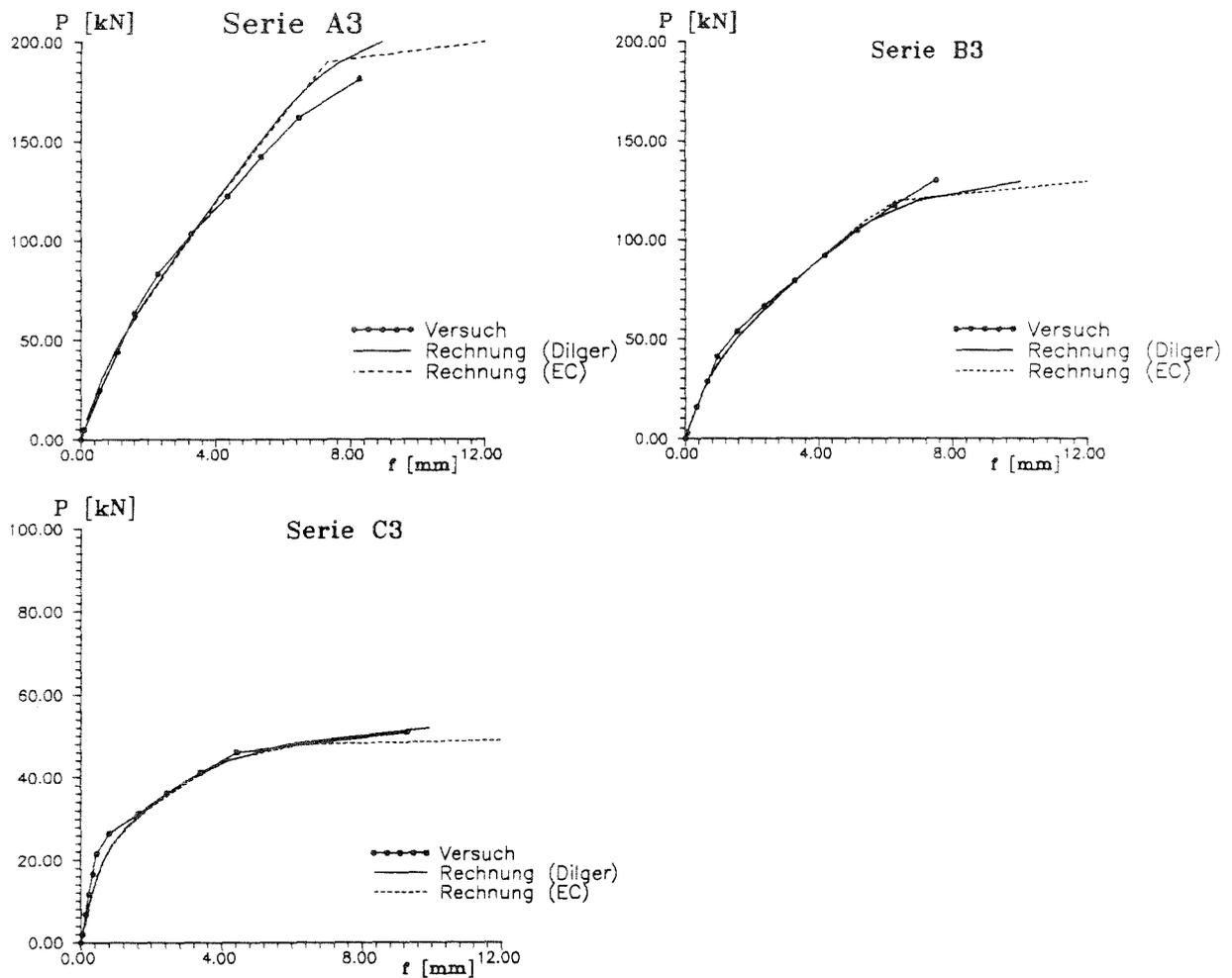


Abb. 4.3: Durchbiegung der Stahlbetonträger; Versuch und Nachrechnung

In der Abb. 4.3 sind die rechnerischen und gemessenen Last-Verformungs-Beziehungen für den 14 cm von der Balkenmitte entfernt liegenden Meßpunkt jeweils einzeln für die Träger A3, B3 und C3 aufgetragen. Der rechnerischen Ermittlung liegt die verallgemeinerte Polynom-Rechteck-Beziehung für den Beton in der Druckzone sowie die Spannungsdehnungsbeziehung für die Zugspannungsverteilung im Beton nach Gl. 3.51 und 3.52 zugrunde. Für den Stahl wurden vergleichend zwei verschiedene Stahlkennlinien (vgl. Abschnitt 3.1) berücksichtigt, die Kennlinie nach Dilger, ( $m = 13$  vgl. Gl. 3.1) und die bilineare Beziehung mit  $f_t/f_y = 1,06$  nach EC 2, (vgl. Abb. 3.1). Die berechneten Durchbiegungen stimmen im Gebrauchslastbereich mit guter Genauigkeit mit den gemessenen Werten überein. Diese Übereinstimmung ist weitgehend unabhängig von der gewählten Stahlkennlinie. Im Bruchlastbereich ist die Übereinstimmung beim stark bewehrten Träger nicht mehr so deutlich. Insgesamt sind hier aber die Ergebnisse mit der Materialkennlinie nach Dilger überzeugender als diejenigen mit der bilinearen Materialkennlinie. Beim stark bewehrten Träger wird die rechnerische Bruchlast etwas überschätzt, wohingegen bei den beiden anderen Trägern die Bruchlast entweder gut erreicht (Stahlkennlinie nach Dilger) oder etwas unterschätzt wird (bilineare Stahlkennlinie).

Eine feinere Diskretisierung des Systems hatte keinen nennenswerten Einfluß auf die Rechenergebnisse. Auch Vergleichsrechnungen mit der Materialkennlinie des Betons zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung nach EC (vgl. Gl. 3.6) ergaben keine nennenswerten Veränderungen. Insgesamt zeigt das Rechenmodell eine hinreichend gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die vorhandenen Abweichungen liegen im Bereich der erzielbaren Rechen- bzw. Meßgenauigkeiten.

#### 4.1.1.2 Stahlbetonträger unter Last und eingepprägter Verformung

Im Heft 341 des DAfStb [43] haben Kordina et al. Versuchsergebnisse von auf Biegung und gleichzeitigem Zwang beanspruchten Stahlbetonbalken unter Kurzzeit- und Langzeitbelastungen veröffentlicht. Die Versuche wurden u.a. mit der Zielsetzung durchgeführt, die Angaben zur Schnittgrößenermittlung für Zwangsbeanspruchung nach DIN 1045 [18] bzw. nach Heft 240 DAfStb [31] zu überprüfen (vgl. Abschnitt 1.2). Die hier nachgerechneten Kurzzeitversuche umfassen zwei Versuchsbalken B I und B II, die jeweils einseitig eingespannt und auf der anderen Seite einfach gelagert sind. Die System- und Querschnittsabmessungen können der Abb. 4.4 entnommen werden. Die Balken wurden im Alter von 28 Tagen in den Drittelpunkten belastet. Zunächst wurden die Lasten  $P$  bis zum Gebrauchslastniveau gesteigert, anschließend wurde eine (konstante) Zwangsver-

schiebung des Auflagers A um 2 cm aufgebracht. Auf diesem Lastniveau wurden 10000 Biegelastwechsel (Oberlast = 1,1  $\cdot$   $z_{ul}$ P, Unterlast = 0,7  $\cdot$   $z_{ul}$ P) durchgeführt, um anschließend unter weiterhin konstanter Auflagerverschiebung die äußeren Lasten bis zum Systemversagen stufenweise zu steigern. Die Bemessung der beiden

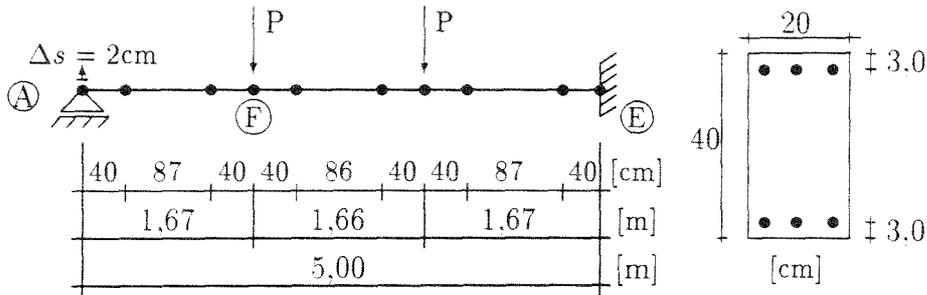


Abb. 4.4: System und Belastung des Versuchsträgers

Balken unterschied sich folgendermaßen:

- B I Bemessung für Last und Zwang nach DIN 1045 unter Berücksichtigung einer wirksamen Biegesteifigkeit bei der Ermittlung der Zwangsschnittgröße. Die Bemessungsschnittgröße wurde mit  $1,75 \cdot S_{Last} + 1,0 \cdot S_{Zwang}$  ermittelt.
- B II Bemessung nur für die Lastbeanspruchung unter bewußter Vernachlässigung der Zwangseinwirkungen.

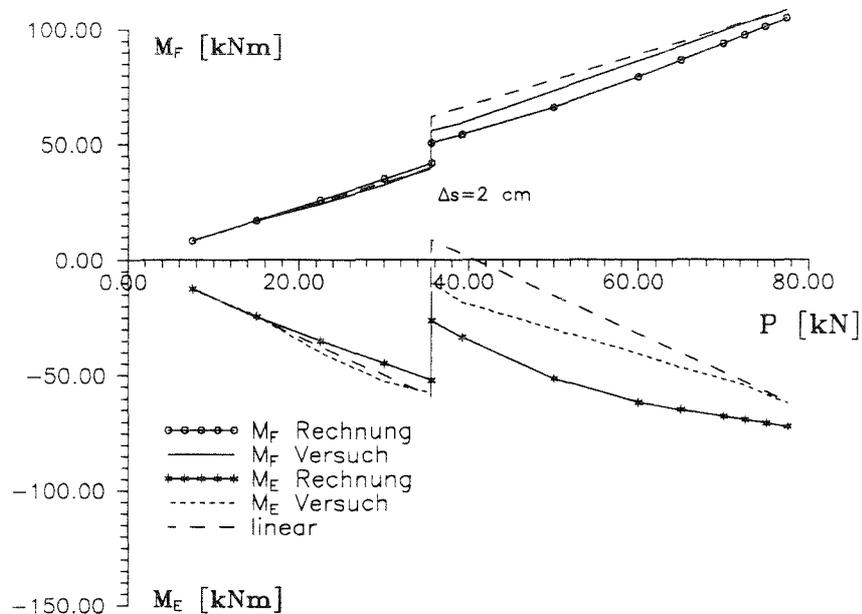
Die aus den Baustoffüberwachungen ermittelten Materialkennwerte und die Bewehrungsmengen sind in der Tab. 4.2 zusammengefaßt. Als Ergebnis der Versuche

Balken	Beton [MPa]			Betonstahl			
	$f_c$	$f_{ct,fl}$	$E_c$	Feld		Einspannung	
				$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ] $f_y$ [MPa]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ] $f_y$ [MPa]	$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ] $f_y$ [MPa]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ] $f_y$ [MPa]
B I	30,4	2,94	26500	6,49 446	1,02 466	6,49 459	4,79 457
B II	28,2	2,90	25000	5,05 453	1,02 466	5,05 453	8,06 437

Tab. 4.2: Kennwerte der Versuchsträger B I und B II

sind die Schnittkräfte unter der kombinierten Last- und Zwangsbeanspruchung (durch Messung der Auflagerkraft am linken Auflager) dokumentiert.

Die hier beschriebenen Versuche lassen sich unter Vernachlässigung der Biegeschwellversuche mit dem Berechnungsmodell nachrechnen. Der Einfluß der Belastungswechsel war von geringem Einfluß, womit dieses Vorgehen zu rechtfertigen ist. Die gewählte Systemdiskretisierung ist der Abb. 4.4 zu entnehmen. Die Berechnung wurde mit einer bilinearen Materialkennlinie für den Stahl und der Polynom-Rechteck-Beziehung für den Beton durchgeführt. Zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug wurde die Spannungsdehnungslinie für die Betonzugzone nach Gl. 3.51 und 3.52 zugrundegelegt. Anhand der Versuchsergebnisse sollen die Eigenschaften des gewählten Berechnungsmodells überprüft werden.



**Abb. 4.5:** Schnittgrößenvergleich Balken B I: Versuch und Nachrechnung

Die Vergleichsrechnung mit dem Träger B I zeigt schon innerhalb des Gebrauchslastbereiches vor dem Aufbringen der Lagerverschiebung eine Abweichung zwischen gerechnetem und gemessenem Einspannmoment  $M_E$  (siehe Abb. 4.5). Dabei wird die Steifigkeit des Einspannbereiches unterschätzt. Dies ist letztendlich auf die tatsächlich vorhandene Biegezugfestigkeit des Betons im Einspannbereich zurückzuführen. Für das Feldmoment  $M_F$  (im Punkt F der Abb. 4.4 ist eine hinreichende Übereinstimmung zu erkennen. Nach Aufbringen der Lagerverschiebung zeigt sich eine noch deutlichere Differenz zwischen den Berechnungs- und Versuchsergebnissen. Dabei verhält sich der Träger in der Nachrechnung wesentlich zu steif. Der Grund für diese Abweichungen konnte nicht abschließend

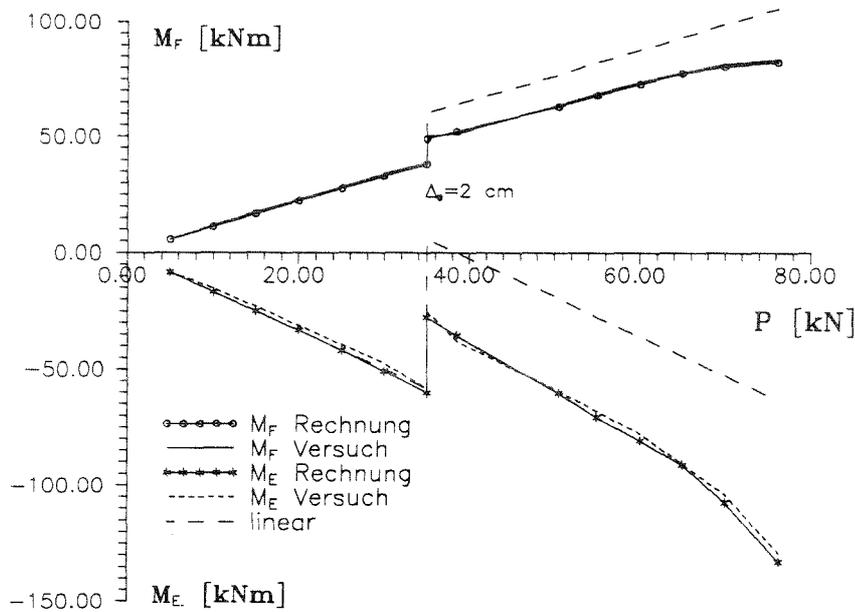


Abb. 4.6: Schnittgrößenvergleich Balken B II: Versuch und Nachrechnung

erklärt werden, ähnliche Differenzen wurden allerdings auch schon in [78] festgestellt. Beim Träger B II ist im Gegensatz zum ersten eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Versuchs- und Rechenwerten festzustellen (siehe Abb. 4.6). Der Vollständigkeit halber wurde in Abb. 4.5 und 4.6 auch die Feld- und Einspannmomente für eine lineare Schnittgrößenermittlung (Steifigkeiten des Brutto-betonquerschnittes) den übrigen Werten gegenübergestellt. Hierbei wird die große Differenz zwischen linearer und nichtlinearer Schnittgrößenermittlung bei Zwangsbeanspruchungen ersichtlich.

## 4.2 Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode

Die Grundlagen zur Sicherheitsermittlung von ebenen Stabtragwerken aus Stahlbeton mit nichtlinearem Materialverhalten auf der Basis der Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode sind in den vorangegangenen Kapiteln erläutert. Weiterführende Angaben, insbesondere zur Anwendung dieser Methode auf Stahlbetontragwerke unter reiner Lastbeanspruchung nach der Plastizitätstheorie sind in [55] veröffentlicht.

Für die im Zusammenhang mit der Stahlbetonbauweise zu betrachtenden Grenzzustandsgleichungen ist im allgemeinen nur eine indirekte Abhängigkeit der Basisvariablen zur Grenzzustandsfunktion vorhanden. Die Grenzzustandsfunktio-

on besitzt damit keine geschlossene Form, sondern weist eine implizite, im allgemeinen nichtlineare Abhängigkeit von den streuenden Parametern auf. Die Versagenskriterien eines Tragwerkes lassen sich meist als einfache Funktion sogenannter Einwirkungseffekte (z.B. Schnittgrößen, Verformungen, Spannungen oder Rißbreiten) und resultierender Widerstände oder konstanter Grenzwerte (z.B. Bruchmoment oder zulässige Rißbreite) beschreiben. Die Einwirkungseffekte  $\mathbf{z}$  sind im allgemeinen eine Funktion der Basisvariablen  $\mathbf{x}$  (z.B. Lasten oder Materialkenngrößen) sowie weiterer deterministischer Parameter. Die unbekanntesten statistischen Eigenschaften von  $\mathbf{z}$ , wie z.B. die Verteilungsdichte  $f(\mathbf{z})$  stellen die zentrale Aufgabe im Zusammenhang mit den Sicherheitsuntersuchungen im konstruktiven Ingenieurbau. Bekannt sind maximal die statistischen Kennwerte der Basisvariablen  $\mathbf{x}$ , nicht aber die Kennwerte der aus ihnen über die Strukturgleichungen abgeleiteten Größen. Aus diesem Grund ist eine Einbindung der Finite-Elemente-Methode in die Zuverlässigkeitsuntersuchungen erforderlich. Die funktionale Abhängigkeit zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  kann mit Hilfe dieser Methode für diskrete Werte von  $\mathbf{x}$  ermittelt werden. Durch ein iteratives Optimierungsverfahren kann auf diesem Weg die Suche nach dem Bemessungspunkt durchgeführt werden.

Die Einbindung der FEM-Strukturanalyse in die Zuverlässigkeitsmethode erster Ordnung stellt somit einen wesentlichen Aufgabenbereich dar. Zwei Schritte sind hierzu erforderlich.

- Die statistischen Größen müssen als Basisvariablen direkt oder indirekt in die Strukturgleichungen eingebaut werden, wobei eine räumliche Variabilität berücksichtigt werden muß.
- Entwicklung eines Algorithmus zur wiederholten Berechnung der Strukturgleichungen zur Optimierung der Grenzzustandsgleichung (Gradientenberechnung bezüglich der Basisvariablen) im Standardnormalraum zur Bestimmung des Bemessungspunktes

Der praktische Berechnungsablauf ist in dem Flußdiagramm in Abb. 4.7 dargestellt. Bezüglich der Methoden zur Bestimmung des Bemessungspunktes wird auf Routinen aus [42] zurückgegriffen. Die erforderliche Gradientenberechnung macht wiederholte Funktionsaufrufe der FEM-Berechnung notwendig. Die nichtlineare FEM-Berechnung selber stellt ebenfalls eine iterative Lösung von Gleichgewichtsbedingungen mit wiederholten Lösungen des Strukturgleichungssystems dar. An die Genauigkeit der numerischen Berechnung werden bei einer Gradientenermittlung hohe Anforderungen gestellt. Vor diesem Hintergrund spielt insbesondere

der Faktor *Rechenzeit* eine bedeutende Rolle. Der Rechenaufwand steigt dabei nicht nur bei einer Erhöhung der Anzahl der Basisvariablen sondern insbesondere auch mit dem Grad der Nichtlinearität der Grenzzustandsfunktion. Auf die Anwendung von Simulationsverfahren, die mit der hier beschriebenen Methode und den vorhandenen Programmroutinen ebenfalls möglich ist, wird im Hinblick auf die erforderlichen Rechenzeiten verzichtet.

Die Diskretisierung eines Systems hinsichtlich seiner Zufallsvariablen ist durch das FEM-Netz in gewisser Weise vorgegeben, da Material- und Belastungsbeschreibung im hier vorhandenen FEM-Modell an die Elementbeschreibung gekoppelt sind. Die Diskretisierung der Zufallsfelder und der finiten Elemente muß dementsprechend aufeinander abgestimmt sein, d.h. die Zufallsfelddiskretisierung kann keinesfalls feiner als die FEM-Diskretisierung sein. Autokorrelationen zwischen den Zufallsvariablen müssen über die Elementbeschreibung erfaßt werden.

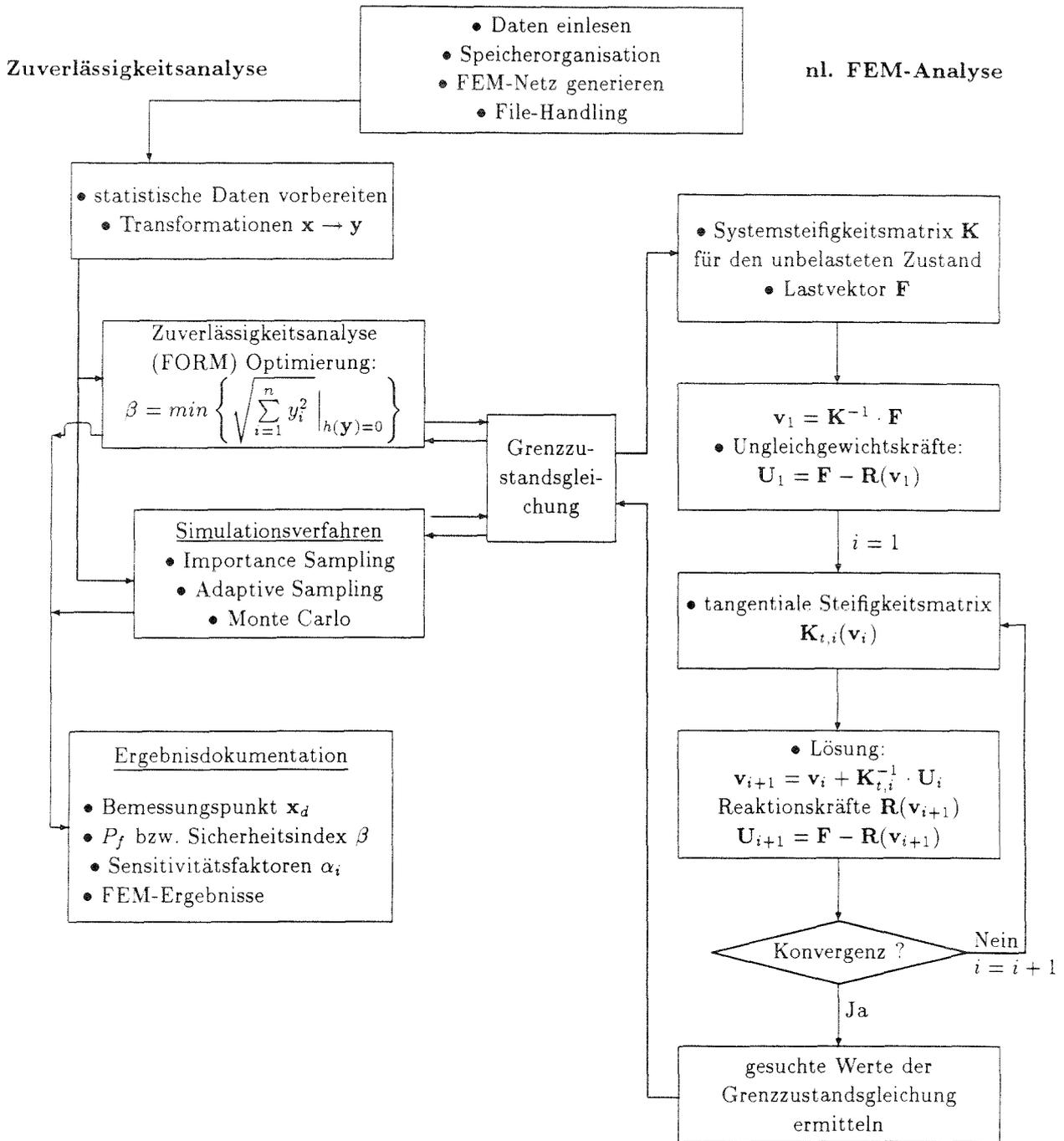


Abb. 4.7: Schematischer Ablauf der Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode

## Kapitel 5

# Studie zur Sicherheit von Stahlbetonstabtragwerken unter eingepprägten Verformungen und Lastbeanspruchungen

In diesem Kapitel werden zunächst die im EC 2 [26] formulierten Grenzzustände für Stahlbetontragwerke im Hinblick auf ihre Anwendung in sicherheitstheoretischen Berechnungen diskutiert. Anschließend werden anhand ausgewählter Beispiele zuverlässigkeitstheoretische Berechnungsergebnisse vorgestellt und erläutert. Die Berechnungen werden mit dem in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten und im Rahmen dieser Arbeit implementierten Computerprogramm durchgeführt. Die Beispiele sind unter dem vorwiegenden Gesichtspunkt ausgewählt, die bestehenden normativen Regelungen des EC 2 [26] hinsichtlich der Behandlung von Lasten und eingepprägten Verformungen zu verifizieren und das unterschiedliche Tragverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last und Zwang mit den Mitteln der Zuverlässigkeitstheorie zu beschreiben. Die Ergebnisse werden hauptsächlich anhand des rechnerischen Sicherheitsniveaus  $\beta$  in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad und der zugehörigen Bemessungseinwirkung aufgetragen.

### 5.1 Grenzzustandsfunktionen für Stahlbetontragwerke

Nach der sicherheitstheoretischen Definition ist ein Grenzzustand ein Zustand, bei dessen Überschreiten die gestellten Anforderungen nicht mehr erfüllt werden (vgl. auch Kapitel 2). Für die konkreten Anwendungen sicherheitstheoretischer

Untersuchungen sind daher bestimmte Grenzzustandsfunktionen zu formulieren, wobei im allgemeinen zwischen den Anforderungen der Gebrauchstauglichkeit und den Anforderungen der Tragfähigkeit unterschieden wird. Im Stahlbetonbau sind aufgrund von langjährigen Erfahrungen entsprechende Grenzzustandsfunktionen unter dem Begriff *Nachweis* bekannt. In den auf probabilistischer Grundlage erstellten Normen (EC 2, MC 90, SIA, ACI) sind die erforderlichen Nachweise schon als Grenzzustandsgleichung bezeichnet und formuliert. Im allgemeinen ist es nicht möglich, alle Anforderungen, die an ein Tragwerk zu stellen sind, mit einer einzigen Grenzzustandsfunktion zu erfassen. Daher sind für ein System meistens mehrere Grenzzustandsfunktionen (ggf. auch für veränderliche Bezugspunkte) zu betrachten.

### 5.1.1 Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

#### a.) Spannungsbegrenzung im Beton und Stahl

Die Begrenzung der Betonspannungen bzw. der Stahlspannungen unter Gebrauchslast dient im wesentlichen der Vermeidung von unerwünschten Rissen im Beton sowie übermäßigen Verformungen und formuliert damit letztendlich die Anforderungen an die Dauerhaftigkeit. Nach EC 2 [26] sind folgende Anforderungen zu erfüllen:

1.

$$\sigma_{c,vorh} < 0,6f_{ck} \quad (5.1)$$

d.h. der 0,6-fache Wert der charakteristischen Betondruckfestigkeit soll für die seltene Lastkombination nicht überschritten werden. Diese Anforderung dient der Dauerhaftigkeit und der Vermeidung von Längsrissen.

2.

$$\sigma_{c,vorh} \leq 0,45f_{ck} \quad (5.2)$$

Eine Begrenzung der Betonspannung auf 45% seiner charakteristischen Druckfestigkeit ist zur Vermeidung übermäßiger Kriechverformungen unter der quasi-ständigen Lastkombination erforderlich.

3.

$$\sigma_s \leq 0,8f_{yk} \text{ bzw.} \quad (5.3)$$

$$\sigma_s \leq f_{yk} \quad (5.4)$$

Die Zugspannungen im Betonstahl sind unter der seltenen Lastkombination auf 80% der charakteristischen Streckgrenze zu begrenzen.

Wenn die Spannungen ausschließlich durch Zwang hervorgerufen werden, so sind die Betonstahlzugspannungen auf 100% der charakteristischen Streckgrenze des Stahls begrenzt (Gl. 5.4).

Nach EC 2 gelten die Nachweise zur Spannungsbegrenzung als erfüllt, wenn die allgemeine Bemessung für den Grenzzustand der Tragfähigkeit erfolgt ist, sowie die Festlegungen zur Mindestbewehrung und baulichen Durchbildung eingehalten sind. Dies gilt insbesondere auch für die Bemessung auf der Basis der linearen Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung (bis zu 30%). Bei höheren Umlagerungen läßt sich durch Vergleichsrechnungen zeigen, daß die geforderten Spannungsbegrenzungen allerdings nicht immer eingehalten werden. Bei nichtlinearen Verfahren zur Schnittgrößenermittlung und Bemessung sind nach EC 2 [26] die Gebrauchstauglichkeitsnachweise generell zu führen.

Aus Vergleichsrechnungen ist bekannt, daß die Begrenzung der Betondruckspannung sehr restriktiv sein kann. Dieser Nachweis ist allerdings nicht unbedingt bemessungsentscheidend, da durch konstruktive Maßnahmen wie ausreichende Betondeckung und Umbügelung der Druckzone der Gefahr von Mikrorißbildung und übermäßiger Querspannung begegnet werden kann [51]. Nur falls übermäßige Kriechverformungen vermieden werden müssen, ist eine Begrenzung der Betondruckspannungen unbedingt einzuhalten.

#### b.) Beschränkung der Rißbreite

Das Prinzip zur Beschränkung der Rißbreiten nach EC 2 stellt zwei Anforderungen:

1. Anordnung einer Mindestbewehrung
2. Beschränkung der Rißbreite auf eine zulässige Größe (entweder durch explizite Berechnung oder in Form von konstruktiven Regeln).

##### Mindestbewehrung:

Eine Mindestbewehrung dient der Vermeidung breiter Einzelrisse. Zentraler Gedanke bei der Festlegung der Mindestbewehrung ist die Bedingung, daß bei einer aufgezwungenen Querschnittsdehnung, die größer als die rechnerische Zugdehnung des Betons ist, die vom Beton maximal aufnehmbare Zugkraft von der Zugbewehrung aufgenommen werden muß. Dabei soll in der entsprechenden Zugbewehrung die Streckgrenze nicht überschritten

werden, d.h.

$$A_{ct,eff} \cdot f_{ct} \leq A_s \cdot f_{yk}. \quad (5.5)$$

Bei Bauteilbereichen, in denen unter der seltenen Lastkombination aus Last und Zwang keine Zugspannungen zu erwarten sind, kann auf die Mindestbewehrung verzichtet werden. Falls die Schnittgröße infolge der quasi-ständigen Lastkombination nicht größer als die Rißschnittgröße ist, darf die Mindestbewehrung für die tatsächlichen Schnittgrößen ermittelt werden [15]. Die Gl. 5.5 gilt allgemein für Zugbeanspruchte Querschnitte, wobei  $A_{ct,eff}$  die effektive Betonzugfläche (Biegezwang:  $A_{ct,eff} \approx 0,5 \cdot A_{ct}$ , zentrischer Zug:  $A_{ct,eff} \leq A_{ct}$ ),  $f_{ct}$  die wirksame Zugfestigkeit,  $A_s$  der Stahlquerschnitt und  $f_{yk}$  der charakteristische Wert der Stahlstreckgrenze ist.

#### Grenzzustandsfunktion zur Mindestbewehrung

Die Grenzzustandsfunktion für die erforderliche Mindestbewehrung lautet:

$$\begin{aligned} \text{aufnehmbare Betonzugkraft} &\leq \text{ertragbare Stahlzugkraft} \\ F_{ct} &\leq F_s \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei

$F_{ct}$  = Zugkraft im Beton unter Berücksichtigung der entsprechenden Dehnungsverteilung sowie der effektiven Betonzugfestigkeit. Die Kraft kann aus der zur Rißschnittgröße zugehörigen inneren Querschnittsbeanspruchung ermittelt werden.

$F_s$  = die beim Erreichen der Streckgrenze im Stahl aufnehmbare Stahlkraft,  $F_s = A_s \cdot f_{yk}$ .  $A_s$  ist die im Bereich der effektiven Betonzugfläche vorhandene Bewehrung.

#### Zulässige Rißbreite:

Die Rißbreiten werden unter Gebrauchslasten beschränkt, um ausreichenden Korrosionsschutz zu gewährleisten (Dauerhaftigkeitsanforderungen). Zudem stört die Rißbildung im Beton in vielen Fällen das ästhetische Empfinden. Bauwerksuntersuchungen und Analysen von Schadensfällen haben gezeigt, daß Risse aus Lastbeanspruchung praktisch nur selten die Ursache von Schäden sind oder als Schäden eingestuft werden können [67], sofern keine Konstruktionsmängel vorliegen. Wenn allerdings unter Zwangsbeanspruchungen die Streckgrenze der Bewehrung überschritten wird und damit klaffende Risse auftreten, ist mit entsprechenden Schäden zu rechnen.

Derartige Risse müssen durch eine ausreichend dimensionierte Bewehrung vermieden werden. Die Berechnung der Rißbreite nach EC 2 [26] basiert auf der Beziehung:

$$w_k = k_4 \cdot s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm}. \quad (5.7)$$

Dabei ist

$w_k$  = Rechenwert der Rißbreite (kritische Rißbreite)

$k_4$  = Streufaktor, Verhältnis von Rechenwert ( $w_k$ ) zum Mittelwert ( $w_m = s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm}$ ) der Rißbreite. Im EC 2 [26] wird empfohlen, mit  $k_4 = 1,7$  für eine durch Lasten hervorgerufene Rißbildung sowie für Rißbildung infolge Zwang bei Querschnitten mit Abmessungen  $\geq 800$  mm zu rechnen. Für Querschnitte mit Abmessungen  $\leq 300$  mm und Rißbildung infolge Zwang wird  $k_4 = 1,3$  angegeben. Zwischenwerte können linear interpoliert werden.

$\varepsilon_{sm}$  = mittlere Stahldehnung. Die mittlere Stahldehnung berücksichtigt die Mitwirkung des Betons auf Zug. Der Wert von  $\varepsilon_{sm}$  kann dabei aus einer Näherungsformel nach [26][61] oder auch direkt aus einer wirklichkeitsnahen Systemberechnung entnommen werden (vgl. Abschnitt 3.45).

$s_{rm}$  = mittlerer Rißabstand bei abgeschlossenem Rißbild. Der mittlere Rißabstand  $s_{rm}$  wird über die empirische Beziehung

$$s_{rm} = 50 + 0,25 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{d_s}{\rho_r} \quad [\text{mm}] \quad (5.8)$$

nach [26] ermittelt. Dabei ist

$d_s$  = mittlerer Stabdurchmesser in [mm]

$k_1$  = Beiwert zur Berücksichtigung der Verbundeigenschaften der Bewehrungsstäbe ( $= \frac{f_{ctm}}{r_m}$ )

$k_1 = 0,8$  für Rippenstähle,  $k_1 = 1,6$  für glatte Stähle

Bei Zwangsbeanspruchungen sollte  $k_1$  durch das Produkt  $k_1 \cdot k$  ersetzt werden (Berücksichtigung der Verminderung der Rißschnittgrößen durch Eigenspannungen).

$k = 0,8$  innerer Zwang

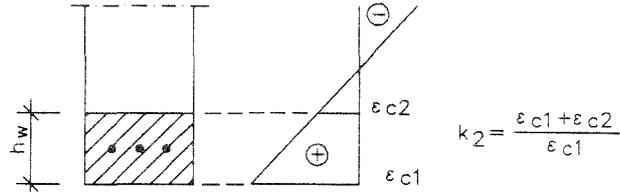
$$\left. \begin{array}{l} k = 0,8 \quad \text{bei } h \leq 30 \text{ cm} \\ k = 0,5 \quad \text{bei } h \geq 80 \text{ cm} \end{array} \right\} = \text{für Rechteckquerschnitte}$$

$k = 1,0$  äußerer Zwang

$k_2$  = Beiwert zur Berücksichtigung des Einflusses der Dehnungsverteilung

= 0,5 für Biegung, = 1,0 für Zug

Allgemein wird der Beiwert  $k_2$  wie in der untenstehenden Abbildung dargestellt ermittelt.



$\rho_r = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$  = wirksamer Bewehrungsanteil.  $A_s$  entspricht dem Zugbewehrungsquerschnitt innerhalb der wirksamen Zugzone  $A_{c,eff}$ .  $A_{c,eff}$  entspricht im allgemeinen derjenigen Betonfläche, die die Zugbewehrung umgibt und eine Höhe gleich dem 2,5-fachen Abstand der Randzugfaser vom Schwerpunkt der Bewehrung aufweist (vgl. EC 2 [26]).

#### Grenzzustandsfunktion der Rissebeschränkung

Auf der Grundlage der oben beschriebenen Zusammenhänge kann die Grenzzustandsfunktion zur Rissebeschränkung wie folgt formuliert werden:

$$w_m \leq w_{lim} \quad (5.9)$$

wobei

$w_m$  = die mittlere rechnerische Rißbreite. Dabei wird der Steuerungsfaktor zur Berechnung des Fraktilwertes der Rißbreite aus dem rechnerischen Mittelwert nach Gl. 5.7 vernachlässigt, um in der Grenzzustandsfunktion nicht schon implizit einen zusätzlichen Sicherheitsabstand zu berücksichtigen.

$w_{lim}$  = Nennwert der zulässigen Rißbreite. Dieser Nennwert wird in Abhängigkeit der vorgesehenen Nutzung des Bauteils (Umweltbedingungen, Dauerhaftigkeitsanforderungen) festgelegt. Für allgemeine Fälle beträgt im Stahlbetonbau  $w_{lim} = 0,3$  mm. Bei trockenen Innenbauteilen ist ein größerer Wert zulässig.

#### c.) Beschränkung der Durchbiegung

Bauwerksverformungen unter Gebrauchslasten können die Nutzungsfähigkeit erheblich beeinträchtigen. Eine Beschränkung der Verformungen im

Hinblick auf unschädliche Werte kann einheitlich nicht immer angegeben werden, da die Auswirkungen von Bauwerksverformungen nicht nur das betrachtete Bauteil selbst betreffen (wie z.B. Wasseransammlungen auf Deckenträgern, optisch störender Deckendurchhang oder allgemeiner: für das menschliche Auge sichtbare Verformungen), sondern auch mögliche Schäden in angrenzenden Bauteilen (z.B. Risse in Trennwänden, Putz oder Belägen, Schäden an Fassaden, Installationen, Maschinen oder Verformungen an angrenzenden Bauwerksöffnungen wie Türen und Fenstern). Die Einflußgrößen und Ursachen für Bauwerksverformungen sind im Stahlbetonbau sehr vielschichtig und werden im folgenden stichwortartig aufgezählt: Materialverhalten (Elastizitätsmodul von Beton und Stahl, Zugfestigkeit des Betons, Verbundeigenschaften, Größe und zeitlicher Verlauf von Kriechen und Schwinden, Bewehrungsgrad, Lage der Bewehrung), statisches System (Einspanngrad und effektive Stützweiten), und natürlich tatsächliche Beanspruchung des Systems (Last, eingeprägte Verformungen, Temperatur).

Nach EC 2 [26] wird die zu erwartende Durchbiegung  $f$  (senkrecht zur Stabachse) von biegebeanspruchten Bauteilen auf zulässige Grenzwerte beschränkt. Dabei sollen aus optischen Gründen die Verformungen infolge der quasi-ständigen Lasten  $1/250$  der Stützweite nicht überschreiten. Um Schäden in angrenzenden Bauteilen zu vermeiden, soll eine Verformung von  $1/500$  der Stützweite nicht überschritten werden. Diese Verformungsbegrenzung ist allerdings im Zusammenhang mit dem betrachteten angrenzenden Bauteil zu sehen und gilt als Anhaltswert, der ggf. spezifiziert werden muß. Die Angaben in EC 2 [26] beziehen sich u.a auf ISO 4356 [40], *Deformations of buildings at the serviceability limit states*, wo versucht wird, Ursachen und Grenzwerte für Verformungen im allgemeinen Hochbau zu charakterisieren. Dort werden auch speziell für relative Setzungen (infolge Fundamentverschiebungen) Verformungsgrenzwerte angegeben. Diese betragen für Schäden an Fundamenten  $1/100$  der Stützweite und für Schäden an angrenzenden Bauteilen (Balken, Wände)  $1/500$  der Stützweite. Für auskragende Bauteile betragen die Grenzwerte aus optischen Gründen  $1/250$  der sichtbaren Stützweite oder 15 mm und  $1/100$  der Stützweite zur Gewährleistung der Nutzungseigenschaften. Bezüglich horizontaler Verformungen aus unterschiedlichen Setzungen gilt der Grenzwert  $1/250$  der Etagenhöhe.

Grenzzustandsfunktion der Durchbiegungsbeschränkung

Mit den oben erläuterten Grenzwerten lautet die entsprechende Grenzzustandsfunktion:

$$f_{cal} \leq f_{lim} = \frac{\text{Spannweite}}{\text{Spannweitenfaktor}}, \quad (5.10)$$

mit

$f_{cal}$  die rechnerische Durchbiegung

$f_{lim}$  Nennwert der zulässigen Durchbiegung als Funktion der Spannweite  $\ell$ ,  $f_{lim} = \frac{\ell}{100}$  bis  $\frac{\ell}{500}$

### 5.1.2 Grenzzustand der Tragfähigkeit

Für die hier betrachteten, vorwiegend auf Biegung beanspruchten Tragwerke ist die Grenztragfähigkeit im wesentlichen durch das maximal aufnehmbare Querschnittsmoment  $M_u$  bzw. durch die Verformungskapazität an den kritischen Stellen des Tragwerkes definiert. Die Grenzbiegetragfähigkeit von Stahlbetonquerschnitten wird dabei unter folgenden Bedingungen ermittelt:

1. Ebenbleiben der Querschnitte
2. Vollkommener Verbund zwischen Stahl und Beton
3. Bestimmung der Verteilung der Betonspannungen bzw. der Stahlspannungen entsprechend den rechnerischen Spannungsdehnungslinien für Beton und Stahl (vgl. Kapitel 3)
4. Bei Querschnitten, die nicht vollkommen überdrückt sind, ist die maximale Betonranddehnung auf  $-3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  begrenzt. Die maximale Stahldehnung  $\varepsilon_u$  wird entsprechend den vorhandenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls gewählt. Bei vollkommen überdrückten Querschnitten ist die Dehnung auf  $-2,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  begrenzt.

Bei der Definition der Biegetragfähigkeit ist zwischen einer Anwendung zur Bemessung (z.B. Biegebemessung nach EC 2) und der Anwendung innerhalb einer nichtlinearen Schnittgrößenermittlung bzw. einer probabilistischen Berechnung zu unterscheiden. In den Bemessungsrichtlinien werden beispielsweise Grenzzustandsbereiche angeben, die als Bemessungswerte in die Ermittlung der deterministischen Querschnittstraglast eingehen. Im Rahmen der zuverlässigkeitstheoretischen Berechnungen muß bei der Definition der Querschnittstraglast, soweit es sich nicht um Zufallsvariablen handelt, im allgemeinen von den mittleren Eigenschaften der maßgebenden Parameter ausgegangen werden. Im Fall der

maximal zulässigen Querschnittsranddehnungen (Bruchdehnungen) können die zugehörigen Mittelwerte als Versagenkriterium dienen. Im Zusammenhang mit der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung hat die Definition der zulässigen Querschnittsranddehnungen allerdings noch zusätzliche Auswirkungen auf die möglichen Schnittgrößenumlagerungen bzw. auf die Verformungskapazität. Bei der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung ist im Gegensatz zu reinen Plastizitätstheorie eine Begrenzung der Verformungsfähigkeit durch die Definition der Querschnittsbruchkriterien auf der Basis der Duktilitätseigenschaften des Materials zu beachten. Insofern hat die Definition der Biegetragfähigkeit erheblichen Einfluß auf die probabilistische Systemanalyse.

#### Grenzzustandsfunktion für Biegebeanspruchung

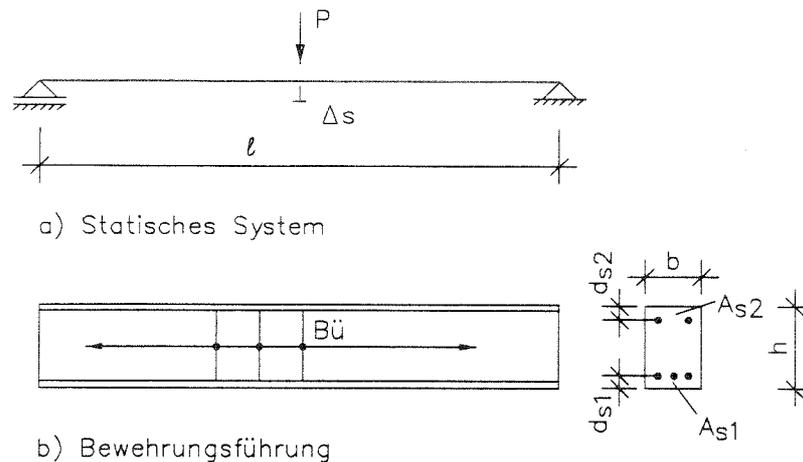
Die Grenzzustandsfunktion für das ertragbare Biegemoment ( $M_u$ ) eines ausgewählten Systemquerschnittes lautet:

$$M_u(x_{\text{Querschnitt}}, N) \geq M_{\text{System}}(x_i). \quad (5.11)$$

Hierbei ist  $M_u(x_{\text{Querschnitt}}, N)$  das maximal ertragbare Biegemoment als Funktion aller deterministischen und statistischen Querschnittsparameter sowie der zugehörigen Normalkraft  $N$ .  $M_{\text{System}}(x_i)$  bezeichnet das im System wirkende Biegemoment an dem betrachteten Querschnitt als Funktion aller deterministischen und statistischen System- und Querschnittsparameter. Die Begrenzung der zulässigen Betonstauchung auf  $-3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  ist in Anlehnung an die Bemessungsgrenzwerte nach EC 2 und die hier verwendete Polynom-Rechteckbeziehung für Betondruckbeanspruchungen gewählt. Im Rahmen der nichtlinearen bzw. probabilistischen Berechnung stellt diese Voraussetzung eine gewisse Erleichterung dar, weil durch einen konstanten Wert keine weiteren Unterscheidungen zwischen den einzelnen Betonfestigkeitsklassen erforderlich sind. Andererseits ist durch diese Annahme die erzielbare Rechengenauigkeit für die hier behandelten Aufgabenstellungen nicht wesentlich beeinträchtigt. Die zulässige Stahlzugdehnung wird im Zusammenhang mit den Duktilitätseigenschaften des Stahls gewählt (vgl. Abschnitt 3.5.4). Dabei wird als Grenzdehnung die Stahldehnung bei Höchstlast  $\varepsilon_u$  angenommen.

## 5.2 Stahlbetonträger unter Last bzw. Zwangsbeanspruchung

Als erstes Systembeispiel wird der in Abb. 5.1 dargestellte Einfeldträger mit einer Einzellast  $P$  in Feldmitte bzw. alternativ mit einer entsprechenden eingepprägten Verformung  $\Delta s$  betrachtet. Als Parameter der Systemuntersuchungen



**Abb. 5.1:** Statisches System und Bewehrungsführung

dient der Bewehrungsgrad  $\rho$  bzw. die hiermit korrespondierende äußere Belastung  $P = P(\rho)$  sowie der Mittelwert der eingepprägten Verformung  $\Delta s$  in Balkenmitte. Die gewählten Systemkennwerte sind in der Tab. 5.1 zusammengefaßt. Die Ermittlung der zu dem Bewehrungsgrad  $\rho$  zugehörigen Belastung  $P$  erfolgt aus dem rechnerischen Bemessungsmoment  $M_d$  unter Annahme ausschließlich ständiger Last ( $\gamma_G = 1,35$ ). Die Bemessung der Querschnitte erfolgt auf der Grundlage des EC 2 [26] mit einer bilinearen Kennlinie für den Stahl ( $f_t/f_y = 1.0$ ) und der Parabel-Rechteckbeziehung für den Beton unter Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit. Die Annahmen zu den statistischen Kenngrößen für die Belastung und die Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.2 zusammengefaßt. Im Gegensatz zu den rechnerischen Grundlagen für die durchgeführte Bemessung werden zur wirklichkeitsnahen Systemanalyse bei der probabilistischen Berechnung insbesondere die Stahlkennlinie nach Dilger, das Polynom-Rechteckdiagramm für die Betondruckzone sowie die Mitwirkung des Betons auf Zug berücksichtigt (vgl. Kapitel 3). Die Querschnittsbreite  $b$  hat bei Rechteckquerschnitten, wie eigene Vergleichsrechnungen zeigten, keinen signifikanten Einfluß auf die Zuverlässigkeit und wird daher als deterministisch mit  $b =_{nom} b$  aufgefaßt. Der in die statistische Berechnung eingehende Vektor der Basiszufallsvariablen lautet damit für

Feldlänge $\ell = 3,0$ [m]		$A_{s2} = 0,0$ [cm <sup>2</sup> ]		$\gamma_G = 1,35$	
Rechteckquerschnitt: $b/h = 20/30$ [cm]				$d_{s1} = 2,5$ [cm]	
Baustoffe : C 20/25		BSt 500			
$\rho$ [%]	$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ]	$M_d$ [kNm]	$P_G = \frac{M_d \cdot 4}{\gamma_G \cdot \ell}$ [kN]	$\frac{\Delta P_G}{\Delta \rho}$ [ $\frac{\text{kN}}{\%}$ ]	mitt. Stab- $\emptyset$ [mm]
0,2	1,10	12,59	12,43		8
0,3	1,65	18,53	18,30	58,7	8
0,4	2,20	24,23	23,90	56,0	10
0,5	2,75	29,60	29,24	53,4	11
0,6	3,30	34,75	34,32	50,8	12
0,7	3,85	39,15	39,15	48,3	13
0,8	4,40	44,27	43,73	45,8	14
0,9	4,95	48,64	48,04	43,1	15
1,0	5,50	52,74	52,11	40,7	16
1,2	6,60	60,21	59,47	36,8	17
1,4	7,70	64,54	63,75	21,4	18
1,6	8,80	66,01	65,19	7,2	19

Tab. 5.1: Systemparameter des Einfeldträgers

den Lastfall  $P$  (vgl. Abschnitt 5.2.1):

$$\mathbf{x} = (f_c \ f_y \ A_{s1} \ d_{s1} \ h \ P_G)^T$$

bzw. für den Lastfall  $\Delta s$  (vgl. Abschnitt 5.2.2):

$$\mathbf{x} = (f_c \ f_y \ A_{s1} \ d_{s1} \ h \ \Delta s)^T.$$

Der Träger ist über seine gesamte Länge  $\ell$  konstant bewehrt. Die Materialien werden über die Trägerlänge als perfekt korreliert angenommen. Alle Grenz-

Basisvariable:	$f_c$ [ $\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ ]	$f_y$ [ $\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ ]	$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ]	$d_{s1}$ [cm]	$h$ [cm]	$P$ [kN]	$\Delta s$ [mm]
Mittelwert $\mu$	28	560	${}_{nom}A_{s1}$	3	30	${}_{nom}P_G$	2 - 12
Standardabweichung $\sigma$	5	30	$0,025\mu_{A_{s1}}$	0,5	0,5	$0,1\mu_{P_G}$	$0,4\mu_{\Delta s}$
Verteilung	LN	LN	N	N	N	N	N
Kennwerte nach EC 2							
Charakteristischer Wert	20	500	$\mu_{A_{s1}}$	2,5	30	$\mu_{P_G}$	$\mu_{\Delta s}$
Teilsicherheitsbeiwert	1,50	1,15	-	-	-	1,35	1,0
Detern. Bemessungswert	$13,33^{*)}$	434	$\mu_{A_{s1}}$	2,5	30	$\gamma_G \cdot \mu_{P_G}$	$\mu_{\Delta s}$

\*Bei der Bemessung nach EC 2 wird zur Berücksichtigung des Dauerlasteinflusses der Bemessungswert der Betondruckfestigkeit  $f_{cd}$  mit dem Faktor  $\alpha = 0,85$  reduziert

Tab. 5.2: Statistische Material- und Belastungskennwerte der Basisvariablen

zustandsgleichungen werden bei diesem Beispiel ausschließlich für die Feldmitte formuliert, da hier die höchsten Beanspruchungen auftreten und somit der ungünstigste Fall erfaßt wird.

### 5.2.1 Lastbeanspruchung $P_G$

Für den Grenzzustand der Tragfähigkeit wird die rechnerische Traglast des Systems anhand der Querschnittstragfähigkeit bzw. Verformungsfähigkeit entsprechend Gl. 5.11 untersucht. Bezüglich der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit werden die Nachweise zur

- Rissebeschränkung:  $w_{lim} = 0,3$  [mm] (vgl. Gl. 5.9)
- Betonspannungsbegrenzung:  $\sigma_c = 0,6 \cdot f_{ck}$  (vgl. Gl. 5.1)
- Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 0,8 \cdot f_{yk}$  (vgl. Gl. 5.3)
- Durchbiegungsbegrenzung mit  $f_{lim} = \frac{\ell}{250}$  und  $f_{lim} = \frac{\ell}{500}$  (vgl. Gl. 5.10)

betrachtet. In der Abb. 5.2 ist der Sicherheitsindex  $\beta$  für den beschriebenen

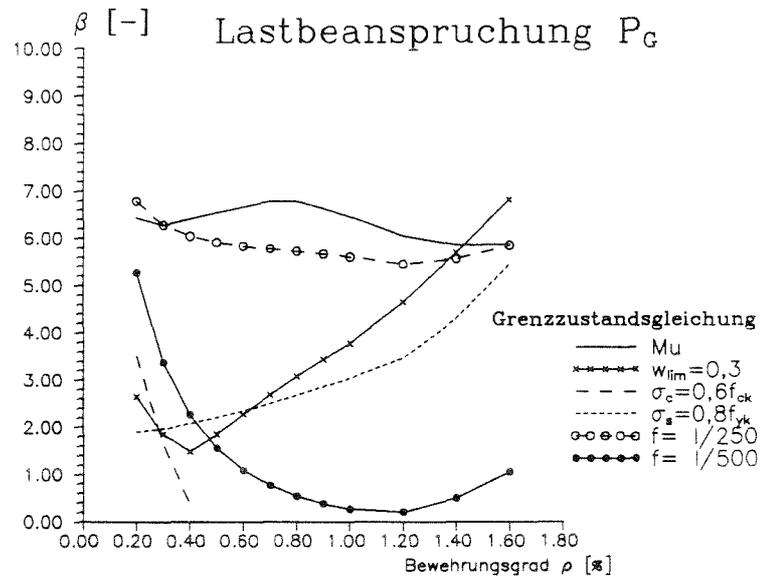


Abb. 5.2: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Einfeldträger unter Lastbeanspruchung  $P_G$  für verschiedene Grenzzustände

nen Einfeldträger unter der Lastbeanspruchung  $P_G$  für die sechs untersuchten Grenzzustände über dem Bewehrungsgrad  $\rho$  aufgetragen. Die Ergebnisse werden zunächst getrennt für die einzelnen Grenzzustände diskutiert.

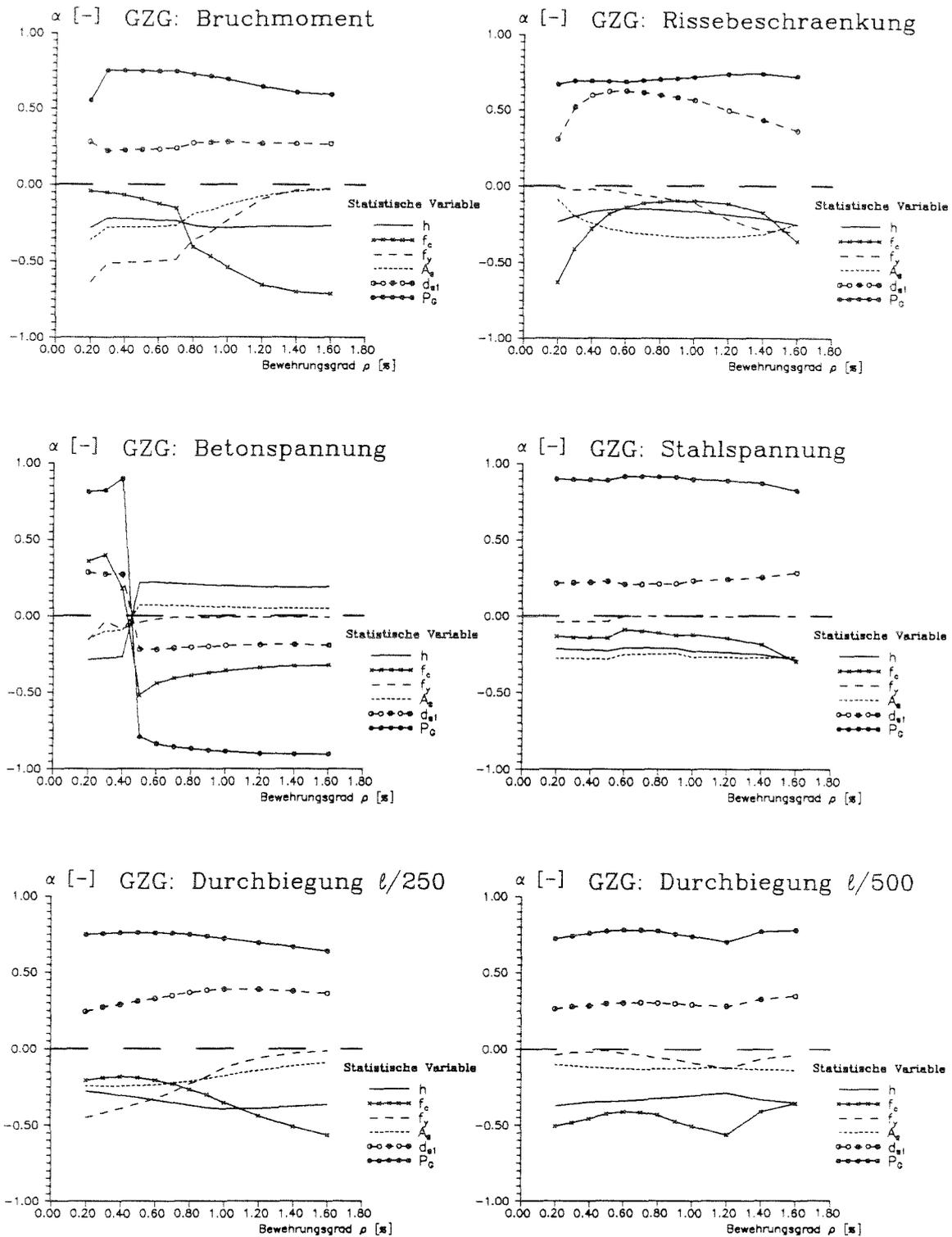


Abb. 5.3: Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  für verschiedene Grenzzustände infolge ständiger Lastbeanspruchung  $P_G$  in Abhängigkeit vom Bewehrungsgrad  $\rho$

$\beta_{M_u}$  Die rechnerische Definition des Bruchmomentes und der Verformungsfähigkeit ergibt sich aus den (aktuellen) Festigkeitswerten sowie den Querschnittsgrenzdehnungen, die hier mit  $\varepsilon_{cu} = -3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und  $\varepsilon_u = 10,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  angenommen werden. Mit der Stahlkennlinie entsprechend Gl. 3.2 nach Dilger wird im Gegensatz zur linearelastisch-idealplastischen Bemessungskennlinie auch über die Streckgrenze hinaus eine weitere Stahlverfestigung bis zum Erreichen der Stahlzugfestigkeit ( $f_t/f_y = 1,13$ ) berücksichtigt. Der Sicherheitsindex  $\beta$  für die Bemessung nach EC 2 und ständiger Beanspruchung liegt für  $\rho < 1,2\%$  oberhalb von 6. Das Sicherheitsniveau ist relativ gleichmäßig für die verschiedenen Kombinationen von Lasten und Bewehrungsgrad (Schwankungsbreite im Sicherheitsindex von  $\approx 1$ ). Maßgebend für das Sicherheitsniveau in diesem Grenzzustand sind neben der äußeren Belastung  $P_G$  im wesentlichen die Festigkeitswerte von Beton und Stahl (vgl. auch die entsprechenden Sensitivitätsfaktoren  $\alpha$  in Abb. 5.3). Die vorhandenen Dehnungsgrenzen der Materialien bestimmen neben den Querschnitts- und Systemabmessungen ganz wesentlich die Verformbarkeit und damit auch die Traglast eines Stahlbetonträgers.

Der Einfluß der Stahlverfestigung bis zum Erreichen der Zugfestigkeit hat eine signifikante Auswirkung auf das Sicherheitsniveau in den Fällen, in denen im Bemessungspunkt die Stahlstreckgrenze  $\varepsilon_y$  überschritten bzw. die Stahlgrenzdehnung  $\varepsilon_u$  erreicht wird. Verzichtet man (wie bei der deterministischen Bemessung allgemein üblich) bei den sicherheitstheoretischen Betrachtungen auf diesen Einfluß (bilineare Stahlkennlinie mit  $f_t/f_y = 1,0$ ), sinkt der Wert von  $\beta$  in den genannten Fällen deutlich ab. Für das hier gewählte Beispiel wird im Bemessungspunkt die Stahlstreckgrenze für  $\rho < 1,2\%$  überschritten bzw. für  $\rho > 1,2\%$  gerade erreicht. Für die Bewehrungsgrade  $\rho < 0,8\%$  ist das Erreichen der Stahlgrenzdehnung für das Systemversagen maßgebend, für  $\rho \geq 0,8\%$  ist durch Erreichen der Betongrenzdehnung im Bemessungspunkt der Versagenszustand erreicht. Ab hier fällt das Sicherheitsniveau wieder ab.

Die Kurve für die betrachtete Grenzzustandsgleichung  $M_u$  in Abb. 5.2 läßt sich entsprechend den maßgebenden Einflußparametern charakterisieren. Diese sind in Form der Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  in der

Abb. 5.3 dargestellt. Für Bewehrungsgrade zwischen  $\rho = 0,3$  und  $0,7\%$  hat die Betonfestigkeit noch geringen Einfluß auf den Grenzzustand der Tragfähigkeit, die Belastung  $P$  und die Stahlstreckgrenze  $f_y$  bestimmen im wesentlichen den Bemessungspunkt. Zwischen  $\rho = 0,7$  und  $1,2\%$  nimmt der Einfluß der Stahlfestigkeit bei gleichzeitig steigendem Einfluß der Betondruckfestigkeit ab. Oberhalb von  $\rho = 1,2\%$  dominieren die Betonfestigkeit und die Belastung  $P_G$ . Die desweiteren berücksichtigten statistischen Variablen  $h$  und  $d_{s1}$  haben für alle Bewehrungsgrade einen relativ gleichbleibenden Einfluß. Die Querschnittshöhe  $h$  ist im Bemessungspunkt kleiner als ihr Mittelwert (negatives  $\alpha$ ), der Randabstand der Zugbewehrung  $d_{s1}$  größer als der Mittelwert (positives  $\alpha$ ). Der Einfluß des Stahlquerschnitts  $A_{s1}$  verhält sich näherungsweise parallel zum Einfluß der Stahlstreckgrenze. Für höhere Bewehrungsgrade ( $\rho > 1,2\%$ ) entsprechen die Mittelwerte von  $A_{s1}$  und  $f_y$  ungefähr auch den (zuverlässigkeitstheoretischen) Bemessungswerten.

$\beta_{w_{lim}}$

Der Grenzzustand der Rissebeschränkung auf  $0,30$  mm ist charakterisiert durch den in der Abb. 5.2 zwischen  $\rho = 0,2$  bis  $0,4\%$  fallenden und anschließend wieder steigenden Sicherheitsindex. Wesentliche Einflußgrößen auf den Grenzzustand der Rissebeschränkung sind neben dem nahezu konstant hohen Belastungseinfluß für den gesamten betrachteten Bewehrungsbereich insbesondere der Randabstand der Zugbewehrung  $d_{s1}$ . Für Bewehrungsgrade  $\rho < 0,4\%$  weist der Einfluß der Betonfestigkeit ( $\alpha_i = 0,3$  bis  $0,7$  in Abb. 5.3) auf die hohe Bedeutung der Mitwirkung des Betons auf Zug für schwach bewehrte Querschnitte hin, d.h. der Wert der mittleren Stahldehnung im Bemessungspunkt hat dominieren Einfluß auf das Sicherheitsniveau. Im betrachteten Beispiel steigt  $\varepsilon_{sm}$  von  $1,4 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  ( $\rho = 0,2\%$ ) auf  $\varepsilon_{sm} = 2,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  ( $\rho = 0,4\%$ ). Für Bewehrungsgrade  $\rho > 0,4\%$  steigt der Sicherheitsindex wieder nahezu linear an. In diesem Bewehrungsbereich dominieren für den Grenzzustand der Rissebeschränkung nicht mehr die Einflüsse aus der Mitwirkung des Betons auf Zug, sondern die statistischen Parameter, die in die Bestimmung des mittleren Rißabstandes  $s_{rm}$  eingehen. Dies ist im wesentlichen der Bewehrungsgrad der effektiven Zugzone  $\rho_z$ , der durch die Werte von  $A_{s1}$  und  $d_{s1}$  bestimmt wird.

$\beta_{\sigma_c}$

Der Grenzzustand der Druckspannungsbegrenzung im Beton erreicht nur für kleine Bewehrungsgrade ( $\rho < 0,45\%$ ) einen Sicherheitsindex

von  $\beta > 0$ . Dieses Ergebnis stimmt in der Tendenz auch mit den entsprechenden deterministischen Nachweisen nach EC 2 [26] überein. Der Vollständigkeit halber sind die Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  in der Abb. 5.3 auch für diesen Grenzzustand für den kompletten betrachteten Bewehrungsbereich dargestellt, während in der Abb. 5.2 nur die entsprechenden Sicherheitsindizes  $\beta > 0$  dargestellt sind. Deutlich sichtbar ist anhand der Abb. 5.3, daß im Bemessungspunkt dieser Grenzzustandsgleichung für  $\rho > 0,4\%$  die Lastbeanspruchung unterhalb ihres Mittelwertes liegt (Sprung von  $\alpha_P = 0,9$  auf  $-0,8$  zwischen  $\rho = 0,4$  und  $0,5$ ). Dies führt zu einer Versagenswahrscheinlichkeit  $P_f > 0,5$ , d.h.  $\beta < 0$ .

$\beta_{\sigma_s}$  Der Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung ist durch die, unabhängig vom Bewehrungsgrad, relativ konstant bleibenden Einflüsse der einzelnen statistischen Variablen gekennzeichnet. Der Sicherheitsindex  $\beta$  steigt mit zunehmendem Bewehrungsgrad. Absolut dominierenden Einfluß auf den Bemessungspunkt des Systems hat in diesem Grenzzustand die Systembelastung mit  $\alpha_P \approx 0,9$  (vgl. Abb. 5.3). Da die Stahlstreckgrenze bei  $\sigma_s = 400$  [MPa] im allgemeinen nicht erreicht wird, hat die Basisvariable  $f_y$  keinen nennenswerten Einfluß auf das Sicherheitsniveau.

$\beta_{\ell/250}$  Die Durchbiegungsbeschränkung auf  $f = \frac{\ell}{250} = 12$  mm ist für alle Bewehrungsgrade mit einem Sicherheitsindex von  $\beta > 5,5$  erfüllt. Auf der Widerstandsseite haben Beton- bzw. Stahlfestigkeit maßgebenden Einfluß. Bei Erreichen dieses Grenzzustandes wird im Bemessungspunkt der statistischen Variablen die Systemtraglast für alle Bewehrungsgrade fast erreicht. Dementsprechend haben Sicherheitsindex und Sensitivitätsfaktoren im Vergleich zur Grenzzustandsgleichung für die Systemtraglast einen ähnlichen Verlauf (vgl. Abb. 5.2 und Abb. 5.3).

$\beta_{\ell/500}$  Die sicherheitstheoretische Betrachtung der Durchbiegungsbeschränkung auf  $f = \frac{\ell}{500} = 6$  mm für dieses Beispiel zeigt ein stark veränderliches Sicherheitsniveau für die unterschiedlichen Bewehrungsgrade mit einem Minimum bei  $\rho = 1,2\%$ . Zwei Faktoren haben in diesem Beispiel maßgebenden Einfluß. Einerseits ist durch die Mitwirkung des Betons auf Zug bei kleineren Bewehrungsgraden ein steiferes Systemverhalten und damit eine geringere Verformung zu erwarten, andererseits macht sich der nichtlineare Zusammenhang zwischen der

Belastung  $P_G$  entsprechend dem Bewehrungsgrad  $\rho$  und der daraus resultierenden Verformung bemerkbar. Ab  $\rho = 1,20\%$  steigt der Sicherheitsindex wieder. Die Ursache hierfür liegt in der Bemessungslast (nach EC 2), die für diese Bewehrungsgrade durch das Nichterreichen der Stahlstreckgrenze im (deterministischen) Bruchzustand charakterisiert ist. Hierdurch bedingt zeigt der Mittelwert der Systembelastung eine im Gegensatz zu den kleineren Bewehrungsgraden degressive Steigung, die sich in dieser Form auf das Sicherheitsniveau spiegelt (vgl. auch Tab. 5.1, Spalte  $\frac{\Delta p}{\Delta \rho}$ ).

### 5.2.2 Eingeprägte Verformung $\Delta s$

Der zunächst nur für Lastbeanspruchung untersuchte Einfeldträger wird jetzt für eine ausschließliche Beanspruchung durch eine eingeprägte Verformung in Balkenmitte (vgl. Abb. 5.1) unter Vernachlässigung von Eigengewichtslasten untersucht, da zunächst nur die unterschiedliche Charakteristik einer Zwangsbeanspruchung im Vergleich zu einer Lastbeanspruchung im Hinblick auf das Sicherheitsniveau betrachtet werden soll. Für den Grenzzustand der Tragfähigkeit wird das rechnerische Bruchmoment in Feldmitte entsprechend Gl. 5.11 betrachtet. Die Definition des Bruchmomentes entspricht den Festlegungen bei der Lastbeanspruchung mit den statistischen Querschnitts- und Festigkeitswerten sowie den deterministischen Grenzdehnungen  $\varepsilon_{cu} = -3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und  $\varepsilon_u = 10,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und einem Verhältnis von Stahlzugfestigkeit zu Stahlstreckgrenze  $= f_t/f_y = 1,13$ . Auf die besondere Bedeutung der Duktilitätseigenschaften des Tragwerkes im Hinblick auf das Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Tragfähigkeit wird im Abschnitt 5.2.4 detaillierter eingegangen. Bezüglich der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit werden die Nachweise zur

- Rissebeschränkung:  $w_{lim} = 0,3 \text{ [mm]}$  (vgl. Gl. 5.9)
- Betonspannungsbegrenzung:  $\sigma_c = 0,6 \cdot f_{ck}$  (vgl. Gl. 5.1)
- Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 0,8 \cdot f_{yk}$  (vgl. Gl. 5.3)
- Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 1,0 \cdot f_{yk}$  (vgl. Gl. 5.4)

betrachtet. Bezüglich der Größe der aufgezwungenen Verformung wird ein Spektrum von 1 bis 12 mm betrachtet. Der Maximalwert von 12 mm entspricht mit der gewählten Einfeldträgerspannweite von  $\ell = 3,0 \text{ m}$  dem in Gl. 5.10 erläuterten Grenzwert der Durchbiegungsbeschränkung ( $f_{lim} = \frac{\ell}{250}$ ) unter Gebrauchslasten.

Der untere Wert entspricht in etwa einer Beanspruchung, bei der der obere Fraktilewert der Rißschnittgröße des Trägers überschritten wird. Für Zwangsbeanspruchungen unterhalb der Rißbeanspruchung müßten ggf. andere Grenzzustandsgleichungen wie z.B. die Sicherheit gegenüber dem Erreichen der Rißbeanspruchung oder der erforderlichen Mindestbewehrung untersucht werden. Der Variationskoeffizient  $V_{\Delta_s}$  der eingepprägten Verformung wird hier als besonders ungünstig mit  $V_{\Delta_s} = 40\%$  angesetzt (vgl. Tab. 5.2).

In den Abb. 5.4 und 5.5 ist jeweils für die verschiedenen Bewehrungsgrade  $\rho = 0,2 - 1,6 \%$  der Sicherheitsindex  $\beta$  für die fünf untersuchten Grenzzustandsgleichungen über dem Mittelwert der eingepprägten Verformung ( $\mu_{\Delta_s}$ ) aufgetragen. Qualitativ ist der Zusammenhang zwischen mittlerer eingepprägter Verformung und dem Sicherheitsindex  $\beta$  für alle fünf Grenzzustandsgleichungen durch einen näherungsweise parallel-hyperbolischen Verlauf charakterisiert. Für alle Bewehrungsgrade fällt das Sicherheitsniveau bei allen betrachteten Grenzzustandsgleichungen mit steigender Beanspruchung  $\mu_{\Delta_s}$ . Mit zunehmendem Bewehrungsgrad  $\rho$  verringert sich der Abstand zwischen dem Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Tragfähigkeit und im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (Rißebschränkung und Stahlspannungsbeschränkung). Der Grenzzustand der Betondruckspannungsbegrenzung erreicht ebenso wie bei der Lastbeanspruchung (vgl. Abb. 5.2) nur für kleine Bewehrungsgrade und geringe eingepprägte Verformungen einen Sicherheitsindex  $\beta > 0$ . Für die Bewehrungsgrade  $\rho > 1,2\%$  liegt der Sicherheitsindex für alle betrachteten Verformungen unter 0 und ist daher in den entsprechenden Bildern der Abb. 5.5 für  $\rho = 1,4$  und  $1,6\%$  nicht mehr dargestellt. Unter Beachtung der entsprechenden Konstruktionsregeln der Bemessungsnormen EC 2 [26] oder MC 90 [54] ist der Nachweis der Betondruckspannungen allerdings nicht als bemessungsentscheidend aufzufassen. Bezüglich der Stahlspannungsbegrenzung werden hier zwei Grenzzustandsgleichungen betrachtet. Für ausschließliche Zwangsbeanspruchungen gilt die Begrenzung auf den charakteristischen Wert der Streckgrenze ( $f_{yk} = 500$  MPa), während bei Beanspruchungen durch Last und Zwang die Begrenzung auf einen reduzierten Wert der charakteristischen Streckgrenze ( $0,8 \cdot f_{yk} = 400$  MPa) erforderlich ist. Um Vergleichsmöglichkeiten für die probabilistische Bemessungsrelevanz zu geben, werden hier die Ergebnisse für beide Grenzzustandsgleichungen vorgestellt.

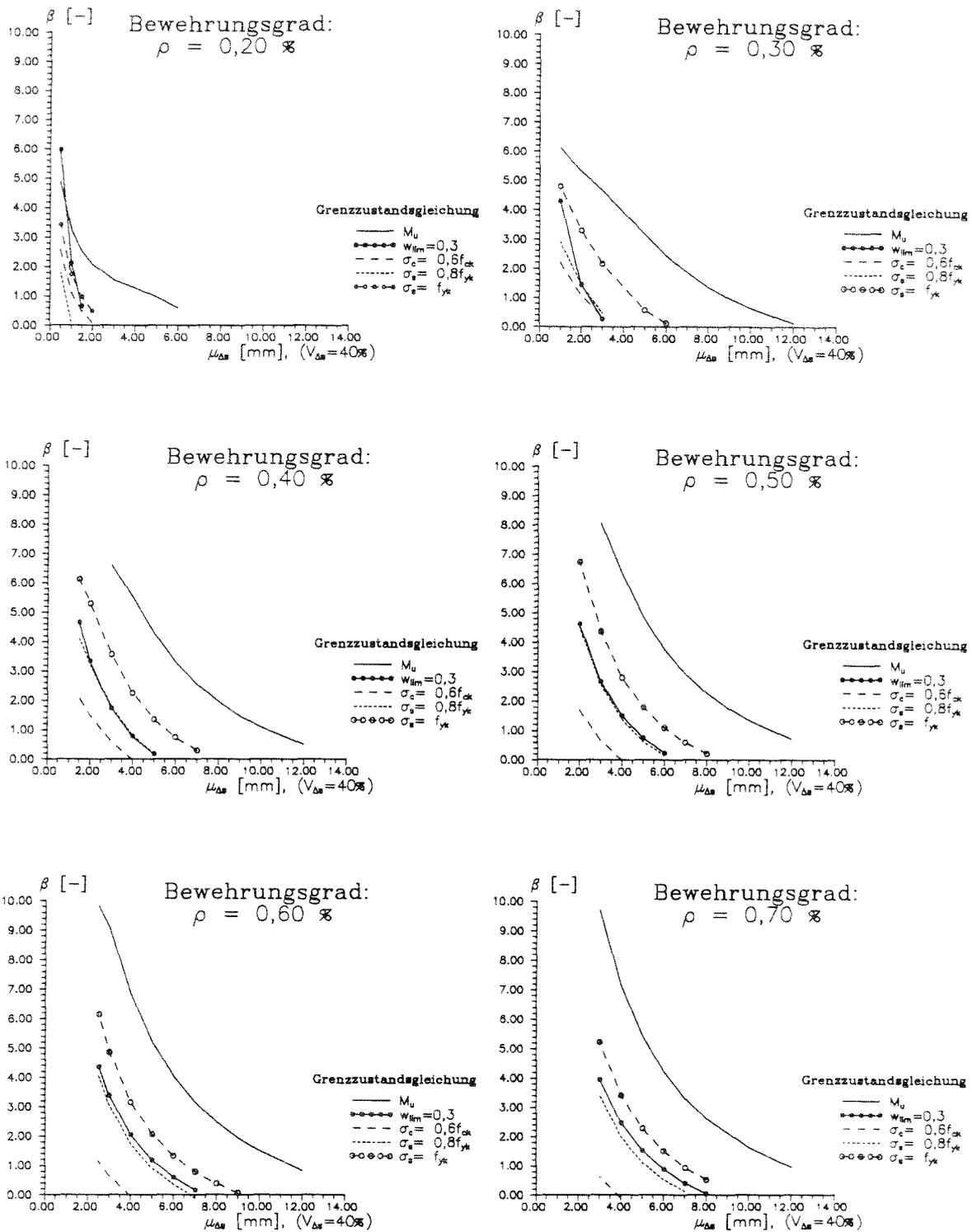


Abb. 5.4: Sicherheitsindex  $\beta$  für verschiedene Grenzzustandsgleichungen.  
 $\rho = 0,20$  bis  $0,70\%$ ,  $\mu_{\Delta s} = 1$  bis  $12$  mm,  $V_{\Delta s} = 40\%$

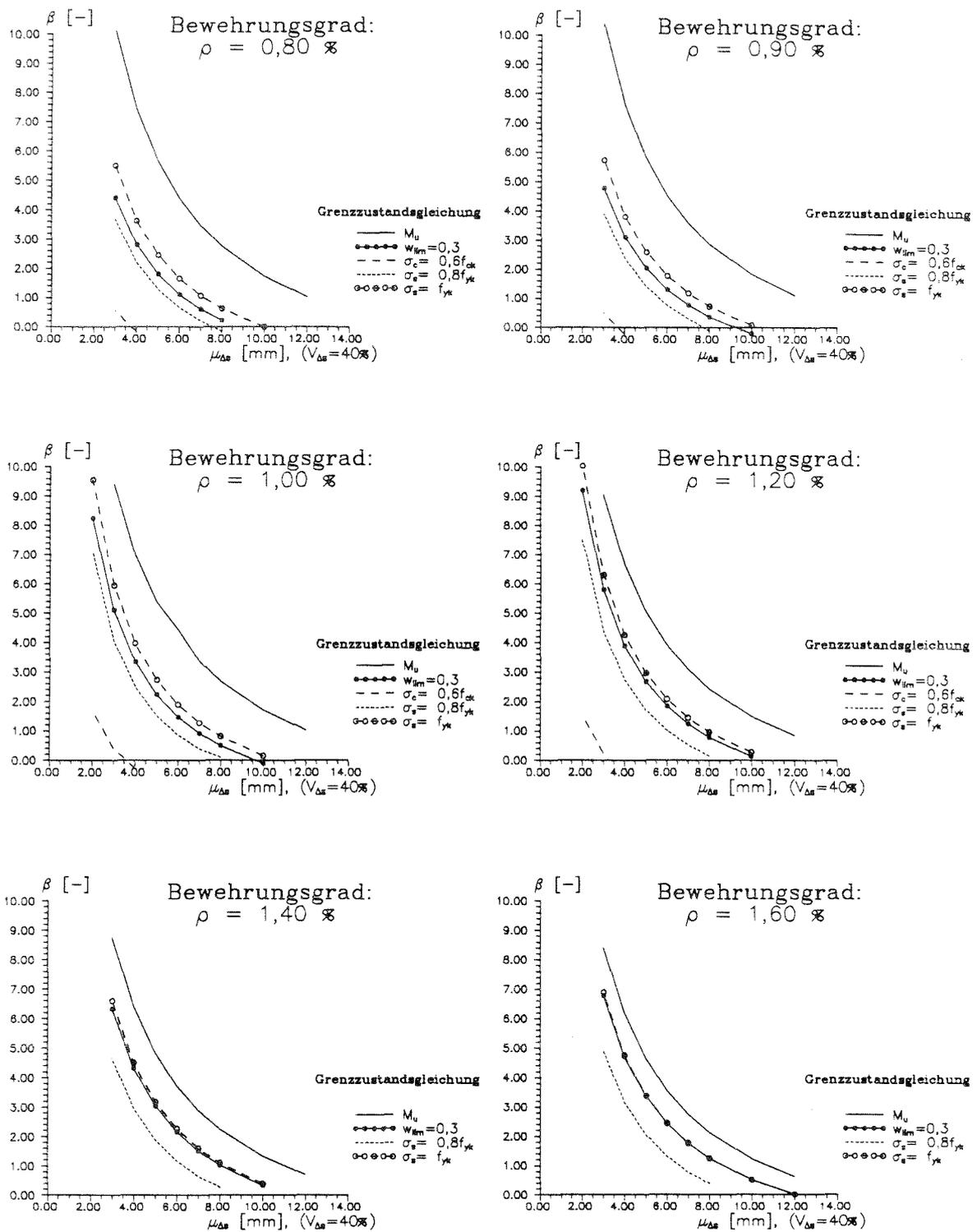
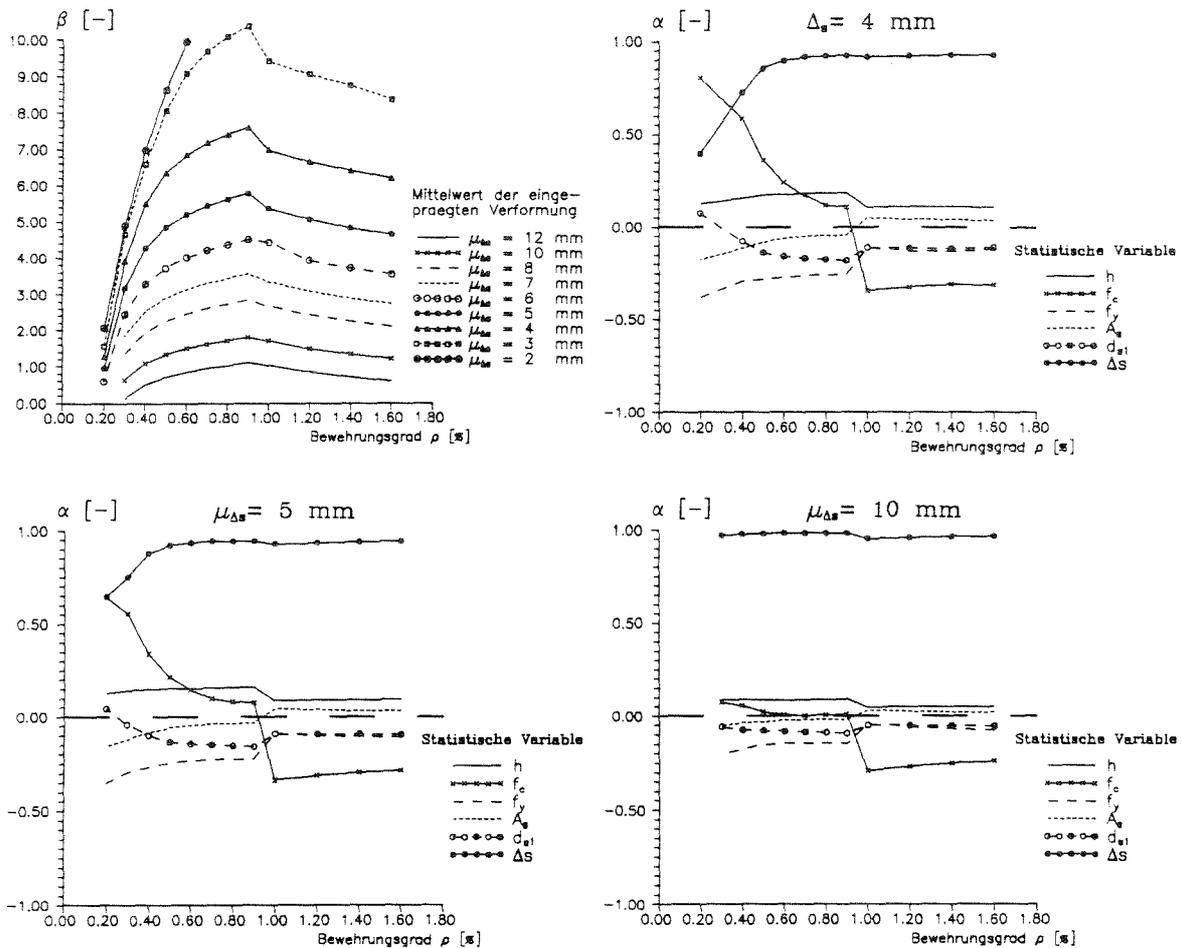


Abb. 5.5: Sicherheitsindex  $\beta$  für verschiedene Grenzzustandsgleichungen.  
 $\rho = 0,80$  bis  $1,60\%$ ,  $\mu_{\Delta s} = 2$  bis  $12$  mm,  $V_{\Delta s} = 40\%$

Um das Sicherheitsniveau unter eingepprägter Verformung mit demjenigen unter Lastbeanspruchung vergleichen zu können, sind in den folgenden vier Abbildungen in Analogie zur Abb. 5.2 und 5.3 der Sicherheitsindex  $\beta$  für die Grenzzustände Bruchmoment (Abb. 5.6), Rissebeschränkung (Abb. 5.7) und Stahlspannungsbeschränkung (Abb. 5.8 und 5.9) über dem Bewehrungsgrad  $\rho$  aufgetragen. Als

Bruchmoment  $M_u$



**Abb. 5.6:** Sicherheitsindex  $\beta$  und Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  für den Einfeldträger als Funktion des Bewehrungsgrades  $\rho$  und des Mittelwertes der eingepprägten Verformung ( $\mu_{\Delta_s}$ ,  $V_{\Delta_s} = 40\%$ ) für den Grenzzustand der Tragfähigkeit;  $f_t/f_y = 1,13$ ,  $\varepsilon_u = 10,0 \frac{mm}{m}$

weiterer Parameter dient der Mittelwert der eingepprägten Verformung  $\mu_{\Delta_s}$ . Für einige ausgewählte Beanspruchungen sind zusätzlich die Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$

der Basisvariablen dargestellt. Im folgenden wird auf die dargestellten Grenzzustände einzeln eingegangen.

### Grenzzustand der Biegetragfähigkeit

Der Sicherheitsindex für den Grenzzustand der Tragfähigkeit ist neben der Beanspruchung durch die eingeprägte Verformung im wesentlichen vom Versagensmechanismus geprägt. Für schwach bzw. ausgewogen bewehrte Systeme (in diesem Beispiel für  $\rho < 0,9\%$ ) steigt das Sicherheitsniveau bei konstanter eingepprägter Verformung mit zunehmendem Bewehrungsgrad. Bei den schwach bewehrten Systemen  $\rho < 0,4\%$  ist einheitlich für alle untersuchten Belastungen ein starkes Abfallen des Sicherheitsniveaus feststellbar. Versagensursache ist im gesamten Bereich  $\rho < 0,9\%$  das Erreichen der Bruchdehnung  $\varepsilon_u$  im Stahl. Für die höher bewehrten Systeme wechselt der Versagensmechanismus vom Stahlversagen zum Betonversagen, ohne daß die Bruchdehnung im Stahl erreicht wird. Der Sicherheitsindex fällt bei gleicher mittlerer eingepprägter Verformung mit zunehmendem Bewehrungsgrad. Für stark bewehrte Systeme ist mit einem spröden Querschnittsversagen zu rechnen.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Beanspruchung durch Last und eingepprägter Verformung zeigt sich bei der Betrachtung der zugehörigen Sensitivitätsfaktoren (Abb. 5.6). Während bei reiner Lastbeanspruchung eindeutig zwischen den Parametern der Einwirkungs- und Widerstandsseite unterschieden werden kann, haben bei eingepprägten Verformungen die Festigkeitswerte je nach Versagensursache unterschiedlichen Einfluß (Abb. 5.6). In den Fällen, in denen im probabilistischen Bemessungspunkt die Stahlgrenzdehnung erreicht wird bzw. die Betondruckzone nicht voll ausgenutzt wird, liegt beispielsweise die Betonfestigkeit oberhalb ihres Mittelwertes. Die Ursache hierfür liegt ausschließlich in der steifigkeitsabhängigen Systembeanspruchung. Bei reiner (statisch bestimmter) Lastbeanspruchung sind die Festigkeitsparameter immer der Widerstandsseite ( $\alpha_i < 0$ ) zugeordnet (vgl. Abb. 5.3). Nach dem Wechsel der Versagensart vom Stahlbruch zum Betonversagen ändert sich der Einfluß der statistischen Festigkeits- und Querschnittsparameter sprunghaft. Beim Betonversagen überwiegt der Einfluß der Betonfestigkeit für die ertragbare Beanspruchung, d.h. in diesem Bereich liegt die Betonfestigkeit wie bei der Lastbeanspruchung unterhalb ihres Mittelwertes. Das gleiche gilt auch für die Stahlfestigkeit. Die Parameter Stahlquerschnitt  $A_s$ , Bewehrungsrandabstand  $d_{s1}$  und Querschnittshöhe  $h$  verhalten sich einheitlich entsprechend der Beanspruchungscharakteristik steifigkeitserhöhend. Sie sind allerdings im Vergleich zum dominierenden Einfluß der eingepprägten Verformung nicht ausschlaggebend für das Sicherheitsniveau. Anhand der drei

Bilder mit den Einflußfaktoren  $\alpha_i$  in der Abb. 5.6 für unterschiedliche mittlere eingeprägte Verformungen  $\mu_{\Delta_s}$  läßt sich feststellen, daß sich die beschriebenen Einflußgrößen unabhängig von der Höhe der Beanspruchung ähnlich verhalten. Die Höhe der eingepägten Verformung hat dominierenden Einfluß auf die Sicherheit des Tragwerkes.

Bei einer Betrachtung von stark steifigkeitsabhängigen Beanspruchungen zeigt sich, daß aus probabilistischer Sicht ggf. Überfestigkeiten des Betons zu berücksichtigen sind. Dabei spielt im Grenzzustand der Biegetragfähigkeit der Bewehrungsgrad bzw. die Versagensart eine entscheidende Rolle. Durch eine Erhöhung der Bewehrung kann bei konstanter eingepägter Verformung nicht allgemein auf einer Erhöhung der Sicherheit geschlossen werden. Im Abschnitt 5.2.4 wird der Grenzzustand der Biegetragfähigkeit unter besonderer Berücksichtigung der Duktilitätseigenschaften näher betrachtet.

### **Grenzzustand der Rissebeschränkung**

Das Sicherheitsniveau beim Nachweis der Rissebeschränkung hängt natürlich im wesentlichen von der Höhe der Beanspruchung und dem Bewehrungsgrad ab. Dementsprechend dominierend zeigt sich der Einfluß der eingepägten Verformung  $\Delta_s$ , die Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_{\Delta_s}$  (vgl. Abb 5.7) liegen für alle untersuchten Bewehrungsgrade zwischen 0,8 und 1,0. Mit zunehmendem Bewehrungsgrad steigt das Sicherheitsniveau bei gleichbleibender eingepägter Verformung. Im Bereich  $\beta \approx 0$  für schwache Bewehrungsgrade liegt die Betonfestigkeit unterhalb ihres Mittelwertes (Sprung von  $\alpha_{f_c}$ ).

### **Grenzzustände der Stahlspannungsbegrenzung**

Ähnlich wie bei Nachweis der Rissebeschränkung steigt auch das Sicherheitsniveau für den Nachweis der Stahlspannungsbegrenzung bei gleichbleibender mittlerer eingepägter Verformung mit zunehmendem Bewehrungsgrad (vgl. Abb. 5.8 und 5.9). Im Bereich kleiner Bewehrungsgrade ist die Veränderung des Sicherheitsniveaus besonders ausgeprägt. Absolut dominierenden Einfluß auf das Sicherheitsniveau des Systems hat die eingepägte Verformung ( $\alpha_{\Delta_s} = 0,8$  bis  $1,0$ ).

Rissebeschränkung:  $w_{lim} = 0,30$  [mm]

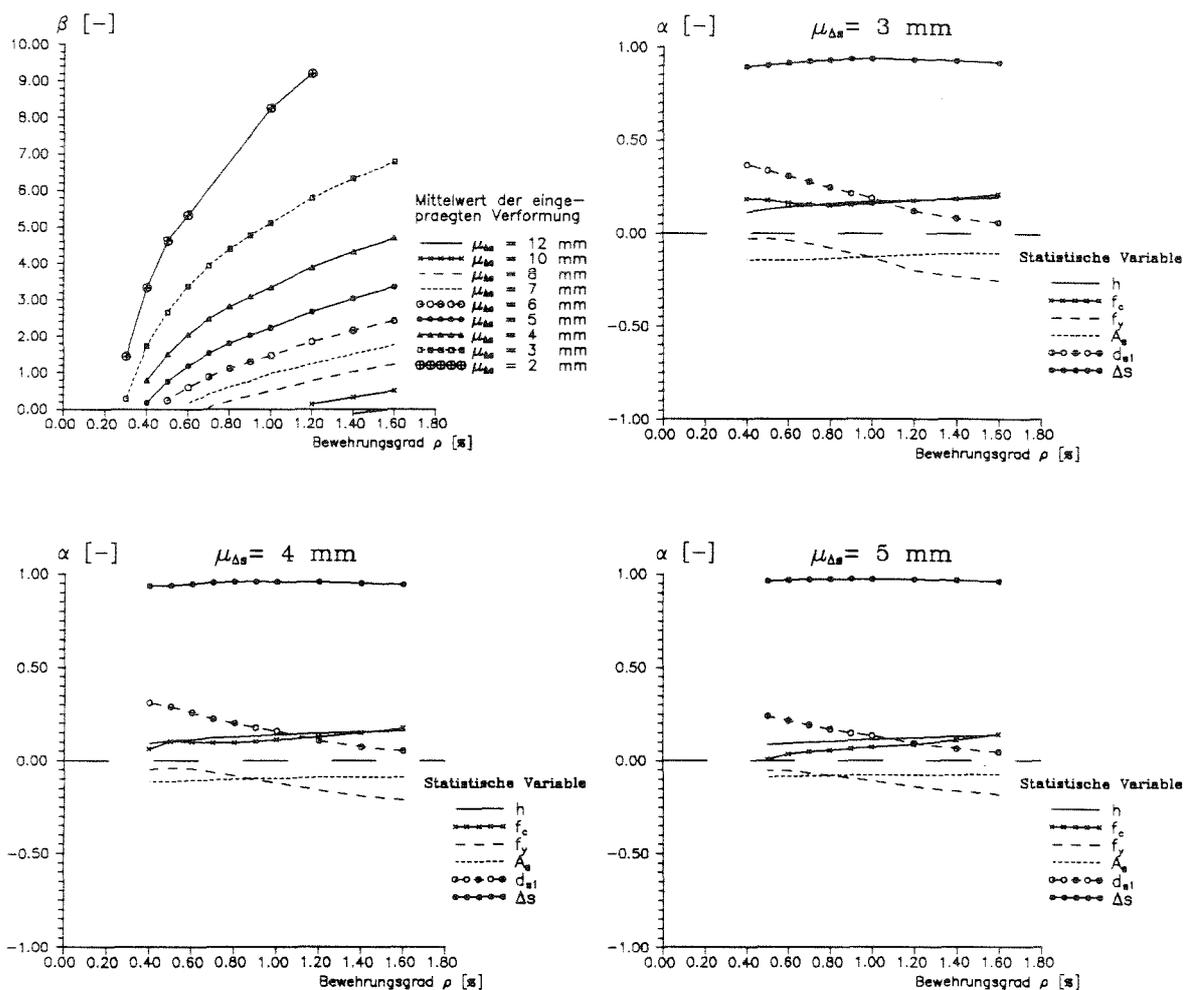


Abb. 5.7: Sicherheitsindex  $\beta$  und Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  für den Einfeldträger als Funktion des Bewehrungsgrades  $\rho$  und des Mittelwertes der eingepreagten Verformung ( $\mu_{\Delta s}$ ,  $V_{\Delta s} = 40\%$ ) für den Grenzzustand der Rissebeschränkung

Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 1,0 \cdot f_{yk}$

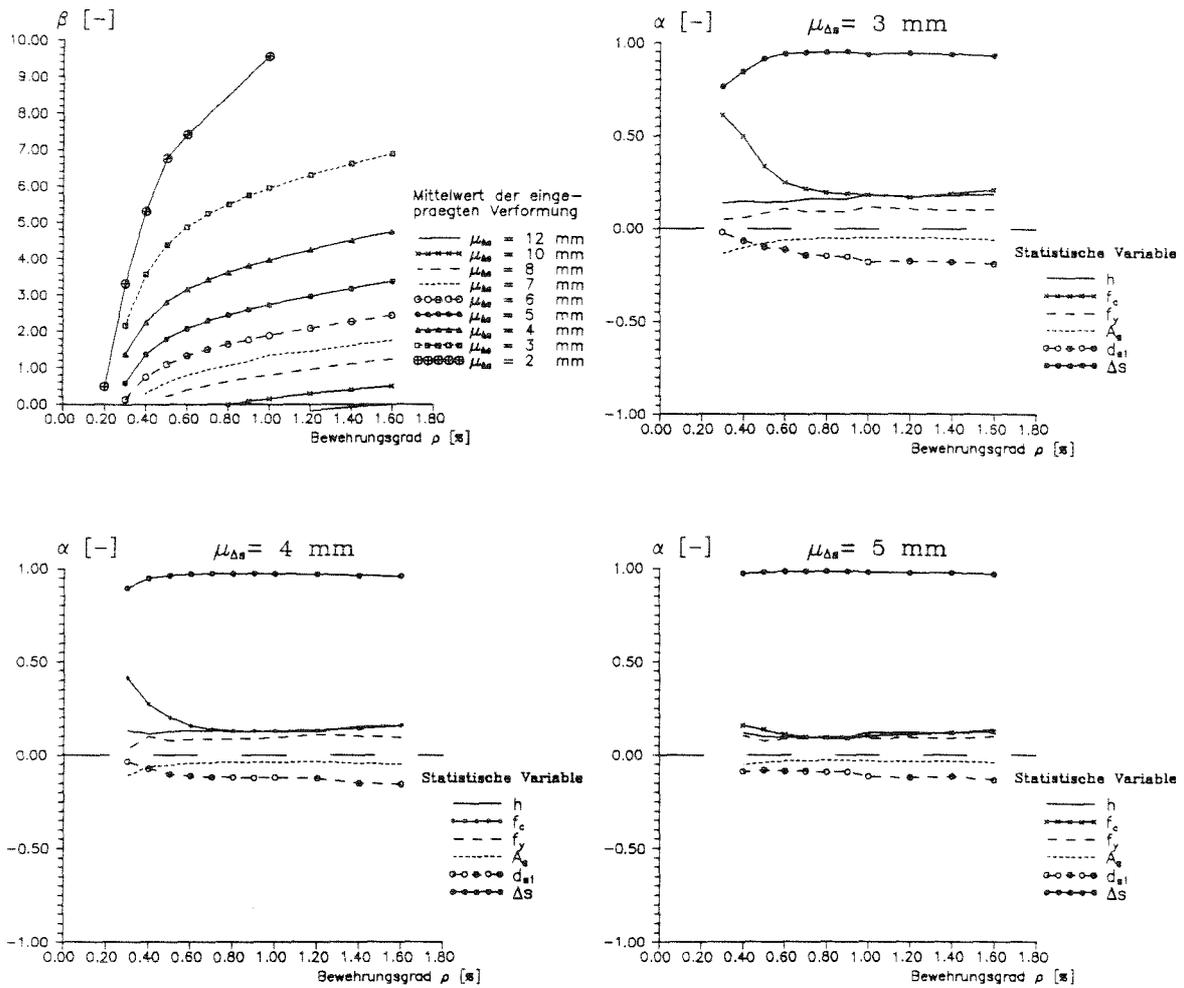


Abb. 5.8: Sicherheitsindex  $\beta$  und Sensitivitätsfaktoren  $\alpha$ ; für den Einfeldträger als Funktion des Bewehrungsgrades  $\rho$  und des Mittelwertes der eingepreägten Verformung ( $\mu_{\Delta s}, V_{\Delta s} = 40\%$ ) für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung  $\sigma_s = 500$  MPa

Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 0,8 \cdot f_{yk}$

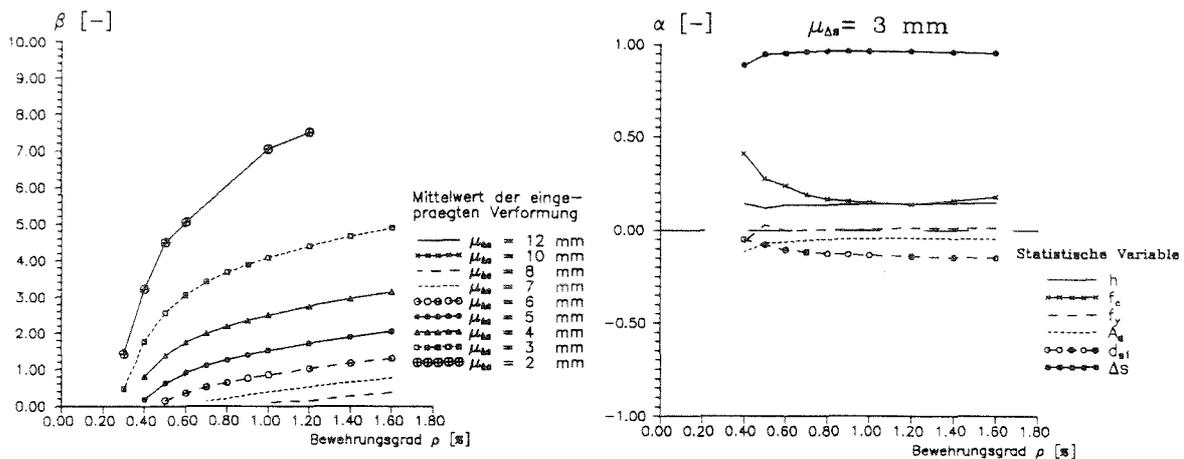


Abb. 5.9: Sicherheitsindex  $\beta$  und Sensitivitätsfaktoren  $\alpha_i$  für den Einfeldträger als Funktion des Bewehrungsgrades  $\rho$  und des Mittelwertes der eingepprägten Verformung ( $\mu_{\Delta s}$ ,  $V_{\Delta s} = 40\%$ ) für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung  $\sigma_s = 400$  MPa

### 5.2.3 Erforderliche Bewehrung infolge eingepprägter Verformung

Der erforderliche Bewehrungsgrad der deterministischen Bemessung im Vergleich zu den zuverlässigkeitstheoretischen Ergebnissen läßt Rückschlüsse auf das Sicherheitsniveau der Bemessungsmethode zu. Daher sind in Tab. 5.3 verschiedene Bemessungsergebnisse in Form des erforderlichen Bewehrungsgrades  $\rho$  [%] des betrachteten Systems (vgl. Abb. 5.1) nach verschiedenen Verfahren der Schnittgrößenermittlung zusammengestellt. Dabei werden insbesondere die Regelungen nach EC 2 mit den Teilsicherheitsfaktoren  $\gamma_{ind} = 1,2$  bzw.  $\gamma_{ind} = 1,5$  (vgl. Abschnitt 1.2.2) betrachtet. Zusätzlich wird eine Bemessung nach den Gebrauchslastkriterien (Rissebeschränkung, Stahlspannungsbegrenzung) durchgeführt. Auf der Basis einer linearen Schnittgrößenermittlung mit den Steifigkeiten nach Zustand I und den charakteristischen Materialeigenschaften wird hierzu die erforderliche Bewehrung ermittelt. Daran anschließend werden die Ergebnisse einer nichtlinearen Systemanalyse zur Verifikation der Bemessung bzw. zur Bestimmung der erforderlichen Bewehrung auf der Basis einer nichtlinearen Schnittgrößenermittlung vorgestellt.

$\Delta s$ [mm]	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Biegebemessung für den ULS</b>								
linearelastische Schnittgrößen, Zustand I								
$M_{el,I}$ [kNm]	17,4	34,8	52,2	69,6	87,0	104,4	121,8	139,2
$\gamma_{\Delta s} = 1,0$	0,28	0,60	0,99	→ Druckbewehrung erf.				
$\gamma_{\Delta s} = 1,2$	0,34	0,75	1,26	→ Druckbewehrung erf.				
$\gamma_{\Delta s} = 1,5$	0,43	0,99	→ Druckbewehrung erf.					
<b>Bemessung nach Gebrauchstauglichkeitskriterien, <math>\gamma_{\Delta s} = 1,0</math></b>								
linearelastische Schnittgrößen, Zustand I, charakteristische Materialkennwerte								
Stahlspannungsbegrenzung								
$\sigma_s = 400$ [MPa]	0,31	0,64	0,98	1,37	1,78	-	-	-
$\sigma_s = 500$ [MPa]	0,24	0,50	0,77	1,07	1,40	-	-	-
Rissebegrenzung mit $f_{ct} = 3,0$ [MPa]								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	0,32	0,60	0,85	1,14	1,47	-	-	-
Mindestbewehrung mit $f_{ct} = 3,0$ [MPa]								
$min A_{s1}$	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
Mindestbewehrung mit $f_{ct} = 4,0$ [MPa]								
$min A_{s1}$	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
Rissebegrenzung mit $f_{ct} = 4,0$ [MPa]								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	0,23	0,58	0,83	1,14	1,47	-	-	-
<b>Biegebemessung unter Berücksichtigung reduzierter Steifigkeiten nach Heft 240, DAfStb; (für <math>\rho &gt; 0,6\%</math>)</b>								
$M_{red}$ [kNm]	11,31	22,62	33,93	45,24	56,55	67,86	79,17	90,48
$\gamma_{\Delta s} = 1,0$	0,28	0,60	0,60	0,82	1,09	→ Druckbewehrung erf.		
$\gamma_{\Delta s} = 1,2$	0,34	0,60	0,72	1,04	→ Druckbewehrung erf.			
$\gamma_{\Delta s} = 1,5$	0,43	0,60	0,95	→ Druckbewehrung erf.				
<b>Probabilistische Bemessung</b>								
Bruchmoment: $\varepsilon_{cu} = -3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ , $f_t/f_y = 1,13$ , $\varepsilon_u = 10 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ , $V_{\Delta s} = 40\%$								
$\beta_{erf} = 4,7$	-	0,28	0,30	0,35	0,48	0,9	→ $\beta = 4,7$ nicht erreicht	
Stahlspannungsbegrenzung $\beta_{erf} = 3,0$								
$\sigma_s = 400$ [MPa]	-	0,39	0,60	1,42	→ $\rho_{erf} > 1,8\%$			
$\sigma_s = 500$ [MPa]	-	0,29	0,37	0,57	1,20	→ $\rho_{erf} > 1,8\%$		
Rissebegrenzung $\beta_{erf} = 3,0$								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	-	0,38	0,52	0,85	1,30	→ $\rho_{erf} > 1,8\%$		
Stahlspannungsbegrenzung $\beta_{erf} = 2,0$								
$\sigma_s = 400$ [MPa]	-	0,29	0,43	0,51	1,58	→ $\rho_{erf} > 1,8\%$		
$\sigma_s = 500$ [MPa]	-	0,24	0,30	0,37	0,58	1,10	→ $\rho_{erf} > 1,8\%$	
Rissebegrenzung $\beta_{erf} = 2,0$								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	-	0,34	0,43	0,60	0,89	1,27	1,71	→ $\rho_{erf} > 1,8$

**Tab. 5.3:** Erforderlicher Bewehrungsgrad  $\rho$  [%] des Einfeldträgers infolge eingepäger Verformung  $\Delta s$  in Balkenmitte nach verschiedenen Methoden der Schnittgrößenermittlung und Bemessung

## 5.2.3.1 Nichtlineare Schnittgrößenermittlung und Bemessung

Die Ergebnisse der nichtlinearen Systemanalyse sind in der Abb. 5.10 in Form der Biegemomente in Feldmitte (linkes Bild) und der zugehörigen vorhandenen plastischen Rotationen (rechtes Bild) dargestellt. Dabei wird ein Bewehrungsspektrum von  $\rho = 0,2$  bis  $1,6\%$  betrachtet. Den Berechnungen liegen die Mittelwerte der Materialeigenschaften zugrunde. In der Darstellung der Biegemomente (linkes Bild der Abb. 5.10) ist zum Vergleich mit den nichtlinear ermittelten Schnittgrößen der Zusammenhang zwischen eingepprägter Verformung und Biegemoment nach der Elastizitätstheorie (Zustand I, Bruttoquerschnittswerte) dargestellt. Die in diesem Bild fett eingezeichnete Linie kennzeichnet das jeweils einem bestimmten Bewehrungsgrad zugeordnete rechnerische Bruchmoment  $M_{ud}$  auf der Basis der Bemessungswerte der Materialeigenschaften nach EC 2 [26]. Dieses Bruchmoment kann für den hier betrachteten Einfeldträger als Bemessungskriterium bei nichtlinearer Schnittgrößenermittlung angenommen werden. Die im rechten

## Nichtlineare Systemanalyse als Bemessungskriterium (ULS)

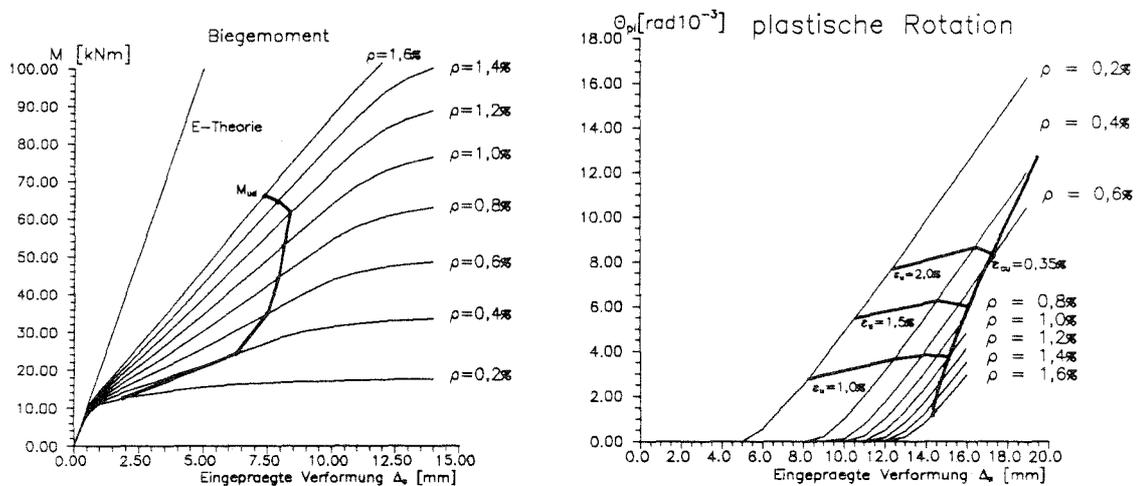


Abb. 5.10: Biegemoment  $M$  und plastische Rotation  $\Theta_{pl}$  des Einfeldträgers in Abhängigkeit der eingepprägten Verformung  $\Delta_s$  und des Bewehrungsgrades  $\rho$  auf der Basis einer nichtlinearen Systemanalyse mit den Mittelwerten der Materialeigenschaften

Bild der Abb. 5.10 dargestellte plastische Rotation  $\Theta_{pl}$  ist entweder durch das Erreichen der Stahlgrenzdehnung  $\varepsilon_u$  oder der Betongrenzdehnung  $\varepsilon_{cu}$  begrenzt. Die entsprechend fett eingezeichnete Linie in diesem Bild zeigt die Rotationsgrenzen für die Grenzbedingungen  $\varepsilon_u = 10 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ,  $\varepsilon_u = 15 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und  $\varepsilon_u = 20 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$

bzw.  $\varepsilon_{cu} = -3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ . Diese Grenzlinie stellt aber im Gegensatz zur Momentengrenzlinie  $M_{ud}$  der linken Darstellung im sicherheitstheoretischen Sinn keine Bemessungsgrenze dar, weil sie auf der Materialseite keine Sicherheitselemente berücksichtigt. Es läßt sich aber ablesen, daß die Verformungsfähigkeiten je nach Bewehrungsgrad und Duktilitätseigenschaften des Materials begrenzt sind. Der Vergleich beider Darstellungen zeigt deutlich, daß die Einhaltung der Bemessungswerte für die Schnittgröße eine wesentlich schärfere Bedingung darstellt als die Begrenzung der plastischen Rotationen auf der Basis von mittleren Materialeigenschaften. Im Hinblick auf eine Beanspruchung aus Last und eingepprägter Verformung läßt sich der Beziehung zwischen eingepprägter Verformung und plastischer Rotation entnehmen, daß es sinnvoll ist, die mögliche plastische Rotation im Grenzzustand der Tragfähigkeit der eingepprägten Verformung zuzuweisen, während die Lastbeanspruchung im Bereich der elastischen Verformung bleibt. Damit ist die eingepprägte Verformung im Grenzzustand der Tragfähigkeit nur eingeschränkt schnittgrößenwirksam. Die Aufnahmekapazität für plastische Verformungen muß allerdings nachgewiesen werden.

### Nichtlineare Systemanalyse als Bemessungskriterium (SLS)

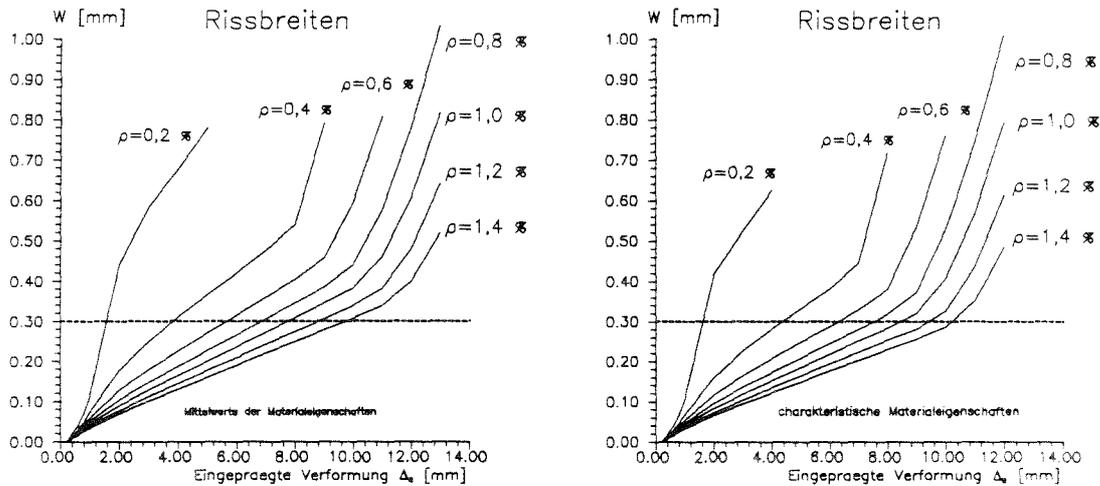


Abb. 5.11: Rechnerische Rißbreiten in Abhängigkeit der eingepprägten Verformung  $\Delta_s$  und des Bewehrungsgrades  $\rho$  auf der Basis einer nichtlinearen Systemanalyse mit den Mittelwerten bzw. charakteristischen Werten der Materialeigenschaften

Nichtlineare Systemanalyse als Bemessungskriterium (SLS)

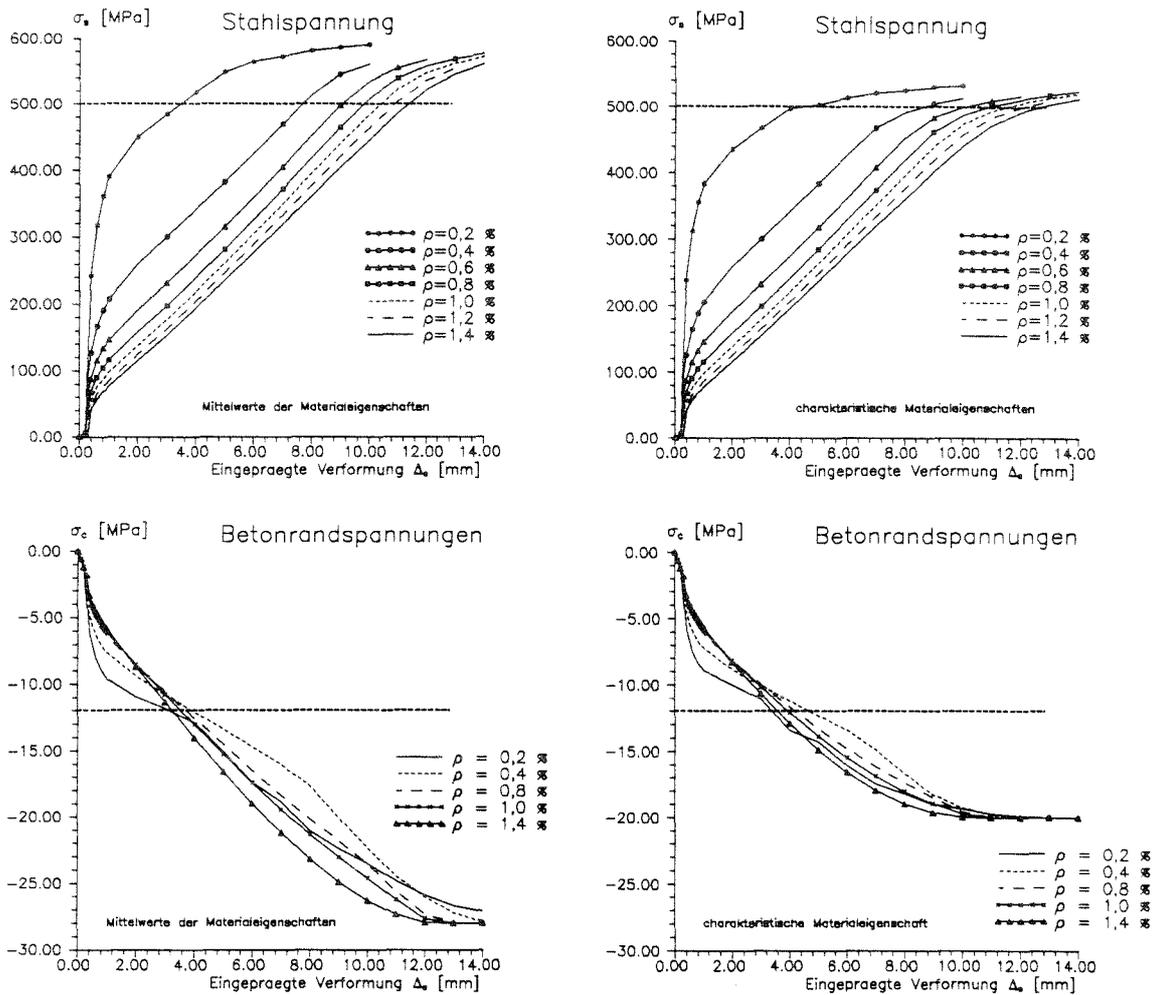


Abb. 5.12: Stahlspannungen und Betonrandspannungen in Abhängigkeit der eingeprägten Verformung  $\Delta_s$  und des Bewehrungsgrades  $\rho$  auf der Basis einer nichtlinearen Systemanalyse mit den Mittelwerten bzw. charakteristischen Werten der Materialeigenschaften

Die Gebrauchstauglichkeitsnachweise werden nach EC 2 auf der Grundlage der charakteristischen Materialeigenschaften durchgeführt. Die nichtlineare Schnittgrößenermittlung erfolgt auf der Basis der Mittelwerte der Materialeigenschaften. In den Abbildungen 5.11 und 5.12 sind die Rißbreiten, Stahlspannungen und Betonspannungen nach einer nichtlinearen Schnittgrößenermittlung jeweils mit den Mittelwerten und mit den charakteristischen Werten der Materialeigenschaften für das betrachtete Einfeldträgersystem infolge eingeprägter Verformung

für verschiedene Bewehrungsgrade dargestellt. Für die rechnerisch zugrundegelegte Zugfestigkeit des Betons wird angenommen, daß der Mittelwert dem charakteristischen Wert entspricht ( $f_{ctm} = f_{ctk}$ ). Die zugehörigen Nachweisgrenzen (gestrichelte horizontale Linien) mit  $w_{lim} = 0,3$  mm,  $\sigma_s = f_{yk} = 500$  MPa und  $\sigma_c = 0,6f_{ck} = 12$  MPa sind in den einzelnen Bildern ebenfalls eingezeichnet. Der Einfluß der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung im Gebrauchslastbereich wird insbesondere bei der Darstellung der Stahlspannungen in Abb. 5.12 deutlich. Nach Überschreiten der Rißbeanspruchung werden die Stahlspannungen für die nichtlinear ermittelte Schnittgröße unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug im maßgebenden Rißquerschnitt bestimmt. Aus der nichtlinearen Systemanalyse lassen sich durch Interpolation die entsprechend den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit erforderlichen Bewehrungsgrade ermitteln. Diese sind in der Tab. 5.4 zusammengestellt.

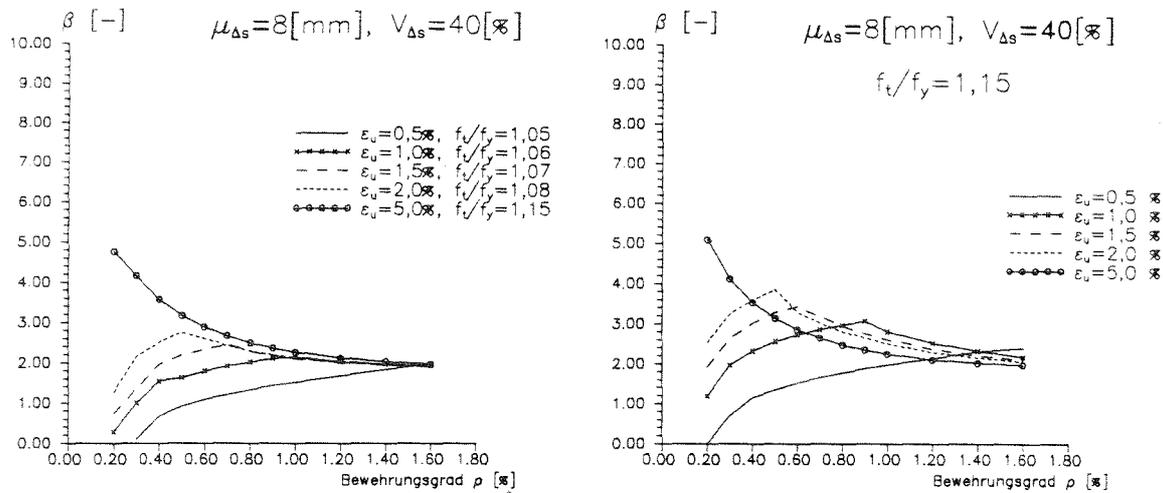
Nichtlineare Systemanalyse und Bemessung								
$\Delta s$ [mm]	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>Biegebemessung für den ULS</b>								
$\gamma_{\Delta s} = 1,0$	< 0,20	0,20	0,31	0,36	0,39	0,4	0,53	0,80
$\gamma_{\Delta s} = 1,2$	< 0,20	0,29	0,36	0,39	0,40	0,57	1,20	-
$\gamma_{\Delta s} = 1,5$	< 0,20	0,31	0,38	0,40	0,60	-	-	-
<b>Rotationsnachweis für den ULS</b>								
die erforderliche Rotationsfähigkeit für den Lastfall $1,5 \cdot \Delta s$ ist bei Berechnung mit mittleren Materialeigenschaften vorhanden (vgl. Abb. 5.10)								
<b>Bemessung nach Gebrauchstauglichkeitskriterien, <math>\gamma_{\Delta s} = 1,0</math></b>								
Stahlspannungsbegrenzung, charakteristische Materialeigenschaften								
$\sigma_s = 400$ [MPa]	< 0,20	0,24	0,29	0,34	0,39	0,50	0,65	1,00
$\sigma_s = 500$ [MPa]	< 0,20	< 0,20	< 0,20	0,20	0,23	0,27	0,32	0,38
Stahlspannungsbegrenzung, Mittelwerte der Materialeigenschaften								
$\sigma_s = 400$ [MPa]	< 0,20	0,24	0,29	0,34	0,38	0,48	0,64	0,98
$\sigma_s = 500$ [MPa]	< 0,20	< 0,20	< 0,20	0,23	0,27	0,32	0,37	0,45
Rissebegrenzung, charakteristische Materialeigenschaften								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	< 0,20	0,24	0,31	0,38	0,48	0,57	0,74	0,93
Rissebegrenzung, Mittelwerte der Materialeigenschaften								
$w_{lim} = 0,3$ [mm]	< 0,20	0,24	0,34	0,43	0,54	0,66	0,82	1,05

**Tab. 5.4:** Erforderlicher Bewehrungsgrad  $\rho$  [%] des Einfeldträgers infolge eingepprägter Verformung  $\Delta s$  in Balkenmitte nach nichtlinearer Systemanalyse mit Mittelwerten bzw. charakteristischen Werten der Materialeigenschaften

### 5.2.4 Einfluß der Duktilitätseigenschaften auf das Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Tragfähigkeit

Wie auch aus der nichtlinearen Systemanalyse ersichtlich, haben die Duktilitätseigenschaften des Systems wesentlichen Einfluß auf das Tragverhalten im Grenzzustand der Tragfähigkeit. Dies gilt insbesondere für Beanspruchungen infolge eingepprägter Verformungen. Anhand von probabilistischen Berechnungen am Beispiel des Einfeldträgers (vgl. Abb. 5.1) soll im folgenden das Sicherheitsniveau bei variierenden Duktilitätseigenschaften der Materialien untersucht werden. Hierzu wird die Grenzzustandsgleichung für das rechnerische Bruchmoment betrachtet. Am maßgebenden Systemquerschnitt ist dieses auf der Materialseite durch die entsprechenden Kennwerte der Festigkeiten und Grenzdehnungen definiert. Die so formulierte Grenzzustandsgleichung beinhaltet damit gleichzeitig die Anforderungen an die Rotationsfähigkeit des Systems, da auch beim Nachweis der Verformungsfähigkeit in den kritischen Tragwerksbereichen die Bruchbedingungen des Materials eingehalten werden müssen. Für den Baustoff Beton wird (vereinfachend) unabhängig von der Festigkeitsklasse eine Grenzdehnung von  $-3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  angenommen. Die Duktilitätseigenschaften des Betonstahls werden, falls nicht explizit erläutert, entsprechend dem im Abschnitt 3.5.4 erläuterten Modell der Duktilitätsklassen berücksichtigt.

Die Abb. 5.13 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Sicherheitsindex  $\beta$  und dem Bewehrungsgrad  $\rho$  für das betrachtete System nach Abb. 5.1. Dabei werden unterschiedlich duktile Stähle untersucht. Im linken Bild wurde der Stahl entsprechend dem Duktilitätsmodell nach Abschnitt 3.5.4 mit steigendem Verhältnis von Zugfestigkeit zu Streckgrenze ( $f_t/f_y$ ) bei steigender maximaler Stahldehnung  $\varepsilon_u$ , im rechten Bild mit konstantem Verhältnis von  $f_t/f_y = 1,15$  bei verschiedenen maximalen Stahldehnungen betrachtet. Der eingepprägten Verformung liegt ein Variationskoeffizient von 40% zugrunde. Der Mittelwert der eingepprägten Verformung beträgt 8 mm und liegt damit oberhalb der Beanspruchung, für die mit herkömmlichen Bemessungsmethoden eine vernünftige Bemessung des Systems möglich ist (vgl. Tab. 5.3). Anhand der Abb. 5.13 lassen sich zwei wesentliche Versagensmechanismen charakterisieren. Das Versagen des Stahls durch Erreichen der Stahlgrenzdehnung oder das Versagen der Betondruckzone bei Erreichen der Betongrenzdehnung. Insbesondere bei den kleineren Bewehrungsgraden bestimmt die Stahlbruchdehnung das Sicherheitsniveau, sofern der Stahl keine ausreichenden Duktilitätseigenschaften besitzt (hier für  $\varepsilon_u < 2,0\%$ ). Das lokale Maximum im Sicherheitsniveau für Grenzdehnungen  $\varepsilon_u \leq 2,0\%$  kennzeichnet je-

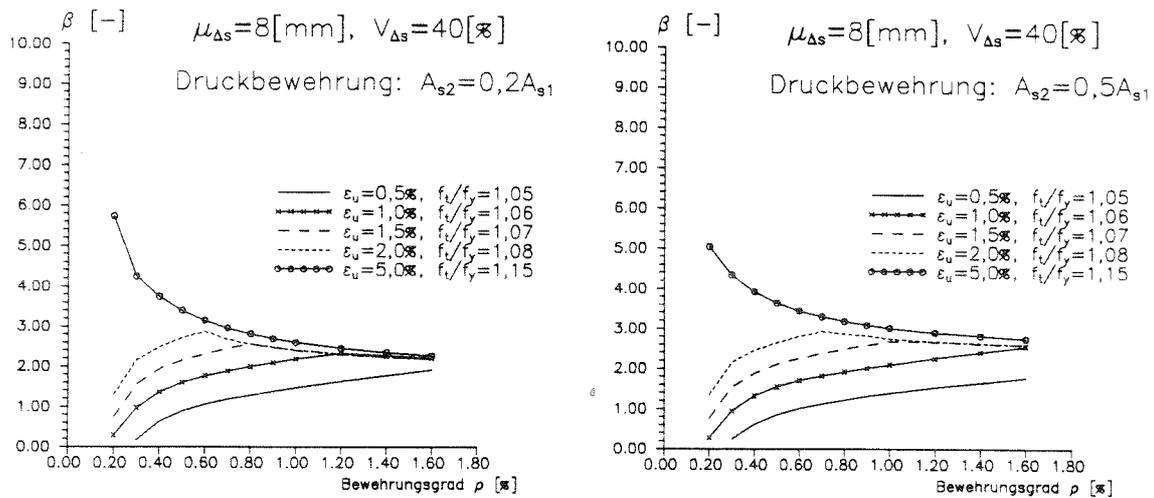


**Abb. 5.13:** Sicherheitsindex  $\beta$  für den Einfeldträger unter eingepreäger Verformung ( $\mu_{\Delta s} = 8 \text{ mm}$ ,  $V_{\Delta s} = 40\%$ ) bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls. Als Parameter dient die Bruchdehnung  $\varepsilon_u$  und der Kennwert  $f_t/f_y$

weils den probabilistischen Bemessungspunkt, in dem Beton- und Stahlgrenzdehnung gleichzeitig erreicht werden, bzw. der Wechsel der Versagensart stattfindet. Bei den besonders schwach bewehrten Systemen ( $\rho < 0,5\%$  und  $\varepsilon_u < 20\%$ ) fällt der Sicherheitsindex  $\beta$  stark ab. Weist der Bewehrungsstahl in diesem Bereich allerdings eine ausreichende Duktilität auf, so steigt das Sicherheitsniveau deutlich an. Die Stahlgrenzdehnung wird im kritischen Querschnitt des Systems nicht erreicht. Das Versagen des Betons ist hier maßgebend. Im Fall hoher Stahlduktilitäten (hier  $\varepsilon_u = 50,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ) nimmt das Sicherheitsniveau mit steigendem Bewehrungsgrad ab und nähert sich für hohe Bewehrungsgrade asymptotisch einem Grenzwert. Bei hoch- oder überbewehrten Systemen wird im Grenzzustand der Tragfähigkeit die Stahlstreckgrenze nicht oder nur gerade erreicht, das System versagt plötzlich infolge Betonbruch. Das Sicherheitsniveau ist entsprechend den eingeschränkten Verformungseigenschaften kleiner.

Deutlichen Einfluß auf das Sicherheitsniveau haben allerdings nicht nur die vorhandenen Grenzdehnungen, sondern das Verhältnis von Stahlzugfestigkeit zu Stahlstreckgrenze. Anhand des Vergleichs der beiden Bilder der Abb. 5.13, bei denen einerseits der Wert  $f_t/f_y$  mit steigender Grenzdehnung steigt, bzw. andererseits für alle Stahldehnungen konstant bleibt, läßt sich erkennen, daß durch eine Erhöhung der Zugfestigkeit des Stahls bei gleichbleibender maximaler Stahldehnung und Streckgrenze die Sicherheit gegenüber dem Erreichen der Traglast

erhöht werden kann.



**Abb. 5.14:** Sicherheitsindex  $\beta$  für den Einfeldträger unter eingprägter Verformung ( $\mu_{\Delta s} = 8 \text{ mm}$ ,  $V_{\Delta s} = 40\%$ ), mit konstruktiver Druckbewehrung ( $A_{s2} = 0,2 \cdot A_{s1}$  bzw.  $0,5 \cdot A_{s1}$ ) bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls

Eine Erhöhung des Sicherheitsniveaus ist somit einerseits durch eine Verbesserung der Duktilitätseigenschaften des Systems, insbesondere bei Beanspruchungen durch eingprägter Verformungen, andererseits natürlich auch bei genauerer Kenntnis der Beanspruchungsparameter (z.B. durch geringere Variationskoeffizienten) möglich. Hier werden exemplarisch zwei Beispiele vorgestellt, in denen zum einen durch eine konstruktive Druckbewehrung die Verformungskapazität des Systems erhöht wird (vgl. Abb. 5.14), zum anderen ein geringerer Variationskoeffizient der eingprägter Verformung ( $V_{\Delta s} = 30\%$  und  $20\%$ ) das Beanspruchungsniveau herabsetzt (vgl. Abb. 5.15). Die zur Erhöhung der Verformungseigenschaften des Systems eingesetzte Druckbewehrung wird im Rahmen der sicherheitstheoretischen Berechnungen allerdings nicht als zusätzliche Basisvariable aufgefaßt, sondern als weiterer deterministischer Parameter. Vergleichsrechnungen zeigen, daß für diese Beispiele eine Basisvariable für die Druckbewehrung z.B. als unabhängige Variable oder als perfekt korreliert mit der Zugbewehrung keine signifikanten Änderungen des Sicherheitsniveaus bewirken. Insofern wird auch im Hinblick auf akzeptable Rechenzeiten auf die zusätzliche Basisvariable verzichtet.

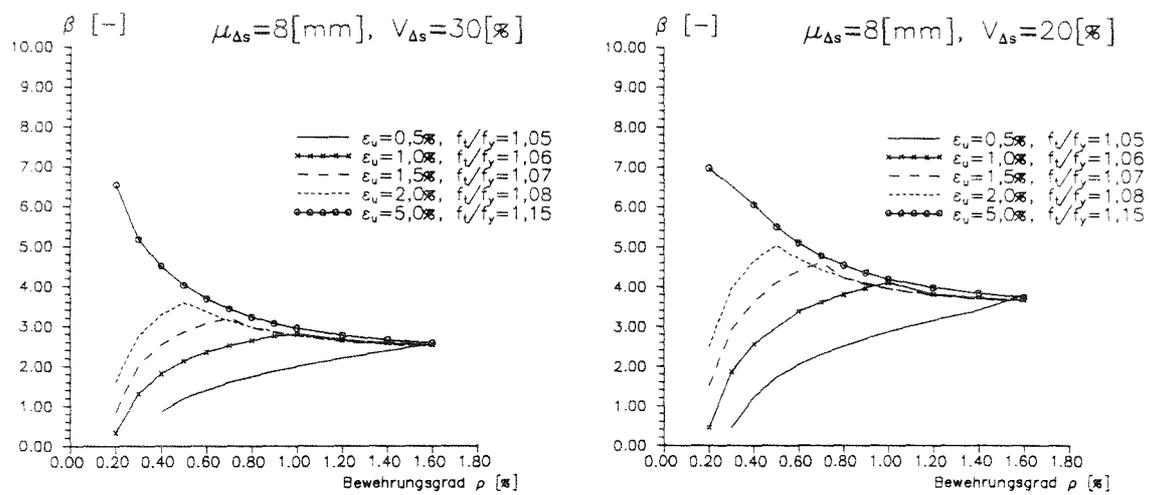


Abb. 5.15: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Einfeldträger unter eingepprägter Verformung ( $\mu_{\Delta_s} = 8 \text{ mm}$ ) mit einem Variationskoeffizienten  $V_{\Delta_s} = 30\%$  und  $V_{\Delta_s} = 20\%$  bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls.

Die Abb. 5.15 zeigt, daß durch einen verringerten Variationskoeffizienten der eingepprägten Verformung das Sicherheitsniveau maßgebend erhöht wird, da die Höhe der Beanspruchung als dominierender Parameter in die Ermittlung des Bemessungspunktes eingeht.

Ein Einfluß der betrachteten Duktilitätsparameter bei reiner Lastbeanspruchung ist im Vergleich zu einer Beanspruchung durch eingeprägte Verformungen zwar deutlich feststellbar, aber nicht so ausgeprägt. Die Abb. 5.16 zeigt den Einfluß der verschiedenen Duktilitätsparameter des Bewehrungsstahls auf den Sicherheitsindex  $\beta$  unter Lastbeanspruchung am Beispiel des Einfeldträgers nach Abb. 5.1 und Tab. 5.1. Die gewählten Duktilitätsparameter sind in der Abb. 5.16 erläutert. Im Falle von Stahlversagen im Bemessungspunkt ist durch eine höhere Zugfestigkeit des Stahls eine Erhöhung des Sicherheitsniveaus zu erkennen. Eine Berechnung mit den Steifigkeiten des reinen Zustands II und einer bilinearen Stahlkennlinie liefert die unteren Werte im Sicherheitsniveau.

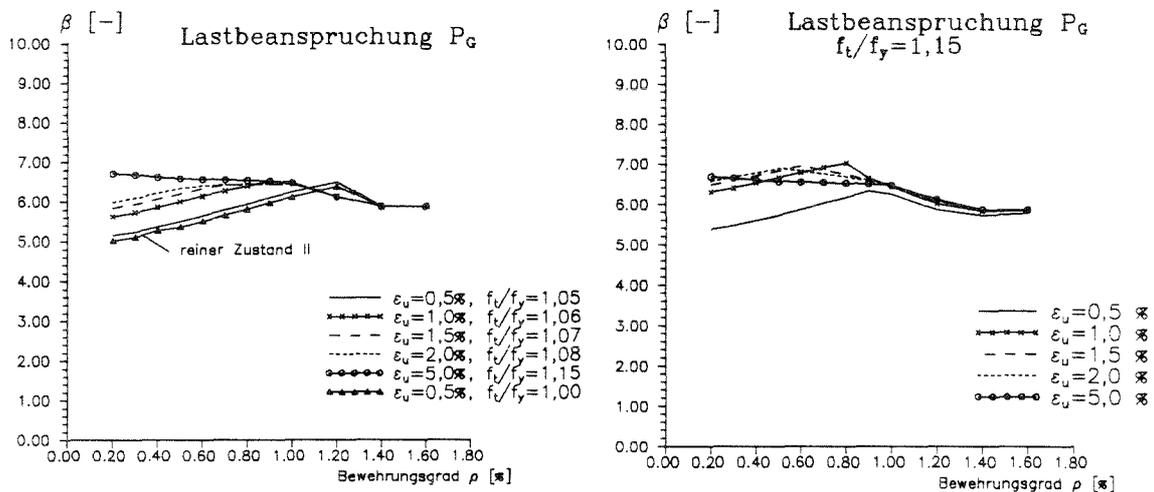


Abb. 5.16: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Einfeldträger unter Lastbeanspruchung  $P_G$  bei verschiedenen Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls. Als Parameter dient die Bruchdehnung  $\epsilon_u$  und der Kennwert  $f_t/f_y$

### 5.3 Einseitig eingespannter Einfeldträger unter Last und eingepprägter Verformung

Als weiteres Systembeispiel wird der in Abb. 5.17 dargestellte einseitig eingespannte Einfeldträger mit einer Gleichstreckenlast  $q$  und einer eingepprägten Verformung am rechten Systemauflager betrachtet. Als Parameter der Systemun-

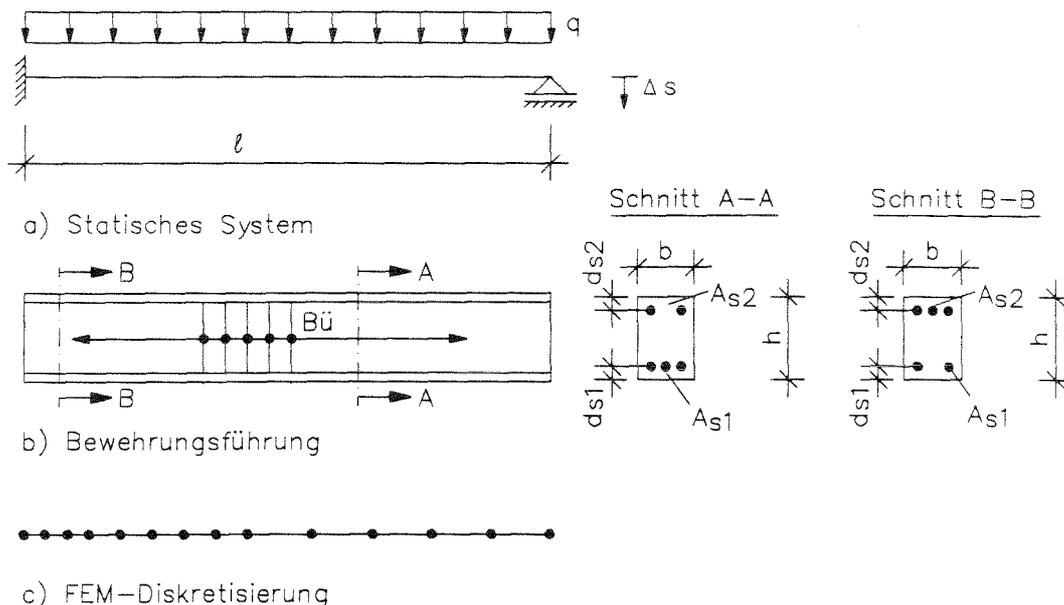


Abb. 5.17: Statisches System, Bewehrungsführung und FEM-Diskretisierung

tersuchungen dient der Bewehrungsgrad  $\rho$  an der Einspannung bzw. die hiermit korrespondierende Streckenlast  $q = q(\rho)$  sowie der Mittelwert einer eingepprägten Verformung  $\mu_{\Delta s}$ . Über den Bewehrungsgrad  $\rho$  an der Einspannung wird hier die gesamte Bewehrungsführung des Balkens bestimmt (siehe Tab. 5.5). Anhand dieses Beispiels soll das Sicherheitsniveau unter gleichzeitiger Einwirkung aus Last und eingepprägter Verformung untersucht werden. Insbesondere wird das Sicherheitsniveau im Hinblick auf die Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung verifiziert.

Die Systemparameter sind in Tab. 5.5 zusammengestellt. Die Bewehrung des Systems ist so gewählt, daß ein Versagen in der Einspannung zuerst auftritt. Die probabilistischen Berechnungen werden unter der Annahme durchgeführt, daß es sich um ein *Seriensystem* handelt, bei dem das erste Erreichen eines Grenzzustandes ein Versagen für das gesamte System bedeutet. Dementsprechend werden die Grenzzustandsgleichungen für die Einspannstelle des Systems formuliert. Die

Bemessungsgrößen der Querschnitte ( $M_d$ ) werden auf der Grundlage des EC 2 [26] mit einer linearelastisch-idealplastischen Kennlinie für den Bewehrungsstahl und der Parabel-Rechteckbeziehung für Beton unter Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit bestimmt. Die Ermittlung der zu dem Bewehrungsgrad  $\rho$  zugehörigen Streckenlast  $q$  erfolgt aus dem rechnerischen Bemessungsmoment  $M_d$  an der Einspannstelle. Die hier berücksichtigten unterschiedlichen Belastungskombinationen werden in den entsprechenden Abschnitten im einzelnen erläutert. Die

Balkenlänge $\ell = 6,0$ [m], Querschnitt: $b/h = 20/30$ [cm] Baustoffe: C 20/25      BSt 500, $d_{s1} = d_{s2} = 2,5$ [cm] Einspannquerschnitt: $A_{s2} = \rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ], $A_{s1} = 0$ [cm <sup>2</sup> ] Feldquerschnitt: $A_{s1} = \rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ], $A_{s2} = 0,4\rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ]								
Einspannquerschnitt				Feldquerschnitt				
$\rho_2$ [%]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]	$d_s$ [mm]	$ M_d $ [kNm]	$\rho_1$ [%]	$d_s$ [mm]	$A_{s1}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]	$M_d$ [kNm]
0,2	1,10	8	12,59	0,2	8	1,10	0,44	12,58
0,3	1,65	8	18,53	0,3	8	1,65	0,66	18,57
0,4	2,20	10	24,23	0,4	10	2,20	0,88	24,48
0,5	2,75	11	29,60	0,5	11	2,75	1,10	30,34
0,6	3,30	12	34,75	0,6	12	3,30	1,32	36,13
0,7	3,85	13	39,15	0,7	13	3,85	1,54	41,88
0,8	4,40	14	44,27	0,8	14	4,40	1,76	47,58
0,9	4,95	15	48,64	0,9	15	4,95	1,98	53,16
1,0	5,50	16	52,74	1,0	16	5,50	2,20	58,60
1,2	6,60	17	60,21	1,2	17	6,60	2,64	69,21
1,4	7,70	18	64,54	1,4	18	7,70	3,08	79,44
1,6	8,80	19	66,01	1,6	19	8,80	3,52	89,30

Tab. 5.5: Systemparameter des einseitig eingespannten Einfeldträgers

Annahmen der statistischen Kenngrößen für die Belastung und die Materialeigenschaften sind in der Tab. 5.6 zusammengefaßt. Im Gegensatz zu den rechnerischen Grundlagen für die durchgeführte Bemessung nach EC 2 werden bei der probabilistischen Berechnung insbesondere die Stahlkennlinie nach Dilger, das Polynom-Rechteckdiagramm für die Betondruckzone sowie die Mitwirkung des Betons auf Zug berücksichtigt (vgl. Kapitel 3). Die Querschnittsgrenzdehnungen werden mit  $\varepsilon_{cu} = -3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  und  $\varepsilon_u = 20,0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$  angenommen,  $f_t/f_y$  beträgt 1,08. Der in die statistische Berechnung eingehende Vektor der Basiszufallsvariablen lautet damit für den Lastfall  $q_G$  (vgl. Abschnitt 5.3.1):

$$\mathbf{x} = (f_c \ f_y \ A_{s1} \ d_{s1} \ h \ q_G)^\top,$$

$x$	$f_c$ [ $\frac{MN}{m^2}$ ]	$f_y$ [ $\frac{MN}{m^2}$ ]	$A_{s2}$ [ $cm^2$ ]	$d_{s2}$ [cm]	$h$ [cm]	$q_G$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$q_Q$ [ $\frac{kN}{m}$ ]	$\Delta s$ [mm]
$\mu$	28	560	$nom A_{s1}$	3	30	$nom q_G$	$nom q_Q / 1,824$	$nom \Delta s$
$\sigma$	5	30	$0,025 \mu_{A_{s1}}$	0,5	0,5	$0,1 \mu_{q_G}$	$0,4 \mu_{q_Q}$	$0,4 \mu_{\Delta s}$
V-typ	LN	LN	N	N	N	N	N	N
Kennwerte nach EC 2								
$x_k$	20	500	$\mu_{A_{s1}}$	2,5	30	$\mu_{q_G}$	$nom q_Q$	$\mu_{\Delta s}$
$\gamma_{EC 2}$	1,50	1,15	-	-	-	1,35	1,5	1,0
$x_d$	13,33 <sup>*</sup>	434	$\mu_{A_{s1}}$	2,5	30	$\gamma_G \cdot \mu_{P_G}$	$\gamma_Q \cdot nom q_Q$	$\mu_{\Delta s}$

<sup>\*</sup>Bei der Bemessung nach EC 2 wird zur Berücksichtigung des Dauerlasteinflusses der Bemessungswert der Betondruckfestigkeit  $f_{cd}$  mit dem Faktor  $\alpha = 0,85$  reduziert

**Tab. 5.6:** Statistische Material- und Belastungsbeschreibung der Basisvariablen.

für den Lastfall  $q_G + q_Q$  (vgl. Abschnitt 5.3.2):

$$\mathbf{x} = (f_c \ f_y \ A_{s1} \ d_{s1} \ h \ q_G \ q_Q)^T$$

und für den Lastfall  $q_G + \Delta s$  (vgl. Abschnitt 5.3.3):

$$\mathbf{x} = (f_c \ f_y \ A_{s1} \ d_{s1} \ h \ q_G \ \Delta s)^T.$$

Die Verteilung der statistischen Variablen entlang der Stabachse (Zufallsfelder) wird für alle Beispiele bezüglich der Variablen  $f_c$ ,  $f_y$ ,  $h$  als streng korreliert betrachtet. Die Streckenlasten  $q_G$ ,  $q_Q$  sind als Gleichstreckenlasten über die Trägerlänge nicht veränderlich. Die Basisvariablen  $A_{s2}$  und  $d_{s2}$  werden entsprechend dem örtlichen Charakter der betrachteten Grenzzustandsgleichungen nur für den Stützbereich in Ansatz gebracht.

### 5.3.1 Lastbeanspruchung $q_G$

In Abb. 5.18 ist der Sicherheitsindex  $\beta$  für das betrachtete System (Abb. 5.17) unter reiner Lastbeanspruchung für vier verschiedene Grenzzustände über dem Bewehrungsgrad der Einspannung  $\rho$  dargestellt. Der Sicherheitsindex ist für die Bemessungslast nach linearer Schnittgrößenermittlung ohne Umlagerung sowie für eine entsprechende Bemessungslast nach pauschaler Momentenumlagerung von 10%, 15%, 30% und soweit noch sinnvolle Ergebnisse berechenbar sind von 40% dargestellt. Die zu den einzelnen Umlagerungen gehörige (ständige) Gleichstreckenlast  $q_G$  ist in der Tab. 5.7 zusammengestellt. Zunächst ist festzustellen, daß mit zunehmender Umlagerung das Sicherheitsniveau für alle betrachteten Grenzzustandsgleichungen abnimmt. Dies resultiert aus der bei höherer

Einspann- querschnitt		ständige Last $q_G$ bei Momentenumlagerung in [%]				
$\rho$ [%]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]	0 [kN/m]	10 [kN/m]	15 [kN/m]	30 [kN/m]	40 [kN/m]
0,2	1,10	2,072	2,302	2,438	2,960	3,453
0,3	1,65	3,050	3,389	3,588	4,357	5,083
0,4	2,20	3,988	4,431	4,692	5,697	6,647
0,5	2,75	4,873	5,414	5,733	6,961	8,122
0,6	3,30	5,725	6,361	6,735	8,179	9,542
0,7	3,85	6,525	7,250	7,677	9,321	10,875
0,8	4,40	7,287	8,097	8,573	10,410	12,145
0,9	4,95	8,007	8,897	9,420	11,439	13,345
1,0	5,50	8,681	9,646	10,213	12,401	14,468
1,2	6,60	9,911	11,012	11,660	14,159	16,518
1,4	7,70	10,623	11,803	12,498	15,176	17,705
1,6	8,80	10,866	12,073	12,784	15,523	18,110

**Tab. 5.7:** Gleichstreckenlasten  $q_G$  nach linearer Schnittgrößenermittlung und Momentenumlagerung

Umlagerung größeren Belastung  $q_G$ . Für den Grenzzustand der Tragfähigkeit zeigt die Abb. 5.18, daß bei linearer Schnittgrößenermittlung ohne Umlagerung und entsprechender Bemessung erhebliche Sicherheitsreserven vorhanden sind. Bei Umlagerungen bis zu ca. 30% ist noch eine ausreichende Sicherheit vorhanden. Bei gleichzeitiger Betrachtung der Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit (Rissebeschränkung und Stahlspannungsbegrenzung) relativiert sich diese Aussage allerdings dahingehend, daß bei den höheren Umlagerungen das erforderliche Sicherheitsniveau im SLS nicht unbedingt gewährleistet ist. Der Abb. 5.18 ist zu entnehmen, daß nur für entsprechend hohe Bewehrungsgrade für den Grenzzustand der Rissebeschränkung eine ausreichende Sicherheit vorhanden ist. Im Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung ist für eine Umlagerung  $\geq 30\%$  kein ausreichender Sicherheitsabstand vorhanden. Stärker bewehrte Systeme lassen im Hinblick auf das Sicherheitsniveau der Gebrauchstauglichkeitskriterien höhere Umlagerungen zu als schwach bewehrte Systeme. Im Bereich  $0,2 < \rho < 0,4$  ist sowohl für den Grenzzustand der Rissebeschränkung als auch für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung der Einfluß der Mitwirkung des Betons auf Zug deutlich feststellbar. Während bei der probabilistischen Berechnung zur Rissebeschränkung eine geringere mittlere Stahldehnung  $\varepsilon_{sm}$  infolge höherer Mitwirkung des Betons auf Zug das Sicherheitsniveau wieder ansteigen läßt,

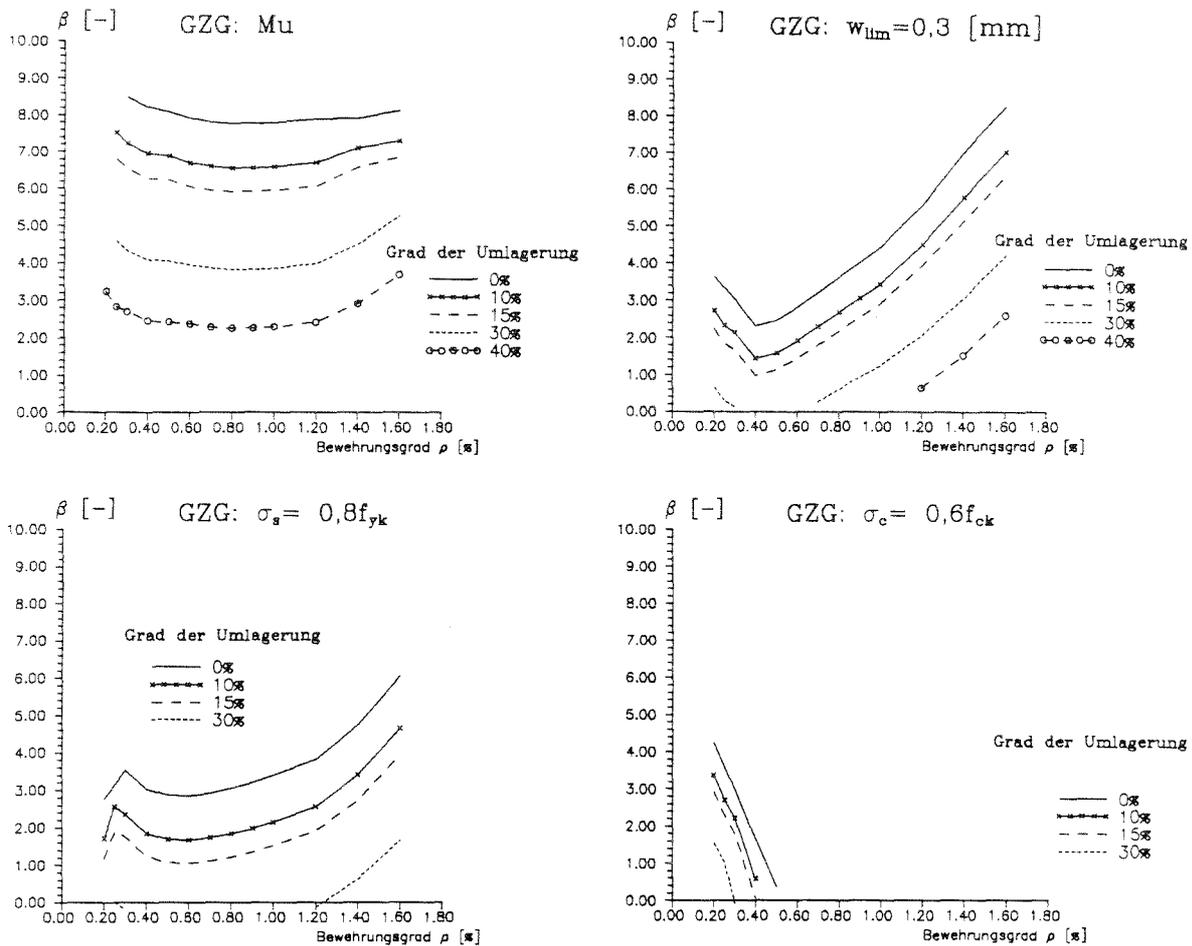


Abb. 5.18: Sicherheitsindex  $\beta$  unter ständiger Lastbeanspruchung  $q_G$  nach linearer Schnittgrößenermittlung mit Momentenumlagerung für verschiedene Grenzzustände

hat dieser Einfluß bei der probabilistischen Berechnung zur Stahlspannungsbegrenzung einen umgekehrten Einfluß. Infolge höherer Mitwirkung des Betons auf Zug bei kleinen Bewehrungsgraden (in der Nähe der Mindestbewehrung) tritt ein höherer Einspannungseffekt auf. Die zu der entsprechenden Schnittgröße zugehörige Stahlspannung wird dann in einem *Rißquerschnitt* bestimmt, wodurch das Sicherheitsniveau abfällt. Dieser Effekt hängt somit besonders von der verwendeten Modellierung der Mitwirkung des Betons auf Zug sowie von den zugrundeliegenden Materialparametern ab. Im Zusammenhang mit der Mindestbewehrung ist darauf hinzuweisen, daß die probabilistischen Berechnungen in diesem Bewehrungsbereich besonders empfindlich sind, da im Laufe der Berechnung je nach rechnerischer Betonzugfestigkeit die Mindestbewehrung unter- oder über-

schritten werden kann. Im mechanischen Tragwerksmodell tritt an dieser Stelle ein unstetiges Tragverhalten auf, wodurch die iterative Berechnung erheblich erschwert wird. Dieses unstetige Verhalten ist durch das plötzliche Systemversagen bei Überschreitung der Rißbeanspruchung und gleichzeitig nicht ausreichender Mindestbewehrung (plötzliches Überschreiten der Stahlstreckgrenze) begründet.

### 5.3.2 Beanspruchungskombination aus $q_G + q_Q$

In der Abb. 5.19 ist für das vorliegende System der Sicherheitsindex  $\beta$  infolge einer kombinierten Beanspruchung aus einer ständigen ( $q_G$ ) und veränderlichen ( $q_Q$ ) Streckenlast für die verschiedenen Grenzzustandsgleichungen dargestellt. Die charakteristischen Belastungswerte sind in der Tab. 5.8 zusammengefaßt. Die

Einspannquerschnitt		ständige Last $q_G$ $q_G$ [kN/m]	veränderliche Lasten $q_Q$ mit Umlagerung im %				
$\rho$ [%]	$A_{s2}$ [cm <sup>2</sup> ]		0 [kN/m]	10 [kN/m]	15 [kN/m]	30 [kN/m]	40 [kN/m]
0,2	1,10	2,5	–	–	–	0,414	0,858
0,3	1,65	2,5	0,495	0,800	0,979	1,671	2,324
0,4	2,20	2,5	1,339	1,738	1,973	2,877	3,731
0,5	2,75	2,5	2,136	2,623	2,910	4,015	5,060
0,6	3,30	2,5	2,903	3,475	3,812	5,111	6,338
0,7	3,85	2,5	3,623	4,275	4,659	6,139	7,538
0,8	4,40	2,5	4,308	5,037	5,466	7,119	8,680
0,9	4,95	2,5	4,956	5,757	6,228	8,045	9,760
1,0	5,50	2,5	5,563	6,431	6,942	8,911	10,772
1,2	6,60	2,5	6,670	7,661	8,244	10,493	12,617
1,4	7,70	2,5	7,311	8,373	8,998	11,408	13,685
1,6	8,80	2,5	7,529	8,616	9,255	11,721	14,048

**Tab. 5.8:** Gleichstreckenlasten  $q_G + q_Q$  nach linearer Schnittgrößenermittlung und Momentenumlagerung

ständige Last  $q_G$  ist unabhängig vom Bewehrungsgrad aus dem Eigengewicht des Systems und einer angenommenen Ausbaulast konstant zu  $q_G = 2,5$  kN/m angesetzt. Der charakteristische Wert der veränderlichen Gleichstreckenlast  $q_Q$  wurde aus der nach linearer Schnittgrößenermittlung ermittelten Gleichstreckenlast entsprechend dem Bewehrungsgrad an der Einspannstelle abzüglich der ständigen Last  $q_G$  ermittelt. Der berücksichtigte Teilsicherheitsbeiwert nach EC 2 [26] für Verkehrslasten beträgt  $\gamma_Q = 1,50$ , für ständige Lasten  $\gamma_G = 1,35$ . Damit erhält

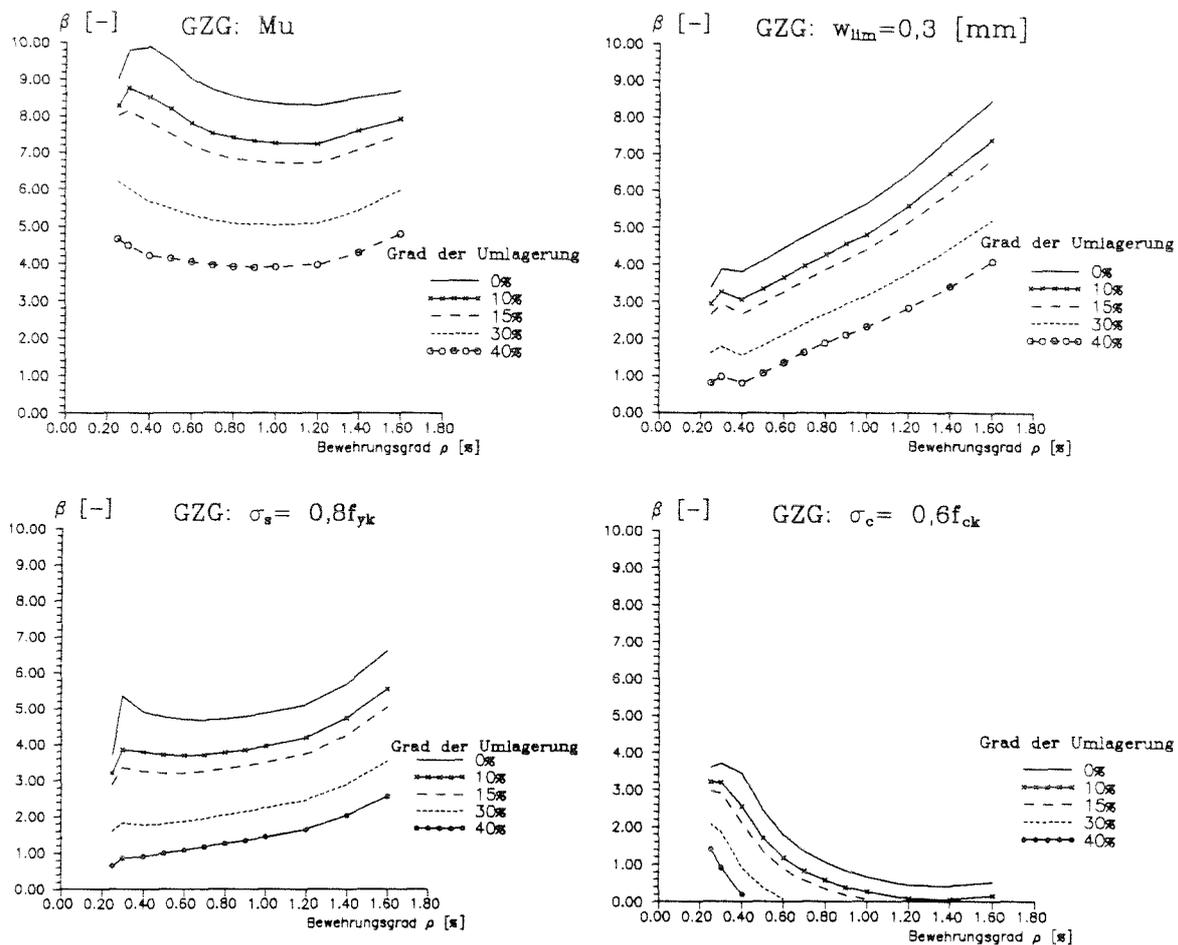


Abb. 5.19: Sicherheitsindex  $\beta$  unter ständiger und veränderlicher Lastbeanspruchung  $q_G + q_Q$  nach linearer Schnittgrößenermittlung mit Momentenumlagerung für verschiedene Grenzzustände

man  $q_Q$  aus der Beziehung

$$q_Q = \frac{q_{M_d} - q_G \cdot \gamma_G}{\gamma_Q} \quad (5.12)$$

mit  $q_{M_d}$  gleich der vom Bewehrungsgrad an der Einspannstelle abhängigen Gleichstreckenlast nach linearer Schnittgrößenermittlung mit und ohne Umlagerung. Der Variationskoeffizient der ständigen Last  $V_{q_G}$  beträgt 10%, der veränderlichen Last  $V_{q_Q}$  beträgt 40% (vgl. Tab. 5.6). Im Vergleich zu einer ausschließlich ständigen Einwirkung (vgl. Abb. 5.18) ist bei der hier berücksichtigten Kombination aus ständiger und veränderlicher Belastung das Sicherheitsniveau insgesamt höher. Insbesondere sind auch bei Betrachtung der Gebrauchslastnachweise Umlagerungen bis zu 30% mit einem ausreichenden Sicherheitsabstand möglich.

### 5.3.3 Beanspruchungskombination aus dominierender Last $q_G$ und eingepprägter Verformung $\Delta s$

Im folgenden wird das Sicherheitsniveau des betrachteten Systems nach Abb. 5.17 für eine Beanspruchung durch die ständige Last  $q_G$  nach Tab. 5.7 und eine bei der Bemessung nicht berücksichtigte eingepprägte Verformung  $\Delta s$  dargestellt. Die hier betrachteten Einwirkungen aus eingepprägter Verformung sind so ausgewählt, daß sie im Vergleich zu der Lasteinwirkung  $q_G$  eine nicht dominierende Beanspruchung für das System darstellen. Der Einfluß verschiedener Umlagerungsgrade wird exemplarisch mit 10%, 15% und 30% erfaßt. In der Abb. 5.20 ist der Sicherheitsindex  $\beta$  für den Grenzzustand der Tragfähigkeit (Bruchmoment  $M_u$  der Einspannung) über dem Bewehrungsgrad  $\rho$  dargestellt. Der Einfluß der verschiedenen Umlagerungsgrade auf das Sicherheitsniveau bei kombinierter Einwirkung aus ständiger Last und eingepprägter Verformung ist im Vergleich zur reinen Lastbeanspruchung (siehe Abb. 5.18 und 5.19) unverändert. Insgesamt nimmt der Einfluß der eingepprägten Verformung auf das Sicherheitsniveau mit zunehmender Momentenumlagerung leicht ab.

In der Abb. 5.21 ist für dieselben Einwirkungskombinationen der Sicherheitsindex  $\beta$  für den Grenzzustand der Rissebeschränkung aufgetragen. Auch für diesen Grenzzustand hat die zusätzliche eingepprägte Verformung einen gleichmäßig abmindernden Einfluß auf das Sicherheitsniveau. Bei den schwach bewehrten Systemen  $\rho < 0,4\%$  ist infolge der Mitwirkung des Betons auf Zug und der stark steifigkeitsabhängigen Schnittgröße aus der Zwangsbeanspruchung ein mit steigender eingepprägter Verformung stark abfallender Sicherheitsindex festzustellen. Das gleiche gilt auch für die Untersuchungen zum Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung, deren Ergebnisse in Abb. 5.22 dargestellt sind.

Bruchmoment  $M_u$

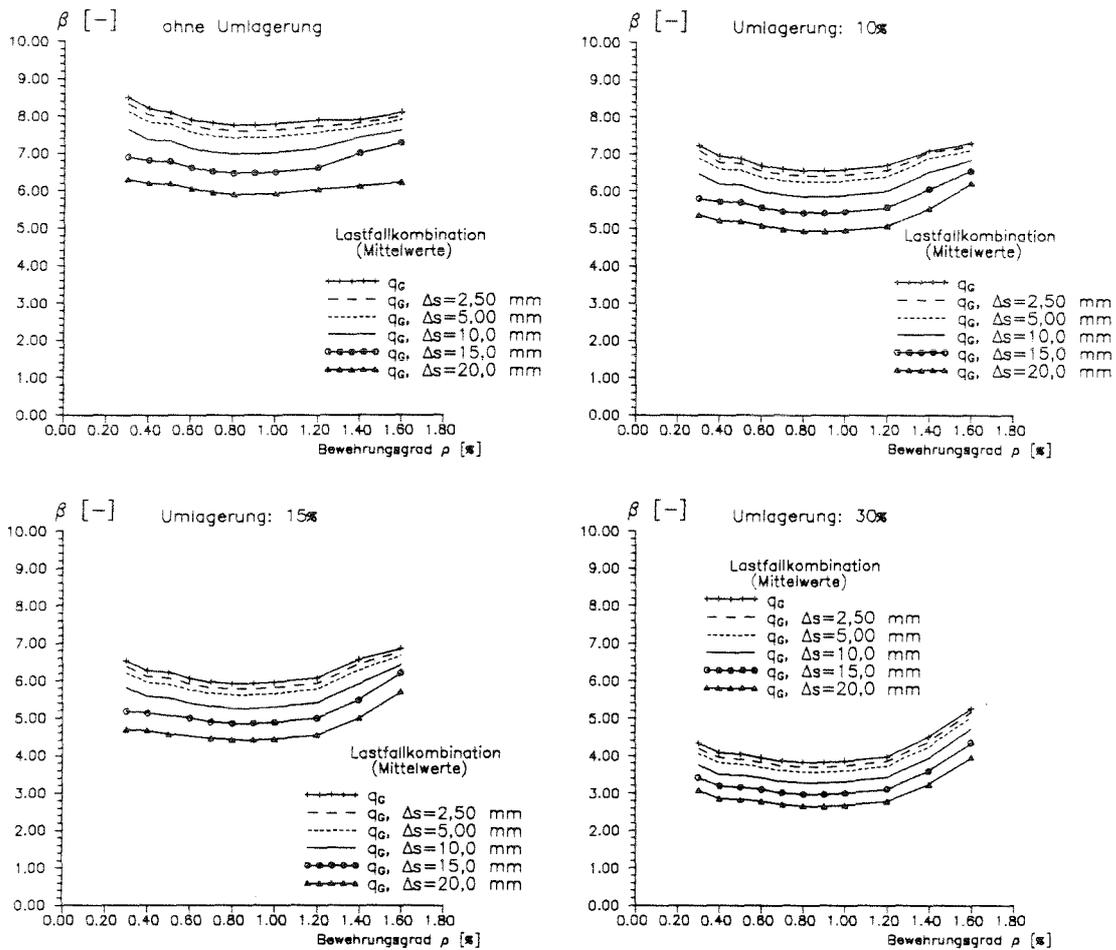


Abb. 5.20: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Grenzzustand der Tragfähigkeit bei verschiedenen Lastfallkombinationen ( $q_G, V_{q_G} = 10\%$  und  $\Delta s, V_{\Delta s} = 40\%$ ) und unterschiedlicher Momentenumlagerung aus Lastbeanspruchung

Rissebeschränkung:  $w_{lim} = 0,30$  [mm]

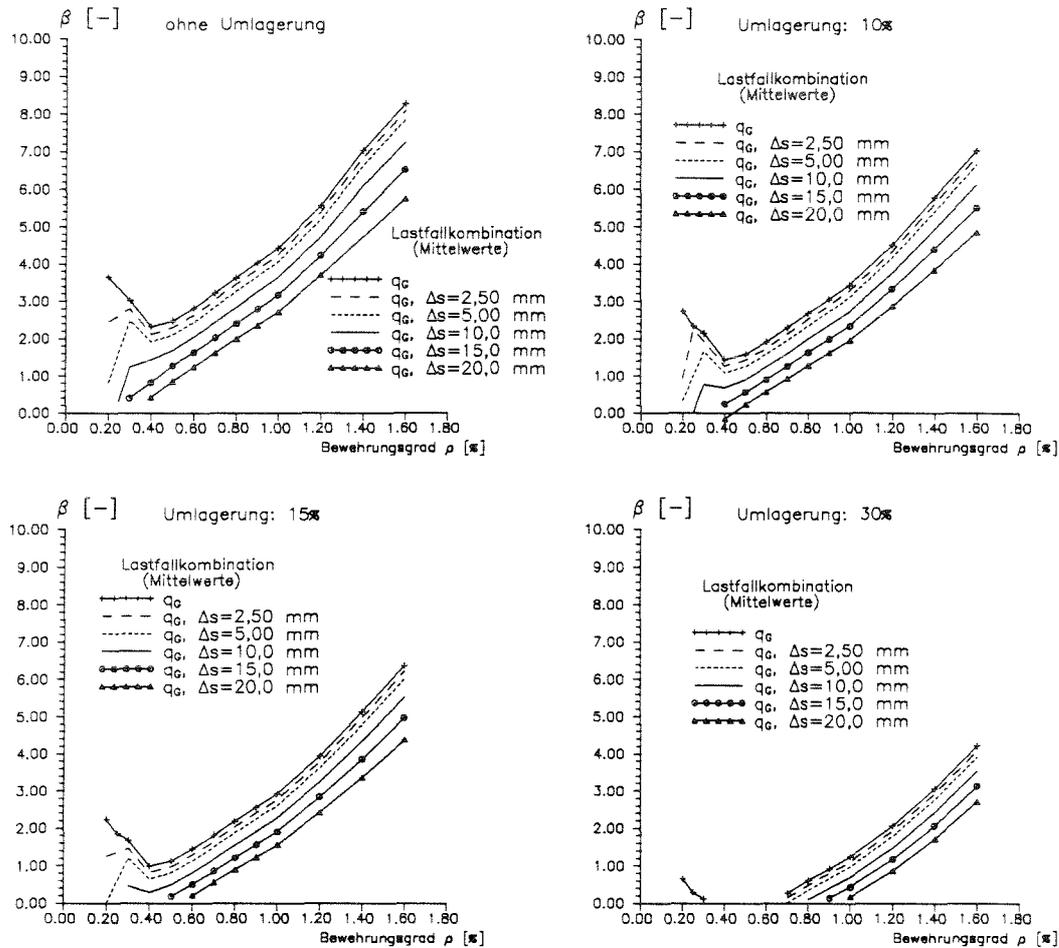


Abb. 5.21: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Grenzzustand der Rissebeschränkung bei verschiedenen Lastfallkombinationen ( $q_G, V_{q_G} = 10\%$  und  $\Delta s, V_{\Delta s} = 40\%$ ) und unterschiedlicher Momentenumlagerung aus Lastbeanspruchung

Stahlspannungsbegrenzung:  $\sigma_s = 0,8 \cdot f_{yk}$

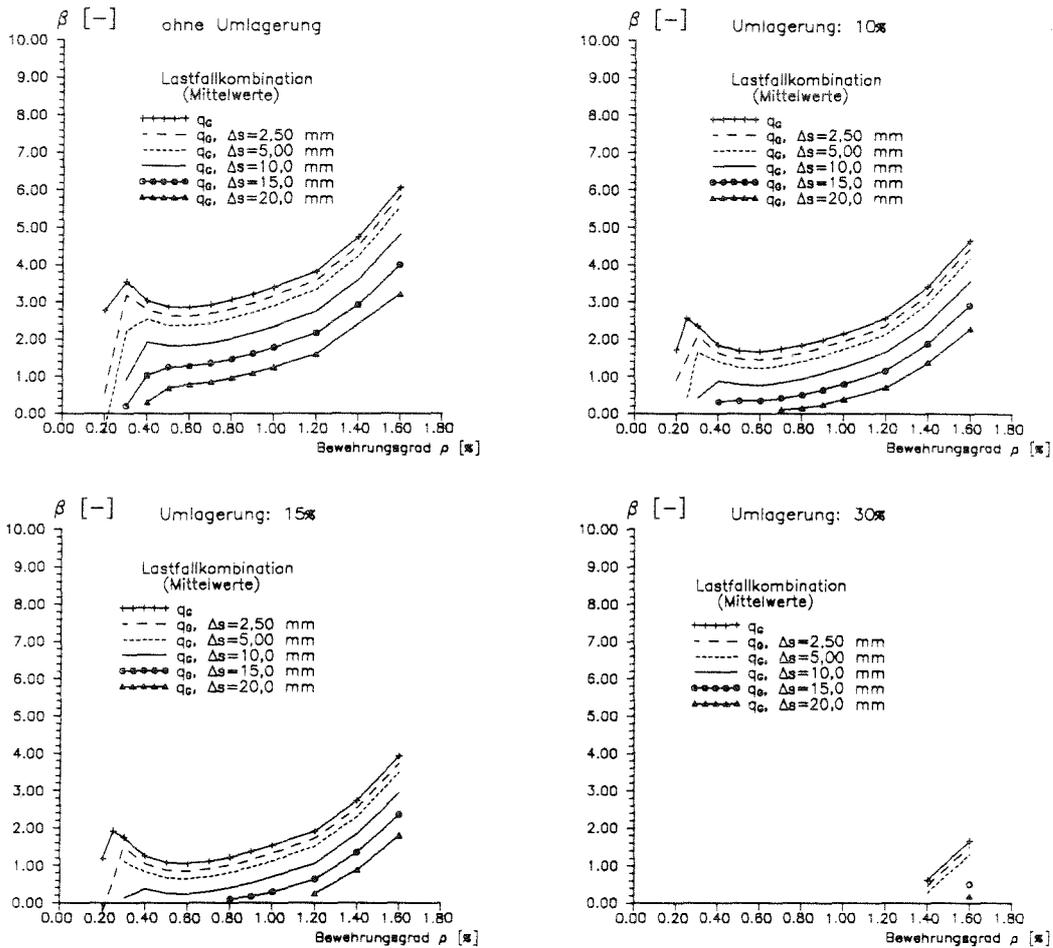


Abb. 5.22: Sicherheitsindex  $\beta$  für den Grenzzustand der Stahlspannungsbegrenzung bei verschiedenen Lastfallkombinationen ( $q_G, V_{qG} = 10\%$  und  $\Delta s, V_{\Delta s} = 40\%$ ) und unterschiedlicher Momentenumlagerung aus Lastbeanspruchung

### 5.3.4 Beanspruchungskombination aus Last $q_G$ und dominierender eingepprägter Verformung $\Delta s$

Bei einer Beanspruchungskombination aus einer ständigen Last  $q_G$  und einer dominierenden eingepprägten Verformung  $\Delta s$  ist die Bewehrungsführung gegenüber der in der Tab. 5.5 beschriebenen wegen des veränderten Momentenverlaufes im Feld entsprechend zu ändern. Die für dieses Beispiel gewählte Bewehrung des Feld- und Einspannquerschnitts des betrachteten System (vgl. Abb. 5.17) ist in der Tab. 5.9 erläutert. Die Bewehrungsverteilung ist so gewählt, daß ein Versagen in der Einspannung des Systems zuerst auftritt. Die gewählten Belastungen ent-

Balkenlänge $\ell = 6,0$ [m], Querschnitt: $b/h = 20/30$ [cm]
Baustoffe: C 20/25      BSt 500, $d_{s1} = d_{s2} = 2,5$ [cm]
Einspannquerschnitt: $A_{s2} = \rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ], $A_{s1} = 0,2\rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ]
Feldquerschnitt: $A_{s1} = 0,6\rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ], $A_{s2} = 0,8\rho \cdot bd$ [cm <sup>2</sup> ]

**Tab. 5.9:** Systemparameter des einseitig eingespannten Einfeldträgers mit dominierender eingepprägter Verformung

sprechen einer ständigen Last  $q_G$  aus Eigengewicht und Ausbaulast ( $q_G = 2,50$  bzw.  $5,0$  kN/m) sowie einer eingepprägten Verformung  $\Delta s$  des rechten Systemauflagers um 20 bis 60 mm ( $V_{\Delta s} = 40\%$ ). Die Bewehrungsgrade der Systemquerschnitte sind in diesem Beispiel nicht einer deterministischen Bemessung nach EC 2 zugeordnet, sondern es wird ein ausgewähltes Bewehrungsspektrum von  $\rho = 0,2$  bis  $1,6\%$  betrachtet, um den Einfluß möglicherweise unterschiedlicher Bemessungsergebnisse auf das Sicherheitsniveau zu untersuchen. Gleichzeitig ist eine Druckbewehrung sowohl an der Einspannstelle als auch im Feld des Systems vorhanden, um die Duktilitätseigenschaften des Systems zu erhöhen.

In der Abb. 5.23 ist der Sicherheitsindex  $\beta$  für drei untersuchte Grenzzustände bei einer ständigen Last von  $q_G = 2,5$  kN/m und verschiedenen eingepprägten Verformungen über dem Bewehrungsgrad der Einspannung dargestellt. (vgl. auch Tab. 5.9). Mit zunehmendem Bewehrungsgrad steigt der Sicherheitsindex für alle untersuchten Grenzzustände. Die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit wären in den betrachteten Fällen bei einer probabilistischen Bemessung maßgebend. Für den Grenzzustand der Tragfähigkeit wird ab einem Bewehrungsgrad von ca.  $\rho = 0,8$  durch eine Erhöhung der Bewehrung keine wesentliche Verbesserung im Sicherheitsniveau erreicht. In der Abb. 5.24 ist der Sicherheitsindex  $\beta$  für drei untersuchte Grenzzustände mit einer etwas höheren ständigen Last

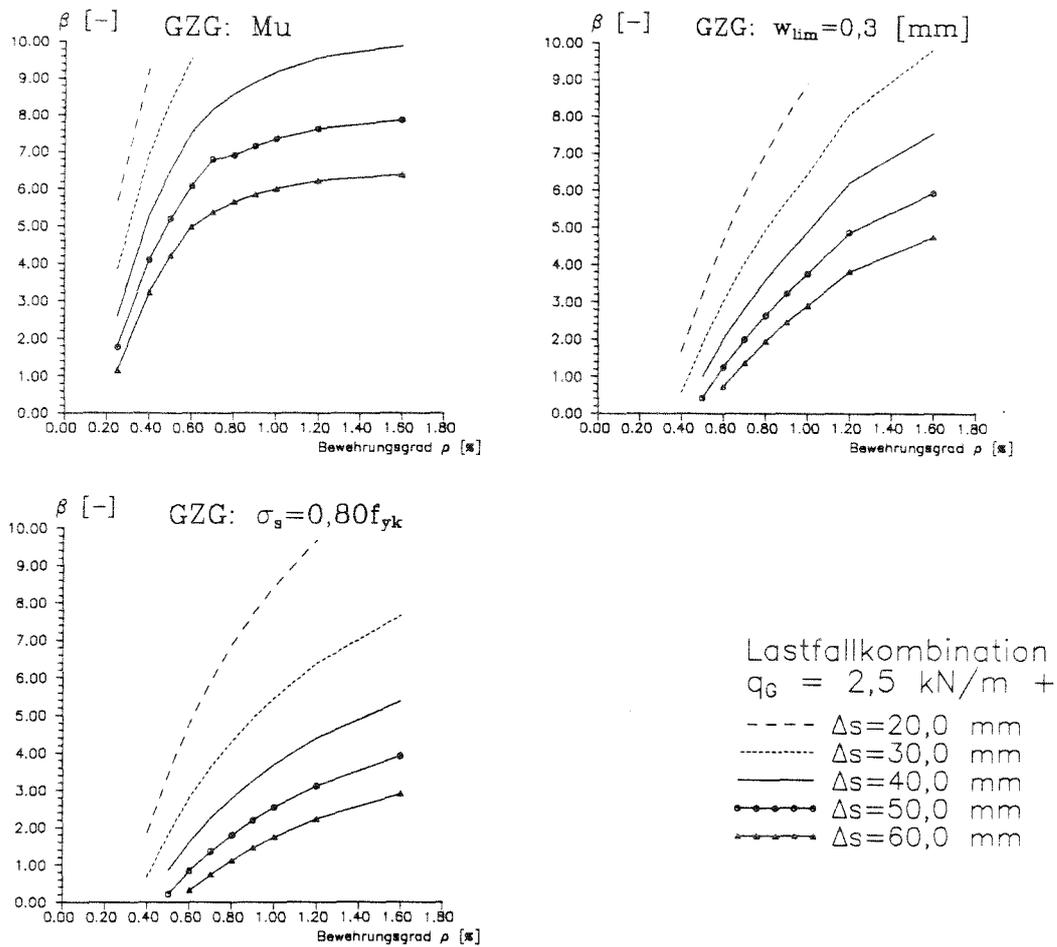


Abb. 5.23: Sicherheitsindex  $\beta$  für ständige Last  $q_G = 2,5 \text{ kN/m}$  und dominierende eingetragene Verformung

von  $q_G = 5,0 \text{ kN/m}$  und den verschiedenen eingetragten Verformungen dargestellt. Die höhere Belastung erfordert bei einer probabilistischen Bemessung einen höheren Bewehrungsgrad, wobei wiederum die Gebrauchstauglichkeitsanforderung bemessungsentscheidend sind.

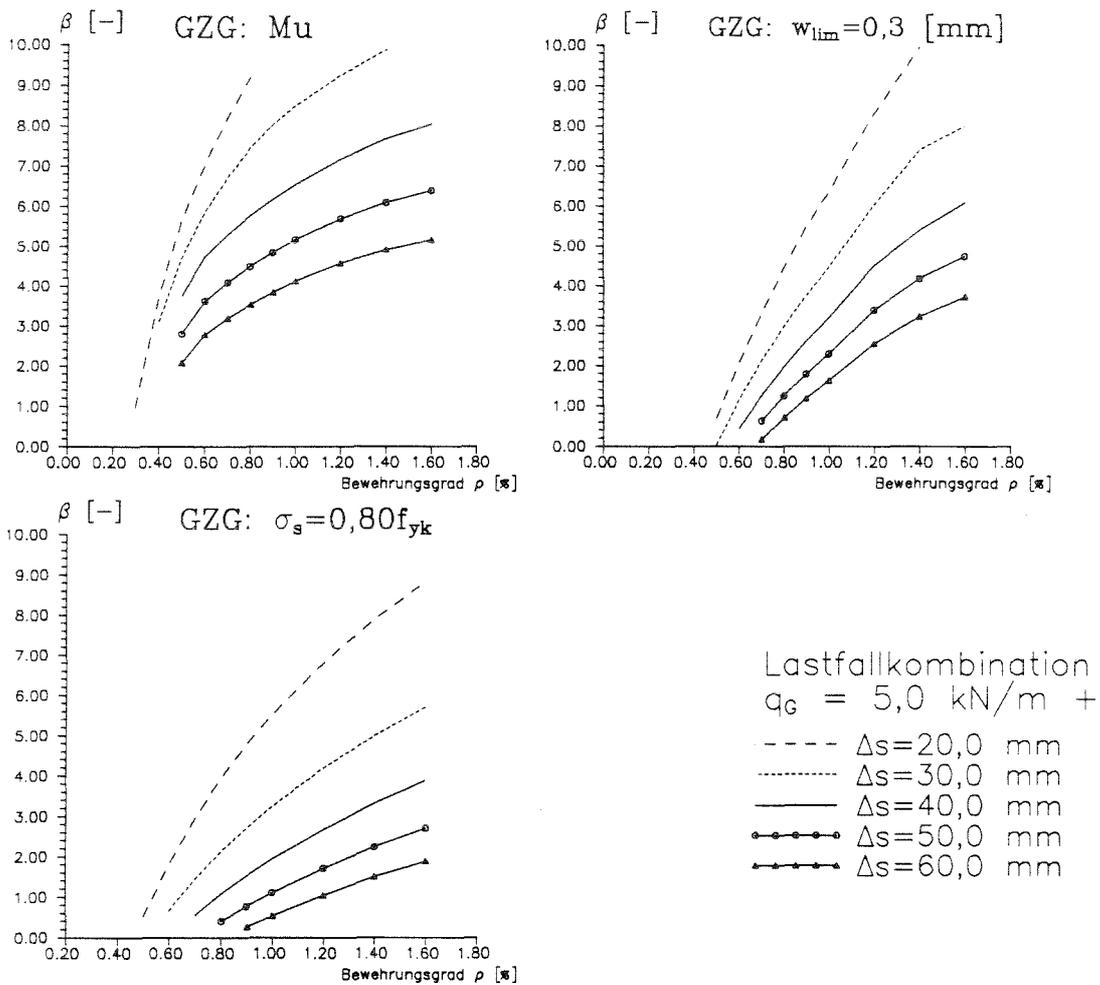


Abb. 5.24: Sicherheitsindex  $\beta$  für ständige Last  $q_G = 5,0$  kN/m und dominierende eingepreßte Verformung

# Kapitel 6

## Bemessungs- und Sicherheitskonzept für eingeprägte Verformungen

### 6.1 Eingeprägte Verformungen als Einwirkungsgröße

Die Erfassung eingepprägter Verformungen als normativ festzulegende Einwirkungsgröße erweist sich als vieldeutig, da die Interaktion zwischen Beanspruchungsursache und Wirkung im Hinblick auf eine ausreichende Tragsicherheit und Gebrauchstauglichkeit berücksichtigt werden muß. So werden z.B. Baugrundbewegungen in Bodengutachten als mögliche oder wahrscheinliche Werte zu erwartender Setzungen, oft auch auf der Grundlage von Erfahrungswerten des Gutachters angegeben. Im allgemeinen kann hierbei aber nicht der mögliche lastverteilende Einfluß eines statisch unbestimmten Tragsystems berücksichtigt werden. Eine rechnerische Berücksichtigung der Interaktion von Baugrund und Tragwerk erfordert zudem eine eindeutige Beziehung zwischen Last und Verformung. Zeitabhängige Faktoren können erheblichen Einfluß auf die Systemreaktionen haben. Alle diese Einflüsse muß das aufgehende Tragsystem mit einem ausreichenden Sicherheitsabstand gegenüber dem Erreichen möglicher Grenzzustände kompensieren. Weitere eingepprägte Verformungen entstehen beispielsweise durch Temperaturänderungen in angrenzenden Bauteilen oder im betrachteten Bauteil selbst. Je nach Höhe der möglichen Temperaturänderungen sind charakteristische Werte der Temperaturdifferenzen für rechnerische Nachweise festzulegen. Zudem müssen die maßgeblichen Materialkennwerte wie Temperatureausdehnungskoeffizienten und Elastizitätsmoduln sowie die vorhandenen Steifigkeiten bekannt sein.

Auch hierbei weist die Beanspruchung erhebliche Unsicherheiten auf. Im Falle von Lagerauswechselungen (z.B. im Brückenbau) hingegen ist die erforderliche Anhebung relativ genau bekannt. Es muß gewährleistet sein, daß das Tragwerk ohne dauerhafte Beeinträchtigungen dieser Beanspruchung standhält.

## 6.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung

Die Methode der Schnittgrößenermittlung im Grenzzustand der Tragfähigkeit hat erheblichen Einfluß auf das Bemessungsergebnis. Daher werden im folgenden die verschiedenen Verfahren zur Schnittgrößenermittlung nach EC 2 [26] Abschnitt 2.5.3 im Hinblick auf die Behandlung eingepprägter Verformungen kurz kommentiert.

### 6.2.1 Linearelastische Schnittgrößenermittlung

Werden die Schnittgrößen für den Grenzzustand der Tragfähigkeit nach der Elastizitätstheorie ermittelt, so können bei statisch unbestimmten Systemen nach Überschreitung der Rißbeanspruchung die tatsächlich im Tragwerk auftretenden Schnittgrößen je nach Bewehrungsgrad und Betonquerschnittsform erheblich überschätzt werden. Dies führt zu unwirtschaftlichen Bemessungsergebnissen. Für den Fall, daß infolge der vorhandenen Beanspruchung keine Steifigkeitsabnahme zu erwarten ist, führt auch die lineare Schnittgrößenermittlung (Zustand I) zu vernünftigen Ergebnissen. Für eingepprägte Verformungen ist hierbei im Gegensatz zur Lasteinwirkungen eine ausreichende Kenntnis der Materialkennwerte (hauptsächlich der Elastizitätsmodul des Betons) erforderlich. Bei Überschreitung der Rißbeanspruchung kann eine Abschätzung der Steifigkeiten für das gesamte System oder nur für die kritischen Bereiche eine Annäherung an den tatsächlichen Schnittgrößenverlauf ermöglichen.

### 6.2.2 Linearelastische Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung

Die linearelastische Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung nach EC 2 findet ihre Anwendung bei durchlaufenden Platten oder Trägern mit Stützweitenverhältnissen  $l_1/l_2 \leq 2$  sowie bei Riegeln von unverschieblichen Rahmen. Dieses Verfahren berücksichtigt eine gewisse plastische Verformbarkeit auf der Grundlage der Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls sowie des Bewehrungsgrades und der Betonfestigkeitsklasse. Wesentlicher Vorteil der linearen Schnittgrößenermittlung im Zustand I mit begrenzter Umlagerung ist

im Gegensatz zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung die Gültigkeit des Superpositionsprinzips. Für eine Schnittgrößenermittlung im Zustand II können derartige Umlagerungsbeziehungen nicht angewendet werden [15]. Durch die begrenzte Umlagerung wird je nach Grad der Umlagerung indirekt eine örtliche Steifigkeitsabnahme erfaßt. Nicht wesentliche Zwangsschnittgrößen können nach [15] hierbei vernachlässigt werden.

Bei gleichzeitiger Wirkung von Lasten und nicht vernachlässigbaren eingepprägten Verformungen stellt sich die Frage, inwieweit diese Methode angewendet werden kann. Sinnvolle Lösungen sind zunächst nur für den Fall denkbar, daß Last- und Zwangsschnittgröße an der maßgebenden kritischen Stelle das gleiche Vorzeichen aufweisen. Die Methode vernachlässigt die Tatsache, daß sich Schnittgrößen infolge eingepprägter Verformungen im Gegensatz zu Lastschnittgrößen wegen abnehmenden Steifigkeiten vermindern. Am Beispiel eines Durchlaufträgers heißt dies, daß zur Wahrung des Gleichgewichtes die Feldmomente entsprechend der Abminderung der Stützmomente erhöht werden. Hierin muß auch der Anteil der linearelastisch ermittelten Schnittgröße infolge eingepprägter Verformung enthalten sein. Bei einer wirklichkeitsnahen nichtlinearen Schnittgrößenermittlung für den Grenzzustand der Tragfähigkeit ist eine solche Schnittgrößenverteilung im allgemeinen nicht festzustellen. Bezieht man die lineare Berechnung mit Umlagerung auf eine kombinierte Beanspruchung mit dominierender eingepprägter Verformung, so zeigt der Versuch einer konsequenten Anwendung dieses Verfahrens am Beispiel eines Durchlaufträgers, daß die Steifigkeit des Trägers entweder gleichmäßig über die Trägerlänge entsprechend dem Grad der Umlagerung oder aber im Bereich der kritischen Trägerbereiche entsprechend höher abgemindert werden muß. Nur letzteres kann im Kontext des Verfahrens sinnvoll sein, da bei gleichmäßiger Abminderung der Steifigkeit im Falle einer Lastbeanspruchung Umlagerungen nicht vorkommen.

Insgesamt zeigt sich, daß mit diesem Verfahren hauptsächlich Lastbeanspruchungen behandelt werden können. Für gleichzeitige Berücksichtigung von Lastbeanspruchungen und eingepprägten Verformungen können mit Sonderüberlegungen bezüglich der effektiven Steifigkeiten sinnvolle Ergebnisse ermittelt werden. Dabei müßten die Schnittgrößen aus Last und eingepprägter Verformung getrennt ermittelt und beide Lastfälle einzeln entsprechend dem angenommenen Steifigkeitsverlauf umgelagert werden. Die Superposition der Ergebnisse, die genaue genommen nur dann zulässig ist, wenn mit denselben Systemsteifigkeiten gerechnet wird, liefert dann eine angenäherte Lösung. Ein ähnliches Vorgehen ist in [18] und [31] enthalten. Dieses Vorgehen ist im Prinzip aber nicht Gegenstand der

Methode, die ursprünglich auch nur mit Lasten als Einwirkungen konzipiert war [52]. So ist beispielsweise eine um 30% abgeminderte elastischen Schnittgröße ein unterer Grenzwert bei Beanspruchungen infolge eingepprägter Verformungen, sofern Ribbildung im Grenzzustand der Tragfähigkeit zu erwarten ist (vgl. auch [31]).

### 6.2.3 Nichtlineare Schnittgrößenermittlung

Die nichtlineare Schnittgrößenermittlung liefert bei gegebenen Querschnittsabmessungen wirklichkeitsnahe Schnittgrößen und Verformungen für last- und zwangsbeanspruchte Systeme. Die versteifende Wirkung der Bewehrung in der gerissenen Zugzone ist insbesondere bei Zwangseinwirkungen zu berücksichtigen. Ein auf einer nichtlinearen Schnittgrößenermittlung basierendes Bemessungsverfahren kann allerdings immer nur ein iteratives Vorgehen sein, da Beanspruchung und Steifigkeiten einander bedingen. Zudem ist hinsichtlich des Sicherheitskonzeptes für nichtlineare Schnittgrößenermittlungen und Bemessung die Diskrepanz zwischen wirklichkeitsnahen Stoffgesetzen und den Bemessungsstoffgesetzen, denen der Gedanke einer Fehlstelle zugrunde liegt [30], zu überwinden. Insofern eignet sich die nichtlineare Schnittgrößenermittlung besonders für Computeranwendungen und zur Verifizierung gewählter Bewehrungsverteilungen, da hierbei implizit Ribbildung, versteifende Mitwirkung des Betons auf Zug sowie Verformungsfähigkeit des Systems berücksichtigt werden. Ein weiterer wesentlicher Vorteil liegt auch in der Möglichkeit einer kontinuierlichen Berechnung vom Gebrauchslastbereich inklusive der entsprechenden Nachweise bezüglich Rissebeschränkung, Spannungs- und Durchbiegungsbegrenzung bis zur Systemtraglast.

### 6.2.4 Schnittgrößenermittlung nach der Plastizitätstheorie

Als Sonderfall der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung sind die Betrachtungen nach der Plastizitätstheorie (ausschließlich) für den Grenzzustand der Tragfähigkeit zu verstehen. Hier haben eingepprägte Verformungen keinen Einfluß auf den Schnittgrößenverlauf. Allerdings ist bei diesem Verfahren die entsprechende Verformungsfähigkeit (Rotation) für Last und eingepprägte Verformung explizit nachzuweisen [15].

### 6.2.5 Schnittgrößenermittlung für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit

Für die Schnittgrößenermittlung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit werden im allgemeinen linearelastische Verfahren unter Annahme eines ungerissenen Betonquerschnittes angewandt. In Fällen, in denen die Auswirkungen der Ribbildung auf die Schnittgrößen ungünstig ist, muß die Abnahme der Steifigkeiten berücksichtigt werden. Sind die Auswirkungen günstig, darf die Ribbildung bei gleichzeitiger Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen in Rechnung gestellt werden [26]. Im Zusammenhang mit eingepprägten Verformungen hat daher auch die nichtlineare Schnittgrößenermittlung für Gebrauchslasten besondere Bedeutung. Zur Bestimmung der Schnittgrößen nach einer linearelastischen Berechnung von Hand müssen die Steifigkeiten ggf. bereichsweise abgeschätzt werden.

## 6.3 Bemessungsvorschlag

Der im folgenden formulierte Bemessungsvorschlag gilt allgemein für die Bemessung von Stahlbetontragwerken unter Lastbeanspruchung und eingepprägter Verformung. Dabei wird die Größe der eingepprägten Verformungen und der Lasten mit ihren charakteristischen Werten als bekannt vorausgesetzt. Der Vorschlag basiert einerseits auf rechnerischen Nachweisen zur Bestimmung der erforderlichen Querschnitte und andererseits auf der Einhaltung gewisser konstruktiver Regeln.

### 6.3.1 Bemessungsrestriktionen

Die sicherheitstheoretischen Untersuchungen von Stahlbetonstabtragwerken unter eingepprägten Verformungen lassen zunächst zwei wesentliche Bemessungsrestriktionen erkennen:

- In den Tragwerksteilen, in denen infolge eingepprägter Verformung und Lastbeanspruchung die Ribschnittgrößen überschritten werden, ist eine entsprechende Mindestbewehrung vorzusehen. Hierdurch wird ein plötzliches Stahlversagen bzw. eine klaffende Ribbildung bei Überschreitung der Zugfestigkeit des Betons vermieden. Aus sicherheitstheoretischen Überlegungen ist der erforderliche Mindestbewehrungsquerschnitt mit einem oberen Fraktilwert der Betonzugfestigkeit zu ermitteln. Bei der Festlegung der Betonzugfestigkeit zur Ermittlung der Mindestbewehrung sollten festigkeitsmindernde Einflüsse wie Umwelt- und Langzeiteinflüsse sowie Vorschädigungen des Betons vernachlässigt werden. Nach [63] [67] kann zur Er-

mittlung der Mindestbewehrung die zentrische Zugfestigkeit herangezogen werden.

- In den Fällen, in denen ein Stahl mit geringer Gleichmaßdehnung oder druckbeanspruchter Beton im Grenzzustand der Tragfähigkeit für den Versagensmechanismus verantwortlich ist, z.B. infolge hohen Bewehrungsgrades oder dominierender Längsdruckkraft, muß von einem wenig duktilen bzw. spröden Systemversagen ausgegangen werden. Das Sicherheitsniveau derartiger Konstruktionen ist gegenüber den duktil ausgebildeten Systemen vor allem bei Beanspruchung durch eingeprägte Verformungen deutlich herabgesetzt, da je nach Beanspruchungshöhe die aufgezwungene Verformung die Verformungskapazität des Systems verbrauchen bzw. zu einer Reduktion der gleichzeitig aufnehmbaren Lastbeanspruchungen führen kann. Ziel der Bemessung für den Grenzzustand der Tragfähigkeit sollte es daher sein, insbesondere bei verformungsbeeinflussten Beanspruchungssituationen ein duktileres Tragverhalten zu gewährleisten.

Das globale Bemessungsziel liegt im Erreichen eines ausreichenden Sicherheitsniveaus für die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit. Insbesondere ist zu beachten, daß bei starker Beanspruchung durch eingeprägte Verformungen oberhalb der Rißbeanspruchung eine Erhöhung der Bewehrung über das erforderliche Mindestmaß eine Verminderung des Sicherheitsniveaus für den Grenzzustand der Tragfähigkeit bedeuten kann (vgl. Abschnitt 5.2.2). Das Sicherheitsniveau für die Grenzzustände der Gebrauchstauglichkeit dagegen steigt im allgemeinen mit steigendem Bewehrungsgrad. Eine Ausnahme hierbei ist der Nachweis zur Betondruckspannungsbegrenzung. Ausschlaggebend für die Einhaltung eines erforderlichen Sicherheitsniveaus sind im Grenzzustand der Tragfähigkeit die vorhandenen Verformungskapazitäten des Systems sowie im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit eine entsprechend den Anforderungen gewählte Bewehrung und konstruktive Durchbildung. Aus den zuverlässigkeitstheoretischen Vergleichsrechnungen läßt sich erkennen, daß bei Einwirkungen aus eingepägten Verformungen in vielen Fällen das erforderliche Sicherheitsniveau der Gebrauchstauglichkeitskriterien maßgebend ist. Dies ist insbesondere vor dem Hintergrund der nichtlinearen Schnittgrößenermittlung bzw. der Schnittgrößenermittlung mit begrenzter Momentenumlagerung und zugehöriger Bemessung zu beachten.

### 6.3.2 Sicherheits- und Kombinationsbeiwerte

Bezüglich der Charakteristik eingepprägter Verformungen ist zunächst eine Unterscheidung hinsichtlich ständiger oder veränderlicher, plötzlicher oder allmählich auftretender Beanspruchung erforderlich und ggf. durch die Berücksichtigung entsprechender Kombinationsbeiwerte  $\psi$  und Teilsicherheitsbeiwerte  $\gamma$  zu erfassen. Soweit keine genaueren Angaben über die Ursache der eingepprägten Verformung bekannt sind, kann mit den Kombinationsbeiwerten  $\psi_0 = 0,8$ ,  $\psi_1 = 0,7$ ,  $\psi_2 = 0,5$  gerechnet werden [13]. Bei günstig wirkender Beanspruchung infolge eingepprägter Verformungen sollte je nach Einwirkungsursache (ständig oder veränderlich, Auftretenszeitpunkt) auf eine Berücksichtigung bei der Bemessung im SLS und ULS verzichtet werden. Der Teilsicherheitsbeiwert für indirekte Beanspruchung im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach EC 2 [26] Abschnitt 2.3.3 ( $\gamma_{ind} = 1,5$ ) kann als oberer Grenzwert aufgefaßt werden. Dieser muß allgemein multiplikativ auf die Größe der eingepprägten Verformung berücksichtigt werden<sup>1</sup>. Wegen der Unsicherheiten bei der Ermittlung der auftretenden eingepprägten Verformungen sowie der vorhandenen Verformungskapazitäten [11] [32] [47] [49] erscheint der ansonsten relativ hohe Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{ind} = 1,5$  für Verformungsnachweise sinnvoll. Eine Anwendung dieses Teilsicherheitsbeiwertes zur Ermittlung einer Bemessungsschnittgröße für eingepprägte Verformungen ist dagegen sicherheitstheoretisch nicht zu belegen. Daher wird im folgenden ein Vorschlag zur Bemessung unterbreitet, der sich im wesentlichen auf die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit nach EC 2 [26] Abschnitt 4.4 stützt.

### 6.3.3 Bewehrungsermittlung

Zur Ermittlung der erforderlichen Bewehrung von Stahlbetontragwerken unter Last und eingepprägten Verformungen werden die Gebrauchstauglichkeitsnachweise zur Mindestbewehrung, Rissebeschränkung, Stahlspannungsbegrenzung und Durchbiegungsbeschränkung und ggf. Betondruckspannungsbegrenzung an den maßgebenden kritischen Querschnitten bzw. statischen Systemen unter der seltenen Lastkombination bei Berücksichtigung der Schnittgrößen aus Zwang ( $\gamma_{ind} =$

---

<sup>1</sup>Bei linearelastischer Schnittgrößenermittlung kann der Teilsicherheitsbeiwert immer auch auf die Schnittgröße bezogen werden (Superpositionsprinzip). Das gleiche gilt ebenfalls für die Kombinationsbeiwerte  $\psi$ .

1,0 bei ungünstiger Wirkung<sup>2</sup>, ansonsten im allgemeinen  $\gamma_{ind} = 0$ ) geführt. Dabei können die charakteristischen Materialeigenschaften ( $\gamma_M = 1,0$ ) zugrundegelegt werden, sofern nicht für die einzelnen Nachweise nach EC 2 anderes gefordert wird. Zur Ermittlung der maßgebenden Schnittgrößen können sowohl lineare als auch nichtlineare Verfahren herangezogen werden. Beim Nachweis der Mindestbewehrung ist ein oberer Fraktilwert der Betonzugfestigkeit anzusetzen. Hierbei kann eine Berücksichtigung der Festigkeitsentwicklung des Betons sinnvoll sein. Die Spannungsnachweise werden, falls mit der maßgebenden Beanspruchungskombination die Rißschnittgrößen überschritten werden, unter Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit geführt. Der sich aus diesen Nachweisen ergebende maximale Bewehrungsgrad ist Eingangsgröße für die zusätzlichen Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit.

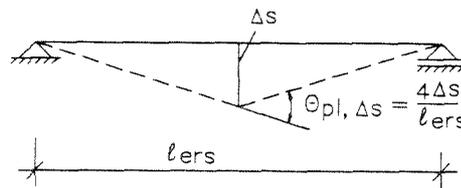
### 6.3.3.1 Zusätzliche Nachweise für den Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS)

1. Nachweis, daß die entsprechend den Gebrauchstauglichkeitsnachweisen gewählte Bewehrung auch im Grenzzustand der Tragfähigkeit für die Lastbeanspruchung unter Vernachlässigung der Einwirkung aus eingepprägten Verformungen ausreichend ist. Andernfalls muß die Bewehrung entsprechend verändert werden. Dieser Nachweis kann auch mit den Schnittgrößen nach begrenzter Momentenumlagerung durchgeführt werden, sofern die zugehörigen Anforderungen nach EC 2 [26] Abschnitt 2.5.3 erfüllt sind. Ansonsten bieten sich hierzu nichtlineare Verfahren der Schnittgrößenermittlung an.
2. Nachweis, daß mit der endgültig gewählten Bewehrung ein duktiler Systemversagen unter Last- und Zwangsbeanspruchung zu erwarten ist (Teilsicherheitsbeiwerte für Last nach Tab. 2.5,  $\gamma_{ind} = 1,5$ ). Dieser Nachweis kann an einem Ersatzträger entsprechend Heft 425 des DAfStb [15] [49] über einen Vergleich der zulässigen und vorhandenen plastischen Rotationen ( $\Theta_{pl,d} \geq \Theta_{pl,Last+\Delta s}$ ) geführt werden. Dabei kann der Anteil der plastischen Rotation infolge eingepprägter Verformungen  $\Theta_{pl,\Delta s}$  näherungsweise und auf der sicheren Seite liegend aus rein geometrischen Betrachtungen

---

<sup>2</sup>Bei günstig wirkender eingepprägter Verformung ist je nach Ursache und Charakteristik zu entscheiden, inwieweit die günstige Wirkung berücksichtigt werden kann. Falls eine günstig wirkende eingepprägte Verformung für die Nachweise der Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit berücksichtigt werden soll, so muß bei Überschreitung der Rißbeanspruchung unter der maßgebenden Lastkombination die Verminderung der Steifigkeit berücksichtigt werden. Im allgemeinen sollten günstig wirkende eingepprägte Verformungen vernachlässigt werden.

entsprechend der unteren Abbildung abgeleitet werden.



Wesentlich komfortabler ist dieser Nachweis mit Hilfe von Computerprogrammen zu führen, die das nichtlineare Tragverhalten wirklichkeitsnah erfassen. Kann die erforderliche Verformungskapazität des Systems für die Lastbeanspruchung und eingepreßte Verformung nicht bereitgestellt werden, so muß durch andere Maßnahmen gewährleistet werden, daß keine Überbeanspruchung des Systems auftritt. Hierunter sind Veränderungen des statischen Systems, genauere Berücksichtigung möglicher Interaktionswirkungen zwischen Systemsteifigkeit und auftretender eingepreßter Verformungen oder veränderte Lastabtragung am gesamten Bauwerk zu verstehen. Durch konstruktive Maßnahmen bezüglich der kritischen Tragwerksbereiche wie z.B. kräftige Umbügelung der Betondruckzone, Druckbewehrung, veränderte Betonfestigkeitsklasse oder günstigerer Betonquerschnitt kann die Verformungsfähigkeit verbessert werden.

Anstelle der Nachweise zur Verformungskapazität des Tragsystems ist es auch möglich, eine Bemessung für den Grenzzustand der Tragfähigkeit unter der gleichzeitigen Wirkung von Last und eingepreßter Verformung durchzuführen. Dabei ist nach EC 2 [26] Abschnitt 2.3.3 ein reduzierter Teilsicherheitsbeiwert  $\gamma_{ind} = 1,2$  bei linearer Schnittgrößenermittlung mit oder ohne Berücksichtigung abgeminderter Steifigkeiten infolge Rißbildung zu berücksichtigen. Die so ermittelte Bewehrung kann zu unwirtschaftlichen Ergebnissen führen. Die Gebrauchstauglichkeitsnachweise sind erneut zu überprüfen.

Im Falle von Torsionsbeanspruchungen durch eingepreßte Verformungen kann nach [30] im allgemeinen auf die Nachweise im Grenzzustand der Tragfähigkeit verzichtet werden, da die Torsionssteifigkeit infolge der Bildung von Torsionsschubrisen sehr stark abnimmt.

### 6.3.4 Konstruktive Maßnahmen

In Ergänzung zu den rechnerischen Nachweisen kann den Anforderungen an die Dauerhaftigkeit und Gebrauchstauglichkeit durch konstruktive Maßnahmen sinnvoll entsprochen werden. Hierbei sind im Zusammenhang mit eingepprägten Verformungen zu nennen:

- Ausbildung von Fugen und Gelenken zur Vermeidung von überhöhten Beanspruchungen infolge eingepprägter Verformungen
- Vermeidung von Bewehrungskonzentrationen z.B. bei Bewehrungsstößen an den kritischen Stellen eines Tragwerkes
- Verwendung von hochduktilen Stahlsorten
- Konstruktiv duktile System- und Querschnittsausbildung durch
  - gute Verbügelung der Betondruckzone
  - ausgewogene Bemessung (Betongrenzdehnung nicht ausnutzen), evtl. Druckbewehrung
  - Wahl größerer Stabdurchmesser. Die durch schlechteres Verbundverhalten abnehmende Mitwirkung des Betons auf Zug erhöht die Verdrehfähigkeit. Dies kann allerdings den Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit widersprechen
  - Verbesserung der Lagerungsart des Tragwerkes z.B. durch Lastplatten oder Elastomerlager, um eine völligere Momentenverteilung an den kritischen Stellen zu erreichen.
  - Erhöhung der Schlankheit des Systems
- Beachtung der Regeln zur baulichen Durchbildung nach EC 2 [26] Abschnitt 5.

## 6.4 Zusammenfassung

In dem vorliegenden Forschungsbericht werden die Grundlagen eines rechnerischen, computerorientierten Verfahrens zur Finite-Elemente-Zuverlässigkeitsmethode von Stahlbetonstabtragwerken mit nichtlinearem Tragverhalten erläutert. Dabei werden die sicherheitstheoretischen Methoden im Hinblick auf normative Anwendungen zusammenfassend dargestellt sowie auf der Basis einer Literaturauswertung die Kennwerte zur statistischen Beschreibung der Beanspruchungs- und Materialparameter abgeleitet. Ein rechnerisches Modell zur Schnittgrößenermittlung und insbesondere zur Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons auf Zug wird ausführlich erläutert und kommentiert. Mit Hilfe des im Rahmen dieser Arbeit erstellten Computerprogramms zur Zuverlässigkeitsanalyse werden exemplarische Untersuchungen von nach Eurocode 2 bemessenen Stahlbetonstabtragwerken unter Lastbeanspruchung und eingepprägter Verformung zur Verifizierung des vorhandenen Sicherheitsniveaus durchgeführt. Dabei zeigt sich, daß bei überwiegender Einwirkung aus eingepprägter Verformung das Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Tragfähigkeit maßgeblich von der Verformungsfähigkeit des Systems an den kritischen Stellen bestimmt wird. Das Sicherheitsniveau im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit ist unter derartigen Beanspruchungssituationen insbesondere bei kleineren Bewehrungsgraden im Vergleich zum Grenzzustand der Tragfähigkeit maßgebend. Die Methode der Schnittgrößenermittlung hat zudem insbesondere bei Einwirkungen aus eingepprägten Verformungen erheblichen Einfluß auf das Bemessungsergebnis und damit auf das Sicherheitsniveau. Auf der Basis der vorgestellten Berechnungsergebnisse wird ein Bemessungsvorschlag für Einwirkungen aus eingepprägten Verformungen im Betonbau unterbreitet. Dieser stützt sich im wesentlichen auf entsprechende Nachweise zur Gebrauchstauglichkeit sowie auf einen Nachweis der Verformungsfähigkeit im Grenzzustand der Tragfähigkeit.

# Literaturverzeichnis

- [1] ACI 318M-89. *Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318M-89) and Commentary-ACI 318RM-89*. American Concrete Institute, Box 19150, Redford Station, Detroit, Michigan 48219, June 1990.
- [2] Bach, Th. *Tragfähigkeitsnachweise von Stahlbetonquerschnitten bei Biegebeanspruchung mit und ohne Längskraft auf der Grundlage der Zuverlässigkeitstheorie der Stufe II*. Dissertation, TU Dresden, 1991.
- [3] Baker, M.J. und Thoft-Christensen, P. *Structural Reliability Theory and its Applications*. Springer - Verlag, 1982.
- [4] Bertram, D. *Stahl im Bauwesen*. Teil I C , Betonkalender, 1993.
- [5] Blessenohl, B. *Zur numerischen Berechnung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens auf Betonverbundtragwerke, - Grundlagen und Algorithmen für die EDV*. Dissertation, RWTH-Aachen, August 1990.
- [6] BS 5400. *Steel, Concrete and Composite Bridges*. British Standards Institution, BSI, 2 Park Street London W1A 2BS, 1978, 1984. Part 1. General Statement, Part 2. Specification for Loads, Part 4. Code for practice for design of concrete bridges.
- [7] BS 8110. *Structural use of concrete*. British Standards Institution, BSI, 2 Park Street London W1A 2BS, 1985. Part 1. Code for practice for design and construction, Part 2. Code for practice for special circumstances.
- [8] Bulletin D'Information No. 112. *First Order Reliability Concepts for Design Codes*. CEB , Joint Committee on Structural Safety, Lausanne, July 1976.
- [9] Bulletin D'Information No. 116-D. *Band 1: Einheitliche Regeln für verschiedene Bauarten und Baustoffe*. CEB , Paris, Nov. 1976.
- [10] Bulletin D'Information No. 191. *General Principles on Reliability for Structures, A Commentary on ISO 2394*. CEB, Lausanne, July 1988.

- [11] Bulletin D'Information No. 218. *Ductility -Reinforcement-*. CEB, Case Postale 88, CH-1015 Lausanne, August 1993. Progress report of Task Group 2.2. Ductility Requirements for Structural Concrete - Reinforcement.
- [12] Cervenka, V., Eligehausen, R. und Pukl, R. *Computer Program For Non-linear Finite Element Analysis Of Reinforced Concrete Structures*. IWB Mitteilungen 1, Universität Stuttgart, 1990.
- [13] DAfStb. *Richtlinien für die Anwendung Europäischer Normen im Betonbau*. Fachbereich VII des NABau, Nov. 1991. Richtlinie zur Anwendung von EC 2, Teil 1.
- [14] DAfStb. *Richtlinien für die Anwendung Europäischer Normen im Betonbau*. Beuth Verlag, Nov. 1991.
- [15] DAfStb Heft 425. *Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2 Teil 1 (DIN V ENV 1992, Teil 1-1, Ausgabe 06.92). Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken*. Beuth Verlag, 1992.
- [16] Degerman, T. *Dimensionering av Betongkonstruktioner enligt Sannolikhetsteoretiska Metoder*. Avdelningen för Byggnadsteknik II, Box 725, 220 07 Lund, Schweden, 1981. Design of concrete structures with probabilistic methods.
- [17] Dilger, W. *Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung*. DAfStb , Heft 179, W. Ernst & Sohn, 1966.
- [18] DIN 1045. *Beton und Stahlbeton, Bemessung und Ausführung*. Juli 1988.
- [19] DIN 1075. *Betonbrücken, Bemessung und Ausführung*. April 1981.
- [20] DIN 18800. *Stahlbauten; Bemessung und Konstruktion*. November 1990.
- [21] DIN 488. *Betonstahl, Betonstabstahl, Maße und Gewichte*. Juni 1986.
- [22] DS 411. *Structural Use of Concrete*. Translation of the Dansk Standard DS 411 , Dansk Ingeniørforening's Code of Practice, Teknisk Forlag Normstryrelsens Publikationer NP-169-T, April 1896.
- [23] EH-91. *Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado*. Ministerio de obras públicas y transportes, Comisión permanente del hormigón, 1991. Vorschrift für den Entwurf und die Ausführung von bewehrtem Beton.

- [24] ENV 488. *Beton; Eigenschaften, Herstellung Verarbeitung und Gütenachweis*. DIN V ENV 206, Okt. 1990.
- [25] Eurocode 1. *Basis of Design and Actions on Structures*. 6. Entwurf ENV 1991-1, März 1993.
- [26] Eurocode 2. *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1, Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. Normenausschuß für Bauwesen (NABau), Deutsche Fassung ENV 1992 Teil 1-1, Juni 1991.
- [27] Favre, R., Koprna, M. und Putallaz, J.-C. *Deformation of Concrete Structures, Theoretical Basis for Calculation*. IABSE Surveys, IVBH Berichte, pp. 16–81, 1981.
- [28] Franz, G. und Brenker, H. *Verformungsversuche an Stahlbetonbalken mit hochfestem Bewehrungsstahl*. DAfStb, Heft 188, W. Ernst & Sohn, 1967.
- [29] Gilbert, R.I. und Warner, R.W. *Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs*. Journal of Structural Division, ASCE, Nr. 104, pp. 1885–1900, 1978.
- [30] Grasser, E., Kupfer, H., Pratsch, G. und Feix, J. *Bemessung von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen*. Teil I L, Betonkalender, 1993.
- [31] Grasser, E. und Thielen, G. *Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken*. DAfStb, Heft 240, 1991.
- [32] Graubner, C.A. *Schnittgrößenverteilung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze – Baustoffbedingte Abweichungen von elastizitätstheoretischen und plastizitätstheoretischen Lösungen*-. Dissertation, TU-München, Januar 1989.
- [33] GruSiBau. *Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen*. NABau, Deutsches Institut für Normung, Beuth, 1981.
- [34] Grzeschkowitz, R. und Quast, U. *Erweiterung von Traglastprogrammen für schlanke Stahlbetondruckglieder*. DAfStb, Heft 423, Beuth Verlag, 1992.
- [35] Heidrich, G. *Statistische Auswertung der Betondruckfestigkeits - Güteprüfung im Raum Nürnberg*. Beton + Fertigteil-Technik, Nr. 6, pp. 409–414, Juni 1985.
- [36] Hillerborg, A., Modéer, M. und Peterson, P.E. *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete research, Bnd. 6, pp. 773–782, 1976.

- [37] Hilsdorf. *Beton*. Betonkalender , Teil I A, Ernst & Sohn, 1993.
- [38] Hosser, D. *Tragfähigkeit und Zuverlässigkeit von Stahlbetondruckgliedern*. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau, Heft 28, Technische Hochschule Darmstadt, Verlag Ernst & Sohn, 1978.
- [39] ISO 2394. *General principles on reliability for structures*. Second edition, 1986.
- [40] ISO 4356. *Bases for the design of structures – Deformations of buildings at the serviceability limit states*. First edition, 1977.
- [41] ISO 6935-1. *Steel for the reinforcement of concrete*. Part 1 and 2, Juni 1991.
- [42] ISPUD V3.0. *Importance Sampling Procedure Using Design Points*. Universität Innsbruck - Institut für Mechanik, Bearbeitung am Lehrstuhl für Baustatik, RWTH - Aachen, 1993. An Efficient, Accurate and Easy-to-use Multi-Purpose Computer Code to Determine Structural Reliability.
- [43] Jahn, M. *Zum Ansatz der Betonzugfestigkeit bei den Nachweisen zur Trag- und Gebrauchsfähigkeit von unbewehrten und bewehrten Betonbauteilen*. DAfStb, Heft 341, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1983.
- [44] JCSS. *Memorandum CON-92-1337/VRA/BKA*. Joint Committee on Structural Safety, November 1992. Proposal for probabilistic models.
- [45] Kiureghian, A. *Structural Component Reliability*. Lecture Note for Structural Reliability: Methods & Applications, Department of Civil Engineering; University of California at Berkeley, 1989.
- [46] König, G., Hosser, D. und Schobbe, W. *Sicherheitsanforderungen für die Bemessung von baulichen Anlagen nach den Empfehlungen des NABau - eine Erläuterung*. Bauingenieur, Nr. 57, pp. 69–78, 1982.
- [47] Kreller, H. *Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangeinwirkung*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1989.
- [48] Krips, M. *Rißbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton*. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau, Heft 33, Technische Hochschule Darmstadt, Verlag Ernst & Sohn, 1985.
- [49] Langer, P. *Verdrehfähigkeit plastizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau*. Dissertation, Universität Stuttgart, Januar 1987.

- [50] Leonhardt, F. *Vorlesungen über Massivbau. Nachweis der Gebrauchsfähigkeit*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1987.
- [51] Litzner, H.-U. *Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 - Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227*. Betonkalender, 1993.
- [52] Macchi, G. *Ductility conditions for simplified design without check of compatibility*. CEB, Bulletin D'Information No. 105, Paris, Feb. 1976.
- [53] Maurer, R. *Grundlagen zur Bemessung des Betongurtes von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Techn. Hochschule Darmstadt, 1992.
- [54] MC 90. *CEB-FIP Model Code 1990*. CEB, Bulletin D'Information No. 213 and 214, Case Postale 88, CH-1015 Lausanne, März 1993. also published by Thomas Telford Services Ltd., London, UK.
- [55] Neuenhofer, A. *Zuverlässigkeitsanalysen ebener Stabtragwerke aus Stahlbeton mit nichtlinearem Tragverhalten*. Dissertation, RWTH Aachen, Lehrstuhl für Baustatik, Dezember 1993.
- [56] Noakowski, P. *Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rißbreite*. DAfStb, Heft 394, Beuth Verlag, 1988.
- [57] Nordic Committee on Building Regulations. *Guidelines for loading and safety regulations for structural design*. NKB Report No. 55E, June 1987.
- [58] Östlund, L. *An Estimation on  $\gamma$ -Values*. CEB Bulletin D'Information No. 202, May 1991.
- [59] Pottharst, R. *Zur Wahl eines einheitlichen Sicherheitskonzepts für den Konstruktiven Ingenieurbau*. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau, Heft 22, Technische Hochschule Darmstadt, Verlag Ernst & Sohn, 1977.
- [60] Quast, U. *Zur Mitwirkung des Betons in der Zugzone*. Beton- und Stahlbetonbau, Bnd. 76, Nr. 10, pp. 247-250, Oktober 1981.
- [61] Rao, S. *Umlagerungen der Schnittkräfte in Stahlbetonkonstruktionen. Grundlagen der Berechnung bei statisch unbestimmten Tragwerken unter Berücksichtigung der plastischen Verformungen*. DAfStb, Heft 177, W. Ernst & Sohn, 1966.
- [62] Rehm, G. *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. DAfStb, Heft 138, W. Ernst & Sohn, 1961.

- [63] Rehm, G. und Martin, H. *Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau*. Beton- und Stahlbetonbau, Nr. 8, pp. 175–182, 1968.
- [64] Riechers, H.-J., Hoffmann, G. und Holzapfel, F. *Güteüberwachung von Betonstählen*. Die Bautechnik, Bnd. 65, Nr. 7, pp. 233–242, Juli 1988.
- [65] Rohling, A. *Zum Einfluß des Verbundkriechens auf die Rißbreitenentwicklung sowie auf die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen*. Dissertation, TU Braunschweig, 1987.
- [66] Sakai, K. und Kakuta, Y. *Moment-Curvature Relationship of Reinforced Concrete Members Subjected to Combined Bending and Axial Force*. ACI Journal, Bnd. 77, pp. 189–194, Mai 1980.
- [67] Schießl, P. *Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rißbreite*. DAfStb, Heft 400, Erläuterungen zu DIN 1045, Beton- und Stahlbeton, Ausgabe 07.88, Beuth Verlag, 1989.
- [68] Schobbe, W. *Konzept zur Definition und Kombination von Lasten im Rahmen der deutschen Sicherheitsrichtlinie*. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau, Heft 31, Technische Hochschule Darmstadt, Verlag Ernst & Sohn, 1982.
- [69] Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein. *SIA 160, Einwirkungen auf Tragwerke*. Ausgabe 1989.
- [70] Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein. *SIA 162, Betonbauwerke*. Ausgabe 1989.
- [71] Schwennicke, A. *Zur Berechnung von Stahlbetonbalken und -scheiben im gerissenen Zustand unter Berücksichtigung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen*. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, Techn. Universität Berlin, 1983.
- [72] Sedlacek, G. *The choice of design values and characteristic values for actions and resistances in the Eurocodes*. Conference on the Eurocodes, Davos, IABSE, 1992.
- [73] Spaethe, G. *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*. Springer-Verlag, Wien, New York, zweite, neubearbeitete Auflage, 1992.
- [74] Taylor, R.L. *FEAP, A Finite Element Analysis Program*. University of California, Berkeley, September 1988. Description and Users-Manual.

- [75] Thielen, G. *Deterministische und stochastische Analyse des Tragverhaltens von Stahlbetonbauteilen unter Last- und Zwangbeanspruchung*. Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke, Laboratorium für den Konstruktiven Ingenieurbau, Technische Universität München, 1975.
- [76] Vismann, U. und Zilch, K. *Bemessungsannahmen zur Boden-Bauwerk-Wechselwirkung aus der Sicht der Tragwerksplanung*. Lehrstuhl für Baustatik, RWTH Aachen, Januar 1991.
- [77] Vismann, U. und Zilch, K. *Imposed Deformations on Reinforced Concrete Structures, Safety Analysis*. International Conference on Concrete, Tehran, Nov. 1992.
- [78] Weiler, G. *Beitrag zur Berechnung ebener Stabwerke aus Stahlbeton und Spannbeton mit nichtlinearem Tragverhalten*. Dissertation, RWTH Aachen, Lehrstuhl für Baustatik, Juni 1989.
- [79] Wesche, K. *Baustoffe für tragende Bauteile 2, Beton*. Bauverlag, 2., neubearb. Auflage, 1981.
- [80] Zienkiewicz, O.C. und Taylor, R.L. *The Finite Element Method*. Band 1 und 2, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 4. Auflage, 1991.
- [81] Zilch, K. *Geometrisch und physikalisch nichtlineare Verfahren zur Berechnung von Stabtragwerken des Stahlbetonbaus*. Tagungsheft BB 5, 20.1-20.14, Baustatik Baupraxis, Arbeitskreis der Lehrstühle und Institute für Statik an deutschsprachigen Universitäten und Technischen Hochschulen, München, März 1993.