

Anwendungen der FEM zur
Tragfähigkeitsermittlung der
Verbindung Ankerkörper-Beton bei
Spannverfahren

T 2586/2

T 2586/2

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

ANWENDUNGEN DER FEM
ZUR TRAGFÄHIGKEITSERMITTLUNG DER VERBINDUNG
ANKERKÖRPER - BETON BEI SPANNVERFAHREN

Gerhard Mehlhorn,
Wael Abuassab, Joseph Ukhagbe und Mamoun Samkari

Nr. 21

Forschungsbericht aus dem Fachgebiet Massivbau
der Universität Gesamthochschule Kassel

1993

VORBEMERKUNG

Dieser Bericht ist der zweite Teil des Schlußberichts zum vom Institut für Bautechnik geförderten Forschungsvorhaben STATISTISCH ABGESICHERTE RECHENMODELLE DES VERHALTENS DER VERBINDUNG ANKERKÖRPER / BETON BEI SPANNVERFAHREN, Az. IV-1-5-542/88.

Der erste Teil des Schlußberichts ist der unter [R4] im Literaturverzeichnis genannte Bericht.

Dies Forschungsvorhaben wurde von einer Betreuungsgruppe begleitet, der angehörten die Herren

Prof. Dr.-Ing. Jungwirth, München

Dipl.-Ing. Schilling, Berlin

Dr.-Ing. Schütt, Langenfeld

Dem Institut für Bautechnik Berlin sei auch an dieser Stelle für die finanzielle Unterstützung und dem Mitgliedern der Betreuungsgruppe sowie den Kollegen Prof. Dr.-Ing. Rostásy und Dipl.-Ing. Holzenkämpfer für die gute Zusammenarbeit und gegebene Hinweise gedankt.

Inhaltsverzeichnis:

	Seite
1. Einleitung	2
2. Bisherige Untersuchungen und Formulierungen	4
3. Einflußparameterstudie der Tragfähigkeit der Ankerkörper	14
4. Die Anwendung der Kontaktelemente als FE-Flächenelemente für die nichtlineare Analyse des Verbundverhaltens zwischen Stahl und Betonkontaktflächen bei mehrflächigen Verankerungskörpern	78
5. Die Berechnung umschnürter Druckglieder	105
6. Zusammenfassung	121
Literaturverzeichnis	126
Anhang A Beschreibung des angewandten Betonmodells	1
Anhang B Bathe/Chandhary - Kontaktelementformulierung	1

1. Einleitung

Im Massivbau tritt die Belastung von Bauteilen mit hohen konzentrierten Kräften häufig auf. Dies gilt besonders für Spannbetonbauteile, bei denen die Vorspannkraft über Ankerkörper in den Beton eingetragen werden. Die dabei entstehenden Spannungen gehören mit zu den höchsten, die im Massivbau auftreten können. Ihren kritischen Wert erreichen diese Spannungen während des Spannvorgangs.

Wegen der extrem hohen Spannungen, die im Kräfteinleitungsbereich auftreten können, sind äußerst sorgfältige konstruktive Maßnahmen erforderlich. Diese sollten sicherstellen, daß einerseits die Druckfestigkeit des Betons an keiner Stelle des Bauteils überschritten wird. Andererseits müssen die hohen Spaltzugkräfte durch Querbewehrungen ausreichend abgedeckt werden, damit durch das Reißen des Betons weder die Standsicherheit des Bauteils beeinträchtigt wird, noch andere Schäden, z.B. durch Korrosion der Bewehrung, auftreten können.

In einem Spannbetonkörper mit sofortigem Verbund entstehen drei Arten von Zugwirkungen

- a) Sprengwirkung
- b) Spaltzugwirkung (bursting)
- c) Stirnzugwirkung (spalling)

Bei einem Balken mit nachträglichem Verbund spielt die Sprengwirkung keine Rolle.

Der Spannungsverlauf wird durch die Hauptspannungstrajektorien verdeutlicht. Die Größen der Spaltzugkräfte hängen vom Verhältnis der Körperfläche A zur Lastfläche A_1 ab. Je größer das Verhältnis A/A_1 , desto größer ist die Ausbreitung der Last und desto größer sind die entstehenden Spaltzugkräfte. Bei einem mittig belasteten quadratischen Körper mit kleiner Lastfläche entstehen die Querspannungen radial in allen Richtungen, normal zur Last. Die größten Zugspannungen entstehen in der Wirkungslinie der Last. Charakteristisch für die Spaltzugspannungen ist es, daß ihre Resultierende einen gewissen Abstand zur Ankerstelle bzw. zum Trägerende aufweist.

Zu den Methoden der Spannungsermittlung gehören die Elastizitätstheorie, die spannungsoptische Methode, die Spannungsermittlung durch Messungen an Modellen und an Betonkörpern, Näherungslösungen (einfaches Krafteck), die Randelementmethode und die Methode der Finiten Elemente (FEM). Die Randelementmethode und die Methode der Finiten Elemente, deren Anwendungen in größerem Umfang erst durch die Entwicklung der Großrechner ermöglicht wurden, erlauben bei geeigneter Wahl die Eigenschaften und Abmessungen der Elemente, den Spannungs-

verlauf dreidimensional zu bestimmen. Da in dieser Arbeit für die rechnerischen Untersuchungen die FE-Methode angewendet wird, wird im folgenden nur auf die Besonderheiten dieser Methode eingegangen. Die FE-Methode bietet bei relativ geringen Rechenzeiten (Kosten) die Vollständigkeit der Ergebnisse. Eine ungenaue Materialformulierung und Strukturdiskretisierung schlägt jedoch voll auf die Ergebnisse durch, so daß gründliche Kenntnisse bei der Anwendung der FE-Methode erforderlich sind.

Der Kontakt zwischen den Stahllasteinleitungsplatten und den Betonflächen wird durch FE-Algorithmen simuliert. Hier werden FE-Flächenelemente als Flächenkontaktelemente zwischen Stahl und Beton verwendet.

Es ist das Ziel der folgenden Untersuchungen

- a) den Spannungszustand im Krafteinleitungsbereich mit Finiten Elementen wirklichkeitsnah zu berechnen.
- b) den Einfluß der folgenden Parameter auf die Tragfähigkeit des Betonkörpers zu untersuchen:
 - Lastplattenbreite
 - Lastplattendicke
 - Lastexzentrizität
 - Querbewehrungsmenge
 - Wendelbewehrungsmenge.
- c) die Berechnung von mehrflächigen Verankerungskörpern mit der FEM durchzuführen.

Die numerischen Untersuchungen nach der FE-Methode werden mit dem Rechenprogramm ADINA bzw. SOLVIA vorgenommen.

Die Arbeit besteht aus 6 Abschnitten:

- Im Abschnitt 2 werden die bisherigen Arbeiten zu diesem Thema angegeben und diskutiert.
- Im Abschnitt 3 werden die wichtigsten Parameter, die die Tragfähigkeit des Körpers beeinflussen, angegeben.
- Im Abschnitt 4 wird exemplarisch die Berechnung eines mehrflächigen Verankerungskörpers ausführlich beschrieben.
- Im Abschnitt 5 werden die Berechnungen von unschnürten Druckgliedern beschrieben.
- Im Abschnitt 6 werden Schlußfolgerungen gezogen.
- Im Anhang A wird das verwendete Betonmodell beschrieben.
- Im Anhang B wird das verwendete Kontaktelement beschrieben.

2. Bisherige Untersuchungen und Formulierungen

Mit dem Problem der hohen Spannungen, die durch die Einleitung großer Kräfte über relativ kleine Ankerplatten (Teilflächenbelastung) entstehen, haben sich bereits zahlreiche Wissenschaftler auseinandergesetzt. Hier sollen einige der wichtigeren Arbeiten kurz vorgestellt werden, und in den folgenden Tabellen sind die aus einigen Arbeiten entnommenen Ergebnisse vergleichend gegenübergestellt.

Einige der wichtigsten verwendeten Beschreibungen sind in Bild 2.1 angegeben.

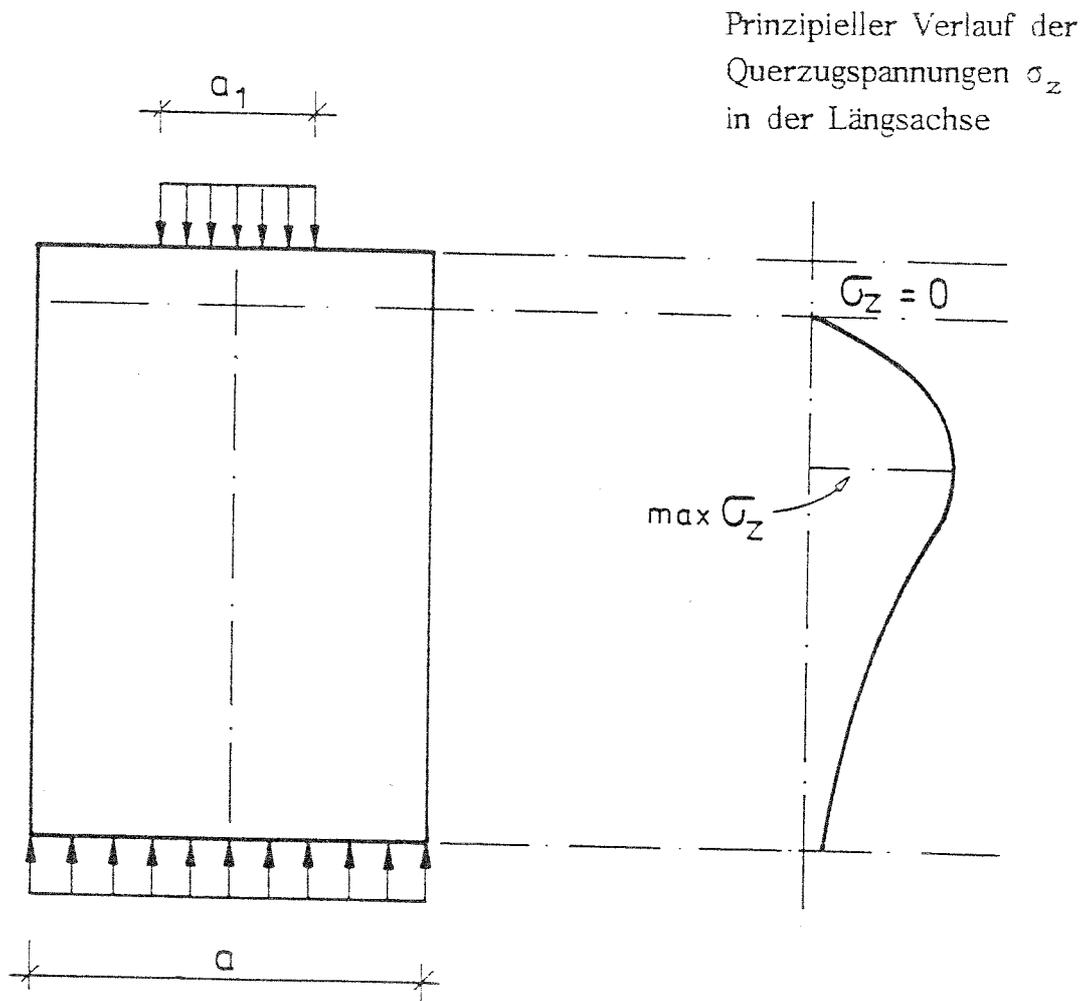


Bild 2.1 Bezeichnungen für Versuchskörper mit konzentrierten Krafteintragungen.

Tabelle 2.1 Theoretische Untersuchungen

Datum der Veröffentlichung	Verfasser	Entfernung vom beanspruchtem Rand			max σ_z / σ_{bd}		Annahme/Methode/Ergebnisse
		max. Querspannung max σ_x	Nullpunkt der Querspannungen	konstante Druckspannung σ_{bd}	$a_1/a = 0,3$	$a_1/a = 0,7$	
1923	Bleich [B6]	0,2 a bis 0,6 a	0,2 a bis 0,3 a	2 a	0,48	0,24	Die Ergebnisse wurden unter Verwendung der Airy Spannungsfunktion gewonnen.
1924	Mörsch [M3]	a	0	2 a	0,2 b	0,16	Der Hauptspannungsverlauf ist von entscheidender Bedeutung. Die Zugspannungen wurden als parabolisch verteilt ermittelt.
1935 1938	Bortsch [B7]	0,4 a bis 0,6 a	0,2 a bis 0,25 a	3,4 a	0,45 für $a_1/a = 0$	0,38 für $a_1/a = 0,2$	Nur gültig für $a_1/a = 0$ bis 0,2; keine Aussage über $a_1/a > 0,2$.
1949 1950	Magnel [M1]	a	0,5 a	2 a	0,43	0,22	Die Berechnungen basieren auf der Fundamentalanalogie. Der Spaltzugspannungsverlauf entlang einer Parallelen zur zentralen Hauptachse nimmt die Form einer kubischen Parabel an. Die Spannungen unter der Ankerplatte verlaufen unter 45°.
1951 1953	Guyon [G3; G4]	0,5 a bis 0,9 a	0,45 a bis 0,2 a	2 a	0,35	0,13	Die Ergebnisse wurden unter Verwendung einer Fourier Reihe gewonnen.
1952 1956	Sievers [S6]	0,5 a bis	0,3 a	2 a	0,71	0,26	Das Ergebnis stimmt nur entlang der zentralen Längshauptachse und basiert auf der Vorarbeit von Bleich.
1960	Douglas und Trahir [D3]	Radialzugspannung 0,5 a bis 0,6 a	0,3 a	2 a			Hier wurde ein Zylinder mit einem mittigen Hüllrohr durch eine Ankerplatte belastet.
1960	Rydzewski und Whitebread [R6]						Es wurden die Einflüsse eines kurzen rechteckigen Balkens am Ende eines I-Profiles untersucht.

- 5 -

zu Tabelle 2.1 Theoretische Untersuchungen

Datum der Veröffentlichung	Verfasser	Entfernung vom beanspruchtem Rand			max σ_z / σ_{bd}		Annahme/Methode/Ergebnisse
		max. Querspannung max σ_z	Nullpunkt der Querspannungen	konstante Druckspannung σ_{bd}	$a_1/a = 0,3$	$a_1/a = 0,7$	
1962 1971	Iyengar [I2]	0,7 a bis	0,3 a bis	2 a	0,3	0,12	Es wurden vier unterschiedliche Belastungsarten untersucht: 1) Normale Belastung, symmetrisch zur zentrischen Längsachse. 2) Normale Belastung, assymmetrisch zur zentrischen Längsachse. 3) Tangentiale Belastung, symmetrisch zur zentrischen Längsachse. 4) Tangentiale Belastung, assymmetrisch zur zentrischen Längsachse. Eine zunehmende Querdehnungszahl führte zu einer Reduzierung der Spaltzugspannungen.
1971	Yettram und Robbins [Y1]	Nur I Querschnitte wurden hier behandelt, deshalb wird hier auf weitere Angaben verzichtet.					Es wurde der Spannungsverlauf eines zentrisch vorgespannten I-Profils mit einem rechteckigen Querschnitt am Ende, unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode, untersucht.

Tabelle 2.2 Experimentelle Untersuchungen

Datum der Veröffentlichung	Verfasser	Arbeits- und Anwendungsbereich	Ergebnisse
1955 1957	Christodoulides [C6; C7]	Zwei- und dreidimensionale spannungsoptische Untersuchungen	<p>Die aus den Messungen ermittelten Querspannungen an den Rändern des Ende des Modells des Verankerungskörpers zeigten größere Werte als die, die von Guyon und Magnel angegeben wurden.</p> <p>Die theoretisch ermittelten Zugspannungen waren größer als die aus Versuchsergebnissen ermittelten.</p> <p>Die aus Versuchsergebnissen ermittelten Druckspannungen am Ende des Verankerungskörpers sind widersprüchlich zu den theoretisch ermittelten.</p> <p>Die im Experiment ermittelten max. Spaltzugspannungen von max. $\sigma_{spz} = 2\sigma_{bd}$ sind im Vergleich zu Guyon ($0,75 \sigma_{bd}$) oder Magnel ($0,34 \sigma_{bd}$; $\sigma_{bd} = P/A$) wesentlich größer.</p>
1957	Ban et al. [B1]	<p>Es wurde ein achsensymmetrischer Körper untersucht.</p> <p>Parameter:</p> <p>a) a_1/a, b) Dicke der Ankerplatte, c) Spannstahldurchmesser, d) Bewehrungsgehalt und Lage der Bewehrung e) Betonfestigkeitsklasse</p>	<p>Bei den Versuchen zeigt sich eine Übereinstimmung mit Bleich-Sievers. Die Querdehnungszahl beeinflusst die Spannungen. Die Dicke der Ankerplatte und der Spannstahldurchmesser haben Einfluß auf die Reißlast. Der Bewehrungsgehalt beeinflusst die Reiß- und Bruchlast. Eine Erhöhung der Betondruckfestigkeit führt zu einer proportionalen Erhöhung der Reiß- bzw. Bruchlast.</p>
1960	Douglas und Trahir [D3]	Um ihre theoretischen Ergebnisse zu überprüfen, wurde ein achsensymmetrischer Körper mit einem zentrischen Hüllrohr untersucht. Die radialen Dehnungen wurden innen und an der Oberfläche der Körper gemessen.	<p>Es stellte sich eine gute Übereinstimmung der inneren Dehnungen mit den aus theoretischen Annahmen. Die in den Versuchen gemessenen Dehnungen an den Oberflächen waren im Vergleich zu den theoretischen Lösungen mit Streuungen verschieden, in der Regel waren die in den Versuchen erhaltenen größer als nach der Theorie.</p> <p>Die Größenunterschiede zwischen den berechneten Bruchlasten und den aus Versuchsergebnissen zeigen, daß die verwendeten Theorien das Bruchverhalten nicht ausreichend beschreiben.</p>

Fortsetzung zu Tabelle 2.2 Experimentelle Untersuchungen

Datum der Veröffentlichung	Verfasser	Arbeits- und Anwendungsbereich	Ergebnisse
1961	Zielinski und Rowe [Z1]	Durch die Versuche sollte eine Aussage über eine sinnvolle Ausbildung des Ankerbereichs gewonnen werden. Untersucht wurden achsensymmetrische Körper mit einem Verhältnis von Höhe zu Dicke zwischen 1,56 und 2,70, sowie der Einfluß von a_1/a , der Ankertyp, der Hüllrohrdurchmesser, der Bewehrungsgehalt und die Lage der Bewehrung.	Es wurde festgestellt, daß der Haupteinfluß das Verhältnis a_1/a ist. Der Ankertyp hat fast keinen Einfluß. Die gemessenen Dehnungen waren größer als die theoretischen Werte. Die Lage der maximalen Spannungen war ungefähr konstant. Der Bewehrungsgehalt beeinflusst die Tragfähigkeit. Eine Abschätzung des Betonverhaltens unter biaxialem Spannungszustand ist erforderlich.
1964	Rasheeduzzafar [R1]	Verbesserte 2- und 3-dimensionale spannungsoptische Untersuchungen. Die Steifigkeiten der Ankerplatte und Ankerzone wurden berücksichtigt. Untersucht wurden zentrische und exzentrische Körper mit den Parametern a_1/a und Ankertyp.	Unter der Ankerplatte entstanden große Schubspannungen. die einbetonierten Ankerplatten übertragen 30% der Vorspannung durch Schub. Die gemessenen Dehnungen waren größer als die theoretisch ermittelten. Die maximale Spaltzugspannung ist proportional zur belasteten Ankerplattenbreite. Die maximale Zugdehnung liegt in der Höhe der Achse der Ankerplatte.
1966 1970	Hawkins [H1; H2; H3]	Das Ziel der Untersuchung war die Klärung des Einflusses der Ankerplattensteifigkeit auf die Zugspannungen. Bei den zentrischen und exzentrischen Körpern wurden neben den spannungsoptischen Untersuchungen auch Dehnungsmessungen durchgeführt	Es wurde festgestellt, daß die Spaltzugbewehrung ausschlaggebend ist und daß Spalttrisse gefährlicher als Stirnrisse sind. Die Spaltzugbewehrung soll in der Nähe der Ankerplatte eingebaut werden und soll über die Balkenhöhe verlaufen. Eine gute Verdichtung des Betons im Ankerbereich führt zu einer deutlichen Erhöhung der Betontragfähigkeit.
1977	Wurm und Daschner [W3]	Insgesamt wurden 130 Probekörper aus Normalbeton untersucht. Die Untersuchungen wurden durchgeführt, um eine größere Klarheit über das Trag- und Verformungsverhalten von Beton unter Teilflächenbelastung zu gewinnen.	Die Auswertung der Versuchsergebnisse zeigt, daß eine Anhebung der zulässigen Spannungen bei Teilflächenbelastung gemäß DIN 1045, 17.3.3, möglich ist, wenn der traglaststeigernde Einfluß einer Querbewehrung berücksichtigt wird. Dabei hat sich die Wendelbewehrung als günstigste Bewehrungsform erwiesen. Aber auch mit Schlaufen und Matten konnten bei gleicher Stahlmenge ungefähr 90% der Bruchlast von wendelbewehrten Körpern erreicht werden.

Die wichtigsten Formeln, die für die Ermittlung der Bruchfestigkeit des Betonkörpers geeignet sind, werden im folgenden angegeben:

Spieth [S8] hat den Spannungszustand unter Teilflächenbelastung sowohl mit einer Reihe von Versuchen, als auch mit der Elastizitätstheorie untersucht. Er hat festgestellt, daß bei zunehmender Würfeldruckfestigkeit das Verhältnis der Bruchspannung β_u unter der Ankerplatte zur Würfeldruckfestigkeit β_{WN} linear abnimmt. Den Einfluß der belasteten Fläche hat er durch die Beziehung

$$\beta_u = \beta_p \sqrt{A/A_1} \quad (2.1)$$

dargestellt, wobei A die Gesamtquerschnittsfläche, A_1 die belastete Teilfläche und β_p die Prismenfestigkeit des Betons bedeuten.

In einer sehr umfangreichen Studie hat Hawkins [H1, H2, H3] die Abhängigkeit der Bruchlast von der Betondruckfestigkeit, den Körperabmessungen und der Lastplattenform untersucht. Für quadratische und kreisförmige Lastplatten gab er die Näherungsformel

$$\beta_u = \left[1 + \frac{k}{\sqrt{\beta_p}} \left(\frac{A}{A_1} - 1 \right) \right] \cdot \beta_p \quad (2.2)$$

an, wobei die Konstante k von der Betonzugfestigkeit und dem Reibungswinkel zwischen Lastplatte und Betonkörper abhängt. Für praktische Fälle wird der Wert $k = 4,2$ empfohlen.

Aufgrund der Erkenntnisse aus mehreren Versuchsreihen schlugen Heilmann und Wurm [H4] [W2] eine Gleichung zur Bestimmung der Bruchspannung vor. Diese lautet:

$$\beta_u = \beta_u^* + \left(0,0625 \frac{A}{A_1} + 0,29 \right) \cdot \mu \beta_p, \quad (2.3)$$

wobei

$$\beta_u^* = \left(0,85 + 0,15 \frac{A}{A_1} \right) \beta_p \quad (2.4)$$

die Bruchspannung des unbewehrten Körpers und μ der auf den St. Venantschen Störbereich bezogene Bewehrungsgrad ist.

Ausgehend von Versuchsergebnissen haben Iyengar et al. [I1] die folgenden Beziehungen angegeben:

- für Zylinder mit spiralförmiger Umschnürung:

$$\beta_u/\beta_p = 1 + 2,30 (P_b - \bar{P}_b) \beta_s/\beta_p \quad (2.5)$$

- für Prismen mit quadratischer, quasi spiralförmiger Umschnürung:

$$\beta_u/\beta_p = 1 + 0,84 (P_b - \bar{P}_b) \beta_s/\beta_p \quad (2.6)$$

- für Prismen mit Bügeln:

$$\beta_u/\beta_p = 1 + 0,40 (P_b - \bar{P}_b) \beta_s/\beta_p \quad (2.7)$$

Dabei bedeuten:

- β_u : die Druckfestigkeit des mit Bewehrung umschnürten Betons
- β_p : die einaxiale Druckfestigkeit des Betons (Prismenfestigkeit)
- β_s : die Fließgrenze des Stahls
- P_b : das Verhältnis von Bewehrungsvolumen zum umschnürten Betonvolumen
- \bar{P}_b : Bezogenes Volumenverhältnis
- $P_b \cdot \frac{\beta_s}{\beta_p}$: Umschnürungsfaktor
- $\bar{P}_b \cdot \frac{\beta_s}{\beta_p}$: Bezogener Umschnürungsfaktor
- $(P_b - \bar{P}_b) \cdot \frac{\beta_s}{\beta_p}$: mechanischer Umschnürungsgrad

Für die bisherigen Kontaktelement-Formulierungen haben im letzten Jahrhundert zahlreiche Ingenieure versucht neue Algorithmen zur Lösung des Kontaktproblems mit oder ohne Reibung zu entwickeln. Bereits 1781 hat der französische Ingenieur Coulomb sein bekanntes Reibungsgesetz aufgestellt. Dieses Gesetz wird heutzutage als Grundlage für die Formulierung von Kontaktelementen verwendet (siehe z. B. Bathe und Chaudhary [B2] , Okamoto und Nakasawa [O3]).

Oden und Pires [O2] weisen darauf hin, daß das Coulomb'sche Gesetz, das die Reibungseffekte zwischen steifen Körpern und Reibungseffekte mit großen Gleitungen von einem Körper relativ zu einem anderen beschreiben kann, nicht ohne weiteres auf die Anwendung einer generellen Kontaktformulierung in der FEM angewendet werden kann. Sie merken außerdem an, daß das Gesetz eine schwache physikalische und mathematische Modellierung von Reibungsspannungen in einem Punkt zwischen metallischen Flächen im Kontakt vorsieht.

Um diese Probleme zu überwinden, haben Oden und Pires [O2] die sogenannten nichtlokalen, nichtlinearen Reibungsgesetze entwickelt, welche besagen, wenn die Schubspannung an einem Kontaktpunkt zwischen zwei verformbaren Körpern einen Wert, der proportional zu einem gewichteten Maß der Normalspannung ist, erreicht hat, findet eine gegenseitige Bewegung der Körper an diesem Kontaktpunkt statt.

Campos et. al. [C1] haben ein numerisches Verfahren zur Analyse von Kontaktproblemen entwickelt, wobei die Coulomb'sche Reibung beherrscht wird, und die normalen Zugkräfte schon bekannt sind. Ein Algorithmus für die Lösung von Reibungsproblemen, bei dem die normalen Zugkräfte nicht im Voraus bekannt sind, wurde vorgestellt.

Kontaktprobleme bei rollenden Körpern wurden von Kalker [K1] behandelt. Er setzt voraus, daß der normale Kontaktdruck der Lösung von Hertz [H5] entspricht. Ein Rechenprogramm (DUVOROL) zur Lösung von Kontaktproblemen bei dreidimensional rollenden Körpern mit trockener Reibung wurde von Kalker [K1] entwickelt. Die Basis für dieses Programm ist das Variationsprinzip von Duvant und Lions [D4].

Oden et. al. [O1] haben eine Formulierung für das Variationsprinzip der kleinen stetigen Deformationen von rollenden Zylindern betrachtet und die Lösung solcher Probleme mit der Finite Elemente Methode vorgestellt.

Die Kontaktprobleme bei rollenden Körpern wurden von zahlreichen Autoren behandelt, Literaturhinweise sind in [O1] gegeben. Zur Lösung von Verbundproblemen zwischen Beton und Stahlbewehrung wurde das Bond-Link-Element

von Ngo/Scordelis [N1] entwickelt. Das Element hat keine geometrische Ausdehnung und verbindet je einen Knoten eines Betonelementes mit einem Knoten eines benachbarten Stahlelementes, so daß beide Knoten dieselben Koordinaten haben.

Ähnlich zu dem Bond-Link-Element ist das von De Groot et. al. [D1] entwickelte Bond-Zone-Element, welches aber endliche Abmessungen aufweist. Die Kontaktfläche zwischen Stahl und Beton, ebenso wie der Beton, der sich in der Nähe des Bewehrungsstahles befindet, wurden mit einem adaptierten Materialgesetz modelliert, das die besonderen Eigenschaften der Bond-Zone simuliert, siehe Bild 2.1 c.

Zur Lösung von Problemen in der Felsmechanik entwickelten Godman et. al. [G1] ein Kontaktelement, das zwischen zwei Knoten kontinuierliche Relativverschiebungen ermöglicht. Auf diesem Konzept aufbauend führte Hoshino [H6] das im Bild 2.1 a links dargestellte Kontaktelement mit kontinuierlichem linearem Relativverschiebungsverlauf zwischen zwei Knoten zur Berechnung von Verbundproblemen im Stahlbetonbau ein. Das Kontakt-Element wurde von Schäfer [S4] auf höherwertige Verschiebungsansätze sowie für flächigen Kontakt erweitert. Keuser in [K2] hat die Elementsteifigkeitsmatrizen insoweit verbessert, daß in den verschiedenen Richtungen unabhängige Verschiebungsansätze gewählt werden können.

Bathe und Chaudhary [B2] haben eine Kontaktelementformulierung für Kontaktflächen präsentiert, die in das Programmsystem ADINA bzw. SOLVIA implementiert wurde, eine ausführliche Beschreibung der Formulierung ist im Anhang B gegeben.

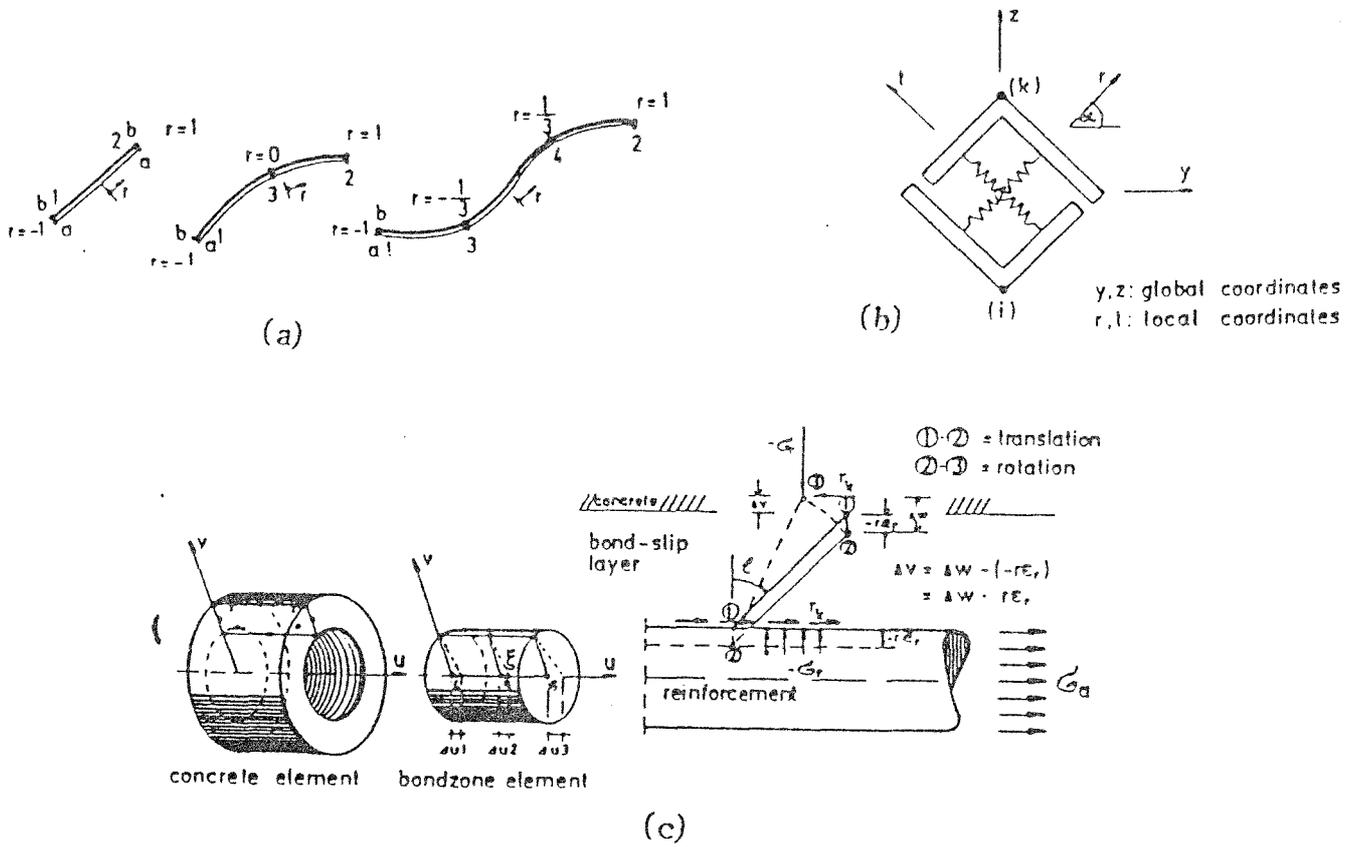


Bild 2.1 a Kontaktelement nach [G1, H6, K2]

Bild 2.1 b Bond-Link-Element nach [N1]

Bild 2.1 c Bond-Zone-Element nach [D1]

3. Einflußparameterstudie der Tragfähigkeit der Ankerkörper

3.1 Allgemeines zum Spannungszustand im Krafteinleitungsbereich

Im Krafteinleitungsbereich wird bei zentrischer Krafteintragung eine hohe, konzentriert wirkende Kraft an einem Ende auf eine gleichmäßige Spannung am entgegengesetzten Ende eines Körpers verteilt (Bild 3.1). Dabei treten Spannungen auf, die genau bestimmt werden müssen, um sicherzustellen, daß die Druckspannungen die Betonfestigkeit an keiner Stelle überschreiten und die Zugkräfte durch Bewehrung aufgenommen werden.

Die höchsten Druckspannungen treten direkt unter der Lastplatte auf, wo also ein Druckversagen erwartet werden sollte. Versuche haben aber ergeben, daß der Beton dort selten versagt, da die Querdehnungsbehinderung durch die Lastplatte und den Beton der nächsten Umgebung einen dreiaxialen Druckspannungszustand erzeugt, unter dem die Betondruckfestigkeit erheblich zunimmt.

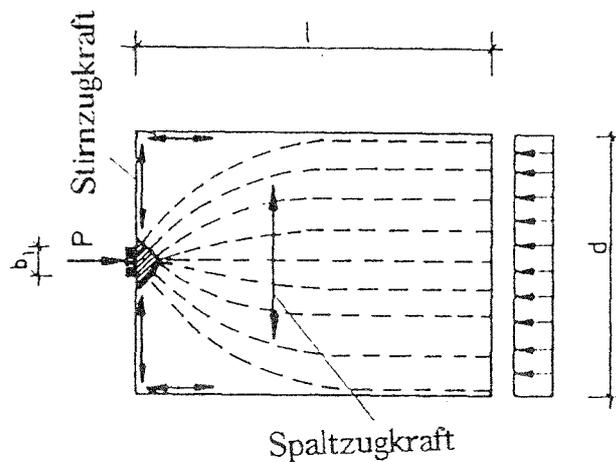


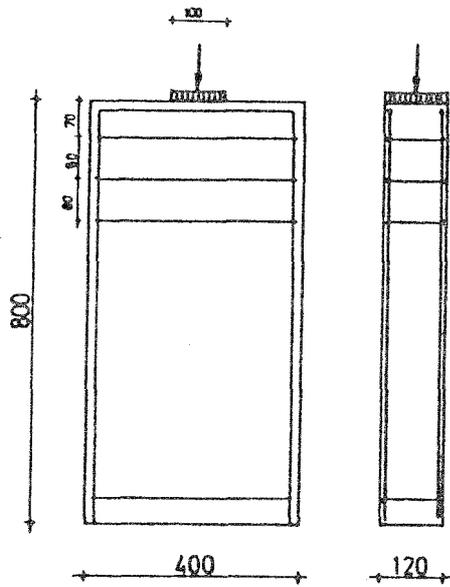
Bild 3.1 Druckspannungen und Zugkräfte infolge Einleitung einer konzentrierten Kraft in einem Betonkörper

Durch die Umlenkung der Druckkräfte treten die sogenannten Spaltzugspannungen auf, die von beträchtlicher Größe sein können. Anschaulich lassen diese sich so darstellen, als versuche ein sich unter der Lastplatte bildender Keil, den Körper in zwei Teile aufzuspalten. Diese Zugspannungen können nur in begrenztem Maße vom Beton aufgenommen werden. Wenn die Betonzugfestigkeit überschritten wird und keine Querbewehrung zur Aufnahme der Zugkräfte vorhanden ist, versagt das Bauteil sofort zu diesem Zeitpunkt. Bei ausreichender Zugbewehrung tritt der Bruch erst dann ein, wenn entweder der Beton in der hoch beanspruchten Druckzone zerstört wird oder die Spaltzugbewehrung versagt. Im Bereich zwischen Lastplattenrand und der Ecke des Bauteils treten sehr hohe, örtlich begrenzte Zugspannungen auf, die zum Abplatzen der gesamten Ecke führen können, da der Beton nicht oder nur sehr begrenzt die großen Verformungen unter der Platte mitmachen kann. Beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit in diesem Bereich finden jedoch nur geringe Spannungsumlagerungen statt, so daß der Abplatzeffekt die Tragfähigkeit nur wenig beeinträchtigt. Um dies aber trotzdem zu verhindern, sollte die gesamte Stirnfläche durch Bügel gesichert werden.

3.2 Nachrechnung eines Versuches

Um nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen des Krafterleitungsbereiches durchzuführen, müssen wesentliche Materialdaten für die Materialgleichungen als Eingabewerte in das Programm bekannt sein. Die Kennwerte des Betons, besonders seine Zug- und Druckfestigkeiten, sind von entscheidendem Einfluß auf die numerischen Ergebnisse. So kann die Eingabe einer zwar aufgrund der Würfeldruckfestigkeit gewählten, aber dennoch unzutreffenden Betondruckfestigkeit Ursache für einen vorzeitigen rechnerischen Bruch sein. Vor der Durchführung der geplanten Parameterstudien ist es daher von großem Vorteil, wenn das rechnerische Trag- und Bruchverhalten des Betons im Krafterleitungsbereich an das in einem Versuch beobachtete angepaßt wird. Zu diesem Zweck soll der Probekörper Nr. 11 von Wurm und Daschner [W2] auch mit dem Ziel nachgerechnet werden, daß diese Nachrechnung Erkenntnisse über eine mögliche Wahl der wichtigsten Materialkennwerte liefert.

Die Abmessungen und Materialdaten des Versuchskörpers sind im Bild 3.2 und das Elementnetz im Bild 3.4 dargestellt. Im Versuch waren drei Bügel als Querbewehrung angeordnet, die im rechnerischen Modell durch sechs Stahleinlagen ersetzt wurden.



Materialdaten

Beton:

$$\beta_{\text{wn}} = 25 \text{ N/mm}^2$$

$$\beta_{\text{spz}} = 2,71 \text{ N/mm}^2$$

Bewehrung:

$$E_s = 210\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0,35 \%$$

$$\beta_s / \beta_z = 420/500$$

$$A_1 / A = 0,25$$

Bild 3.2 Versuchskörperabmessungen und Materialdaten (Versuch Nr. 11 nach [W2])

Um numerische Schwierigkeiten schon vor dem Bruch zu vermeiden, wurden außerdem neun Stahleinlagen mit sehr geringem Querschnitt auch außerhalb des Störbereiches angeordnet.

Das Hauptziel dieser Nachrechnung soll die Bestimmung realistischer Werte für die einaxiale Druckfestigkeit, für die Zugfestigkeit und für die Rechenwerte zur Berücksichtigung der mehraxialen Druckfestigkeit sein.

Als Wert für die Zugfestigkeit im Spaltzugbereich wird eine Spaltzugfestigkeit $\beta_{\text{spz}} = 2,71 \text{ N/mm}^2$ dem Versuchsbericht [W2] entnommen. Da die Elemente an den Rändern Randzugspannungen ausgesetzt sind, ist für sie die Biegezugfestigkeit angemessener, die sich nach Leonhard [L1] zu

$$\beta_{\text{bz}} \approx 1,67 \cdot \beta_{\text{spz}} \approx 4,5 \text{ N/mm}^2$$

ergibt.

Für die einaxiale Druckfestigkeit wird zunächst die Würfeldruckfestigkeit angenommen. Zur Berücksichtigung der zweiaxialen Druckfestigkeit werden die Vergrößerungsfaktoren $\gamma = 1,20$ und $\gamma_1 = 1,25$ (siehe Anhang A, Bild 5) gewählt. Für ein zweites Berechnungsmodell werden diese Werte auf $\gamma = \gamma_1 = 2,0$. In einem dritten Modell soll das Betondruckversagen unter der Lastplatte dadurch verhindert werden, daß die Druckfestigkeit mit dem Faktor $\sqrt{A/A_1}$ erhöht wird. In Die Eingabedaten für die drei Berechnungsmodelle sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt.

Modell	Betondruckfestigkeit	Faktor	Faktor	Spaltzugfestigkeit	Biegezugfestigkeit
	$\beta_{WN} \text{ [N/mm}^2\text{]}$	$\gamma \text{ [-]}$	$\gamma_1 \text{ [-]}$	$\beta_{spz} \text{ [N/mm}^2\text{]}$	$\beta_{bz} \text{ [N/mm}^2\text{]}$
SM1A	25,0	1,20	1,20	2,71	4,50
SM2A	25,0	2,00	2,00	2,71	4,50
SM3A	50,0	2,00	2,00	2,71	4,50

Tabelle 3.1 Eingabewerte für Betonfestigkeiten der Berechnungsmodelle

Die drei Berechnungsmodelle lassen drei unterschiedliche Bruchmechanismen erwarten:

1. Betondruckversagen direkt unter der Lastplatte;
2. Betondruckversagen außerhalb des Lastplattenbereiches;
3. Fließen der Bewehrung im Spaltzugbereich.

Die erhaltenen Ergebnisse bestätigen diese Vorhersage.

Das erste Modell weist bis zu einer Belastung von $25,14 \text{ N/mm}^2$ (oder $p = 301,7 \text{ kN}$) weder Risse noch Druckversagen auf. Bei Erhöhung der Last auf $26,33 \text{ N/mm}^2$ ($p_u = 316 \text{ kN}$) versagt jedoch das in Bild 3.3 mit 1A bezeichnete Element durch Druckbruch. Daraufhin ist es nicht mehr möglich, die Last weiter zu erhöhen; das heißt, bei $26,33 \text{ N/mm}^2$ ($p = 316 \text{ kN}$) tritt bei diesem Modell das rechnerische Versagen ein.

Beim zweiten Modell findet dieses Versagen erst bei der Belasung $27,52 \text{ N/mm}^2$ ($p_u = 330 \text{ kN}$) statt, und zwar in dem mit 2A in Bild 3.3 bezeichneten Element. Die Ursache für die sich rechnerisch ergebende höhere Bruchbelastung war die höhere Betondruckfestigkeit unter zweiachialem Druck. Im ersteren Modell bilden sich bis zum Bruchversagen keine Risse, wohl aber im zweiten.

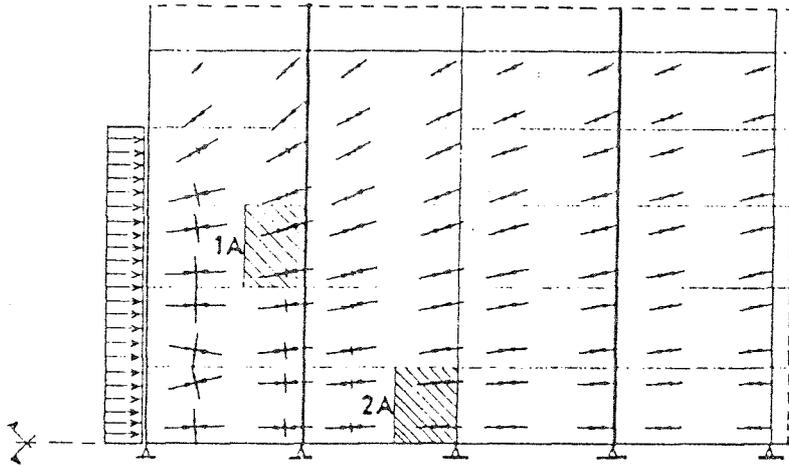


Bild 3.3 Hauptspannungen im Beton direkt unter der Lastplatte

Mit einer Erhöhung der Betondruckfestigkeit im dritten Modell wird das Bruchversagen unter der Lastplatte verhindert. Die ersten Risse treten bei einer Last von $29,9 \text{ N/mm}^2$ ($p = 359 \text{ kN}$) im Spaltzugbereich auf. Bei einer Last von $34,67 \text{ N/mm}^2$ (oder $p_u = 416 \text{ kN}$) erreichte die Spannung in der Spaltzugbewehrung 92% der Streckgrenze; darüberhinaus kann die Last wegen Fließens des Stahls nicht erhöht werden.

In den Bildern 3.4 und 3.5 sind die positiven Hauptzugspannungen, die Spannungen in der Bügelbewehrung und die Randzugspannungen im Beton für die drei Berechnungsmodelle gegenübergestellt.

Die Versuchsergebnisse [L3] für den berechneten Probekörper sind im Bild 3.6 wiedergegeben. Sie lassen deutlich erkennen, daß die Reißlast etwa 312 kN betrug, während Versagen infolge Fließens der Bügelbewehrung bei etwa 397 kN stattfand. Da kein Druckbruch erwähnt wurde, kann ausgeschlossen werden, daß die Festigkeitsannahmen für die ersten beiden Berechnungsmodelle unzureichend sind. Selbst mit dem zweiten Modell mit der höheren zweiachialen Druckfestigkeit werden nur 83% der Bruchlast im Versuch erreicht. Die rechnerische Bruchlast für das dritte Modell übertrifft die im Versuch ermittelte Höchstlast um knapp 5%. Hierbei stimmte die rechnerisch ermittelte Art des Versagens mit dem Versuch überein, d.h. das Fließen der Bügelbewehrung ist beim Versuch und bei der Berechnung die Versagensursache.

Als Schlußfolgerung dieser Versuchsnachrechnung läßt sich festhalten, daß das vorzeitige Betonversagen unter der Lastplatte dadurch vermieden werden kann, daß sowohl eine höhere Würfeldruckfestigkeit als auch entsprechende Vergrößerungsfaktoren für die zweiachiale Druckfestigkeit eingegeben werden. Dies gilt aber nur für die Finiten Elemente, die sich im direkten Einflußbereich der Lastplatte befinden. Wenn die Lastplattenbreite mit b_1 bezeichnet wird, werden die Elemente im Einflußbereich der Größe $2b_1$ mal $2b_1$ mit der höheren Betonfestigkeit vorausgesetzt. Mit diesem Hilfsmittel ist es nicht mehr möglich, den genauen Spannungszustand und eventuelles Versagen im Einflußbereich der Lastplatte zu bestimmen. Dies aber wird mit dieser Untersuchung auch nicht beabsichtigt. Es kommt hier vielmehr darauf an, den gesamten Krafteinleitungsbereich zu untersuchen und vor allem die für die Bemessung so wichtigen Spaltzugkräfte zu bestimmen.

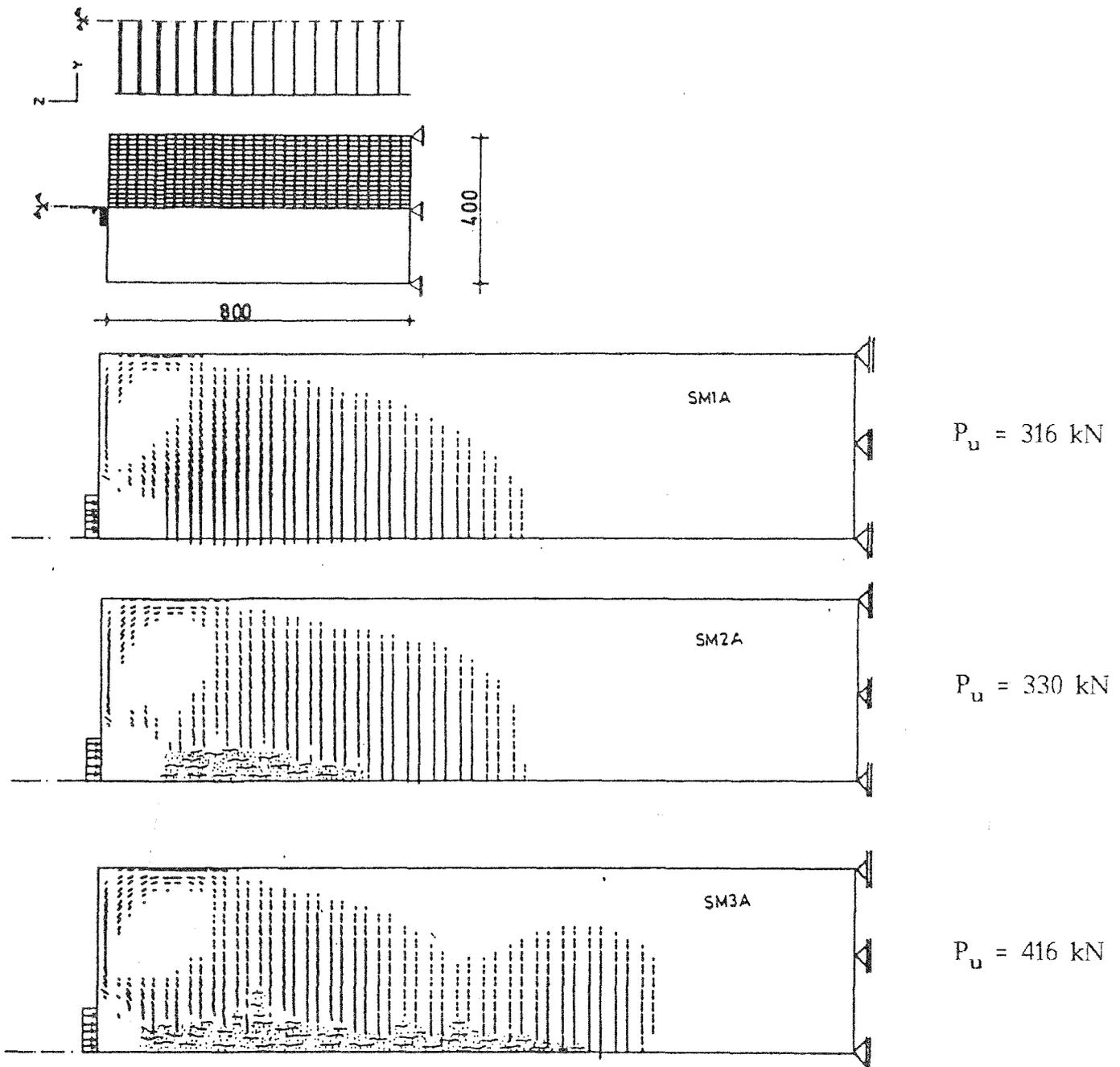
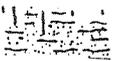


Bild 3.4 Positive Hauptzugspannungen der Rechenmodelle SM1A, SM2A und SM3A unter der Grenzlast p_u (die gerissenen Elemente sind mit  gekennzeichnet)

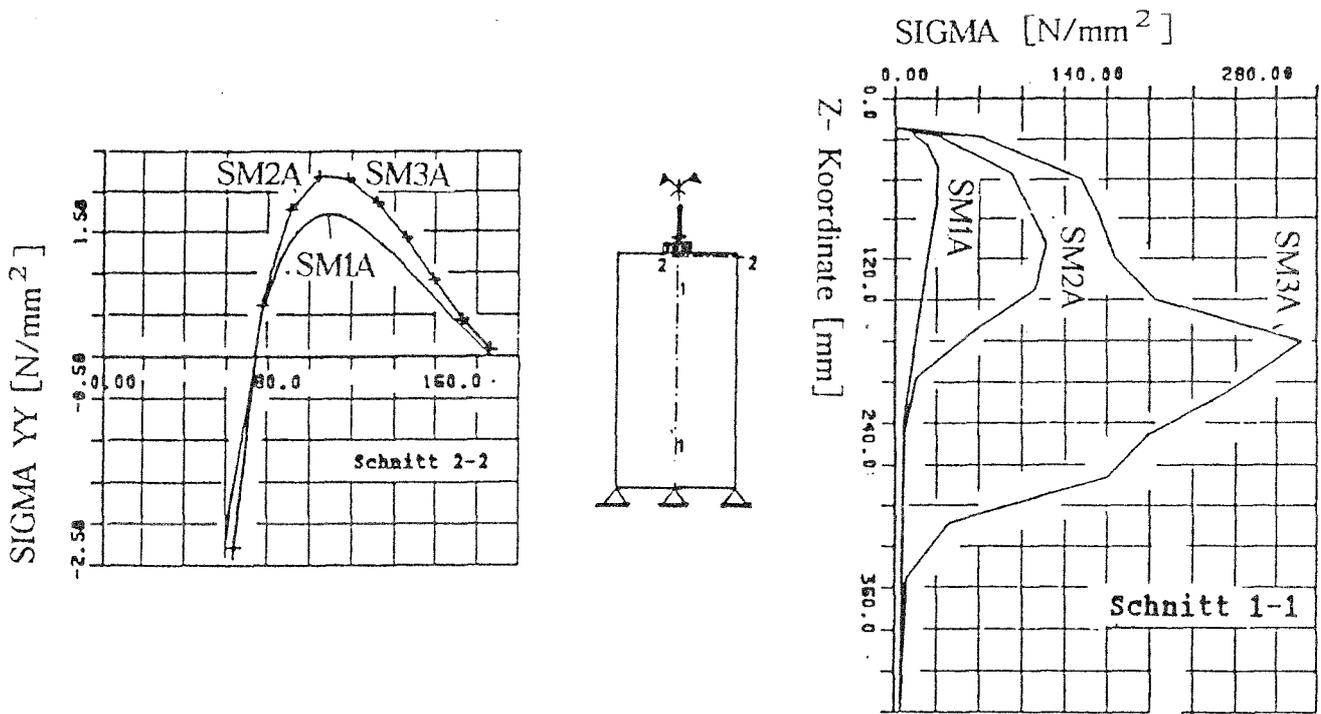


Bild 3.5 Spannungsverlauf in der horizontalen Bewehrung über die Höhe (a) und die Randzugspannung (b)

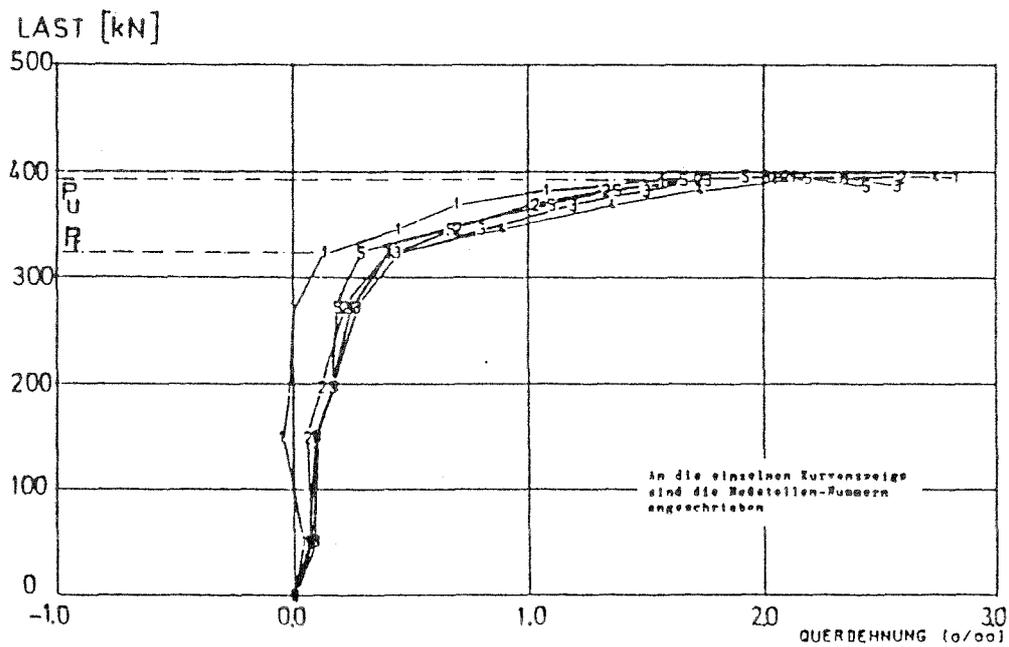


Bild 3.6 Last-Querdehnungskurve des Versuchs 11 nach [W2]

3.2 Zur Durchführung der Parameteruntersuchungen

Es sollen insgesamt 19 Scheibenmodelle untersucht werden, mit denen der Einfluß der folgenden Parameter untersucht werden kann:

1. Verhältnis Lastplattenbreite zur Querschnittshöhe;
2. Spaltzugbewehrungsgehalt $\mu = A_s/bd$ (b = Querschnittsdicke, d = Querschnittshöhe);
3. Exzentrizität der konzentrierten Last;

Die Kräfteinleitungsbereiche, die für diese Untersuchungen berechnet werden sollten, sind im Bild 3.7 zusammengestellt, während die verschiedenen variierten Parameter aus Tabelle 5.2 ersichtlich sind.

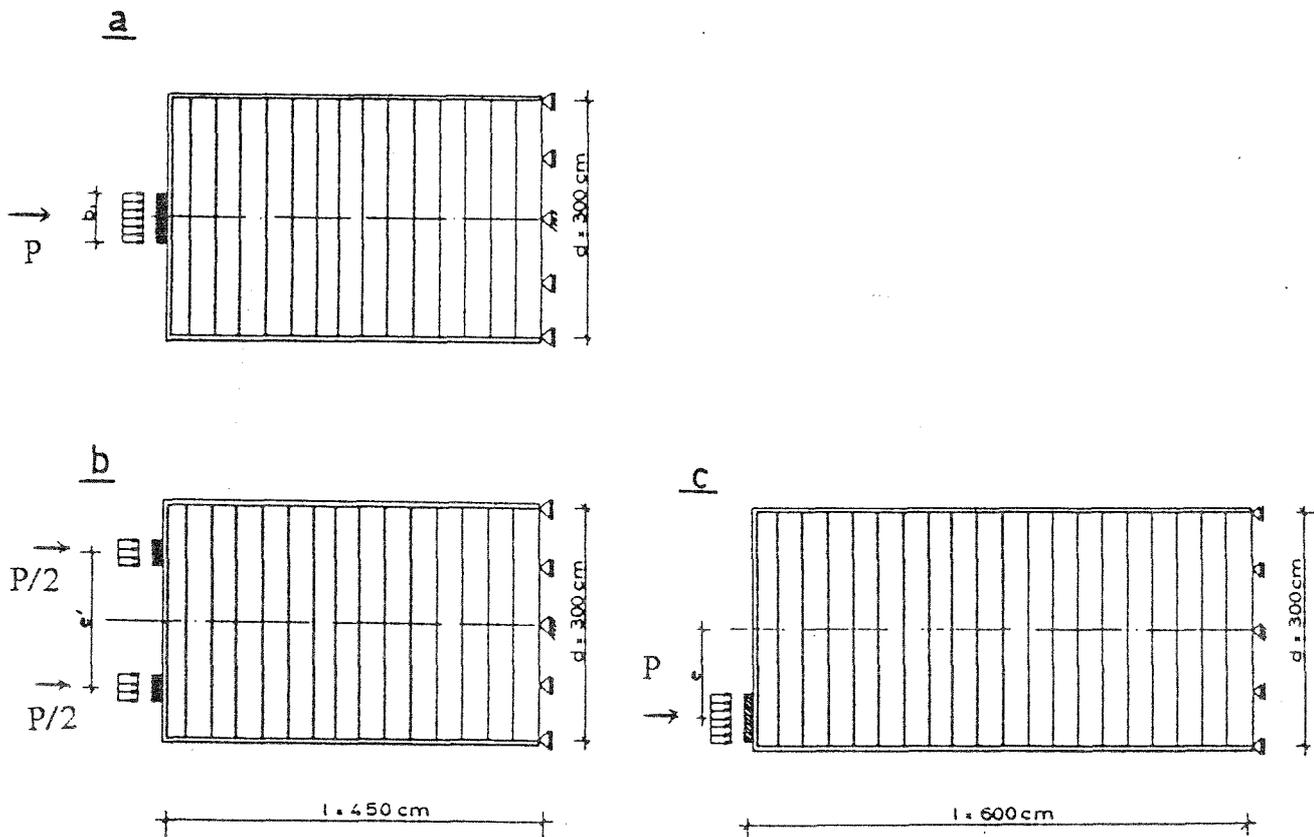


Bild 3.7 Untersuchte Kräfteinleitungsbereiche

Modell	Querschnittshöhe	Länge des Modells	Bewehrungsgehalt	Verhältnis	bezogene Lastexzent.	bezogene Lastexzent.
	d [mm]	l [mm]	$\mu = A_s / bd$	b_1/d	e'/d	e/d
SM0B SM1B SM2B SM3B SM4B SM5B	300	450	0,00 0,27 0,55 1,11 1,67 2,22	0,200	-	-
SM1C SM2C SM3C SM4C SM5C	300	450	0,55	0,133 0,266 0,400 0,600 0,800	-	-
SM1D SM2D SM3D SM4D	300	450	0,55	0,133	0,20 0,40 0,60 0,80	-
SM1E SM2E SM3E SM4E	300	600	0,55	0,200	-	0,133 0,200 0,267 0,333

Tabelle 3.2 Eingabedaten für die untersuchten Modelle

Der Beton wird durch 8-Knoten Scheibenelemente mit dem in Bild 3.8 dargestellten Netz beschrieben. Die vertikale und horizontale, schlaffe Bewehrung wird durch diskrete Stabelemente berücksichtigt. Die Länge l des mit Finiten Elementen modellierten Krafteinleitungsbereiches beträgt in zwei Fällen $1,5 d = 450 \text{ mm}$ und $2 d = 600 \text{ mm}$, um sicherzustellen, daß der gesamte Störbereich vom Modell erfaßt wird. An der der konzentrierten Last gegenüberliegenden Berandung sind die Randbedingungen so angegeben, daß keine Behinderung der Betonquerdehnung stattfindet.

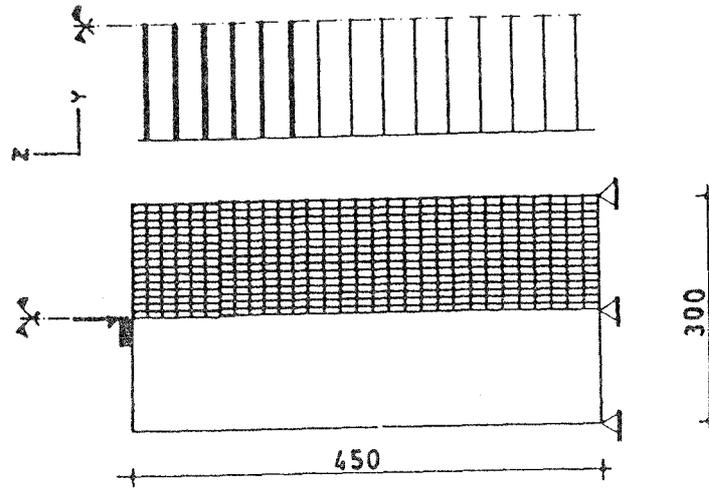
Für das Betonwerkstoffverhalten wird das ADINA Betonmodell [B3] mit den im Anhang A erläuterten Verbesserungen verwendet. Es wurde bereits ausgeführt, daß durch eine Erhöhung der örtlichen Betonfestigkeit im Lastplatteneinflußbereich das gleiche Versagensverhalten erzwungen werden kann, das auch im Versuch beobachtet wurde. Im Bild 3.9 ist die Spannungs-Dehnungs-Kurve für den Beton in diesem Bereich mit 2 gekennzeichnet, während die Kurve 1 für die restlichen Bereiche des Modells gilt. Die Druckfestigkeit unter der Lastplatte wird also erhöht.

Wie bereits in Abschnitt 3.1 erläutert, wird für die Betonelemente im Spaltzugbereich die Spaltzugfestigkeit β_{spz} verwendet, während für die Elemente an den Rändern die Biegezugfestigkeit maßgebend wird. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (tension stiffening effekt) wird nach Bild 11 des Anhangs A berücksichtigt.

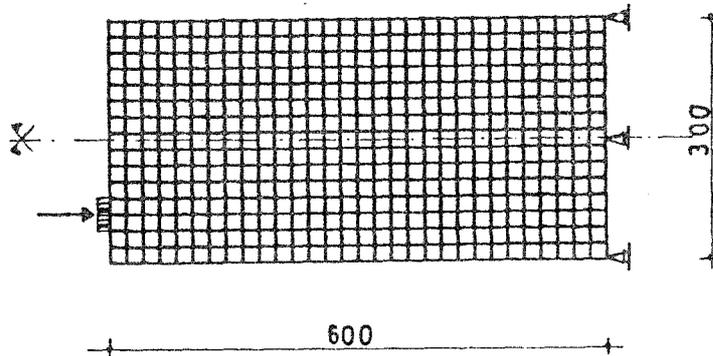
Der Verbund zwischen den Betonelementen und der Bewehrung wird als starr angenommen. Alle für die Eingabe erforderlichen Materialkennwerte sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt.

Betondruckfestigkeit	Biegezugfestigkeit	Spaltzugfestigkeit	E-Modul Beton	Streckgrenze Bewehrung	E-Modul Stahl
$\beta_{WN} [\text{N/mm}^2]$	$\beta_{bz} [\text{N/mm}^2]$	$\beta_{spz} [\text{N/mm}^2]$	$[\text{N/mm}^2]$	$\beta_s [\text{N/mm}^2]$	$[\text{N/mm}^2]$
25,00	3,94	2,37	30 000	420,0	210000

Tabelle 3.3 Werkstoff-Eingabedaten



a) Elementnetz für die Modellreihen SMB, SMC, SMD (Tab. 3.2)



b) Elementnetz für die Modellreihe SME (Tab. 3.2)

Bild 3.8 Elementnetz zur Darstellung des Kräfteinleitungsbereichs

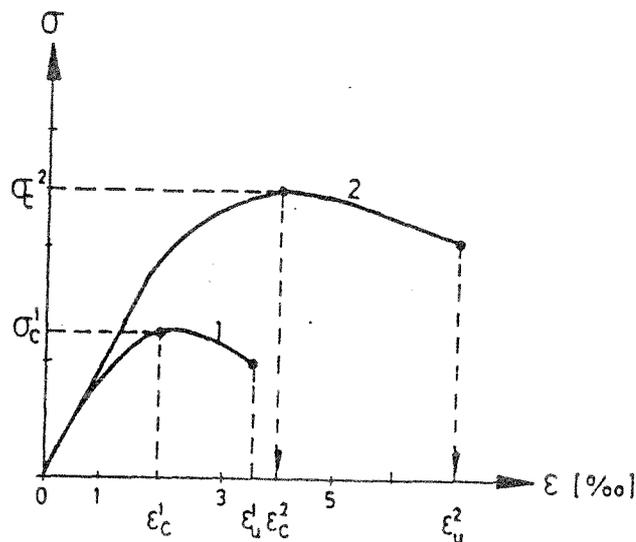


Bild 3.9 Spannungs-Dehnungs-Kurven des Betons im einaxialen Spannungszustand

3.3 Bemerkungen zur Modellierung der schlaffen Bewehrung mit diskreten Stabelementen

Die ersten Testrechnungen wurden mit den im Bild 3.8 dargestellten Betonelementen und mit diskreten Stabelementen für die schlaffe Bewehrung durchgeführt. Dabei wurde nur an jedem zweiten Betonelementrand ein Stabelement angeordnet. Diese Modellierung hat zur Folge, daß sich ein rechnerischer Versagensmechanismus ausbildet, der in Wirklichkeit so kaum auftreten kann und im Bild 3.10 dargestellt ist.

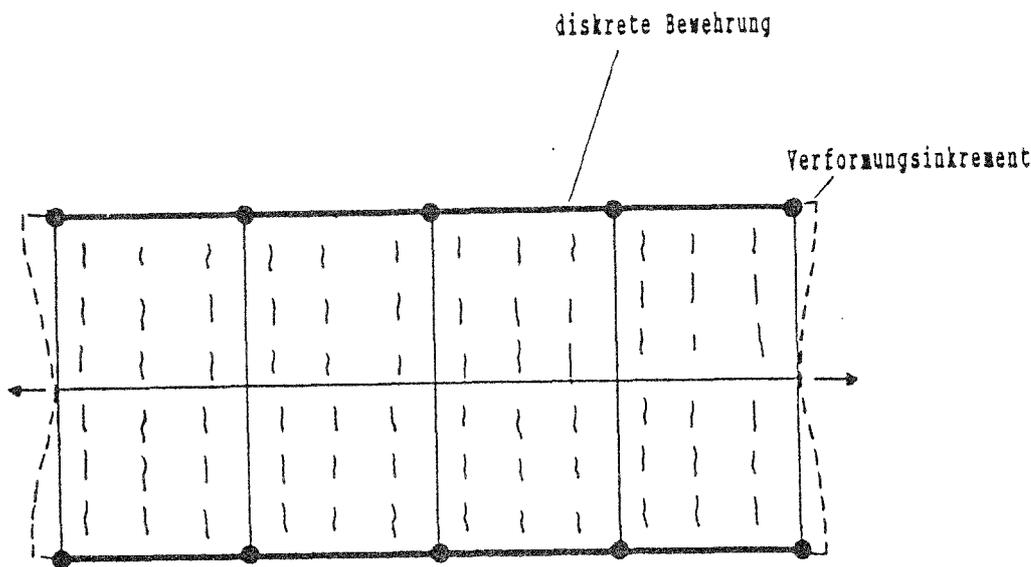


Bild 3.10 Künstlicher Versagensmechanismus infolge ungünstiger Bewehrungsmodellierung

Wenn der erste Bügel die Fließgrenze erreicht, werden alle benachbarten Betonelemente in alle 9 Integrationspunkten als gerissen betrachtet. Obwohl diese Elemente noch eine gewisse Schubsteifigkeit besitzen, können sie infolge der fehlenden Zugfestigkeit in horizontaler Richtung keine Spannungen auf die Nachbarelemente umlagern ohne die Hilfe von Stahleinlagen entlang der Elementränder. Das Modell versagt also zwischen den Stahleinlagen infolge Zugbruch. Die in Wirklichkeit zu erwartenden Spannungsumlagerungen können mit den verwendeten Materialmodellen nur sehr unvollständig simuliert werden.

Dieser rechnerische Versagensmechanismus in den ersten Berechnungen führt zu nachstehenden Folgerungen:

- a) Eine allgemeine Vergrößerung der Bügelquerschnitte hat nur einen geringen Einfluß, und den auch nur deshalb, weil die Dehnungen in Stahlnähe geringer werden und daher das Aufreißen des Betons verzögert wird.

- b) Eine örtliche Vergrößerung der Bügelquerschnitte im höchstbeanspruchten Bereich hat einen ähnlichen, geringen Effekt.
- c) Eine Halbierung des Bügelabstandes wird demgegenüber sehr viel größere Auswirkungen haben, da damit, wie aus Bild 3.10 ersichtlich, die Spannungskremente umgelagert werden können.

Eine genauere Vorhersage der Bruchlast kann mit FE-Modellen nur dann möglich sein, wenn alle künstlichen Versagensmechanismen ausgeschlossen werden und vor allem auch die Gewölbekonstruktion im Beton zwischen den Bügeln realistisch simuliert wird.

Die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Ergebnisse sind mit Berechnungsmodellen, bei denen an jedem Rand der Betonelemente ein Stahlstab liegt, durchgeführt worden. Daher ist dieser eben beschriebene Versagensmechanismus ausgeschlossen.

3.4 Einfluß der Querbewehrung

Die höhere Betondruckfestigkeit infolge mehraxialer Druckbeanspruchung kann nur dann voll ausgenutzt werden, wenn die Spaltzugkräfte durch Bewehrung aufgenommen werden. Ist der mehraxiale Spannungszustand unter der Lastplatte, z.B. durch Wendelbewehrung, gewährleistet, dann hängt die Traglast des Kräfteinleitungsbereiches von der Spaltzugbewehrung ab. Um diese Abhängigkeit zu untersuchen, werden 6 verschiedene Berechnungsmodelle SM0B bis SM5B (siehe Bild 3.7a) miteinander verglichen, die sich nur durch den Bügelbewehrungsgehalt unterscheiden (siehe Tabelle 3.2). Die Verteilung der Bügel über den Kräfteinleitungsbereich ist in allen 6 Modellen gleich, wobei an jedem Betonelementrand ein Stabstahl angeschlossen wird. Nur die Querschnittsfläche wird variiert.

Die wichtigsten Berechnungsergebnisse sind in der Tabelle 3.4 zusammengestellt. Die Abhängigkeit der Reiß- bzw. Bruchlast vom Querbewehrungsgehalt ist im Bild 3.11 aufgezeichnet. Hierzu ist bemerkenswert, daß selbst eine geringe Bügelbewehrung die Reißlast deutlich erhöhen kann, und zwar unverhältnismäßig mehr als der Stahlgehalt zusammen mit dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln, erwarten läßt. Vermutlich führt eine geringe Bewehrung zu Spannungsumlagerungen, die das Reißen des Betons verzögern. Der beträchtliche Anstieg der Bruchlast ist zu erwarten, da die Spaltzugbewehrung andere Versagensmechanismen erzwingt.

$$\frac{P_u(\mu)}{P_u(\mu=0)} ; \frac{P_R(\mu)}{P_R(\mu=0)}$$

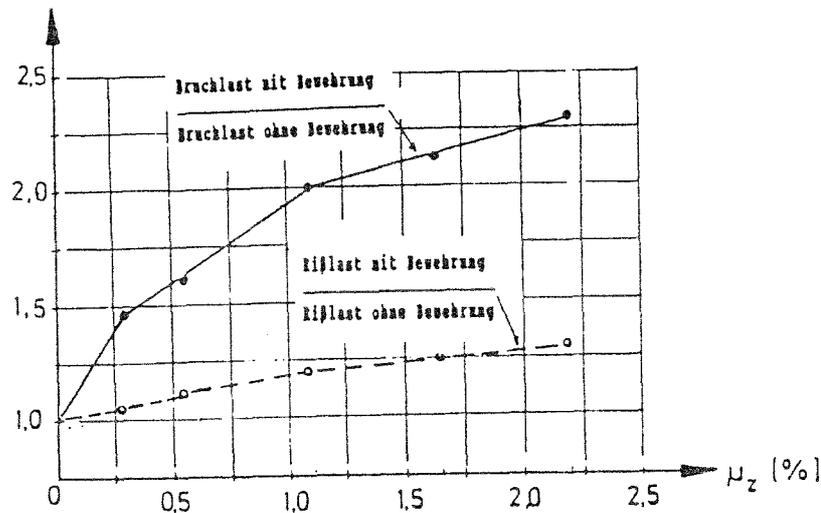


Bild 3.11 Bruch- bzw. Rißlast in Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt

In Bild 3.12 sind die positiven Hauptzugdehnungen für die unterschiedlichen Bewehrungsgehalte gegenübergestellt. Der Einfluß der Querbewehrung ist deutlich zu erkennen. Bei schwacher Bewehrung tritt ein kräftiger Spaltriß nahe der Symmetrieachse auf. Bei zunehmender Bewehrung nimmt die Größe der maximalen Hauptzugdehnungen ab. Außerdem werden diese Dehnungen viel weiter über den Querschnitt verteilt. So nimmt z.B. die maximale Dehnung von 0,00853 (für $\mu = 0,27\%$) auf 0,00165 (für $\mu = 2,22\%$) ab. Die Bügelbewehrung verteilt also die Spaltzugrisse sehr wirkungsvoll über den Querschnitt.

Die Berechnungsergebnisse lassen eindeutig auf vier unterschiedliche Versagensmechanismen schließen. Der unbewehrte Beton versagt schlagartig, sobald die Spaltzugspannung die Betonzugfestigkeit erreicht. Bei geringem Bewehrungsgehalt, ab 0,55%, verteilt die Bewehrung die Querszugdehnungen über den gesamten Querschnitt. Versagen tritt dann erst auf, wenn die schwache Bewehrung außerhalb des Störbereiches ($|z| \geq d$) fließt. Die sehr geringe Bewehrung außerhalb des Störbereiches hat eine sehr geringe Querschnittsfläche und wurde eingesetzt, um numerische Schwierigkeiten vor dem Bruch zu vermeiden. Bei ausreichend dimensionierter Spaltzugbewehrung inner- und außerhalb des Störbereiches und natürlich auch bei Behinderung der Querdehnung am Ende des Einleitungsbereiches (unverschiebliche Lager) tritt Versagen infolge sehr hoher Druckspannungen direkt unter der Lastplatte auf. In keinem der untersuchten Fälle fand Bruchversagen im Beton infolge der Druckspannungen statt, da die Druckfestigkeit im Einflußbereich der Ankerplatte rechnerisch erhöht worden war.

Modell	Querbewehrungsgehalt	Rißlast	Bruchlast	Verhältnis	Spaltzugkraft	bezogene Spaltzugkraft	größte Rißbreiten
	$\mu\%$	Pr [kN]	Pu [kN]	Pu/Pr	Z [kN]	Z/Pu	[mm]
SM0B	0	205	205	1,00	-	-	-
SM1B	0,27	215	301	1,40	25,02	0,08	0,30
SM2B	0,55	229	328	1,43	43,18	0,13	0,25
SM3B	1,11	248	410	1,65	73,48	0,18	0,14
SM4B	1,67	257	438	1,70	77,80	0,18	0,11
SM5B	2,22	265	465	1,75	84,00	0,18	0,06

Tabelle 3.4 Ergebnisse für verschiedene Querbewehrungsgehalte

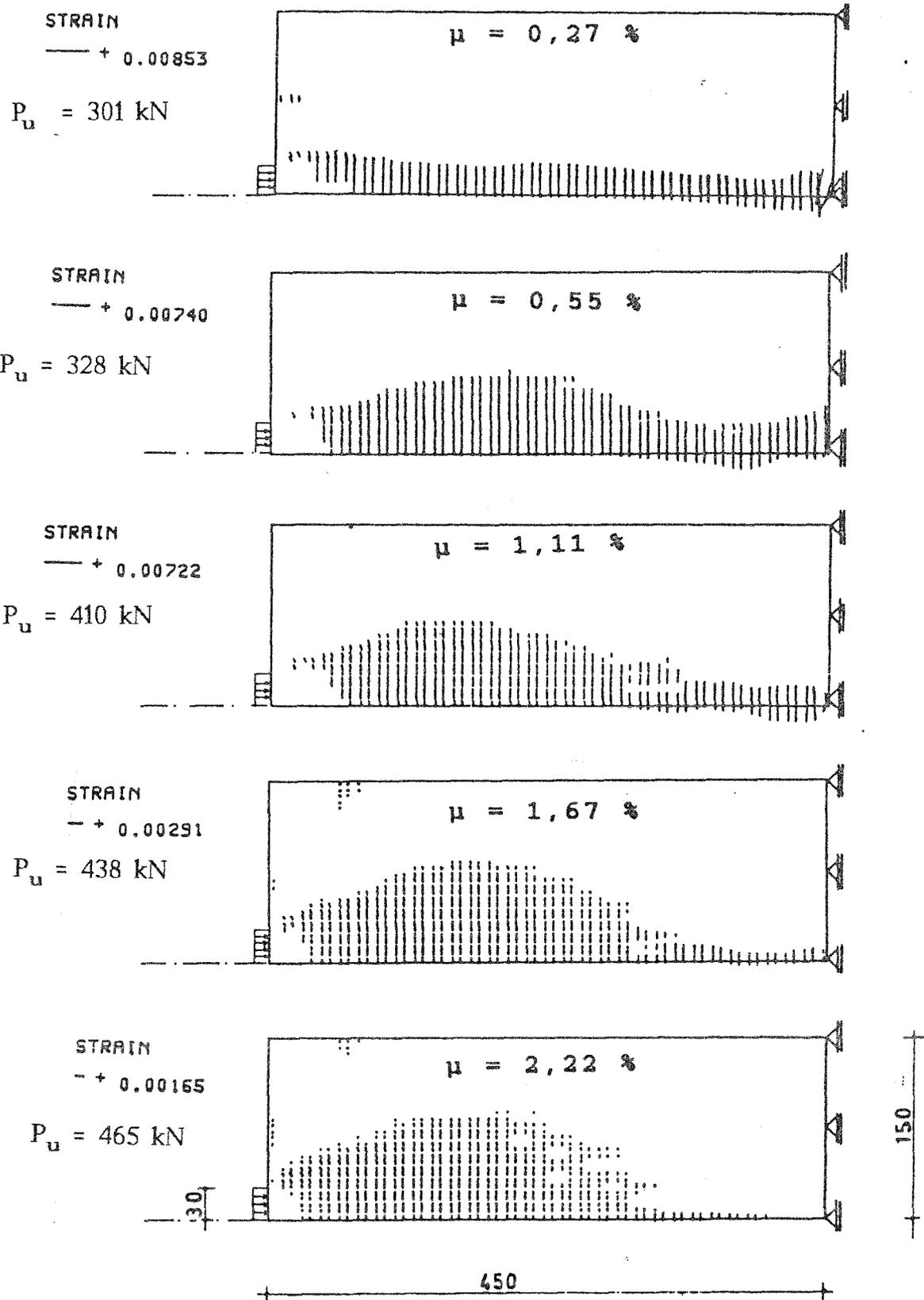


Bild 3.12 Positive Hauptzugdehnungen in Abhängigkeit vom Bewehrungsgehalt

Bild 3.13 zeigt für das Berechnungsmodell mit $\mu = 1,11\%$ die Bügelspannungen bei Laststeigerung. Man sieht deutlich das Fortschreiten der Ribbildung im Spaltzugbereich. Der Bruch tritt bei diesem Modell infolge Fließens der Bewehrung am Ende des Einleitungsbereichs auf.

Die Spannungsverteilungen in der Bügelbewehrung unter der Rib- und Bruchlast sind in den Bildern 3.14 und 3.15 dargestellt. Sie lassen deutlich den Einfluß des Bewehrungsgehaltes und auch die Spannungsumlagerungen, die nach dem Reißen des Betons stattfinden, erkennen. Aus der Tabelle 3.4 folgt ebenfalls noch das interessante Ergebnis, daß die bezogene Spaltzugkraft (d.h. das Verhältnis der Summe aller Bügelkräfte zur Bruchlast) bei hohem Bewehrungsgehalt ($\mu \geq 1,11$) nur wenig beeinflußt wird. Die Ribbreiten dagegen nehmen mit steigendem Bewehrungsgehalt ab.

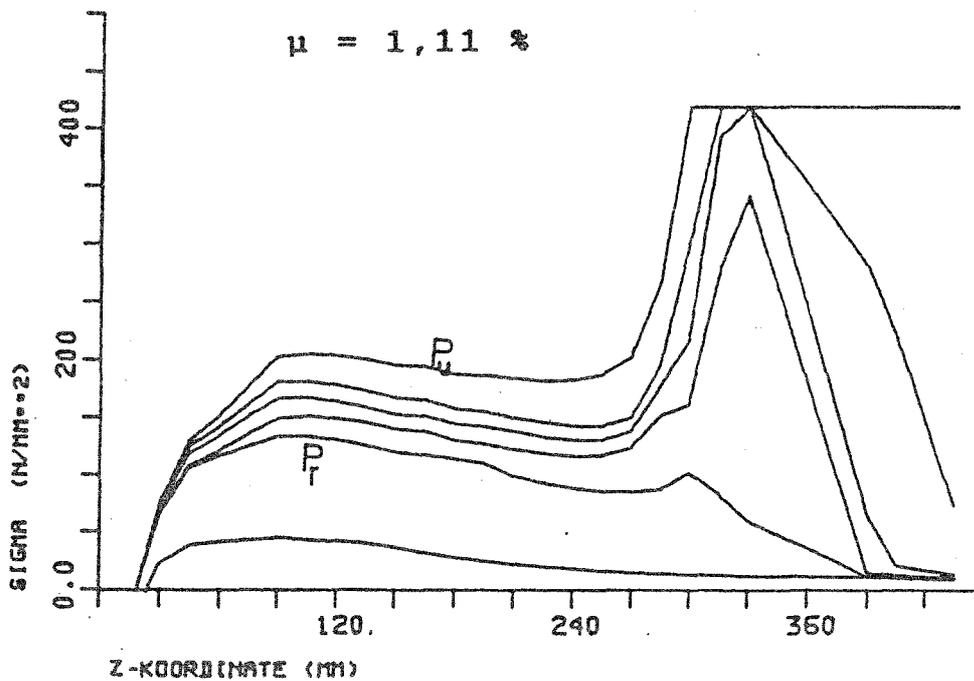


Bild 3.13 Bewehrungsspannung für $\mu = 1,11\%$ bei Laststeigerung bis zum Bruch

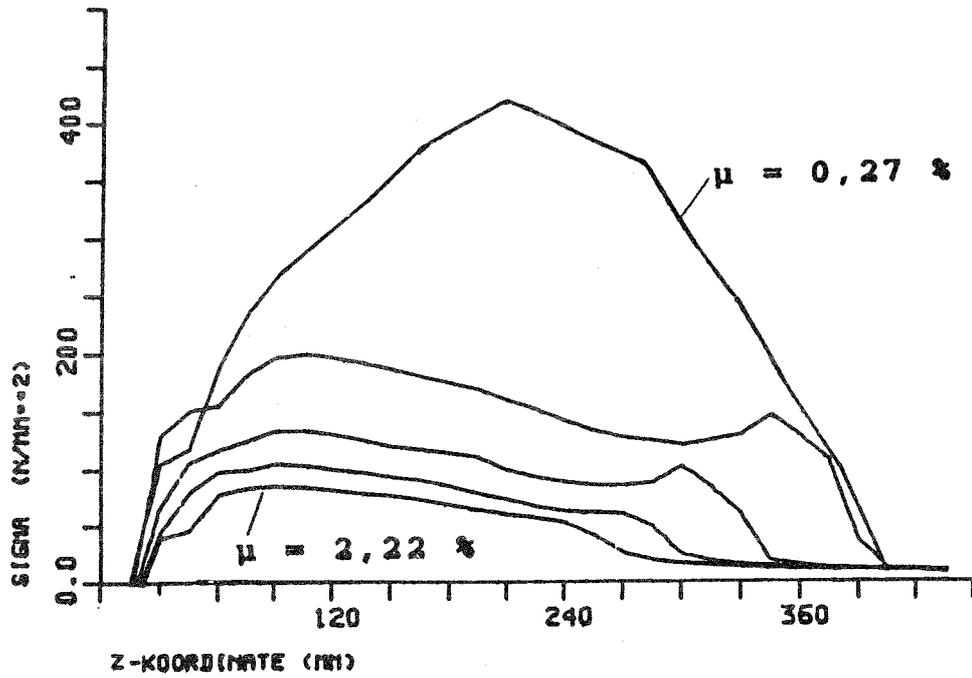


Bild 3.14 Spannungsverlauf in der Spaltzugbewehrung unter den jeweiligen Rißlasten

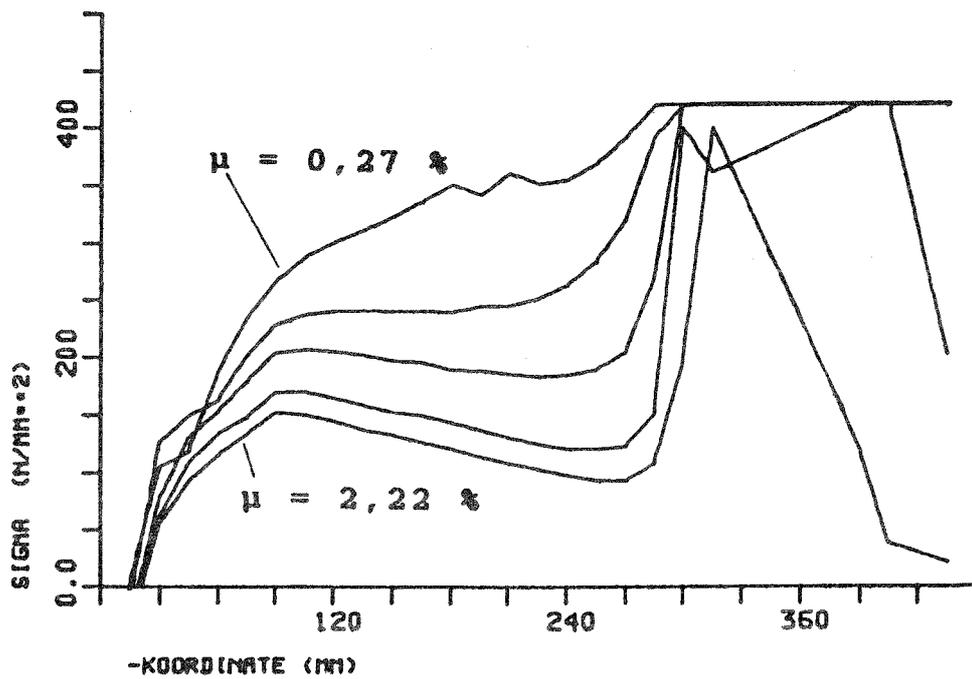


Bild 3.15 Spannungsverlauf in der Spaltzugbewehrung unter den Bruchlasten

3.5 Einfluß der Lastplattenbreite

Der Einfluß der Lastplattenbreite b_1 wird anhand von fünf Berechnungsmodellen untersucht. In diesen Modellen vom Typ des Bildes 3.7 a wird das Verhältnis b_1/d von 0,133 bis 0,80 variiert (siehe Tabelle 3.2). Die wichtigsten Ergebnisse finden sich in Tabelle (3.5).

Modell	Verhältnis	Rißlast	Bruchlast	Verhältnis	Spaltzugkraft	bezogene Spaltzugkraft	größte Rißbreiten
	b_1/d	Pr [kN]	Pu [kN]	Pu/Pr	Z [kN]	Z/Pu	[mm]
SM1C	0,133	201	255	1,27	41,96	0,16	0,29
SM2C	0,266	248	389	1,57	52,00	0,13	0,27
SM3C	0,400	356	533	1,50	50,76	0,10	0,21
SM4C	0,600	454	639	1,41	31,95	0,05	0,17
SM5C	0,800	584	776	1,33	24,24	0,03	0,10

Tabelle 3.5 Ergebnisse für unterschiedliche Lastplattenbreiten

Die auf die Bruchlast p_u bezogene Spaltzugkraft Z nimmt mit steigendem Verhältnis b_1/d ab, da die notwendigen Spannungsumlagerungen nur noch in geringem Maße stattfinden, siehe Bild 3.16. Die Spaltzugkraft Z selber dagegen hat für das Verhältnis $b_1/d = 0,266$ ein Maximum. Dies ist auch dem Bild 3.17 zu entnehmen, in dem die Spannungen in den Bügeln aufgetragen sind. Hierzu muß aber bemerkt werden, daß es oft schwierig ist, die Spannungen im letzten Lastschritt vor dem Bruch rechnerisch genau zu bestimmen. So spielt die Größe der Lastinkremente und die maximale Anzahl der Iterationen eine wichtige Rolle. Die Bruchlast selbst wird in diesem Sinn aber relativ wenig beeinflusst. Dagegen ist die Größe der Gesamtspaltzugkraft in den Bügeln jedoch sehr empfindlich, da bedeutende Spannungsumlagerungen während des Versagens stattfinden. Dementsprechend müssen die Ergebnisse der Tabelle 3.5 und des Bildes 3.16 mit Sorgfalt interpretiert werden.

Es wird vorgeschlagen, die Abhängigkeit der Spaltzugkraft von der Lastplattenbreite durch die folgende Beziehung darzustellen:

$$Z \approx 0,2 V \left(1 - \frac{b_1}{d}\right) \quad (3.1)$$

Diese ist als gestrichelte Linie im Bild 3.16 eingetragen. Der Koeffizient 0,19 erscheint gering im Vergleich mit 0,3 in der entsprechenden Formel von Leonhardt [L2] und 0,25 in [G2]. Dieser Unterschied ist einmal darauf zurückzuführen, daß Gl. 3.1 auf nichtlinearen Berechnungen beruht, die Formeln in [L2] und [G2] dagegen auf linear-elastischen. Außerdem bezieht sich Gl. 3.1 auf die Spaltzugkräfte, die vor dem Bruch von der Bewehrung tatsächlich aufgenommen werden. Dementsprechend also muß für die Bemessung noch ein Sicherheitsfaktor eingeführt werden. In den Bildern 3.18 und 3.19 sind die Hauptzugdehnungen für die jeweilige Rißlast und Bruchlast der Modelle mit extremen Lastplattenbreiten ($b_1/d = 0,133$ bzw. $0,8$) aufgezeichnet. Die größten Zugdehnungen treten in allen Fällen entlang der Symmetrieachse auf. Es lassen sich aber unterschiedliche Versagensmechanismen feststellen. Im Fall $b_1/d = 0,133$ ist die Bewehrung außerhalb des Störbereiches durch Fließen für den Bruch verantwortlich, ähnlich wie im vorigen Abschnitt, die Fälle mit geringer Querbewehrung. Bei großen Verhältnissen b_1/d nimmt die Bedeutung der Spaltzugspannung ab, und Versagen tritt dann ein, wenn der Beton zwischen den einzelnen Bügeln über die gesamte Querschnittshöhe gerissen ist.

Die Druckspannungen erreichen in keinem der berechneten Fälle die Druckfestigkeit des Beton, selbst unter der Lastplatte nicht. Diese maximale Druckspannung, die zur Zeit des Versagens unter der Lastplatte herrscht, ist im Bild 3.20 als Funktion des b_1/d -Verhältnisses aufgezeichnet. Es ist hier angebracht darauf hinzuweisen, daß die Steifigkeit der Lastplatte nicht modelliert worden ist. Die Ankerkraft des Spannglieds wird als über die Lastplatte gleichmäßig verteilte Streckenlast angenommen, wodurch eine sehr steife Platte simuliert wird. Da weniger steife Platten höhere Spaltzugkräfte hervorrufen, wird empfohlen, diesen Effekt durch eine entsprechend kleinere Lastplattenbreite zu simulieren [L3].

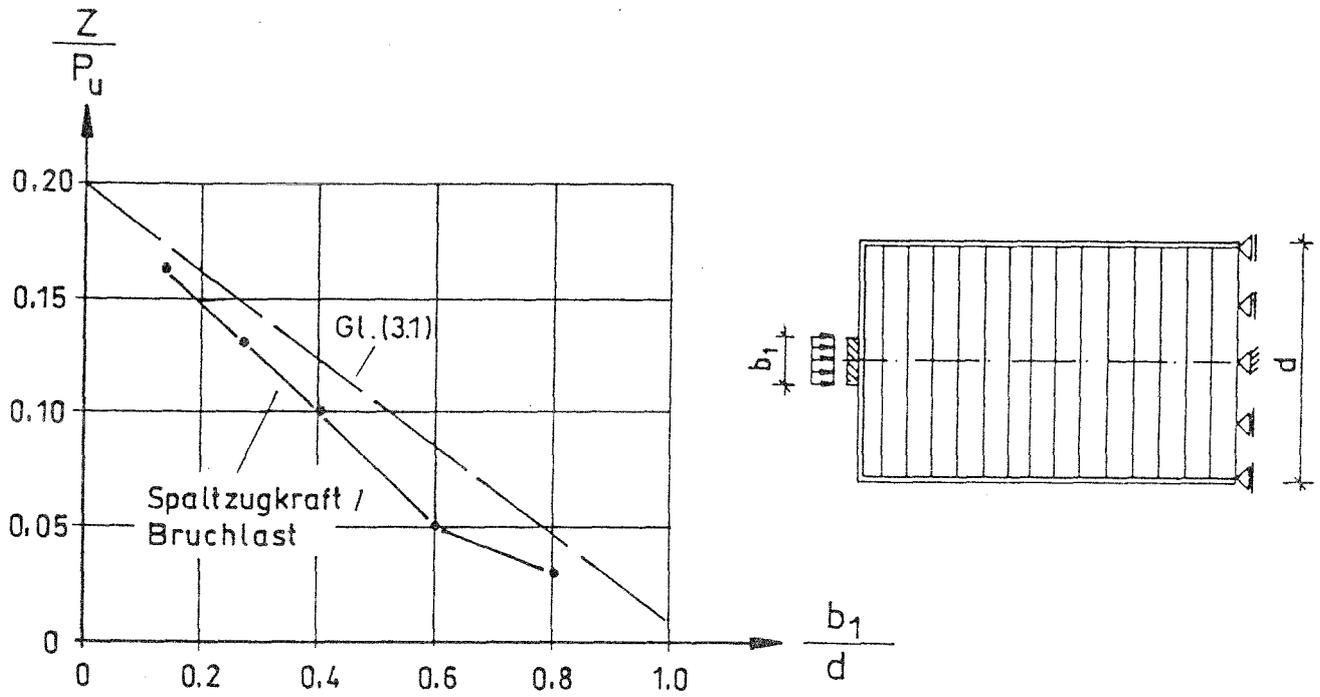


Bild 3.16 Abhängigkeit der Spaltzugkraft vom Verhältnis b_1/d

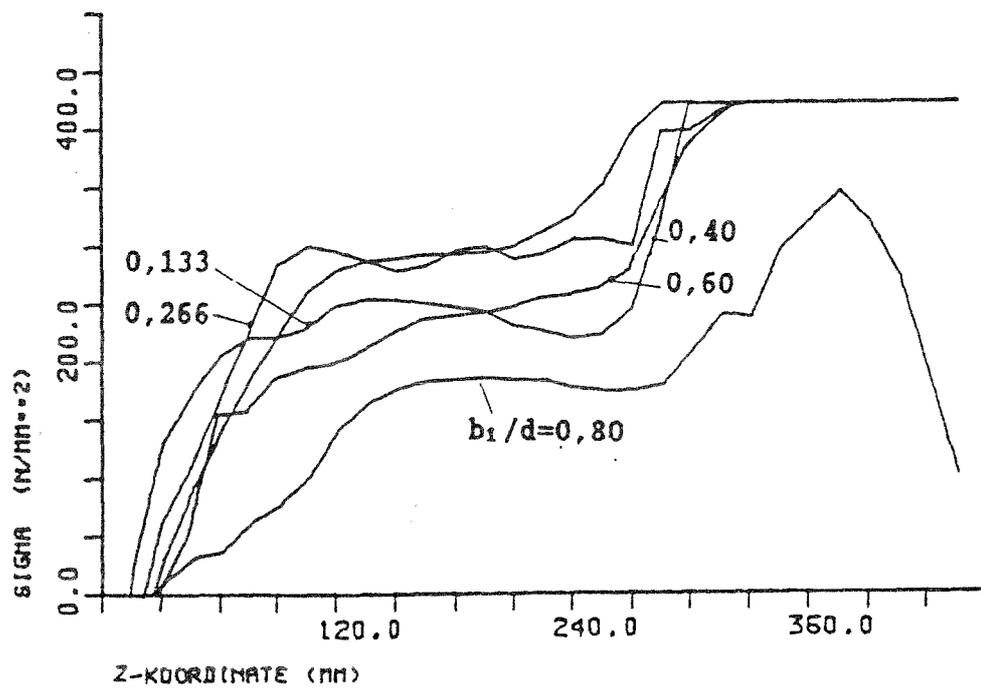
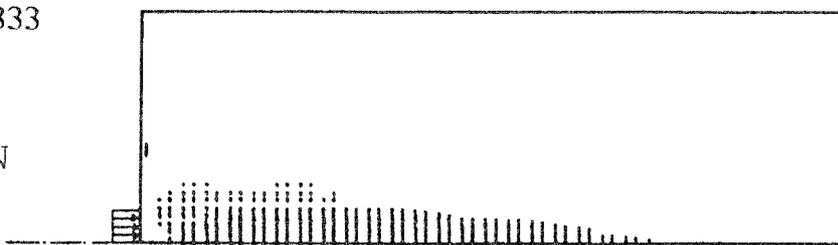


Bild 3.17 Spannungsverlauf in der Spaltzugbewehrung entlang der Symmetrieachse als Funktion der Lastplattenbreite

$b_1/d = 0,1333$

bei RiBlast

$P_u = 201 \text{ kN}$

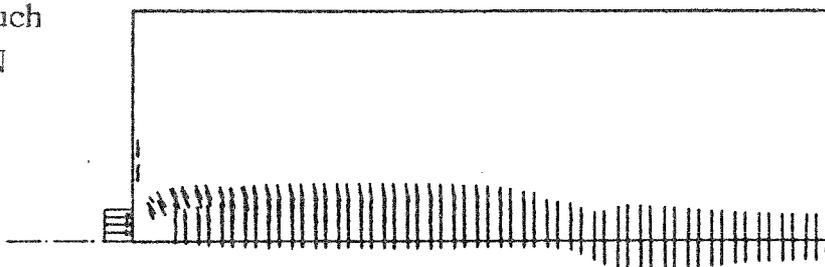


STRAIN

- + 0.00103

Vor dem Bruch

$P_u = 255 \text{ kN}$



STRAIN

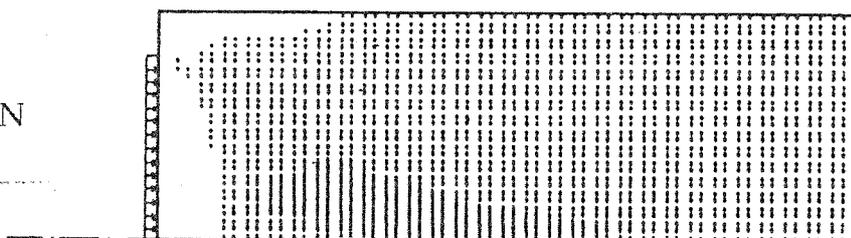
- + 0.00420

Bild 3.18 Darstellung der positiven Hauptzugdehnungen bei der RiBlast (a) und vor dem Bruch (b) für $b_1/d = 0,133$

$b_1/d = 0,80$

bei RiBlast

$P_u = 584 \text{ kN}$

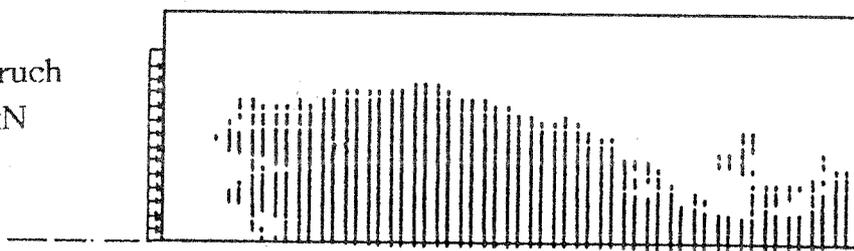


STRAIN

- + 0.000663

Vor dem Bruch

$P_u = 776 \text{ kN}$



STRAIN

- + 0.00191

Bild 3.19 Darstellung der positiven Hauptzugdehnungen bei der RiBlast (a) und vor dem Bruch (b) für $b_1/d = 0,80$

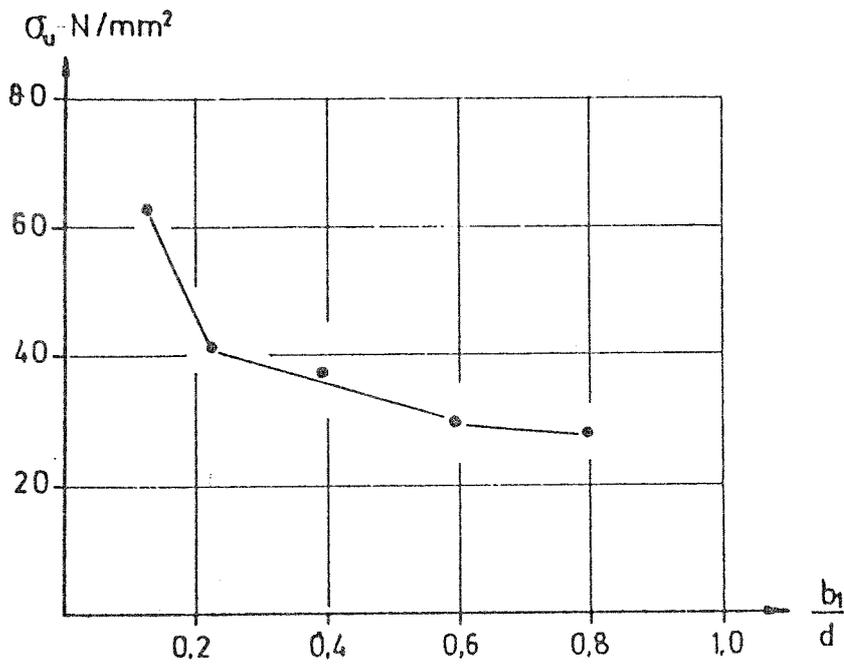


Bild 3.20 Maximale Druckspannung als Funktion von b_1/d

3.6 Einfluß der Lastplattendicke auf die Tragfähigkeit und die Dehnung der Wendelbewehrung

3.6.1 Einleitung

Es sind bisher bereits zahlreiche Untersuchungen zur Berechnung der Querkzugspannungen im Lasteintragungsbereich von Ankerplatten vorgespannter Balken bzw. Scheiben vorgenommen worden. Dabei wurde vorrangig der Einfluß der Lage (mittige oder ausmittige Lage) der Ankerplatte und deren Breite auf die Größe und Verteilung der Querkzugspannungen untersucht, z.B. [I1, S2, S3] siehe auch [L2, L3].

Der Einfluß der Lastplattendicke bei umschnürten Betonkörpern auf die Betontragfähigkeit ist bis heute noch nicht analytisch untersucht worden. Zahlreiche Versuche zum Einfluß der Lastplattendicke auf die Tragfähigkeit von Betonkörpern ohne Wendelbewehrung wurden von Hawkins [H1 bis H3] durchgeführt. Dabei hat er festgestellt, daß bis zu einer gewissen Grenze die Dicke der Lastplatte die Tragfähigkeit des Betonkörpers erhöht, und ab einer bestimmten Dicke die Tragfähigkeit konstant bleibt.

Die Einleitung der Spannkkräfte in den Beton erfolgt meistens über Ankerkörper. Es ist üblich, daß zu jedem Verankerungselement bzw. Spannglied eine definierte Ankerplatte vorgeschrieben wird. Um sicherzustellen, daß diese Verankerungselemente den an sie gestellten Anforderungen genügen, werden sie bauaufsichtlich überprüft. Aus der Beurteilung von Zulassungsversuchen für Spannverfahren mit nachträglichem Verbund ist bekannt, daß die Ankerplattendicke einen großen Einfluß auf die Tragfähigkeit und ganz besonders auf die Ribbildung hat. Systematische Untersuchungen darüber liegen aber nicht vor.

In diesem Beitrag wird über Ergebnisse numerischer Untersuchungen berichtet, die zum Ziel hatten, den Einfluß der Lastplattendicke auf die Tragfähigkeit und die Verformungen eines umschnürten vorgespannten Betonkörpers zu untersuchen. Die Untersuchungen wurden hier auf mittig belastete Betonkörper beschränkt. Dabei wurden die Größe und die Dicke der Ankerplatten und die Lastflächen variiert. Die Abmessungen der Betonkörper wurden konstant gehalten.

Die hier vorgestellten Ergebnisse haben auch zum Ziel, prinzipiell zu zeigen, daß die Anwendung der Methode der Finiten Elemente sehr gut geeignet ist, das Verhalten von Stahlbetontragwerken sowohl besser verstehen zu lernen, als auch Parameterstudien durchzuführen, und aus den daraus gewonnenen Erkenntnissen Bemessungsgleichungen zu entwickeln.

3.6.2 Numerische Untersuchungen

3.6.2.1 Zylindrische Betonkörper

Es wurden numerische Untersuchungen mit unterschiedlichen Ankerplattendicken bzw. Ankerplattenbreiten vorgenommen. In Bild 3.21 ist der untersuchte Betonkörper dargestellt. Wie aus Bild 3.21 zu erkennen ist, handelt es sich um einen zylindrischen Betonkörper, der mit einer Wendelbewehrung umschnürt ist. Die Wendelbewehrung hat einen Durchmesser von 12mm und eine konstante Ganghöhe s_w von 40mm. In Tabelle 3.6 sind Angaben über die untersuchten Betonkörper zusammengestellt.

Die numerischen Untersuchungen erfolgen nach der Methode der Finiten Elemente. In Bild 3.22 ist das verwendete Elementnetz für die Betonkörper und die Wendelbewehrung dargestellt. Die zu untersuchenden Betonkörper sowie die Ankerplatten werden mit rotationssymmetrischen Elementen und die Wendelbewehrung mit Ringelementen modelliert. Um ein vorzeitiges rechnerisches Versagen der Betonkörper auszuschalten, wird die Prismendruckfestigkeit β_p des Betons am Rand neben der Lastplatte (abplatzende Ecke) von 34 N/mm^2 auf 45 N/mm^2 erhöht. Das Materialmodell für den Beton ist im Kapitel 3 ausführlich beschrieben. Für die Wendelbewehrung (Ringelemente) und die Lastplatte (rotationssymmetrische Scheibenelemente) wird ein elastisch - plastisches Materialmodell mit einer Fließgrenze von 500 N/mm^2 zugrundegelegt. Die Reibung zwischen der Ankerplatte und dem Betonkörper wird bei der Berechnung durch ADINA- bzw. SOLVIA- Kontaktelemente [B2] berücksichtigt. Als Näherungswert für den Reibungsbeiwert von Stahl auf Beton wird 0,7 gewählt. Die Ankerplattendicke wird zwischen $2 \cdot t = 2 \cdot 25 \text{ mm}$ und $2 \cdot t = 2 \cdot 55 \text{ mm}$ variiert.

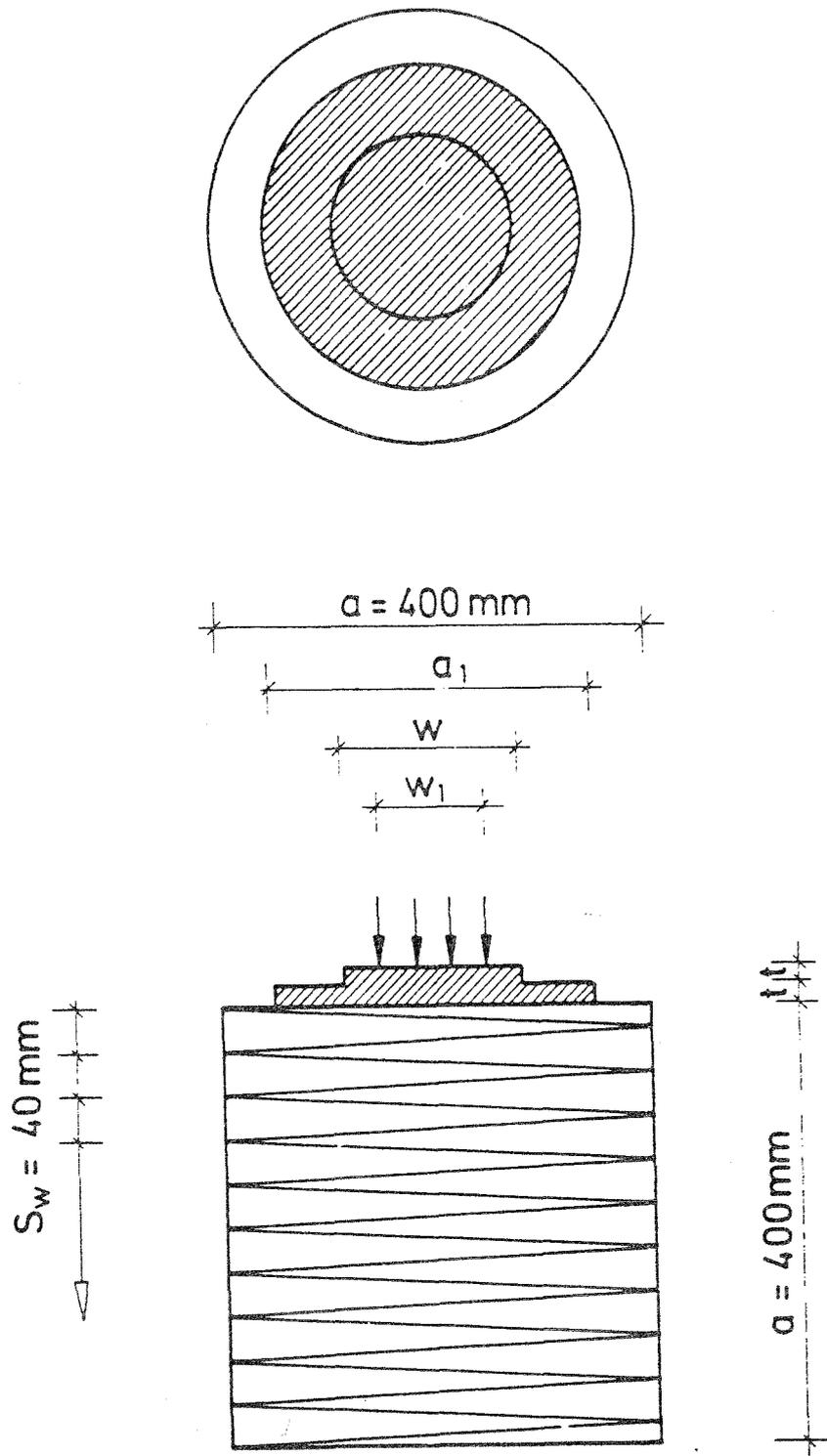


Bild 3.21 Untersuchter Betonkörper mit Wendelbewehrung $\Phi 12/40\text{mm}$

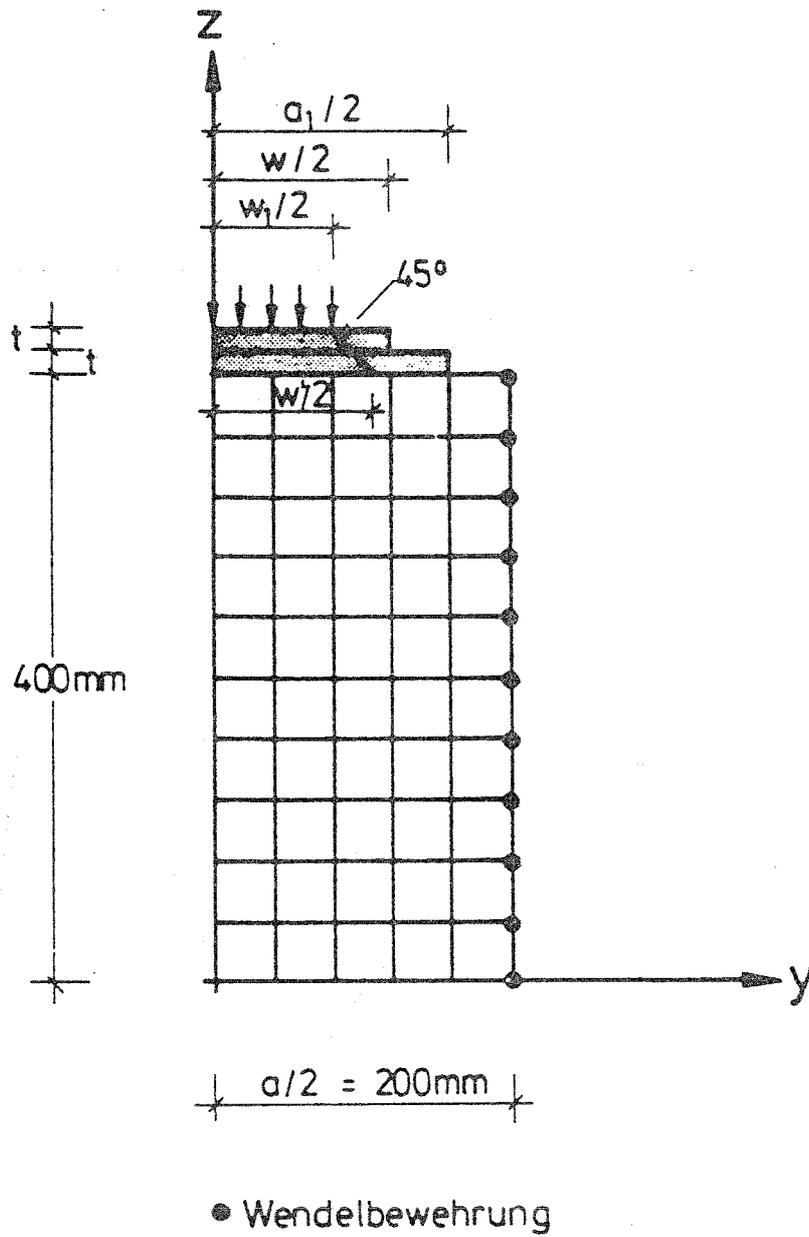


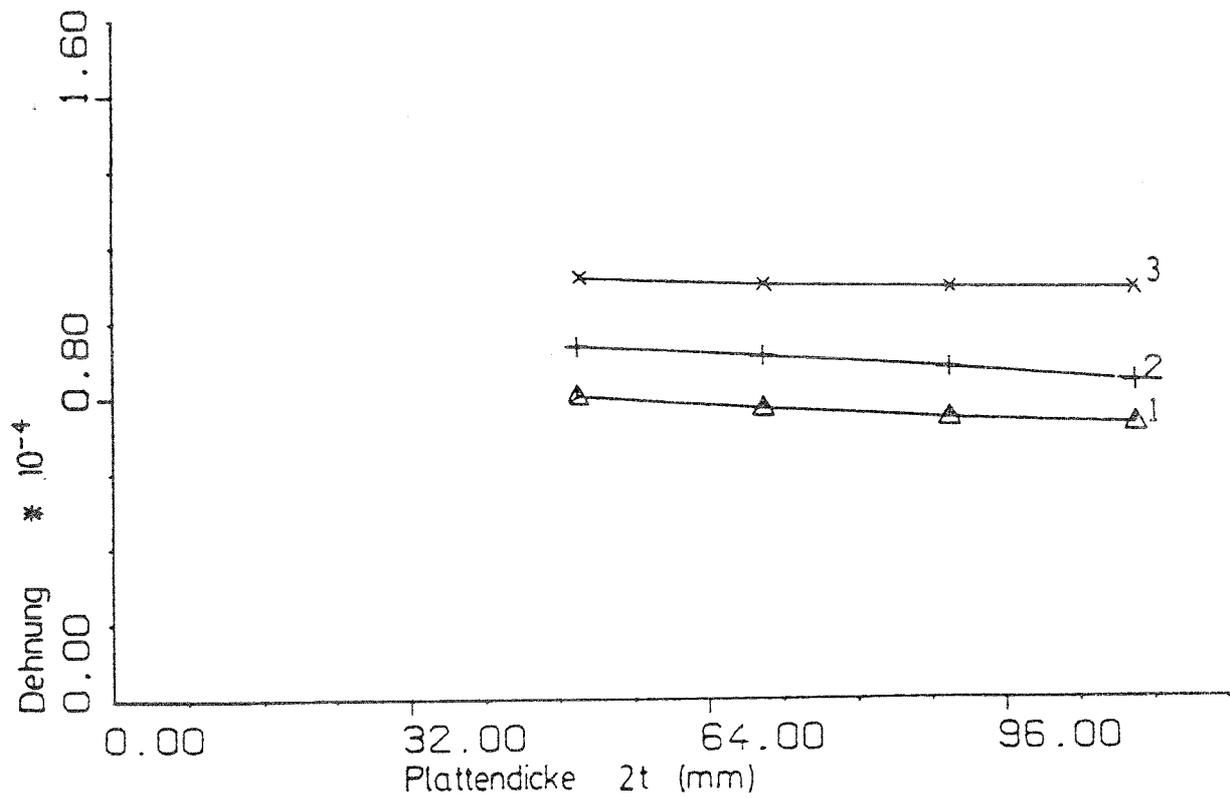
Bild 3.22 Verwendete Elementnetze

Tabelle 3.6 Untersuchte zylindrische Betonkörper

Bezeichnung	Durchmesser w der oberen Lastplatte	Durchmesser w ₁ der Lastfläche	w ₁ /w	Lastbreite w' (vergl. Bild 3.22)	Durchmesser a des Betonkörpers	Durchmesser a ₁ der unteren Lastplatte	a ₁ /a	Plattendicke 2 · t
	[mm]	[mm]	[-]	[mm]	[mm]	[mm]	[-]	[mm]
TP1				370				2*25
TP1.1				390				2*35
TP1.2	320	320	1,0	400	400	400	1,0	2*45
TP1.3				400				2*55
TP1.4		213,33	0,67	313,33				2*25
TP2				290				2*25
TP2.1				310				2*35
TP2.2	240	240	1,0	330	400	400	1,0	2*45
TP2.3				350				2*55
TP2.4		160	0,67	260				2*25
TP3				306				2*25
TP3.1				320				2*35
TP3.2	256	256	1,0	320	400	320	0,8	2*45
TP3.3				320				2*55
TP3.4		170,67	0,67	270,67				2*25
TP4				242				2*25
TP4.1				262				2*35
TP4.2	192	192	1,0	282	400	320	0,8	2*45
TP4.3				302				2*55
TP4.4		128	0,67	228				2*25
TP5				240				2*25
TP5.1				240				2*35
TP5.2	192	192	1,0	240	400	240	0,6	2*45
TP5.3				240				2*55
TP5.4		128	0,67	228				2*25
TP6				194				2*25
TP6.2	144	144	1,0	234	400	240	0,6	2*45
TP6.4		96	0,67	194				2*25

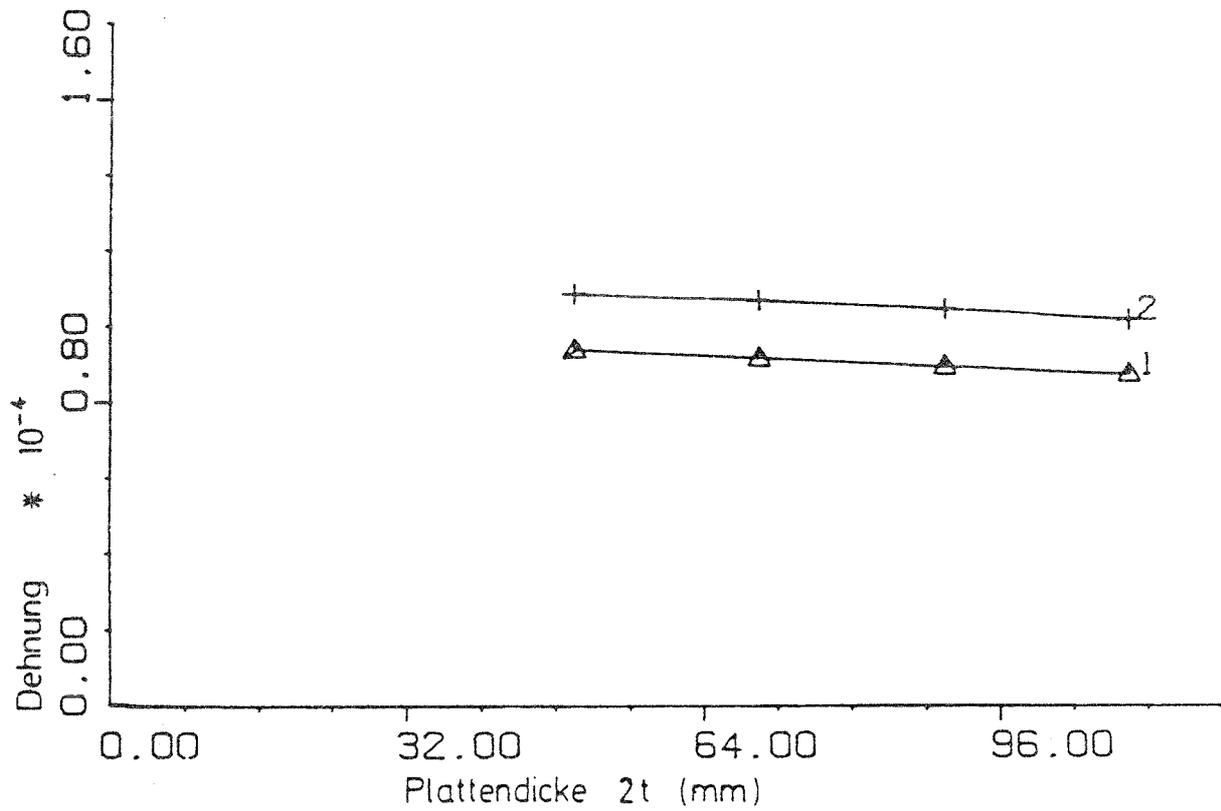
Tabelle 3.7 Ergebnisse der Untersuchungen für zylindrische Körper

Bezeichnung	a_1/a	w_1/w	Lastbreite w'	Last- platten- dicke 2·t	Bruch- last P_u			
			[mm]	[mm]	[kN]			
TP1	1,0	1,0	370	2*25	6131			
TP1.1			390	2*35	6460			
TP1.2			400	2*45	7013			
TP1.3			400	2*55	7241			
TP1.4			313,33	2*25	3460			
TP2			290	2*25	4265			
TP2.1		1,0	0,67	310	2*35	4705		
TP2.2				330	2*45	5299		
TP2.3				350	2*55	5782		
TP2.4				260	2*25	2194		
TP3				0,8	1,0	306	2*25	4438
TP3.1						320	2*35	4852
TP3.2	320	2*45	5291					
TP3.3	320	2*55	5471					
TP3.4	270,67	2*25	2579					
TP4	242	2*25	2726					
TP4.1	1,0	0,67	262		2*35	2968		
TP4.2			282		2*45	3309		
TP4.3			302		2*55	3503		
TP4.4			228		2*25	3056		
TP5			0,6		1,0	240	2*25	2561
TP5.1						240	2*35	2858
TP5.2	240	2*45		3018				
TP5.3	240	2*55		3100				
TP5.4	228	2*25		2068				
TP6	194	2*25		2195				
TP6.2	1,0	0,67		234	2*45	2671		
TP6.4				194	2*25	1740		



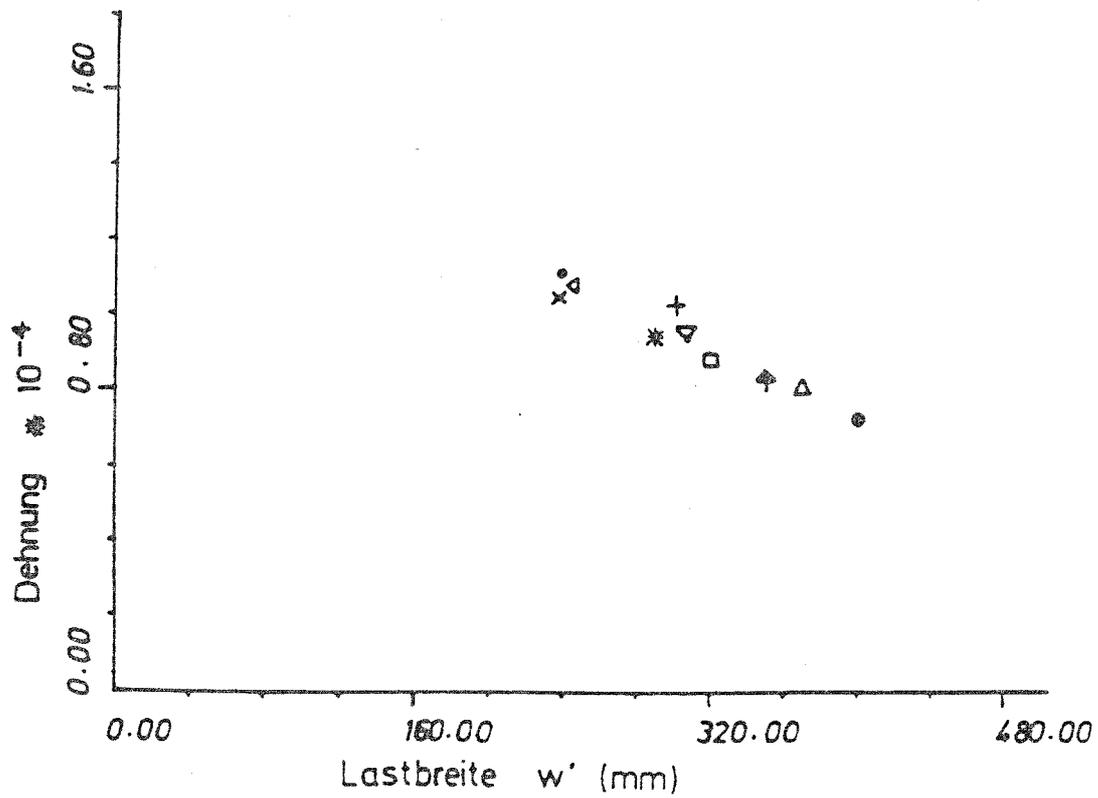
Symbol	Kurve	w	w ₁ /w	a	a ₁ /a	Belast. P [kN]
	Nr.	[mm]	-	[mm]	-	
Δ	1	320	1:0	400	1.0	1750
+	2	240			0.6	
×	3	192				

Bild 3.23 Verlauf der Dehnung in der Wendelbewehrung in Abhängigkeit von der Plattendicke $2t$ bei konstanter Belastung $P = 1750$ KN (zylindrische Betonkörper)



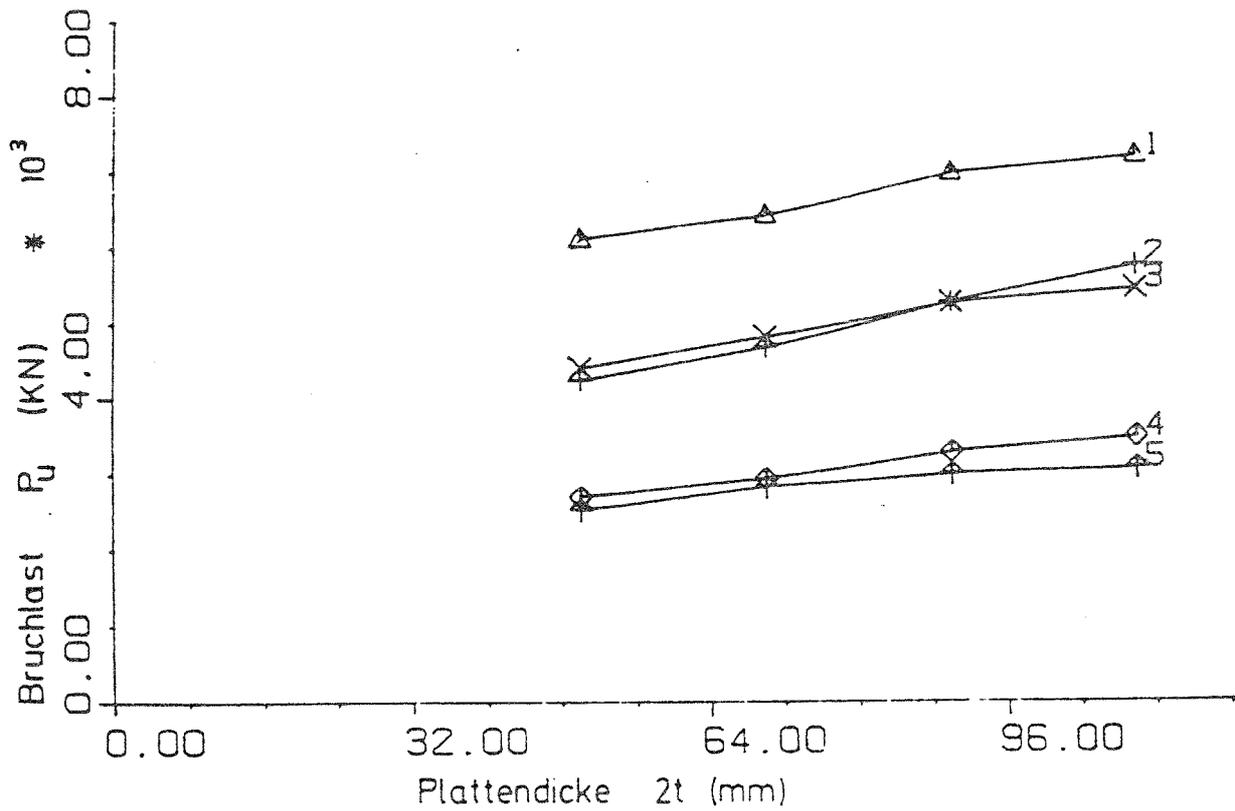
Symbol	Kurve Nr.	w	w ₁ /w	a	a ₁ /a	Belast. P [kN]
		[mm]	-	[mm]	-	
Δ	1	256	1.0	400	0.8	1750
+	2	192			0.6	

Bild 3.24 Verlauf der Dehnung in der Wendelbewehrung in Abhängigkeit von der Plattendicke 2t bei konstanter Belastung P = 1750 KN (zylindrische Betonkörper)



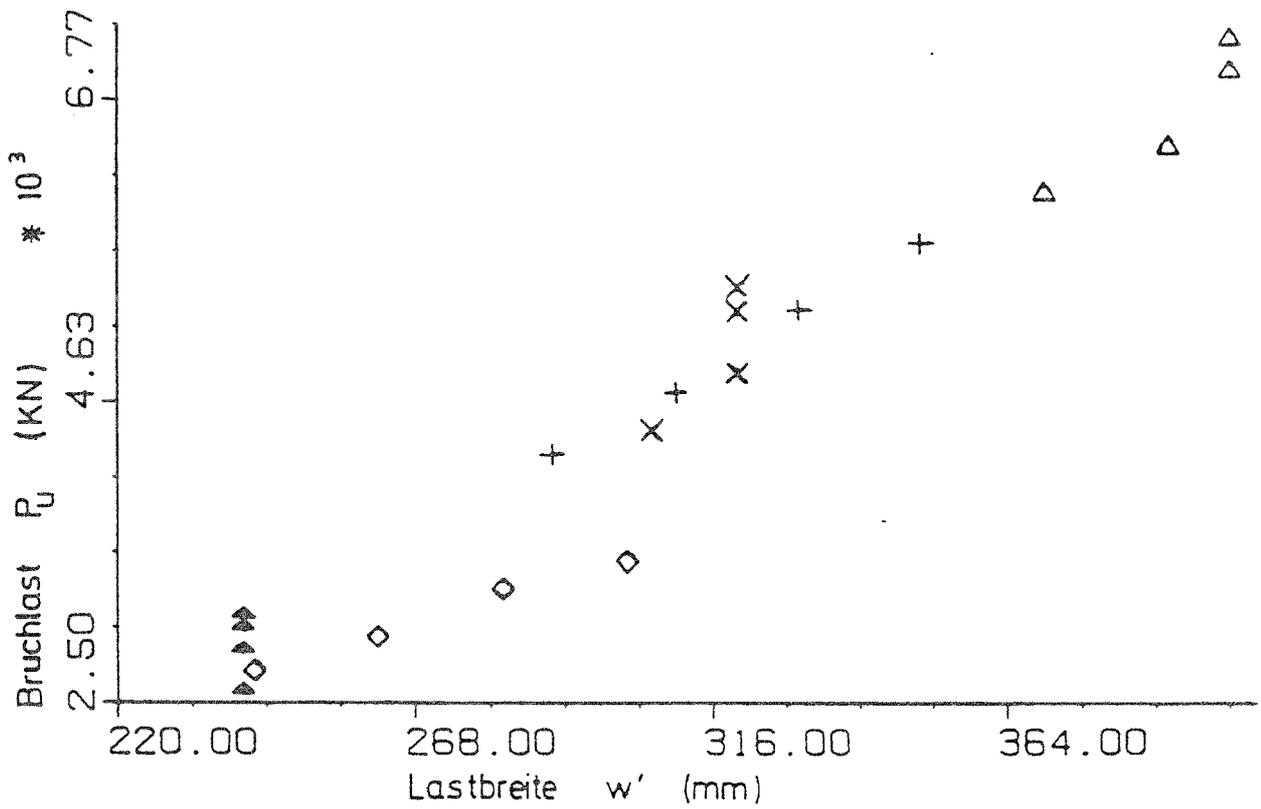
Symbol	Bez.	w	w_1/w	a	a_1/a	2·t	w'	Belast. P [kN]
		[mm]						
•	TP1	320	1.0	400	1.0	2 × 25	370	1750
△	TP2	240			0.8		290	
*	TP3	256					306	
▽	TP4	192			0.6	242		
△	TP5	192				240		
×	TP1.3	320			1.0	2 × 55	400	
+	TP2.3	240			0.8		350	
□	TP3.3	256					320	
⤴	TP4.3	192			0.6		302	
⊙	TP5.3	192					240	

Bild 3.25 Abhängigkeit der Dehnung in der Wendelbewehrung von der Lastbreite w' bei konstanter Belastung $P = 1750$ KN (zylindrische Betonkörper)



Symbol	Kurve	w	w ₁ /w	a	a ₁ /a
	Nr.	[mm]	-	[mm]	-
△	1	320	1.0	400	1.0
+	2	240			0.8
×	3	256			0.8
◇	4	192			0.6
⤴	5	192			0.6

Bild 3.26 Zusammenhang zwischen der Bruchlast P_u und der Lastplattendicke $2t$ (zylindrische Betonkörper)



Symbol	w	w_1/w	a	a_1/a
	[mm]	-	[mm]	-
△	320	1.0	400	1.0
+	240			0.8
×	256			0.6
◇	192			
▲	192			

Bild 3.27 Zusammenhang zwischen der Bruchlast P_u und der Lastbreite w' (zylindrische Betonkörper)

3.6.2.2 Prismatische Körper

In diesen Berechnungen ist eine quadratische Ankerplatte (Bild 3.28) verwendet worden, wobei die Ankerplattenfläche kleiner als die Fläche des Betonkörpers ist. Um den Versuchskörper von Hawkins [H1 bis H3] zu simulieren, ist die Belastung auf die quadratische Belastungsfläche mit der Seitenlänge w auf die Ankerplatte aufgebracht worden. Für alle Betonkörper wird in Übereinstimmung mit den Versuchskörpern von Hawkins eine Druckfestigkeit von $20,8 \text{ N/mm}^2$ angesetzt, um die Ergebnisse der Berechnung direkt mit den Versuchen von Hawkins vergleichen zu können.

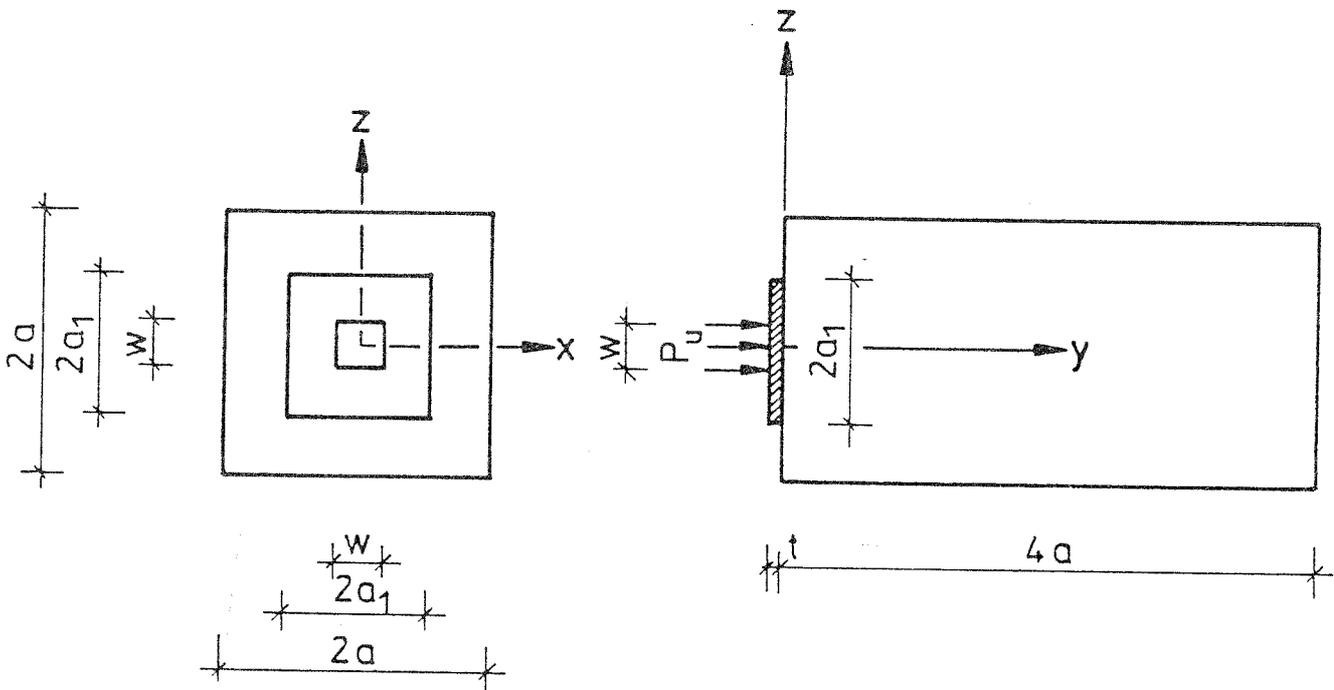


Bild 3.28 Untersuchte Betonkörper

Außerdem haben alle Körper dieselben Abmessungen. In der Tabelle 3.8 sind Angaben über die untersuchten Betonkörper zusammengestellt.

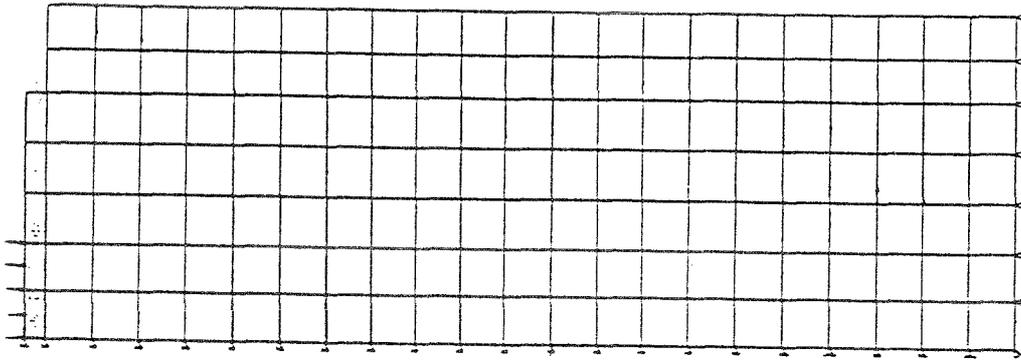


Bild 3.29 Elementnetz der untersuchten Körper

Der zu untersuchende Betonkörper und die Ankerplatte wurden mit 2-D-Elementen abgebildet (3.29). Da die Versuchskörper von Hawkins nachgerechnet wurden, mußten die Randbedingungen der rechnerischen Untersuchung mit denen der Experimente identisch sein. Im Bild (3.30) ist die Abhängigkeit der Bruchlast P_u von der Dicke t der Ankerplatte dargestellt.

Bez.	Betondruckfestigkeit	Quadratische Lastfläche	Quadratische Ankerplatte	Dicke der Ankerplatte	Abmessung der Betonkörper	Experimentelle Bruchlast	Rechnerisch ermittelte Bruchlast
	β_c	W	$2a_1$	t	$2a * 2a * 4a$	P_u	P_u
	N/mm ²	mm	mm	mm	mm	KN	KN
BB1	20,8	57,91	149,86	6,35	203,2 * 203,2 * 304,8	351,39	350,0
BB2				8,89		375,41	370,0
BB3				12,65		467,93	460,0
BB4				15,70		477,71	470,0
BB5				18,46		529,75	530,0
BB6				25,40		702,78	700,0

Tabelle 3.8 Untersuchte Betonkörper

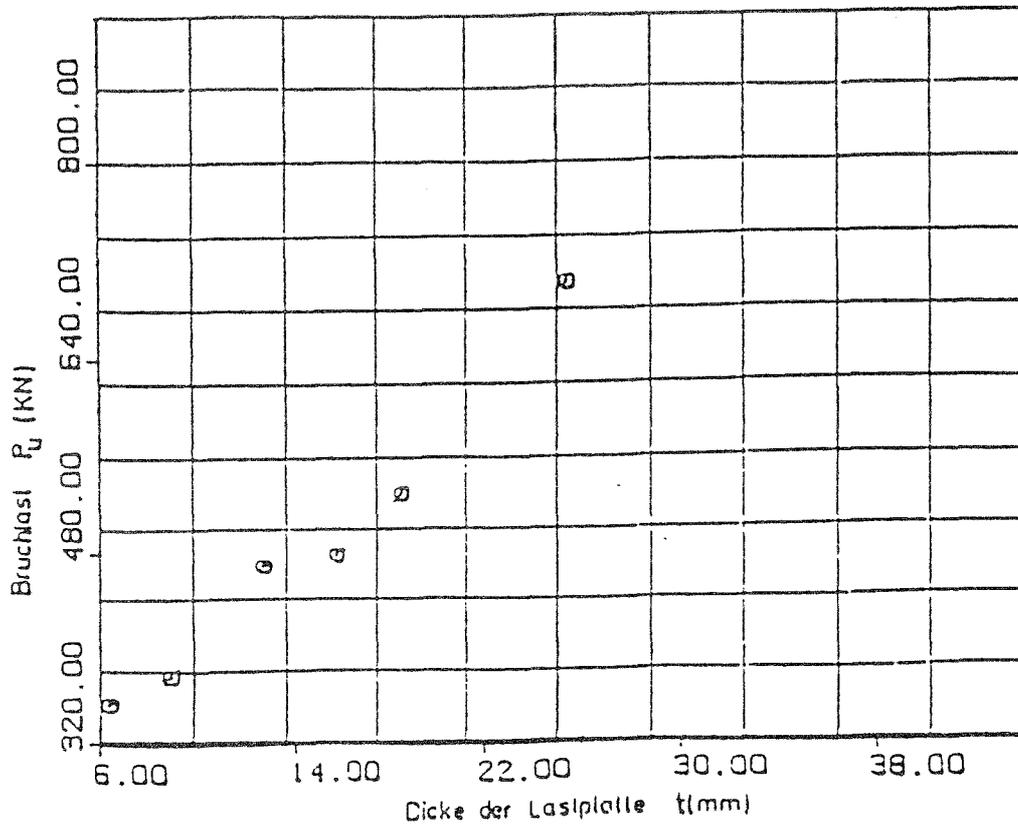


Bild 3.30 Abhängigkeit der Bruchlast P_u von der Dicke t der Ankerplatte

Erkennbar ist die Bruchlaststeigerung mit zunehmender Dicke t der Ankerplatte. Die maximale Ankerplattendicke beträgt ca. 25 mm, weil nach Aussage von Hawkins [H1] bei den hier untersuchten Fällen eine weitere Steigerung der Ankerplattendicke für die untersuchten Betonkörper keinen wesentlichen Einfluß auf die Tragfähigkeit des Betonkörpers oder die Größe der Zugspannungen ergeben hat.

Ergebnisse der Berechnungen:

Im Bild 3.31 ist der sich aus den numerischen Untersuchungen ergebende Verlauf der Querkzugspannungen σ_z bei unterschiedlichen Ankerplattendicken unmittelbar vor Erreichen der Bruchlast dargestellt. Der berechnete maximale Wert der Querkzugspannung σ_z ist bei ansteigender Bruchlast deutlich von der Ankerplattendicke abhängig. Dargestellt sind hauptsächlich die positiven Querkzugspannungen, da nur diese für die Ermittlungen der Spaltzugkraft und die Verteilung der Bewehrung maßgebend sind. Die Aufsummierung der positiven Querkzugspannungsfläche ergibt die gesamte Spaltzugkraft Z_{sp} (Bild 3.33). Aus dem Bild 5.31 ist außerdem die Lage von $\sigma = 0$, also dem Beginn der positiven Querkzugspannungen, die Lage des Größtwertes $\max. + \sigma_z$ und die Stelle, an der die Querkzugspannungen nahezu auf Null abgeklungen sind, erkennbar.

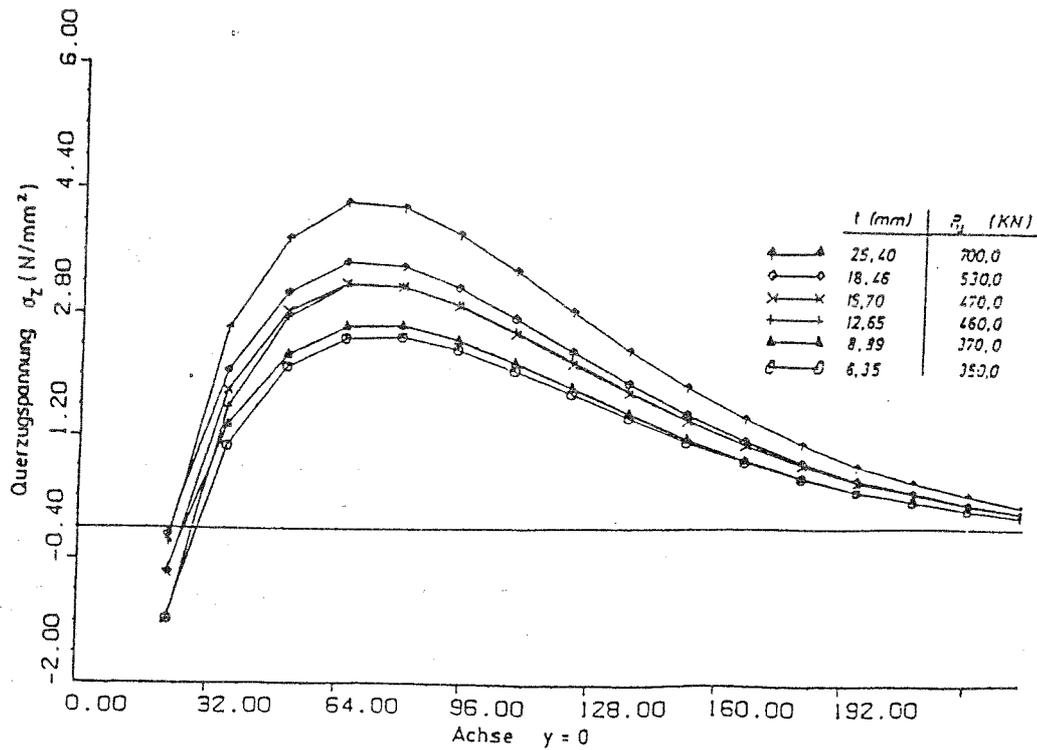


Bild 3.31 Rechnerisch ermittelter Verlauf der Querspannungen σ_z für verschiedene Ankerplattendicken t unmittelbar vor Erreichen der Bruchlast P_u

Diese Abszissen-Werte geben einen ausreichenden Hinweis für den Beginn und die Verteilung der erforderlichen Spaltzugbewehrung. Wie bereits erwähnt, sind die numerischen Untersuchungen bei einer Ankerplattendicke t von ca. 25 mm abgebrochen worden, weil der Einfluß einer größeren Ankerplattendicke auf die Höhe der maximalen Querspannung bzw. Spaltzugspannung nicht mehr erkennbar ist.

Aus den Ergebnissen (Bilder 3.30 und 3.31, Tabelle 3.8) können nachstehende Schlußfolgerungen gezogen werden.

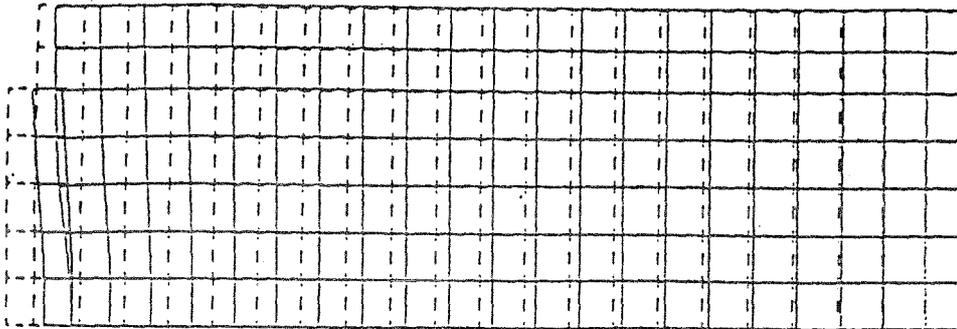
- a) Je größer die Ankerplattendicke t ist, desto höher ist die Tragfähigkeit der Betonkörper. Dies bestätigen sowohl die rechnerischen Untersuchungen als auch die Versuchsergebnisse von Hawkins.
- b) Je größer die Ankerplattendicke t ist, d.h., je mehr die Tragfähigkeit der Betonkörper anwächst, desto größer sind die vorhandenen maximalen Spalt- bzw. Querspannungen sowie die Spaltzugkraft.
- c) Die Lage der Nullstelle der Spaltzugspannung ($\sigma_z = 0$) ist nahezu unabhängig von der Dicke der Ankerplatte.

Rechnerisch wurde außerdem ermittelt, daß bei einer konstanten Vorspannkraft P , die deutlich unter P_u für eine bestimmte Plattendicke liegt, die maximale Querspannung und die Spaltzugkraft mit zunehmender Dicke der Ankerplatte abnehmen.

Ist keine Querbewehrung zur Aufnahme der Zugkräfte vorhanden, versagt das Bauteil sofort, wenn die Betonzugfestigkeit erreicht wird. Bei ausreichender Zugbewehrung tritt der Bruch erst dann ein, wenn entweder der Beton in der hoch beanspruchte Druckzone zerstört wird oder die Spaltzugbewehrung versagt. Im Bereich zwischen Lastplattenrand und der Ecke des Bauteils treten sehr hohe, örtlich begrenzte Zugspannungen auf, die zum Abplatzen der gesamten Ecke führen können, da der Beton nicht oder nur sehr begrenzt die größeren Verformungen unter der Platte mitmachen kann. Beim Überschreiten der Betonzugfestigkeit in diesen Bereichen finden jedoch nur geringe Spannungsumlagerungen statt, so daß der Abplatzeffekt die Tragfähigkeit nur wenig beeinträchtigt. Um dies aber trotzdem zu verhindern, sollt die gesamte Stirnfläche durch Bügel gesichert werden.

882

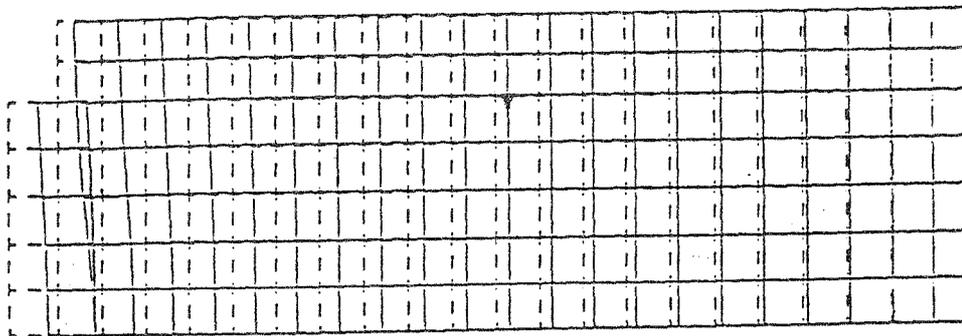
ORIGINAL  12.18
DEFORMED  0.1537
TIME 100.0
t = 8,89 mm



SOLVIA-POST 87

884

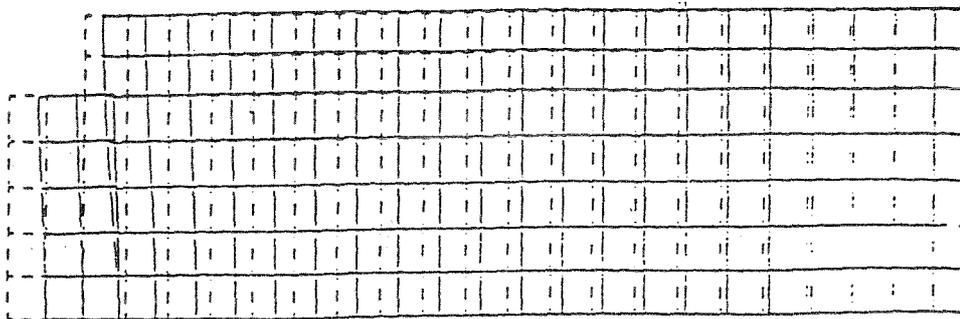
ORIGINAL  12.44
DEFORMED  0.1837
TIME 100.0
t = 15,70 mm



SOLVIA-POST 87

888

ORIGINAL  12.80
DEFORMED  0.2114
TIME 100.0
t = 25,40 mm



SOLVIA-POST 87

Bild 3.32 Verformungsfiguren

In Bild 3.32 sind die Verformungsfiguren dargestellt. Interessant ist die Verformung der Ankerplatte. Wie erwartet, tritt bei dünneren Ankerplatten eine größere Biegeverformung der Platte auf. Die größeren Biegesteifigkeiten der dickeren Platten rufen eine gleichmäßigere Spannkraftverteilung im Betoninneren hervor und führen letztlich zu einer höheren Betontragfähigkeit. Die mit der Steigerung der Tragfähigkeit verbundene Vergrößerung der Spaltzugkraft Z_{sp} ist in Abhängigkeit von der Dicke der Ankerplatte für die untersuchten Betonkörper in Bild 3.33 dargestellt. Bis zu einer Lastplattendicke t von ca. 13 mm ergibt sich bei steigender Bruchlast eine deutliche Steigerung der Spaltzugkraft Z_{sp} . Zwischen $t = 13$ mm bis 16 mm bleiben die Bruch- und die Spaltzugkraft fast konstant, um anschließend bis etwa $t = 25$ mm wiederum spürbar zuzunehmen. Wie bereits vorher erwähnt, ist ab $t = 25$ mm rechnerisch und experimentell keine weitere Steigerung der Tragfähigkeit und dem damit verbundenen Ansteigen der Spaltzugkraft erkennbar.

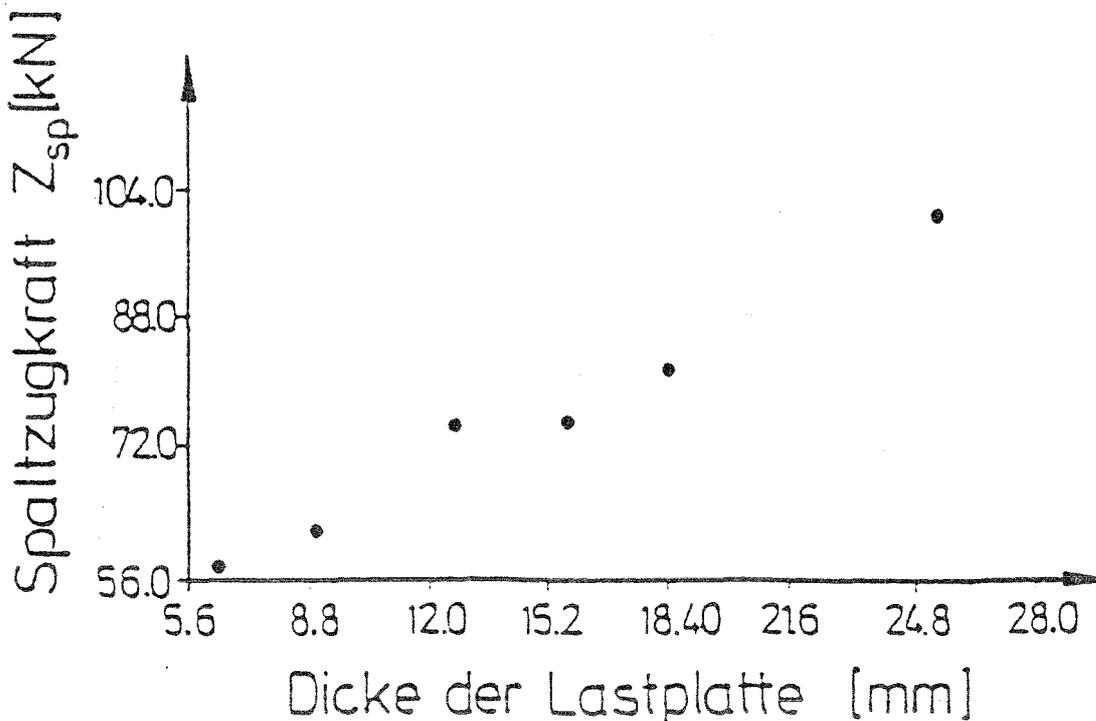


Bild 3.33 Resultierende Spaltzugkraft unmittelbar vor Erreichen der Bruchlast P_u bei verschiedenen Dicken der Lastplatten t

Anmerkung: Bruchlast steigt mit zunehmender Plattendicke an.

Aus den numerisch ermittelten Ergebnissen wurde eine Bemessungsgleichung in Abhängigkeit vom Verhältnis der auftretenden Spaltzugkraft zur eingetragenen Vorspannkraft Z_{sp}/P und der Dicke t der Lastplatte entwickelt. Um die errechneten Werte vom Bruchzustand zum Gebrauchszustand umrechnen zu können ($P = P_u/\gamma$), ist ein Sicherheitsfaktor γ von 1,75 gewählt worden. In Tabelle 3.9 ist das Verhältnis der Spaltzugkraft zur eingetragenen Vorspannkraft im Gebrauchszustand angegeben.

Dicke der Lastplatte	Numerisch ermittelte Bruchlast	Spaltzugkräfte	Verhältnis der Spaltzugkräfte zu den Vorspannkraften
t	P_u	Z_{sp}	$Z_{sp}/P:(P = P_u/\gamma)$
mm	KN	KN	-
6,35	350	57,8	0,0944
8,89	370	62	0,0958
12,65	460	75	0,0932
15,7	470	75,3	0,0916
18,46	530	81,6	0,0880
25,4	700	100,8	0,0823

Tabelle 3.9 Verhältnis der auftretenden Spaltzugkräfte zu den eingetragenen Vorspannkraften

Anhand dieser Werte aus Tabelle 3.9 ergibt sich in Verbindung mit der diskreten Fehlerquadratmethode von Gauss, für die hier untersuchten Betonkörper die folgende einfache Bemessungsgleichung:

$$\frac{Z_{sp}}{P} = 0,1 [1 - 0,007 t]; \quad t \text{ [mm]} \quad (3.2)$$

Die Gleichung (3.2) ist nur für Ankerplattendicken von 9 mm bis 25 mm (Einheit N; mm) überprüft. Es ist zu bemerken, daß sie nur für zentrisch belastete Körper mit $a_1/a \approx 0,7$ hergeleitet wurde. Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit dem Verlauf der Gl. (3.2) ist in Bild 5.34 dargestellt.

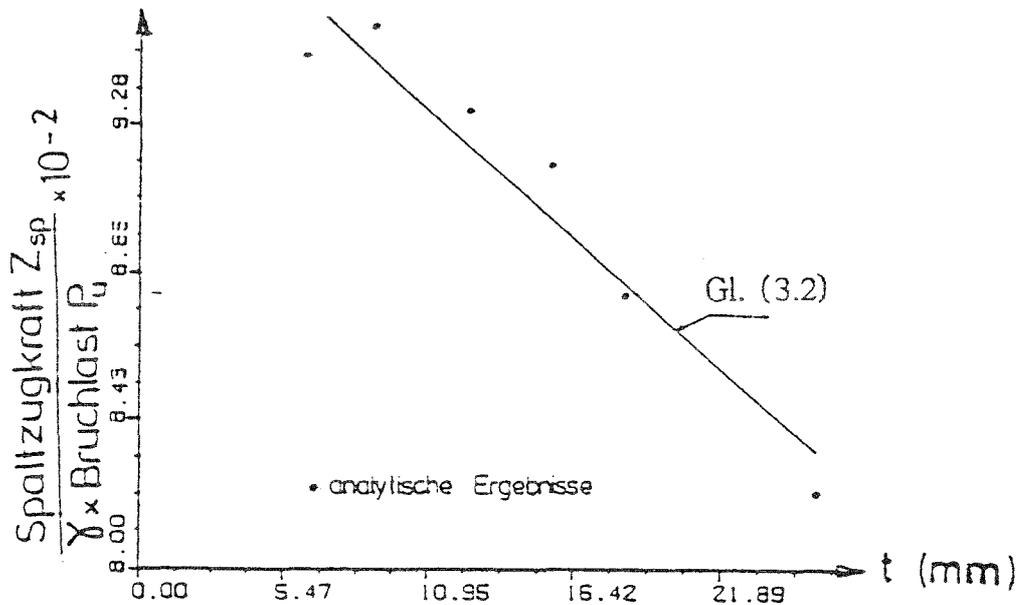


Bild 3.34 Verlauf der Spaltzugkraft Z_{sp} als Funktion der Dicke der Lastplatte t bei einer Betondruckfestigkeit von $\beta_w = 25\text{N/mm}^2$ und $a_1/a \approx 0,7$

In weiteren Untersuchungen wird sowohl das Verhältnis von a_1/a als auch die Lastplattendicke variiert, um eine allgemeingültige Bemessungsgleichung zu entwickeln, die die Spaltzugkraft, die Vorspannkraft, die Lastplattendicke und das Verhältnis von a_1/a enthält.

Der Verlauf der Randzugspannungen $\sigma_{Z,R}$ in Richtung der z -Achse ist in Abhängigkeit von der Ankerplattendicke t aus Bild 3.35 ersichtlich. Daraus sind nachstehende Schlußfolgerungen zu ziehen:

- Eine Vergrößerung der Ankerplattendicke t führt zu einer Abnahme der Randzugspannung $\sigma_{Z,R}$.
- Je größer die Ankerplattendicke t ist, desto kleiner ist die resultierende Randzugkraft.
- Bei einer Vergrößerung der Ankerplattendicke t wandern die Maximalrandzugspannungen in der Stirnseite nach außen zum Rand.

Nach den bisherigen Ergebnissen [R5, Z1, Z2] und den hier mitgeteilten Ergebnissen der numerischen Untersuchungen befindet sich der Beton im Bereich der Ankerplatten unter einem dreiaxialen Druckspannungszustand. Aus Bild 3.35 ist erkennbar, daß bei zunehmender Ankerplattendicke t der Bereich, in dem Randdruckspannungen auftreten, größer wird.

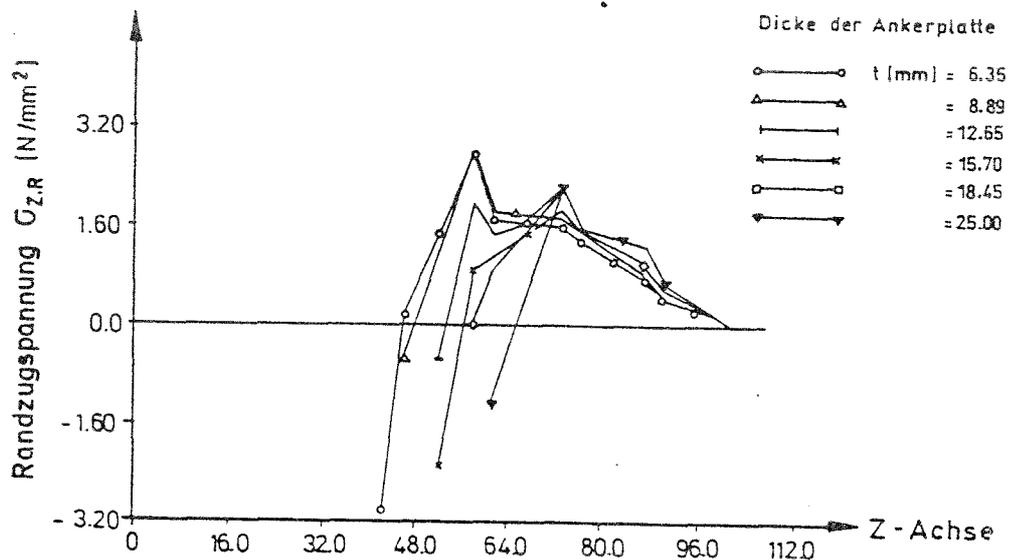


Bild 3.35 Verlauf der Randzugspannungen $\sigma_{z,R}$ in der z-Achse in Abhängigkeit von der Ankerplattendicke t

3.7 Einfluß der Lastexzentrizität

In der Praxis kommt es nicht sehr häufig vor, daß ein Bauteil zentrisch mit einem einzelnen Spannglied vorgespannt wird. Im Normalfall ist das Spannglied ausmittig angeordnet, und es liegen mehrere Spannglieder vor. In diesem Abschnitt werden die damit verbundene Probleme untersucht, indem die zwei Lastanordnungen von Bild 3.36 berechnet werden. Im Fall des Bildes 3.36 a, hier als "symmetrische Exzentrizität" bezeichnet, werden 4 Modelle berechnet, die Parameter e'/d von 0,20 bis 0,80 variiert. Auch für den unsymmetrischen Fall von Bild 3.36 werden 4 Fälle, mit $e/d = 0,133$ bis 0,333 gerechnet. Um sicherzustellen, daß der gesamte St. Venantsche Störbereich im Modell berücksichtigt ist, wird in diesem Fall die Modelllänge auf $L = 600$ mm oder $2 d$ verlängert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.10 zusammengestellt.

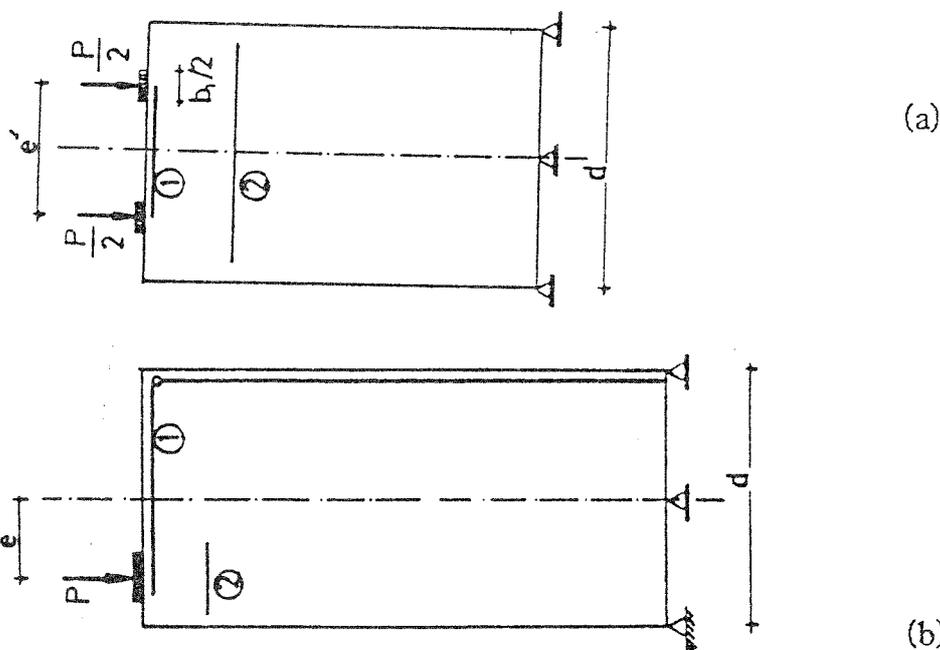


Bild 3.36 "Exzentrische" Lastanordnungen

Die Interpretation der Ergebnisse wird erleichtert, wenn man die unterschiedlichen Versagensmechanismen betrachtet. Im symmetrischen Fall tritt z.B. bei kleinen Exzentrizitäten Bruchversagen durch hohe Spaltzugkräfte auf.

Modell	bezogene Exzentrizitäten		Rißlast	Bruchlast	Verhältnis	Spaltzugkr.	Stirnzugkr.	bezogene Sum. der Zugkräfte
	e'/d	e/d	P_r [kN]	P_u [kN]	P_u/P_r	Z_{sp} [kN]	Z_{st} [kN]	$(Z_{sp} + Z_{st})/P_u$
SM1D	0,20	-	316	419	1,33	64,02	4,59	0,16
SM2D	0,40	-	304	405	1,33	50,60	8,19	0,15
SM3D	0,60	-	250	301	1,20	25,89	16,50	0,14
SM4D	0,80	-	209	254	1,22	3,81	38,10	0,16
SM1E	-	0,133	215	305	1,42	45,60	5,02	0,17
SM2E	-	0,200	206	286	1,39	41,50	6,29	0,17
SM3E	-	0,267	201	265	1,32	27,59	12,05	0,15
SM4E	-	0,333	190	205	1,07	8,60	22,15	0,15

Tabelle 3.10 Ergebnisse für Modelle mit Lastexzentrizität

Für größere Abstände zwischen den beiden Lasten nehmen dagegen die Stirnzugspannungen zu, bis sie eventuell die Ursache des Bruchs sein können. Dieser Tatbestand läßt sich aus dem Bild 3.37 erkennen, in dem die positiven Hauptzugdehnungen für die großen und kleinen Lastexzentrizitäten dargestellt sind. Bei kleinen Lastexzentrizitäten laufen die Reißbilder sehr bald in den kritischen Spaltzugbereich zusammen. Dagegen hat eine große Lastexzentrizität eine biegeähnliche Wirkung, die als Stirnzugspannung zum Bruch führen kann. Zur Veranschaulichung sind im Bild 3.37 auch noch Beispiele der negativen Hauptdruckdehnungen und Verformungen abgebildet. Die unterschiedlichen Bruchmechanismen lassen sich auch am Vergleich der integrierten Stirnzugkraft Z_{st} und Spaltzugkraft Z_{sp} in Tabelle 3.10 ablesen, die in Bild 3.39 gesondert aufgetragen sind.

Im Fall einer außermittig angreifenden Einzelkraft (Bild 3.36 b) sind drei Bruchmechanismen möglich. Bei kleinen Lastexzentrizitäten ist die Spaltzugkraft maßgebend. Bei größeren Exzentrizitäten kann die Stirnzugspannung die Bruchlast bestimmen. Bei ausreichend großen Exzentrizitäten treten aber auch am Oberrand des Trägers Biegezugspannungen auf, die erst außerhalb des St. Venantschen Störbereiches ebenfalls durch die Axialkraft, überdrückt werden können. In diesem Fall ist darauf zu achten, daß eine ausreichende Längsbewehrung angeordnet ist.

Wie der Tabelle 3.10 entnommen werden kann, zu der auch das Modell SM1C aus Tabelle 3.4 mit dem Minimalwert $e'/d = 0,067$ gehört, nimmt die Bruchlast mit steigendem Verhältnis e'/d erst zu, erreicht bei $e'/d = 0,2$ ein Maximum und fällt bei weiter wachsendem e'/d -Wert immer stärker ab. Die bezogene Summe der Zugkräfte $(Z_{sp} + Z_{st})/P_u$ ist dagegen von e'/d fast unabhängig. Bei zunehmendem Verhältnis e'/d ändert sich aber das Bruchverhalten, so daß die Resultierende der Zugspannungen sich auf den linken Rand hin bewegt. Für die Praxis bedeutet dies, daß bei großen Lastexzentrizitäten die Bügel näher an der Lastplatte angeordnet werden müssen. Diese Folgerung gilt sowohl für die symmetrisch aufgebrachten beiden Einzelkräfte, als auch für die außermittig angreifende Einzellast. In allen untersuchten Betonmodellen ist aber die Bügelbewehrung gleichmäßig über den Bereich $L = d$ verteilt. Um die Bruchlast bei vorgegebener Lastanordnung zu optimieren, muß die Bügelbewehrung entsprechend abgeändert werden. Bei einer Einzelkraft mit sehr großer Exzentrizität muß außerdem eine ausreichende Biegebewehrung am gegenüberliegenden Rand vorhanden sein, damit die Biegezugspannungen nicht vorzeitig zum Bruch führen. Die relativ kleine Anzahl von untersuchten Berechnungsmodellen läßt zwar die vorstehenden Ausführungen zu, ist aber für eine definitive Bestimmung der Bruchlasten, vor allem bei anderen Bewehrungsverteilungen, nicht ausreichend.

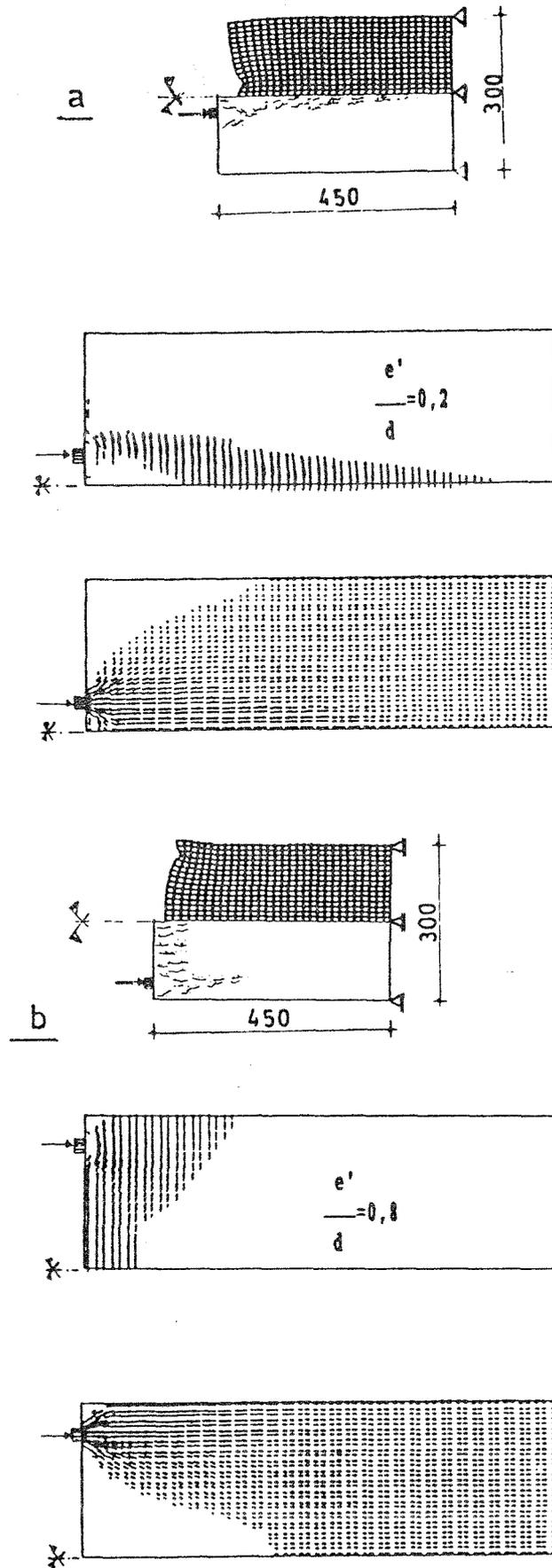


Bild 3.37 Positive Hauptzug- und negative Hauptdruckdehnungen und Verformungen für symmetrische Lastexzentrizität von
a) $e'/d = 0,20$ und
b) $e'/d = 0,80$

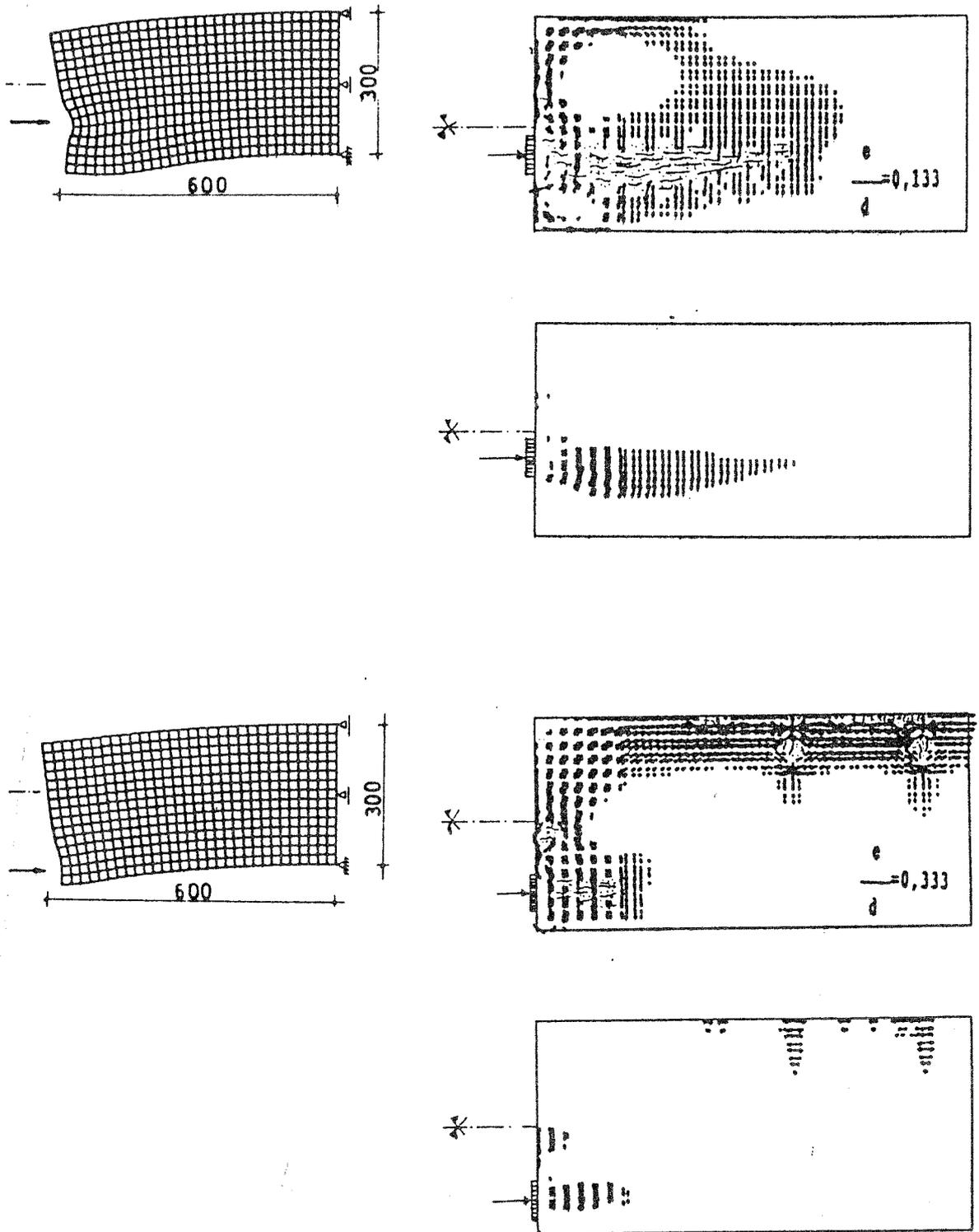


Bild 3.38 Positive Hauptzug- und negative Hauptdruckdehnungen und Verformungen für unsymmetrische Lastexzentrizität von
a) $e/d = 0,133$ und
b) $e/d = 0,333$

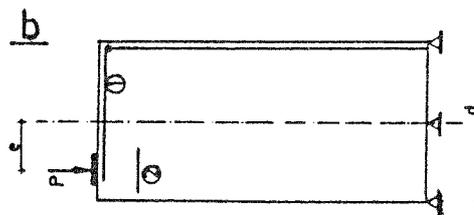
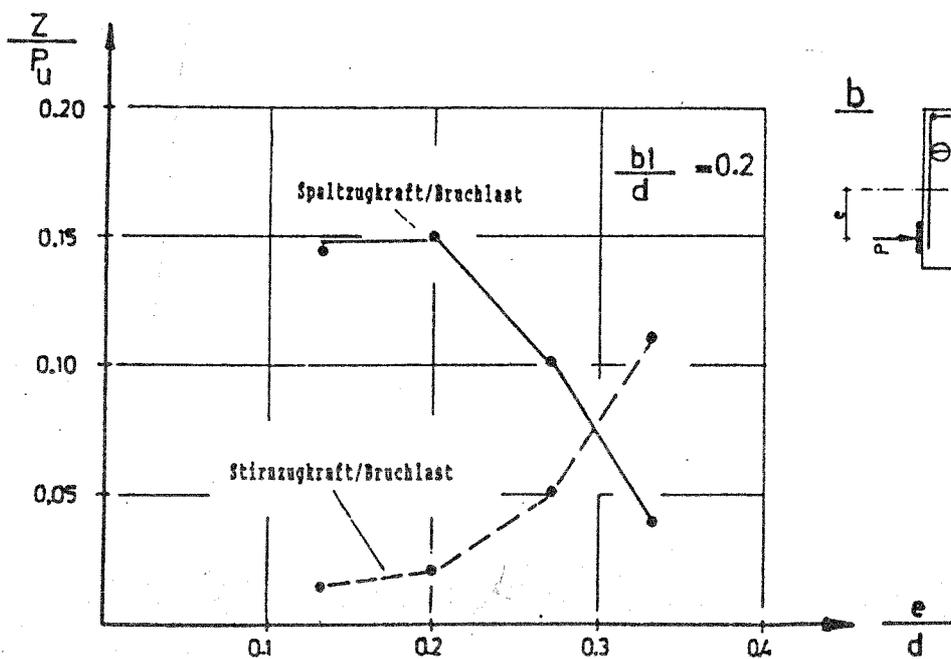
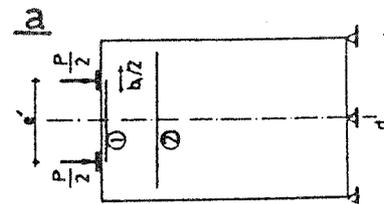
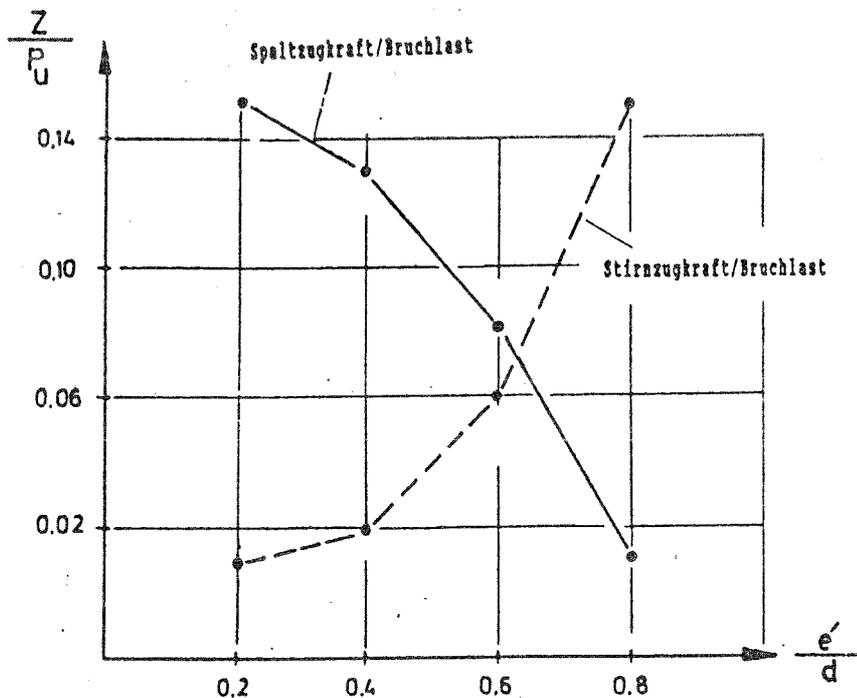


Bild 3.39 Abhängigkeit der Bügelkraft von der Lastexzentrizität

a) symmetrische Lastexzentrizität

b) unsymmetrische Lastexzentrizität

3.8 Einfluß des Durchmessers der Wendelbewehrung auf die Tragfähigkeit und Querkzugspannungen im Betonkörper

3.8.1 Einleitung

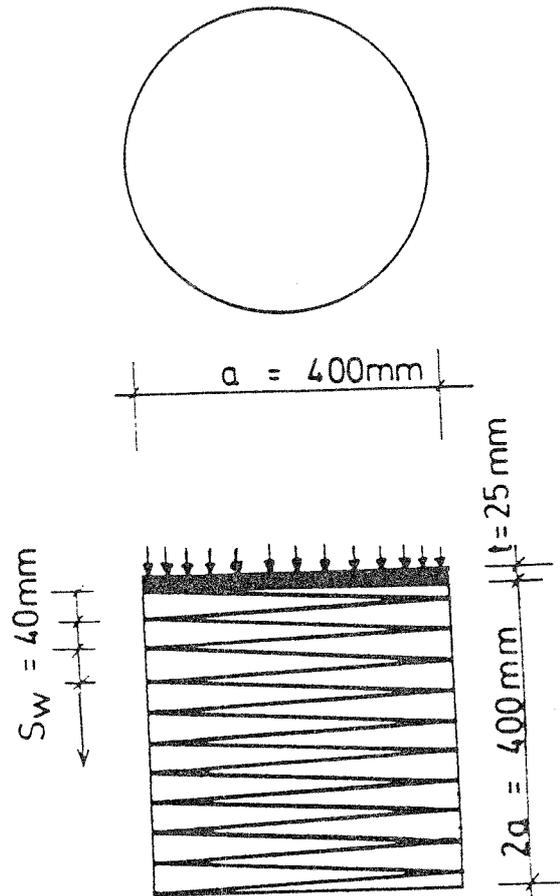
In Spannbetonbauteilen wird häufig eine Wendelbewehrung als Umschnürungsbewehrung verwendet, um die entstehenden Querkzug- bzw. Radialzugspannungen im Betonkörper abzumindern. Die Zulassung eines Spannverfahrens umfaßt auch die zugehörige erforderliche Wendelbewehrung, die von den Herstellerfirmen der Spannverfahren mitgeliefert wird. Dadurch entfällt bei Anwendung eines Spannverfahrens im Einzelfall eine genaue Untersuchung des Einflusses der Wendelbewehrung auf die Tragfähigkeit und Querkzugspannungen im Betonkörper. In diesem Abschnitt wird der Einfluß des Durchmessers der Wendelbewehrung auf die Tragfähigkeit und Querkzugspannungen im Betonkörper untersucht. Wie aus den Bildern 3.40 und 3.41 ersichtlich, ist hierfür ein zylindrischer Betonkörper mit einem Durchmesser von 400mm und einer Länge von 400mm und dazu eine Ankerplatte mit der Dicke $t = 25\text{mm}$ bzw. 30mm gewählt worden.

Für die Berechnungen wird die Wendelbewehrung in ein den Betonkörper ummantelndes fiktives Rundrohr umgerechnet (s. Bilder 3.40 und 3.41). Der Durchmesser der Wendel und des Rohres sind dabei gleich, die Wanddicke des fiktiven Rohres wird aus der Ganghöhe s_w der Wendel und dem Durchmesser der Wendelstäbe bestimmt.

Die vorgenommenen Berechnungen hatten zum einen das Ziel, den Einfluß des Wendelstabdurchmessers auf die Größe der Querkzugspannungen im Betonkörper und damit auf die Tragfähigkeit überhaupt zu untersuchen, und zum anderen, um festzustellen, bis zu welchem Stabdurchmesser eine Wendelbewehrung noch zweckmäßig erscheint.

3.8.2 Numerische Untersuchungen

Für die numerischen Untersuchungen wird eine konstante Ganghöhe s_w von 40mm der Wendel angenommen, wodurch die Wanddicke s des Ersatzrohres nur noch vom Wendelstabdurchmesser abhängt. Für die unterschiedlichen Durchmesser der Wendelbewehrung werden $\Phi 8\text{ mm}$, $\Phi 10\text{ mm}$, $\Phi 12\text{ mm}$, $\Phi 16\text{ mm}$ und $\Phi 20\text{ mm}$ gewählt, die jeweils einer fiktiven Dicke s des Stahlrohres von 1.257 mm, 1.962 mm, 2.825 mm, 5.025 mm und 7.85 mm entsprechen, (siehe Bilder (3.40 und 3.41).



Durchmesser der Wendelbewehrung [mm]	Dicke s des Stahlrohres [mm]
8,0	1,257
10,0	1,962
12,0	2,825
16,0	5,025
20,0	7,85
∞	∞

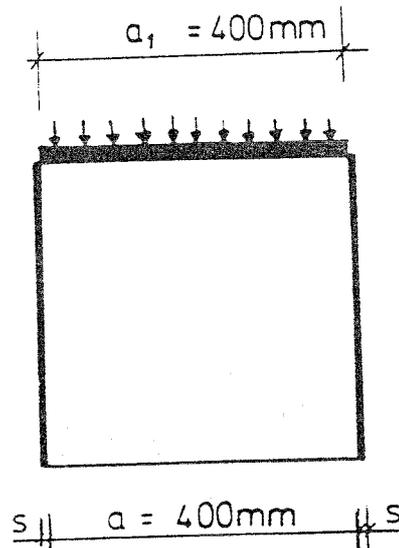
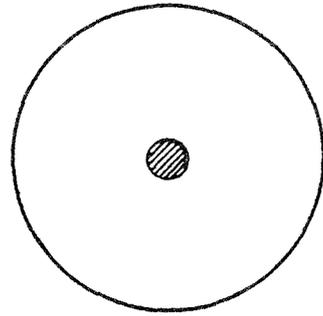
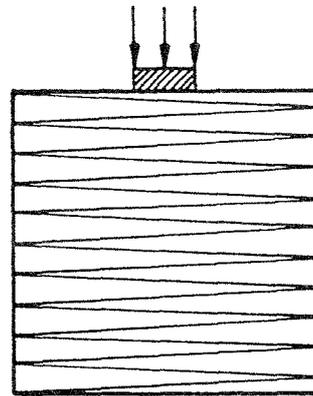


Bild 3.40 Untersuchter Betonkörper



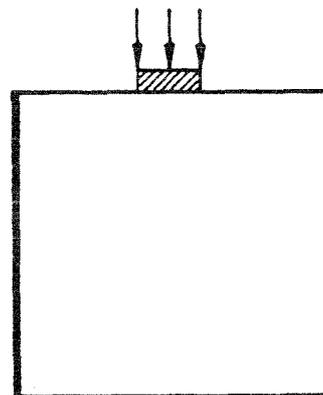
$a = 400 \text{ mm}$

$s_w = 40 \text{ mm}$



$t = 30 \text{ mm}$
 $d = 400 \text{ mm}$

$a_1 = 80 \text{ mm}$



$a = 400 \text{ mm}$

Durchmesser der Wendelbewehrung [mm]	Dicke s des Stahlrohres [mm]
8,0	1,257
10,0	1,962
12,0	2,825
16,0	5,025

Bild 3.41 Untersuchter Betonkörper

Für den in Bild 3.40 dargestellten Betonkörper wird für den Beton eine Nennfestigkeit β_{WN} von 35 N/mm^2 gewählt. Außerdem beträgt das Verhältnis des Ankerplattendurchmessers $a_1 = 400 \text{ mm}$ zum Durchmesser des Betonkörpers $a = 400 \text{ mm}$ $a_1/a = 1,0$. Für den in Bild 3.40 angegebenen Betonkörper wird eine Nennfestigkeit des Betons β_{WN} von 25 N/mm^2 gewählt. Das Verhältnis des Ankerplattendurchmessers $a_1 = 80 \text{ mm}$ zum Durchmesser des Betonkörpers $a = 400 \text{ mm}$ beträgt $a_1/a = 0,2$.

Außerdem haben alle Körper dieselben Abmessungen, d.h. Durchmesser $a = 400 \text{ mm}$ mit einer Höhe $a = 400 \text{ mm}$.

Die numerischen Untersuchungen erfolgten nach der Methode der Finiten Elemente. Der zu untersuchende Betonkörper und die Ankerplatte wurden aus rotations-symmetrischen Elementen gebildet. Die Reibung zwischen der Ankerplatte und dem Betonkörper wurde bei der Berechnung durch ADINA- bzw. SOLVIA - Kontaktelemente berücksichtigt.

3.8.3 Einfluß des Durchmessers der Wendelbewehrung auf die Betontragfähigkeit

Bei dem Betonkörper nach Bild 3.40 mit $a_1/a = 1,0$ wird die Bruchlast durch Erreichen der dreiaxialen Druckfestigkeit des Betons begrenzt. In Tabelle 3.11 sind die Bruchlasten P_u der rechnerisch untersuchten Betonkörper angegeben. Dabei erkennt man, daß die Anordnung einer Wendelberechnung die Tragfähigkeit des Betonkörpers beeinflusst. Bis zum Wendeldurchmesser 16 mm ergeben sich von Körper zu Körper wesentliche Steigerungen der Tragfähigkeit. Danach ergibt sich nur noch eine unwesentliche Steigerung bzw. Vergrößerung der Tragfähigkeit des Betonkörpers.

Tabelle 3.11 Untersuchte Betonkörper, $a_1/a = 1,0$

Bezeichnungen	Durchmesser der Wendelbewehrung [mm]	Dicke s des Stahlrohres [mm]	Bruchlast P_u [kN]
PP1	0,0	0,0	4272,5
PP2	10,0	1,962	6346,0
PP3	12,0	2,825	7225,6
PP4	16,0	5,025	8922,1
PP5	20,0	7,850	9287,9
PP6	unendlich	unendlich	9437,3

Versagensursache für die Körper PP2 bis PP6 ist das Erreichen der Zugfestigkeit des Betons. Der Körper PP1 versagt unter Druck.

Der Einfluß der Umschnürung durch die Wendelbewehrung kann ermittelt werden zu:

$$P_u = N_u = A_b \cdot \beta_p + k \cdot A_s \cdot \beta_s \quad (3.3)$$

Für die hier untersuchten Zylinder Φ 400 mm mit Betongüte B 35 und Wendelbewehrung aus St 500/550 ergibt sich k nach Bild 3.42.

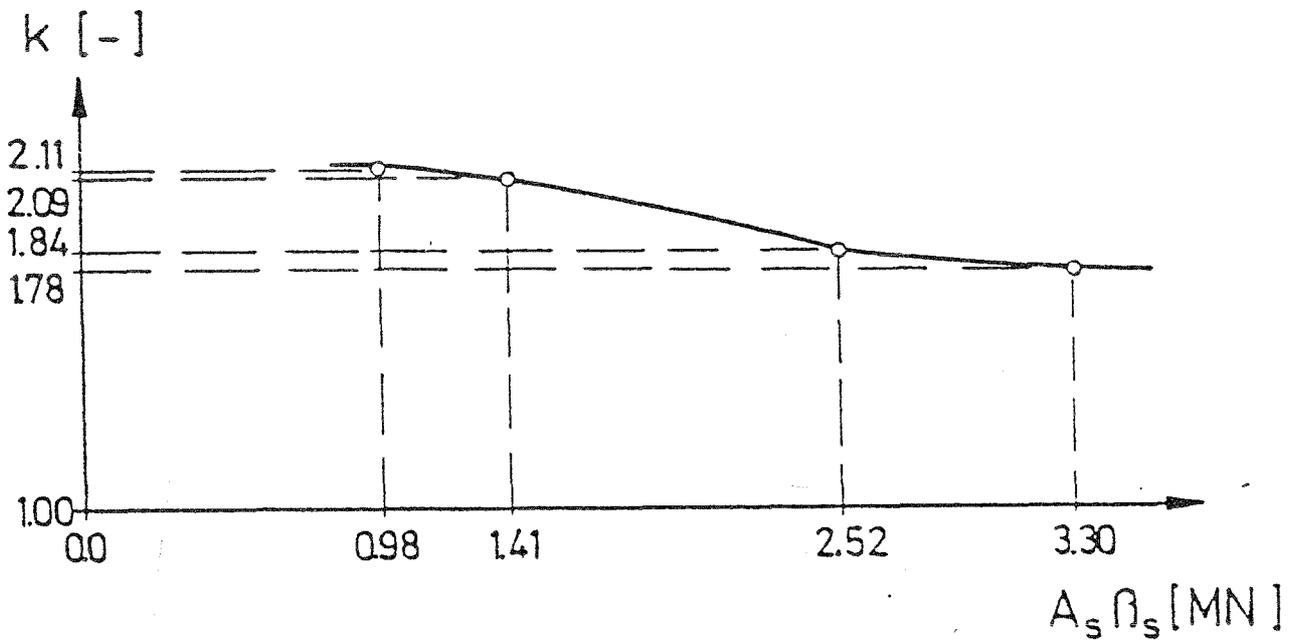


Bild 3.42 Zusammenhang zwischen dem Beiwert k und der Stahlkraft $F_s = A_s \cdot \beta_s$, Betongüteklasse B 35 und Zylinder Φ 400mm.

3.8.4 Einfluß des Durchmessers der Wendelbewehrung auf die Querkzugspannungen im Betonkörper

Bei kleiner werdendem Verhältnis a_1/a tritt der Einfluß der dreiaxialen Betondruckfestigkeit mehr und mehr in den Hintergrund und die nun auftretenden Querkzugspannungen gewinnen an Bedeutung. Bei einem Verhältnis $a_1/a = 0,2$ wird zwar noch eine stetige Steigerung der Tragfähigkeit mit zunehmender Wendelbewehrung beobachtet, die Größenordnung bleiben jedoch mit ca. 10% zwischen $\Phi 8$ und $\Phi 16$ unwesentlich.

Tabelle 3.12 Untersuchte Betonkörper, $a_1/a = 0,2$

Bezeichnungen	Durchmesser der Wendelbewehrung [mm]	Dicke s des Stahlrohres [mm]	Bruchlast P_u [kN]
VR1	0,0	0,0	310,75
VR2	8,0	1,257	320,0
VR3	10,0	1,962	330,0
VR4	12,0	2,825	347,083
VR5	16,0	5,025	350,858

In Bild 3.43 ist der Verlauf der Querkzugspannung in Längsrichtung vor dem Bruch dargestellt. Man erkennt, daß der Durchmesser der Wendelbewehrung nur einen geringen Einfluß auf den Maximalwert der Querkzugspannungen und auf die Größe der resultierenden Spalt- bzw. Radialzugkraft besitzt. Auch der sich ergebende etwas größere Abstand des Beginns der Querkzugspannungen von der Ankerplatte bei den beiden größeren Wendelstabdurchmessern ist von untergeordneter Bedeutung. Bei allen berechneten Testkörpern wird Versagen durch Eindrücken der Ankerplatte in den Betonkörper hervorgerufen.

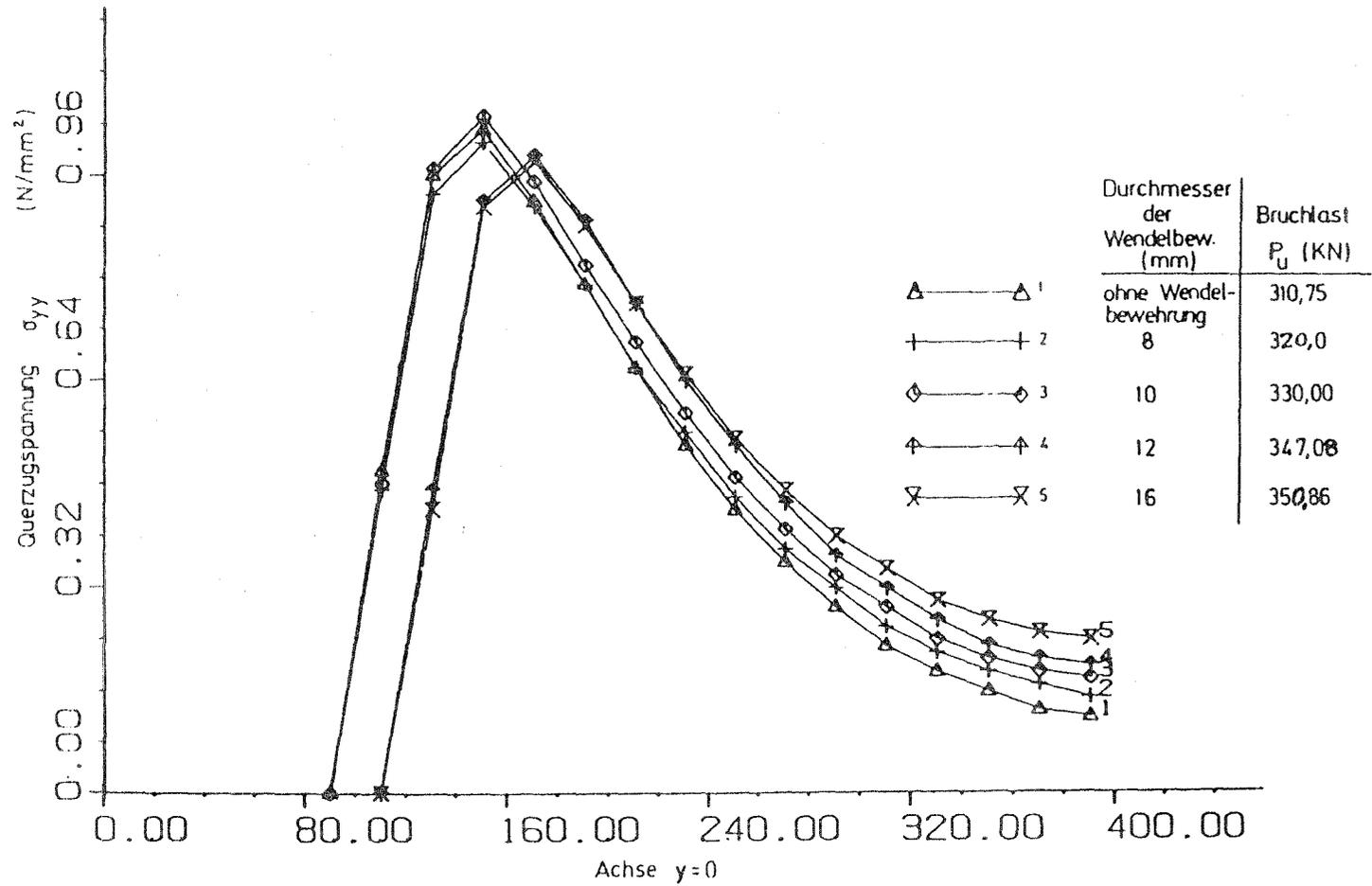
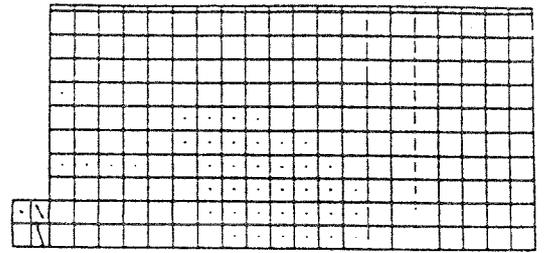
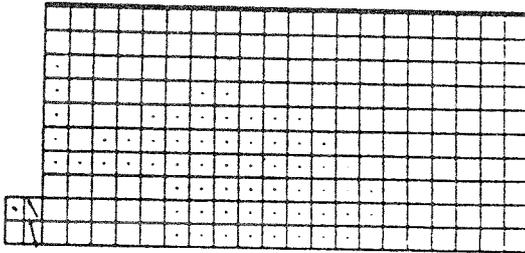


Bild 3.43 Verlauf der Querspannungen in Längsrichtung vor dem Bruch



$P_u = 347,08 \text{ kN}$

$P_u = 351,86 \text{ kN}$



$P_u = 310,75 \text{ kN}$

$P_u = 320,0 \text{ kN}$

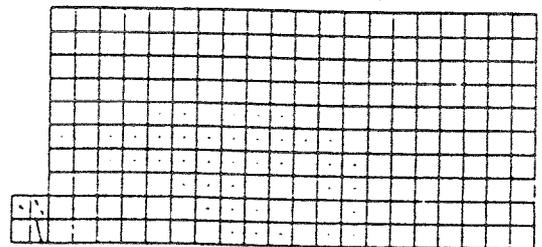
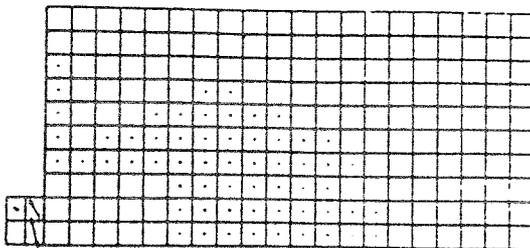


Bild 3.44 Verwendete Elementnetze und positive Hauptzugspannungen der untersuchten Betonkörper vor dem Bruch

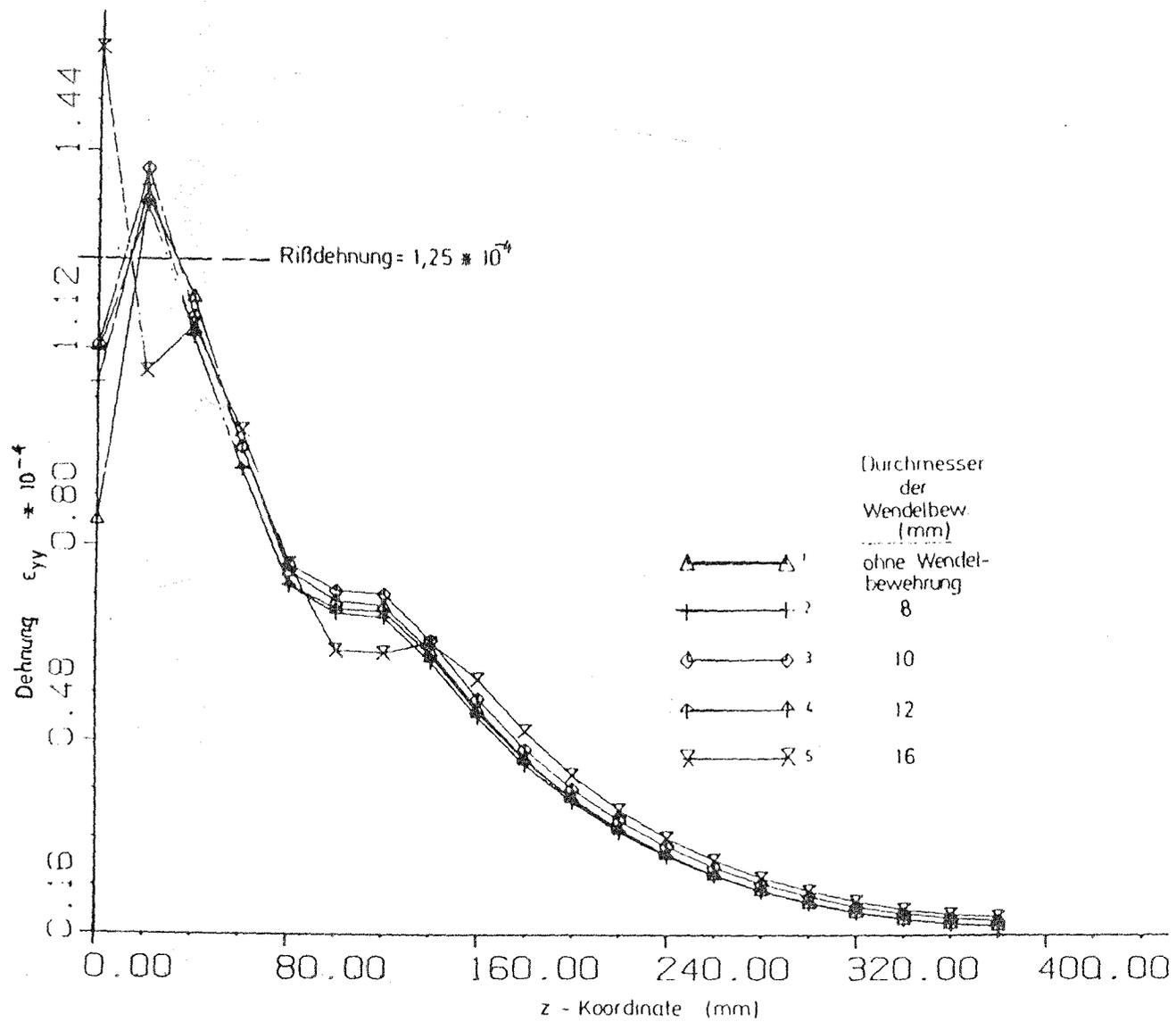
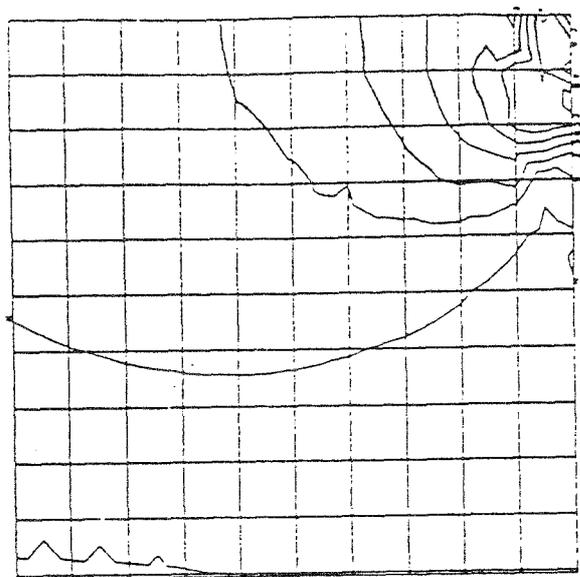
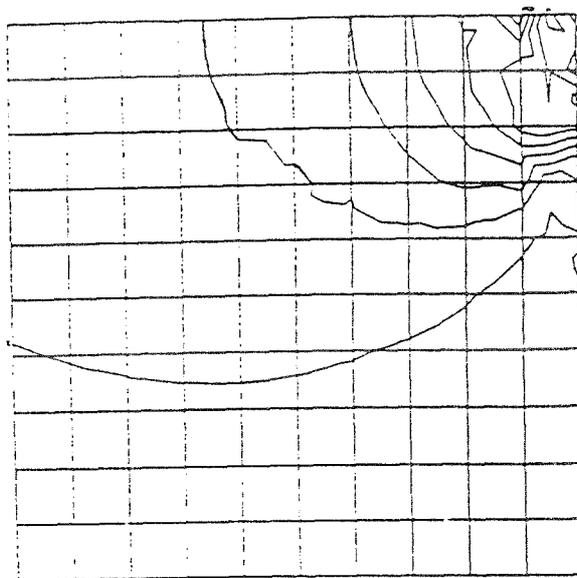


Bild 3.45 Verlauf der positiven Hauptzugdehnungen in dem untersuchten Betonkörper vor dem Bruch

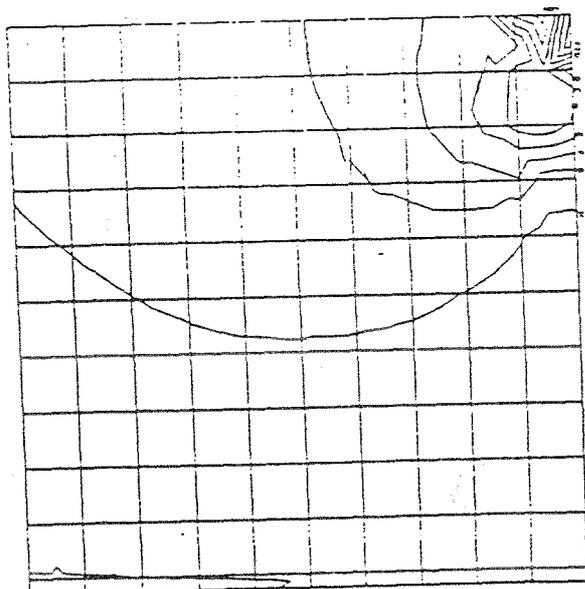
$P_u = 310,75 \text{ kN}$



$P_u = 320,0 \text{ kN}$



$P_u = 351,86 \text{ kN}$



$P_u = 347,08 \text{ kN}$

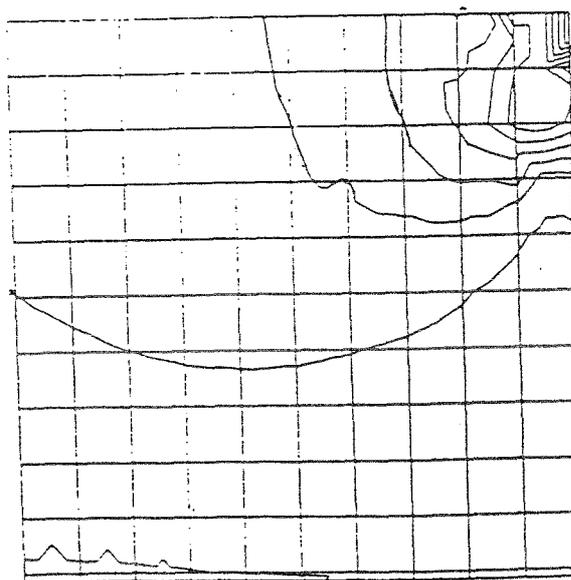


Bild 3.46 Verteilung der effektiven Spannungen nach von Mises im Betoninneren vor dem Bruch

In Bild 3.44 sind die verwendeten Elementnetze und die positiven Hauptzugspannungen der untersuchten Betonkörper vor den Bruch dargestellt. In Bild 5.45 ist der Verlauf der berechneten positiven Hauptzugdehnung im Beton in Richtung der z-Koordinate (entlang der Trägerachse) aufgetragen. Bei Überschreiten des Werts $1,25 \cdot 10^{-4}$, wird der Beton als gerissen angenommen. In Bild 3.46 ist die Spannungsverteilung der effektiven Spannungen nach von Mises im Inneren des Betonkörpers für den Bruchzustand dargestellt. Die effektive Spannung errechnet sich aus:

$$\sigma_e = [0,5 ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2))]^{1/2} \quad (3.4)$$

4. Die Anwendung der Kontaktelemente als FE-Flächenelemente für die nichtlineare Analyse des Verbundverhaltens zwischen Stahl- und Betonkontaktflächen bei mehrflächigen Verankerungskörpern

4.1 Versuch Nr. 698 der Versuchsreihe über mehrflächige Verankerungskörper [K6], TU München

4.1.1 Beschreibung des mehrflächigen Verankerungskörpers

Im Bild (4.1) ist ein mehrflächiger Verankerungskörper dargestellt. Die Verankerung ist zweiteilig und besteht aus dem Verankerungskörper aus Stahlguß mit Injizieranschluß und der Verankerungsscheibe.

Zur Befestigung des Anschlußrohres sowie für die Injizierhaube, Aussparungskörper u. ä. sind im Verankerungskörper drei Schraubmöglichkeiten vorgesehen. Die Zweiteiligkeit ermöglicht ein nachträgliches Einführen der Litze in den Spannkanaal. Diese Verankerung ist als Spann- oder Festanker verwendbar.

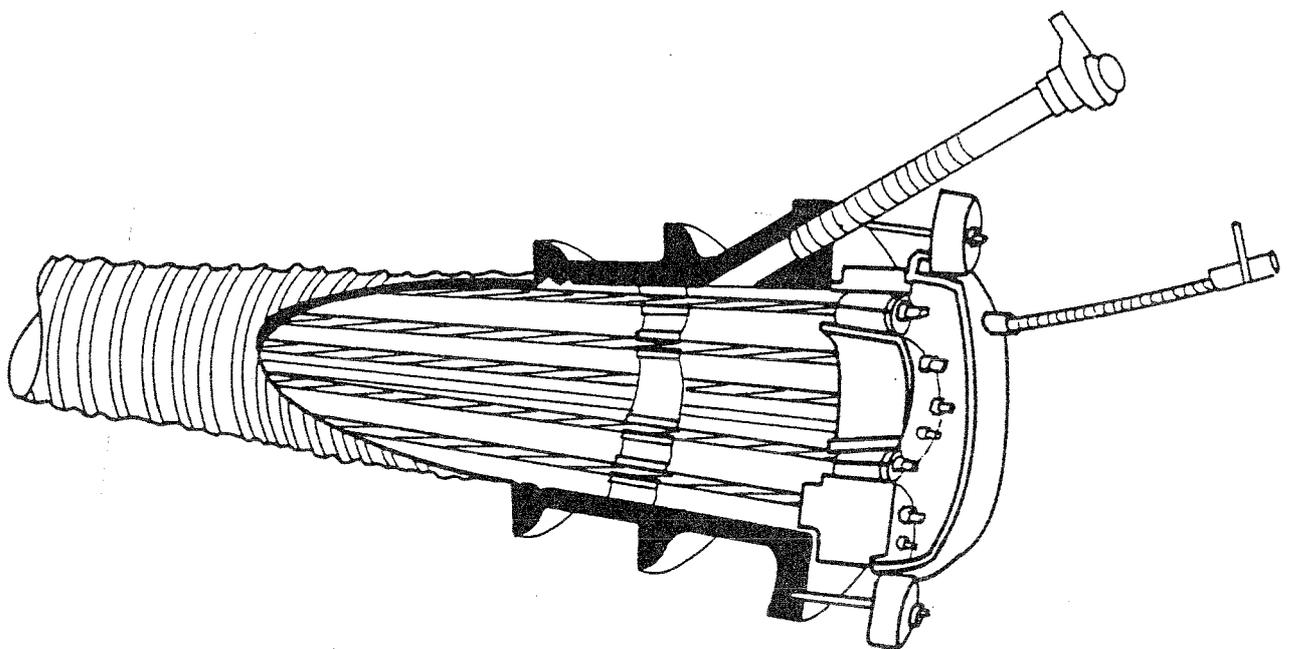


Bild 4.1 Mehrflächenverankerungskörper

4.1.2 Beschreibung des Probekörpers des Versuches Nr. 698

Der Körper besteht aus drei Teilen:

ein mehrflächiger Stahlkörper mit aufsetzbarer 60mm dicker Verankerungsscheibe Bild 4.3, eine untere 10mm dicke Stahlplatte und ein Betonkörper. Die Kraft wird auf die Verankerungsscheibe aufgebracht, die Abmessungen und die Bewehrung des Betonprobekörpers (siehe auch Bild 4.2) sind in der Tabelle 4.1 angegeben.

Probekörper Nr.	Anzahl der Litzen	Beton- festig- keit	Abmessungen der Probekörper		Bewehrung der Probekörper vgl. Zeichnung
			Querschnitt	Höhe mm	
1 (698)	12 \varnothing 0,6" St	B 45	320/320	640	Bild (4.2)
2 (706)	1570/1770	B 25	380/380	760	

Bewehrung der Probekörper

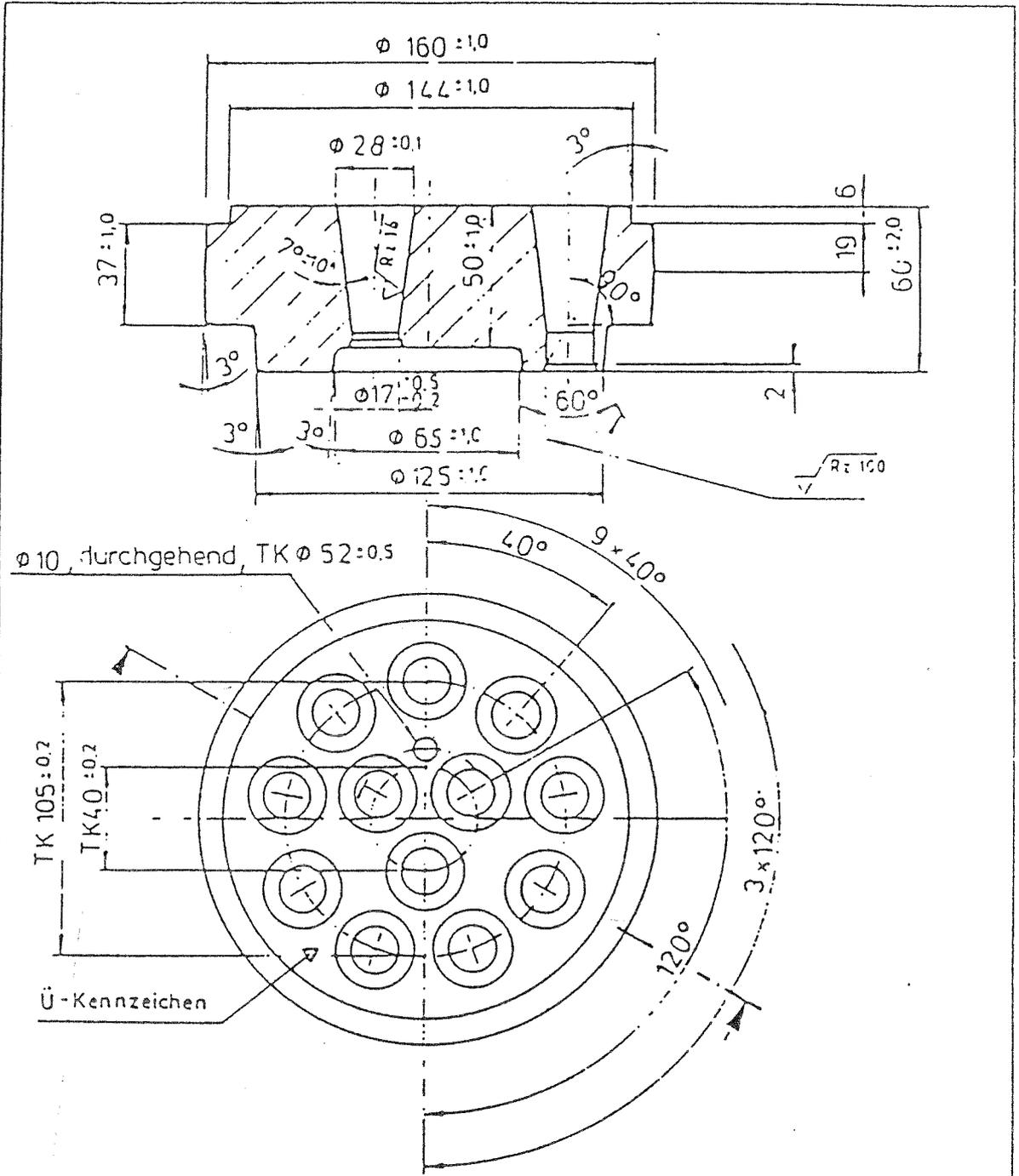
Probekörper Nr.	Anzahl der Litzen	Beton- festig- keit	Bewehrung der oberen Körperhälfte	Bewehrung der unteren Körperhälfte
1	12 Litzen	B 45	Wendel 5 \varnothing 12, Bügel 5 \varnothing 10	4 x 6 \varnothing 8 $\hat{=}$ 90 kg/m ³
2	\varnothing 0,6"	B 25	Wendel 5 \varnothing 14, Bügel 5 \varnothing 12	4 x 8 \varnothing 8 $\hat{=}$ 85 kg/m ³

Tabelle 4.1 : Abmessung und Bewehrung des Betonprobekörpers aus [K6]

4.1.2.1 Die Bewehrung des Versuchskörpers

Die untere Körperhälfte war mit Stäben Φ 8mm BSt III mehrlagig bewehrt. Die Stäbe waren, wie Betonstahlmatten, an den Kreuzungspunkten verschweißt. Die Bewehrungsmenge war gegenüber der nach de Versuchsrichtlinien vorgeschriebenen "gleichmäßig verteilten Bewehrung" etwas zu hoch (also etwas mehr als der Sollwert von 50 kg/m³ Beton). Bild 4.2 stellt einen Längsschnitt des Versuchskörpers dar, der Mehrflächenverankerungskörper und die Wendel-Bewehrung sowie eine zusätzliche Bügel-Bewehrung liegen in der oberen Körperhälfte.

Die Verankerungsscheibe ist am oberen Rand des Verankerungskörpers eingebaut, Bild 4.3 zeigt eine detaillierte Zeichnung der Draufsicht und der Seitenansicht der Scheibe.



Kante $\varnothing 28$ entgratet
 nicht bemalte Radien R3
 maximale Lochbildexzentrizität : 0,5 mm
 zul. Abweichungen bei $\frac{1}{2}$: 0,5°

zunderfrei $\sqrt{Rz16}$ $\sqrt{Rz100}$

DYWDAG SPANNVERFAHREN
 A-VERANKERUNGSSCHEIBE
 12 $\varnothing 0,6''$
 (Keil $\varnothing 28$, kleiner Teilkreis)
 Datum 1.7.74 : gez. *[Signature]* : gear. *[Signature]*

Made in mm	Ände- rung	Tag	Name	Nummer
Gewicht	a	9.5.76	[Signature]	68 12 122 3
kg	b	14.10.76	[Signature]	
Maßstab	c	11.11.76	[Signature]	
	d	1.1.77	[Signature]	
	e	10.1.95	[Signature]	
Werkstoff	f	18.6.95	[Signature]	
C 45	g	1.10.95	[Signature]	

Diese Zeichnung, die zugehörigen Angaben, Beschriftungen, Berechnungen usw. und die Inhalt sind unser geistiges Eigentum. Sie dürfen nicht ohne unsere Genehmigung ververvielfältigt, übertragen, Dritten zur Ansicht überlassen werden oder sonstige Wege und zu anderen Zwecken als die dem Empfänger angedeutet sind benutzt werden. Sie sind auf dem angegebenen Zweck beschränkt.



Bild 4.3 Verankerungsscheibe, Draufsicht und Seitenansicht aus [K6]

4.1.3 Belastung der Probekörper

Die Probekörper wurden stehend in einer 5000 kN-Druckprüfmaschine geprüft. Die Last wurde über Druckstücke (Keilrohlinge), die in den Öffnungen der Verankerungsscheibe eingesetzt waren, eingetragen. Die Versuchsanordnung ist aus Bild 4.4 zu ersehen. Die Last wurde in Stufen von 0,2; 0,4; 0,55; 0,6 und 0,7 F_N (F_N = Nennbruchlast) aufgebracht. Dann folgten 10 Lastwechsel zwischen $F_0 = 0,7 F_N$ und $F_u = 0,1 F_N$. Anschließend wurden die Probekörper bis zum Bruch (experimentell ermittelte Bruchlast F_u) stetig weiter belastet.

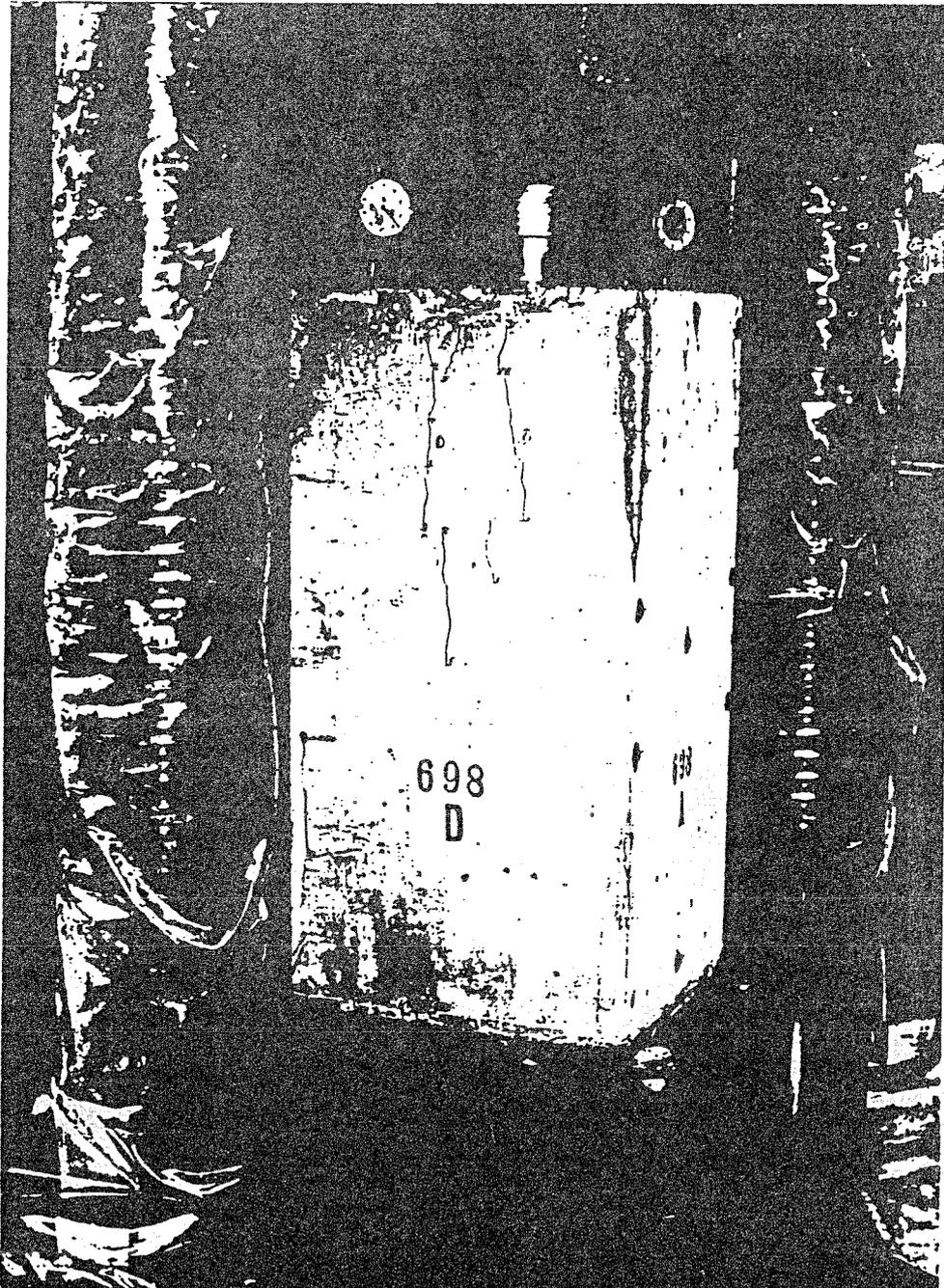


Bild 4.4 Versuchsanordnung aus [K6]

4.1.4 Wesentliche Versuchsergebnisse

In der Tabelle 4.2 sind die wichtigsten Materialeigenschaften und die wesentlichen Versuchsergebnisse dargegeben. Die Lage der Risse, der Rißverlauf und die Rißbreiten sind für den Probekörper Nr. 698 der Tabelle 4.3 zu entnehmen. Zu bemerken ist, daß die Risse in den oberen Hälften des Probekörpers (also im Krfteintragungsbereich) liegen.

Probekörper für 12 Litzen $\varnothing 0,6''$, St 1570/1770 in B 45 und B 25

Probekörper Nr.	Würfeldruckfestigkeit zum Zeitpunkt der Belastung der Probekörper N/mm^2	Belastung $\frac{F}{F_N}$	Messung nach	Anzahl der Risse	max. Rißbreite mm	Bruchlast F_U kN	Verhältnis Bruchlast zur Stahlnennbruchlast $F_U : F_N$
1 (698) B 45	$B_w(7) = 36,8$ $(0,82 B_{wN})$	0,2	Erreichen	-	-	3310	1,11
		0,4		7	0,04		
		0,55		9	0,05		
		0,6		9	0,06		
		0,7		12	0,09		
		0,7	1. Lastw.	12	0,10		
			3. Lastw.	13	0,11		
			5. Lastw.	14	0,12		
			7. Lastw.	14	0,12		
			9. Lastw.	14	0,12		
	0,1		14	0,07			
	0,55	10. Lastw.	14	0,10			
	0,7		14	0,12			
2 (706) B 25	$B_w(3) = 22,2$ $(0,89 B_{wN})$	0,2	Erreichen	-	-	3200	1,07
		0,4		1	0,02		
		0,55		8	0,04		
		0,6		11	0,05		
		0,7		15	0,08		
		0,7	1. Lastw.	15	0,09		
			3. Lastw.	15	0,09		
			5. Lastw.	15	0,10		
			7. Lastw.	15	0,10		
			9. Lastw.	15	0,11		
	0,1		15	0,07			
	0,55	10. Lastw.	15	0,10			
	0,7		15	0,11			

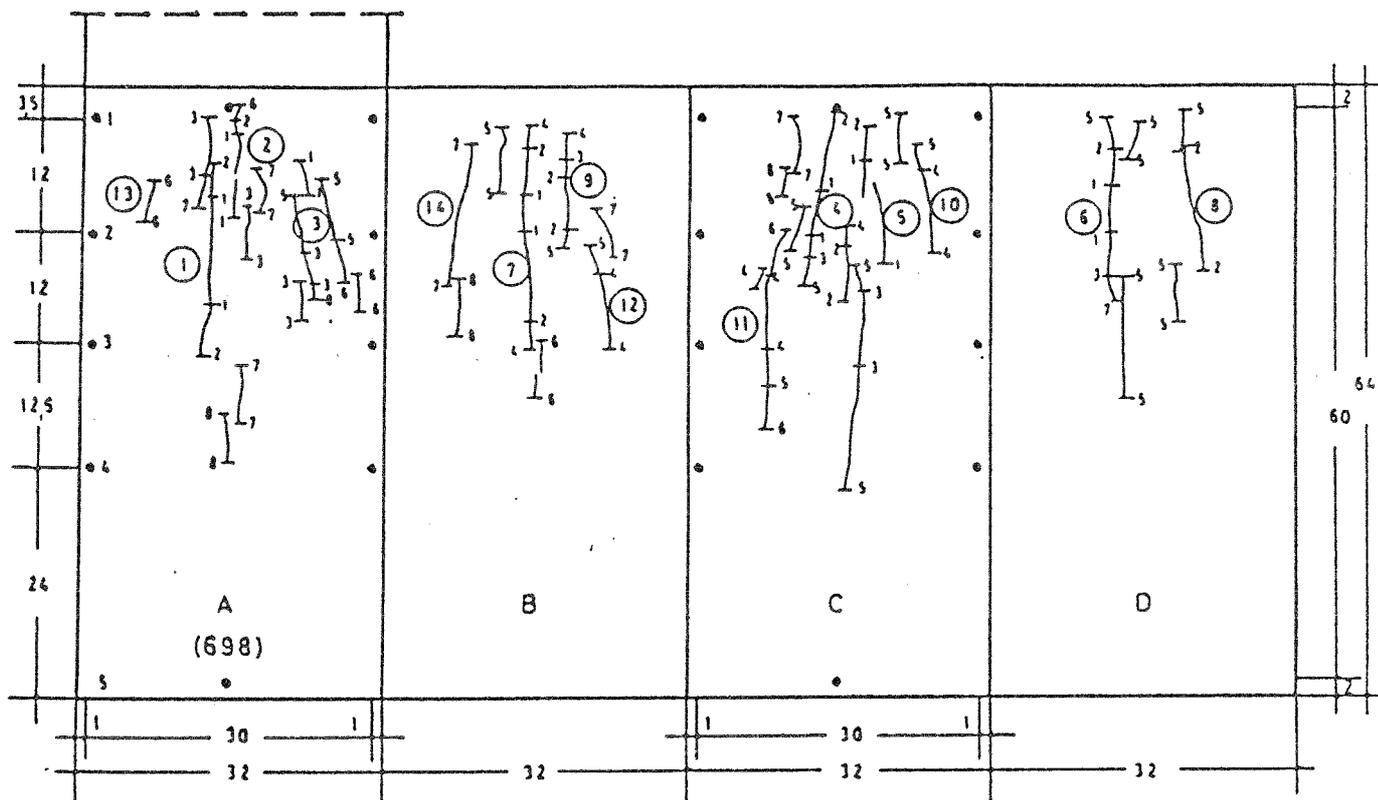
F_N für Bndelspannglied mit 12 Litzen $\varnothing 0,6''$, St 1570/1770 = 2974 kN

Tabelle 4.2 Wesentliche Versuchsergebnisse aus [K6]

Rißverlauf und Rißbreiten - Probekörper Nr. 1 (698)

Maße in cm

Meßstellen: 1 - 4 Querverformung
5 Längsverformung



Belastung $\frac{F}{F_H}$	kN	Messung nach	Riß- folge	Rißbreiten (maximal) mm Riß Nr.														
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
0,2	595	Erreichten	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
0,4	1190		2	0,02	0,03	0,02	0,02	0,04	0,02	0,02	-	-	-	-	-	-	-	
0,55	1636		3	0,05	0,04	0,02	0,04	0,04	0,03	0,04	0,03	0,02	-	-	-	-	-	
0,6	1784		4	0,06	0,05	0,03	0,06	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	-	-	-	-	-	
0,7	2082			0,09	0,06	0,04	0,09	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,02	0,03	0,02	-	-	
0,1	297	1. Lastw.	5	0,05	0,04	0,02	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,01	0,02	0,01	-	-	
0,7	2082			0,10	0,07	0,04	0,10	0,06	0,08	0,07	0,06	0,05	0,03	0,03	0,03	-	-	
0,1	297	3. Lastw.	6	0,06	0,05	0,02	0,05	0,03	0,04	0,04	0,03	0,03	0,01	0,02	0,02	-	-	
0,7	2082			0,10	0,08	0,05	0,11	0,06	0,08	0,07	0,06	0,06	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	
0,1	297	5. Lastw.	7	0,07	0,06	0,03	0,06	0,03	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	-	
0,7	2082			0,11	0,09	0,06	0,12	0,07	0,09	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,03	
0,1	297	7. Lastw.	8	0,07	0,06	0,03	0,06	0,03	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02	
0,7	2082			0,12	0,09	0,06	0,12	0,07	0,10	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,03	
0,1	297	9. Lastw.	9	0,07	0,06	0,03	0,06	0,03	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,03	
0,7	2082			0,12	0,09	0,06	0,12	0,07	0,10	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,03	
0,1	297	10. Lastw.	10	0,07	0,06	0,03	0,06	0,03	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,03	
0,55	1636			0,10	0,08	0,05	0,10	0,05	0,08	0,06	0,06	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,04
0,7	2082			0,12	0,09	0,06	0,12	0,07	0,10	0,07	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,03

Tabelle 4.3 Rißverlauf und Rißbreiten des Probekörpers Nr. 698 aus [K6]

4.2 Die Anwendung der Finite-Element Kontaktformulierung zur Berechnung eines mehrflächigen Verankerungskörpers

4.2.1 Einleitung

Die Kontaktelementformulierung, die in Anhang B beschrieben wurde und in das Programmsystem ADINA bzw. SOLVIA implementiert ist, wurde exemplarisch auf den Versuchskörper Nr. 698 aus [K6] angewandt.

Zuerst wurde eine Berechnung mit elastischen Materialien durchgeführt, dadurch bekam man eine Vorstellung von dem linearen Verhalten des Körpers, danach, um die nichtlineare Analyse durchzuführen, wurde eine Modifizierung des F.E. Netzes betrachtet.

4.2.2 Material Eigenschaften des Betons

Die Würfeldruckfestigkeit des Betons zum Zeitpunkt der Belastung des Probekörpers betrug $\sigma_c(7) = 36.8 \text{ N/mm}^2$, siehe Tabelle 4.2 .

Im CEB-FIP Model Code [C3] sind angegeben:

Zylindrische Druckfestigkeit des Betons $\sigma_{c(\text{Zyl.})} = 0.85 * \sigma_{c(\text{Würfel})}$

$$\sigma_{c(\text{Zyl.})} = 0.85 * 36.8 = 31.28 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Mittelwert der Druckfestigkeit } \sigma_{cm} = \sigma_{c(\text{Zyl.})} + 8 = 31.28 + 8 = 39.28 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Zugfestigkeit des Betons } \sigma_t \text{ min} = 0.2 * \beta_c^{2/3} = 2.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t \text{ max} = 0.4 * \beta_c^{2/3} = 3.97 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Spaltzugfestigkeit des Betons: } \sigma_{spZ} = 1/0.9 * \sigma_t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{min} = 2.2 \quad \text{N/mm}^2 \\ \text{max} = 4.4 \quad \text{N/mm}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{E- Modul } E_c = 10^4 \left[\sigma_{c(\text{Zyl.})} + 8 \right]^{1/3} \approx 34000 \text{ N/mm}^2$$

Die in der Berechnung verwendeten Werte sind :

$$\sigma_{c(\text{Zyl.})} = 40.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_t = 4.0 \text{ N/mm}^2$$

$$E_c = 34000 \text{ N/mm}^2$$

4.2.3 Finite- Element- Modellierung

Um eine einfache zeitsparende Analyse durchzuführen, wurde der Körper im Rechenmodell durch einen rotationssymmetrischem Körper ersetzt, wobei der quadratische Querschnitt durch einen Kreisquerschnitt mit einem Durchmesser, der gleich der Seitenlänge des quadratischen Querschnittes beträgt, ersetzt wurde. Das Finite- Element-Netz ist in Bild 4.5 dargestellt.

ORIGINAL  41.33 [mm]

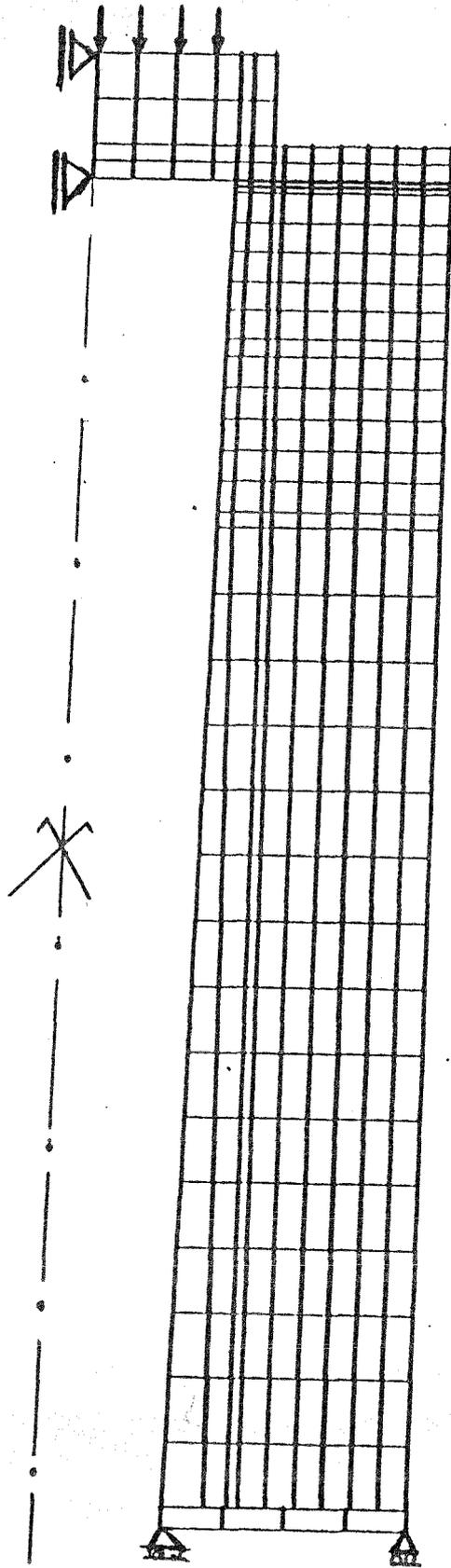


Bild 4.5 FE-Netz des ganzen Körpers

Die Wendel und Bügel sind mit einknotigen rotationssymmetrischen Stabelementen modelliert. Die Längsbewehrung wurde durch einknotige rotationssymmetrische Stabelemente ersetzt, die über die Länge verteilt waren. Die Beton- und Stahlelemente des Verankerungskörpers wurden mit achtknotigen isoparametrischen Elementen modelliert.

Die zunächst linear durchgeführte Analyse des Körpers, zeigt Bild 4.6, daß im unteren Teil des Körpers hauptsächlich vertikal gerichtete Druckspannungen auftreten. Sie nehmen mit erhöhter Kraft zu und die Spannungslinien sind horizontal und verändern sich nicht, das bedeutet, daß erwartungsgemäß in diesem Teil lediglich eine Kraftübertragung vom oberen Teil des Körpers zum unteren erfolgt. Die Art der Modellierung dieses unteren Teils hat deswegen keinen großen Einfluß auf die Berechnungsergebnisse.

In der nichtlinear durchgeführten Analyse wurde ca. ein Drittel des Betonkörpers (Untere Seite des Körpers) vernachlässigt. Die 10 mm dicke Stahlplatte wurde wieder auf der unteren Seite des Körpers berücksichtigt. Das neue modifizierte Finite-Elemente Netz ist im Bild 4.7 dargestellt.

Um die Stabilität der einzelnen Teile des im Kontakt miteinander verbundenen, flächigen Körpers zu gewährleisten, wurden fünf elastische Elemente mit einem sehr niedrigem Elastizitätsmodul $E\phi = 75 \text{ N/mm}^2$ um den Versuchsörper herum modelliert. Es wurden jeweils zwei Elemente auf dem Betonkörper und drei auf dem Stahlkörper angeordnet. Die Stabilität der einzelnen Kontaktkörper ist eine notwendige Bedingung für die Durchführung der Kontaktflächen-Berechnung (siehe Kontaktbedingungen [A3]). Weil der Elastizitätsmodul dieser Elemente so klein ist, tragen diese Elemente kaum eine Last, weshalb ihr Einfluß auf die Rechnung sehr gering ist.

Der Kontakt zwischen den Beton-Stahl-Flächen wurde als flächiger Kontakt mit dem Coulomb'schen Reibungsgesetz betrachtet. Der Reibungskoeffizient zwischen Betonebenen und Stahlebenen wird mit 0,75 angesetzt.

Die verwendete FE-Formulierung für die Kontaktelemente ist im Anhang B beschrieben. Die Last wurde schrittweise als gleichmäßige, flächige Last auf die Stahlverankerungsscheibenelemente aufgebracht. Sie wirkt auf einen Kreis mit einem Durchmesser von 105 mm siehe Bild 4.7. Die Kraft wird von der Stahlverankerungsscheibe zum Beton durch den mehrflächigen Verankerungskörper übertragen. Die vorspringenden Teile des Verankerungskörpers drücken auf die Betonelemente. Weil die Flächen dieser Teile so klein sind, sind große, konzentrierte Spannungen in diesen Bereichen zu erwarten.

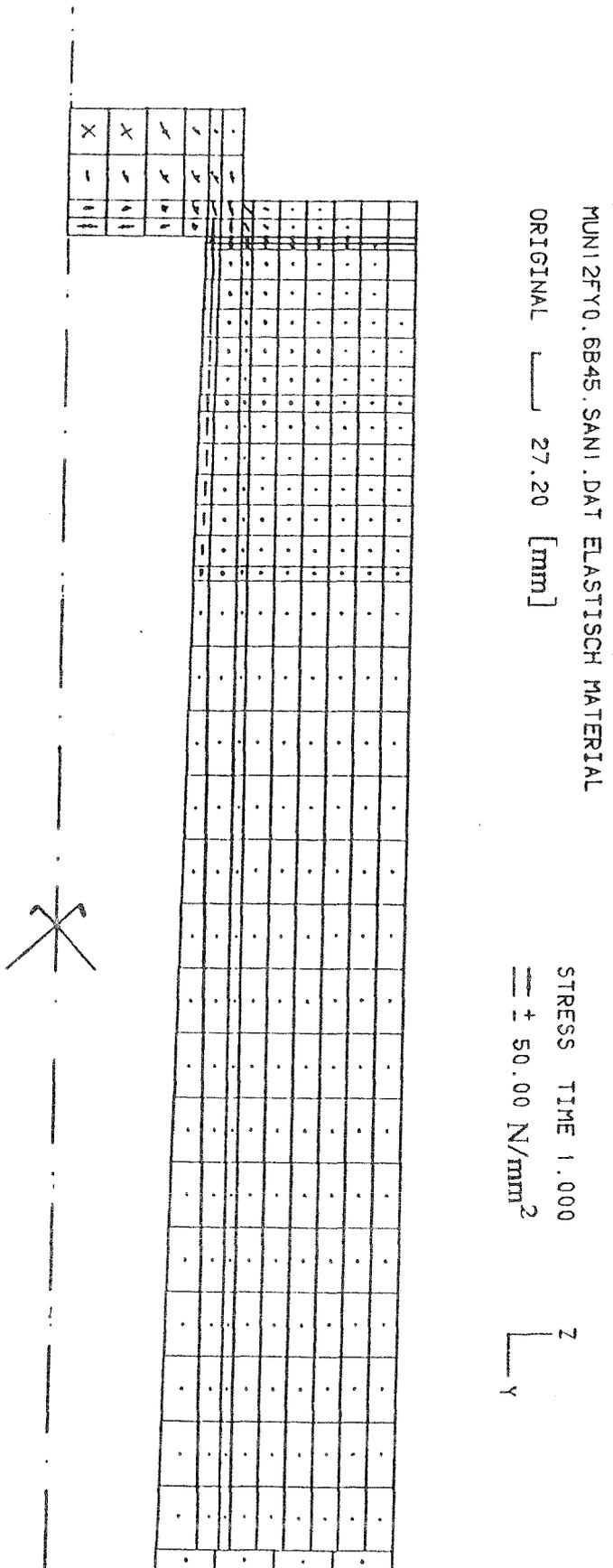


Bild 4.6 Hauptspannungs-Vektoren der linear durchgeführten Berechnung

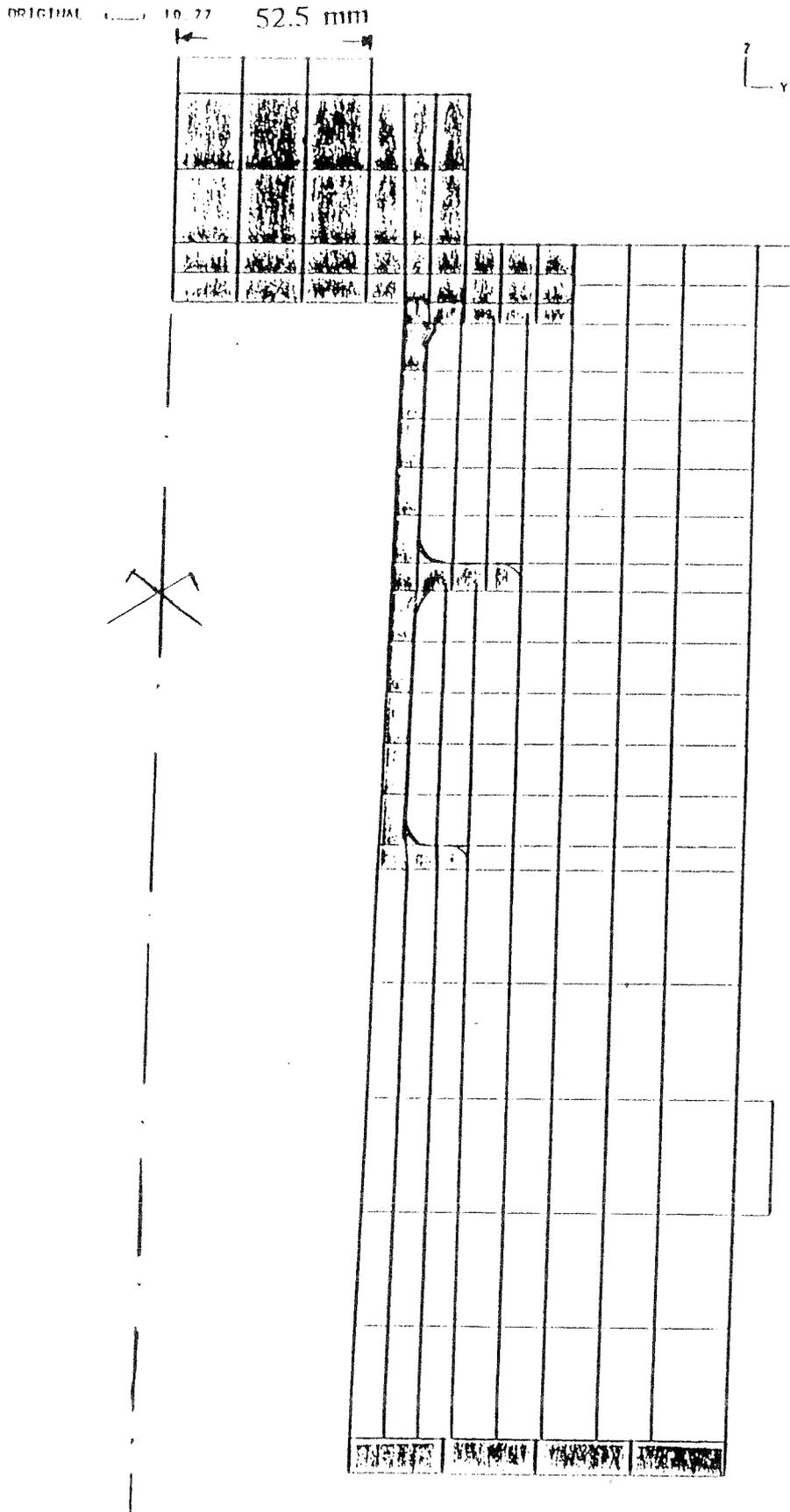


Bild 4.7 Modifiziertes FE-Netz

Die Stahrlingelemente werden unter Druckbeanspruchungen in Querrichtung ausgedehnt und erzeugen deshalb Druckkräfte auf die Betonelemente in die dritte Richtung. Die dreidimensionale Beanspruchung erhöht die Druckfestigkeit des Betons im Vergleich zur einachsigen Betondruckfestigkeit um ein Mehrfaches. Die Versuche, die in der Universität Illinois über mehraxialen Druck des Betons durchgeführt wurden [R3] zeigten, daß die mehraxiale Betondruckfestigkeit β'_w mit der Formel (4.0) berechnet werden kann.

$$\beta'_w = \beta_w + 4,1 \cdot \beta^* \quad (4.0)$$

darin

β_w : einachsige Betondruckfestigkeit

β^* : Radialdruck

Blanks [B5] merkt an, daß die nach der Gleichung 4.0 ermittelte Betonfestigkeit für großen Radialdruck überschätzt und für kleinen Radialdruck unterschätzt wird. Die erhöhte Druckfestigkeit wird beim dreidimensionalen Betonmodell berücksichtigt. Die Kräfte in die drei Richtungen verursachen rechnerisch große lokalisierte und konzentrierte Spannungen in einigen Elementen, was zu einem früheren Zusammenbruch des berechneten Körpers führt. Um dieses Phänomen zu umgehen, werden elastische Elemente in den vermutlich rechnerisch hoch belasteten Bereichen angeordnet. Der Elastizitätsmodul des Betons wurde in diesen Bereichen mit $28\,500 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Im Bild 4.8 sind Bereiche dargestellt, in denen zur numerischen Stabilisierung die zusätzlichen, fiktiven, elastischen Elemente angeordnet werden.

4.2.4 Durchführung der Berechnung

Die Last wurde schrittweise auf die Stahlscheibe aufgebracht. Die hoch belasteten Betonelemente unter den vorspringenden Teilen des Verankerungskörpers versagen, wenn der zehnte Lastschritt erreicht wird. In diesem Lastschritt wurden die im vorigen Abschnitt beschriebenen elastischen Elemente angeordnet. Mit erhöhter Last tragen die elastischen Elemente die Belastung allein in den Bereichen, wo die Betonelemente lokal versagt haben, und in den anderen Bereichen mit elastischen Elementen tragen die Betonelemente die Belastung. Die Last wurde gesteigert bis in der Rechnung ein negatives Pivot auftrat und der Körper versagt hat.

4.2.5 Ergebnisse der nichtlinear durchgeführten Berechnung

Der Körper des Versuchs Nr. 698 aus [K6] ertrug eine Bruchlast von 3310 kN. Die aufgebrachte Last wurde über einem Kreis mit 105 mm Durchmesser verteilt: $3310/(\pi \cdot 105^2/4) = 382,2 \text{ N/mm}^2$. Die erreichte Last in der Berechnung beträgt $355,6 \text{ N/mm}^2$, das entspricht ca. 93 % der im Versuch erreichten Bruchlast. Bild 4.9 stellt die Verteilung der effektiven Spannungen nach von Mises (die Spannungskonturlinien) im Betoninneren vor dem Bruch dar. Die Spannungsvektoren werden im Bild 4.10 gezeigt.

ORIGINAL  54.96 [mm]

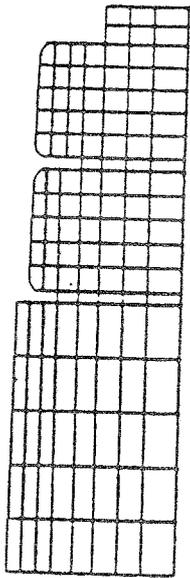


Bild 4.8 a Beton Elemente

ORIGINAL  54.96 [mm]

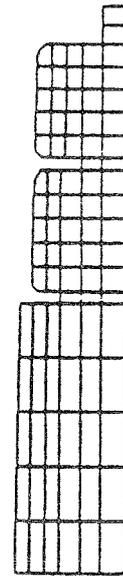
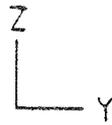
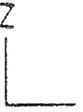


Bild 4.8 b Elastische Elemente
 $E\phi = 5500 \text{ N/mm}^2$



ORIGINAL  63.42 [mm]

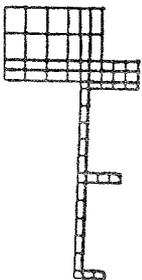


Bild 4.8 c Stahl Elemente

ORIGINAL  52.94 [mm]

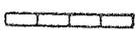
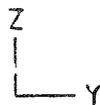


Bild 4.8 d Elastische Elemente
 $E\phi = 75 \text{ N/mm}^2$

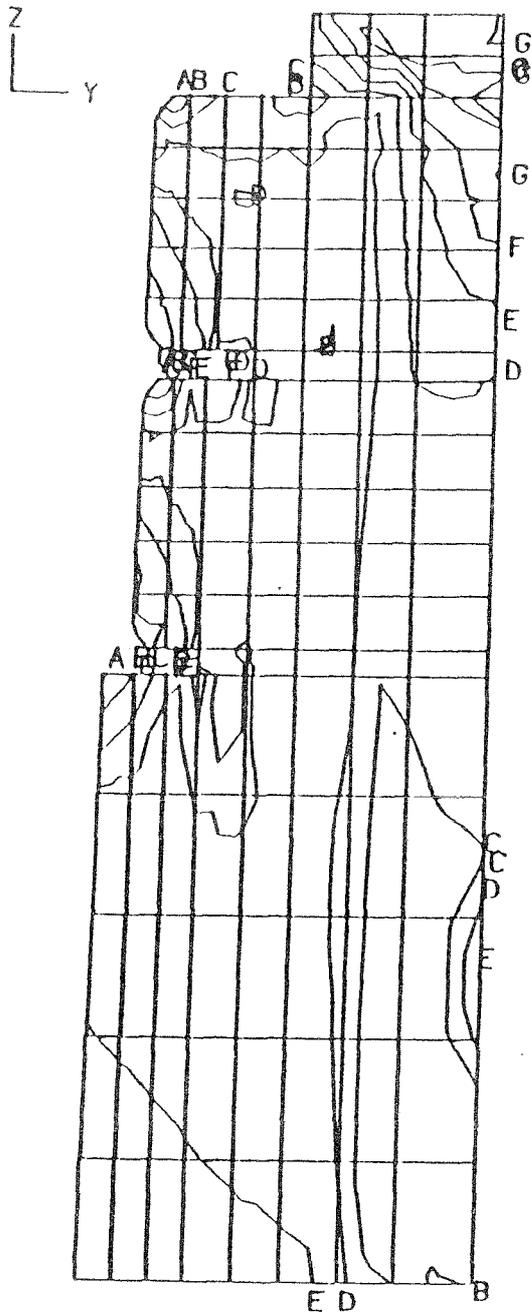


Es ist zu bemerken, daß die Spannungen in den Betonelementen unter den vorspringenden Teilen des Verankerungskörpers, die zuvor bereits rechnerisch versagten, gleich Null sind und die Last in diesen Bereichen von den elastischen Elementen übernommen wurde, (s. die Spannungsvektoren Bild 4.10). Außerdem sind die Spannungen im oberen Teil des Versuchskörpers konzentrierter und höher als in dem unteren Teil, vor allem in der Umgebung der Kontaktflächen, was im Bild 4.9 gezeigt wird, in dem die Spannungskonturlinien dargestellt sind.

Die Verzerrungen des Körpers sind im Bild 4.11 dargestellt, sie zeigen, daß die größten Verzerrungen genau unter den vorspringenden Teilen des Verankerungskörpers auftreten und, daß das Betonmaterial in diesen Bereichen völlig gerrissen ist. Die positiven Dehnungen sind im oberen Teil des Körpers dichter.

Die endlichen Verformungen des Körpers kurz vor dem Bruch sind im Bild 4.12 a dargestellt, die Bilder 4.12 b, c, d zeigen die Verformungen der einzelnen Teile des Körpers.

Konzentrierte, hohe Spannungen im Stahl treten an einigen schwachen Stellen auf, wo die Kraft von einer kleinen Fläche übertragen werden muß. Die Spannungen haben die Fließgrenze in diesen Elementen überschritten, das führt jedoch noch zu keinem Versagen, weil die Zahl der beeinflussten Elemente so klein ist, daß das Fließen nur als eng begrenzter, lokaler Effekt zu betrachten ist.

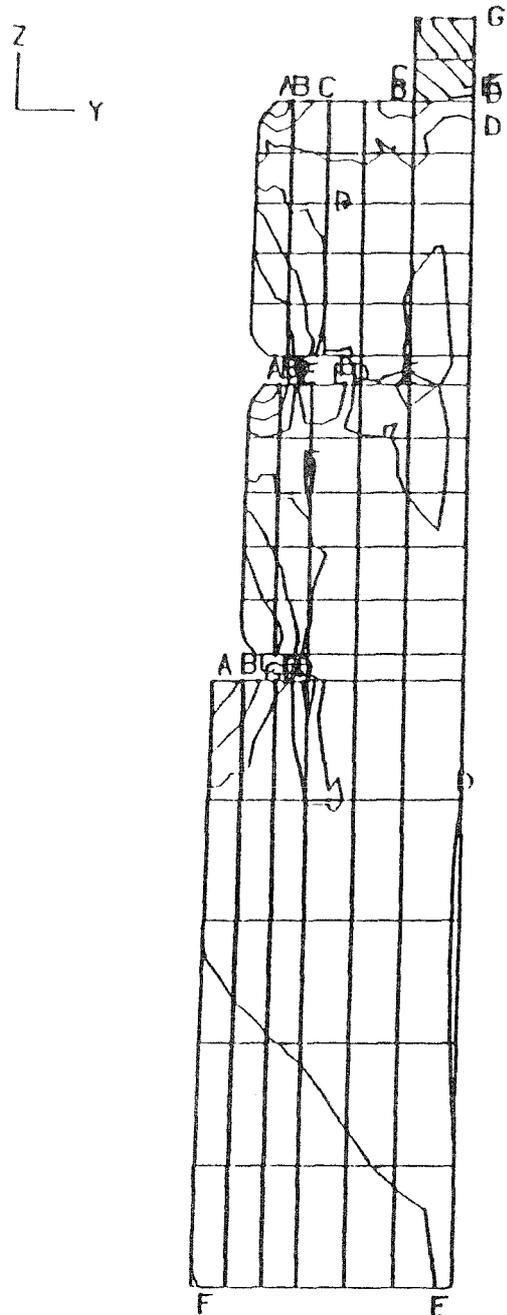


EFF. STRESS
 MAX 53.70 N/mm²

A	49.91
B	42.33
C	34.75
D	27.18
E	19.60
F	12.02
G	4.448

MIN 0.6599

(a) Betonelemente
 (a) Concrete elements



EFF. STRESS
 MAX 53.70 N/mm²

A	50.06
B	42.80
C	35.54
D	28.28
E	21.02
F	13.75
G	6.491

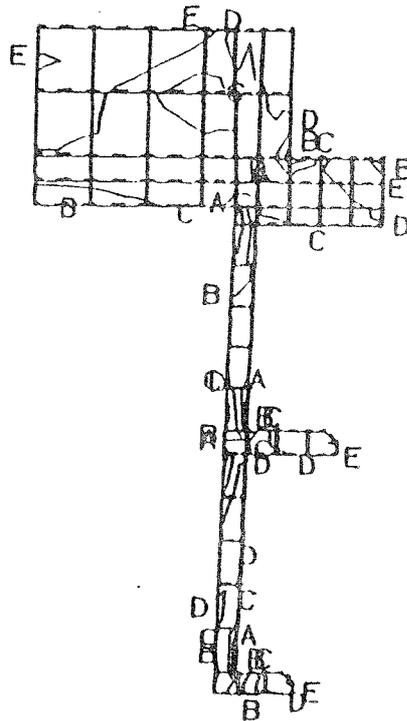
MIN 2.859

(b) elastische Elemente
 (b) Elastic elements

MUN.12FY0.6B45.SAT1.DAT SIGMAT=4.0 SIGMAC=-40.0
 ORIGINAL  20.51 mm

Bild 4.9 a,b Verteilung der effektiven Spannungen nach von Mises vor dem Bruch. (Spannungs- Konturlinien)

ORIGINAL  25.24 mm
DEFORMED  25.24 mm
TIME 103.0



EFF. STRESS
MAX 824. N/mm²

- A 600.
- B 466.
- C 332.
- D 197.
- E 63.1

MIN 3.49



(c) Stahlelemente

Bild 4.9 c Verteilung der effektiven Spannungen nach von Mises vor dem Bruch in den Stahlelementen. (Spannungs- Konturlinien)

UN.12FY0.6B45.SATI.DAT SIGMAT=4.0 SIGMAC=-40.0

STRESS

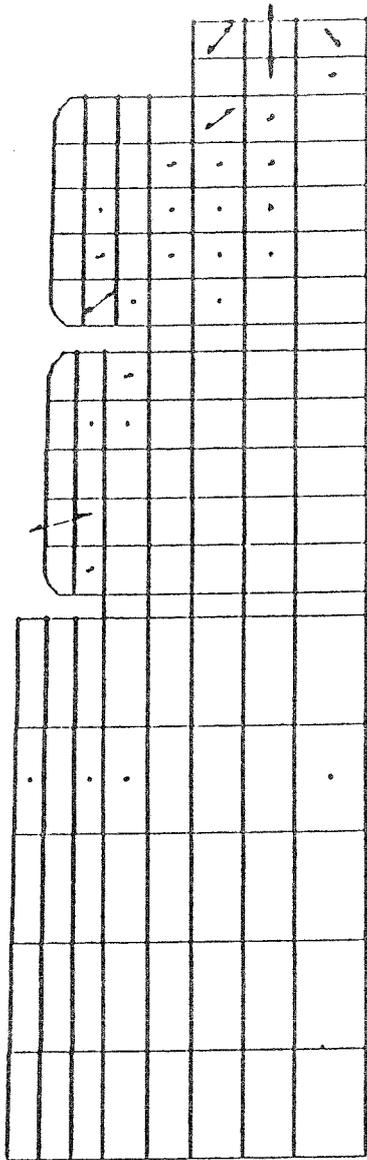
← 2.581 N/mm²

STRESS TIME 103.0

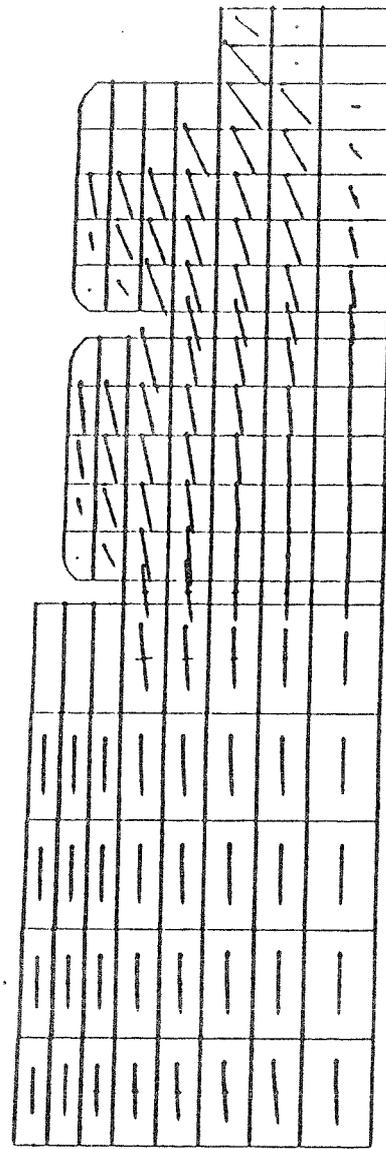
— 44.90 N/mm²



ORIGINAL 20.51 mm



(a)



(b)

Bild 4.10 a +ve Hauptspannungsvektoren in den Beton Elementen

Bild 4.10 b -ve Hauptspannungsvektoren in den Beton Elementen

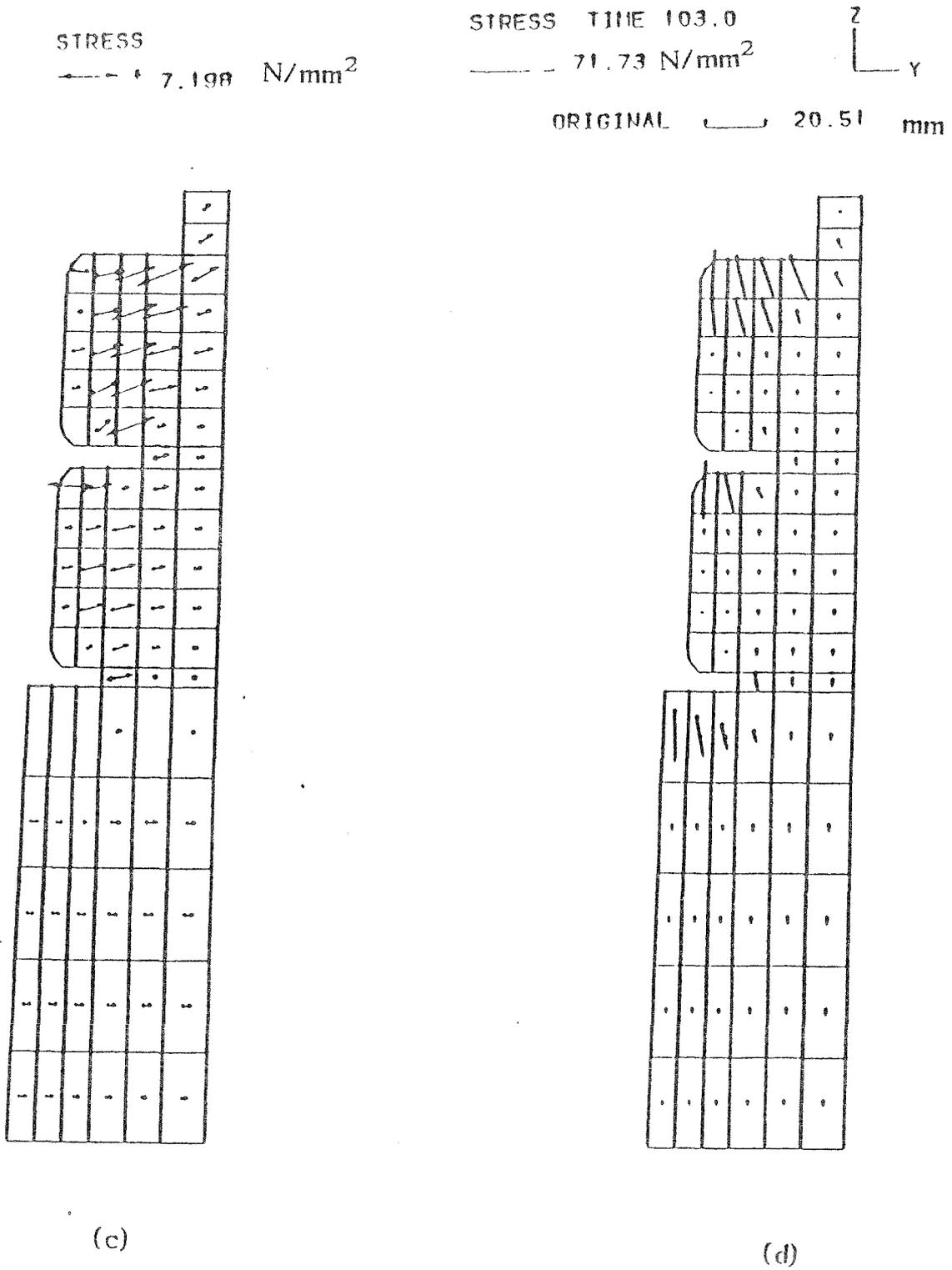


Bild 4.10 c +ve Hauptspannungsvektoren in den elastischen Elementen.

Bild 4.10 d -ve Hauptspannungsvektoren in den elastischen Elementen.

ORIGINAL  23.68 mm

STRESS TIME 103.0

 $\pm 440.9 \text{ N/mm}^2$

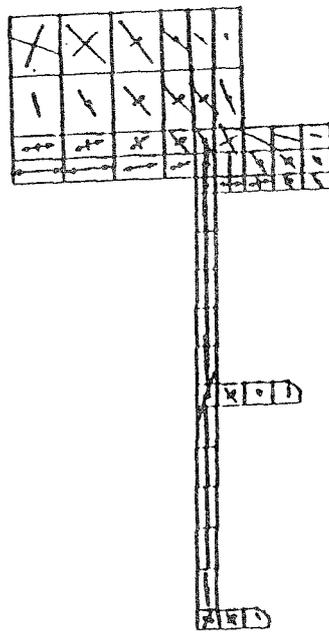


Bild 4.10 e Hauptspannungsvektoren in den Stahl-Elementen

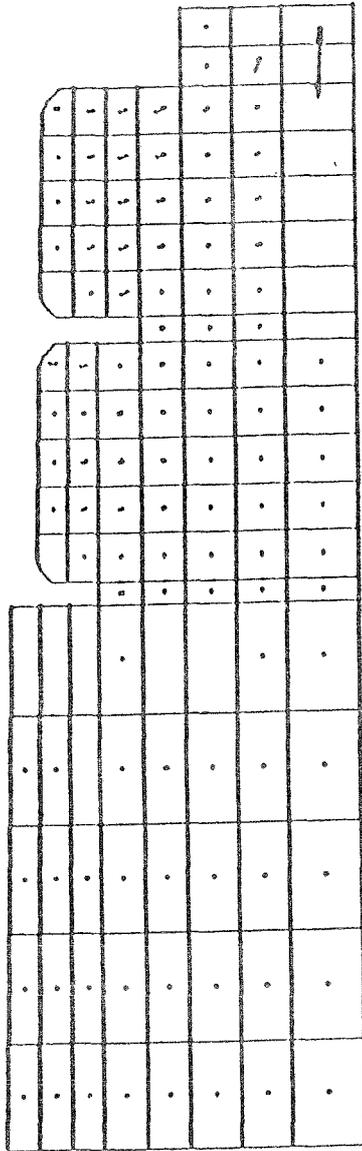
HUN.12FY0.6B45.SATI.DAT SIGMAT=4.0 SIGMAC=-40.0

STRAIN
←→ + 0.00767

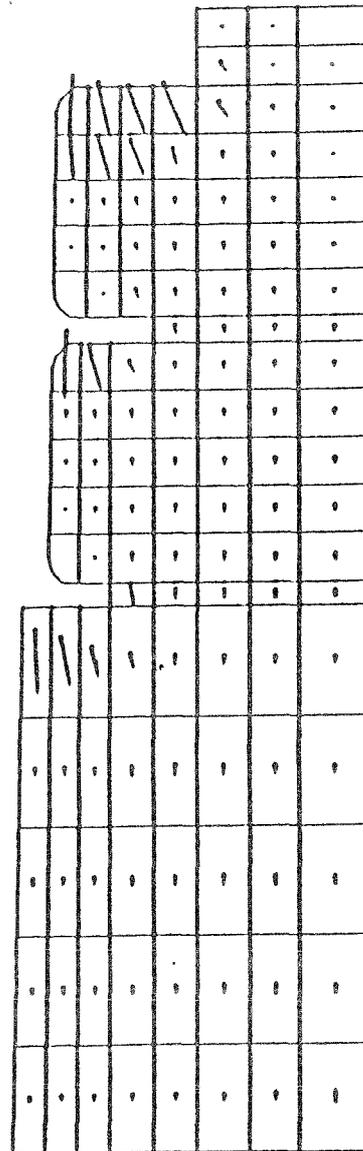
STRAIN TIME 103.0
— — 0.0136

Z
└─ Y

ORIGINAL  20.51 mm



(a)



(b)

Bild 4.11 a +ve Hauptverzerrungen in den Beton-Elementen

Bild 4.11 b -ve Hauptverzerrungen in den Beton-Elementen

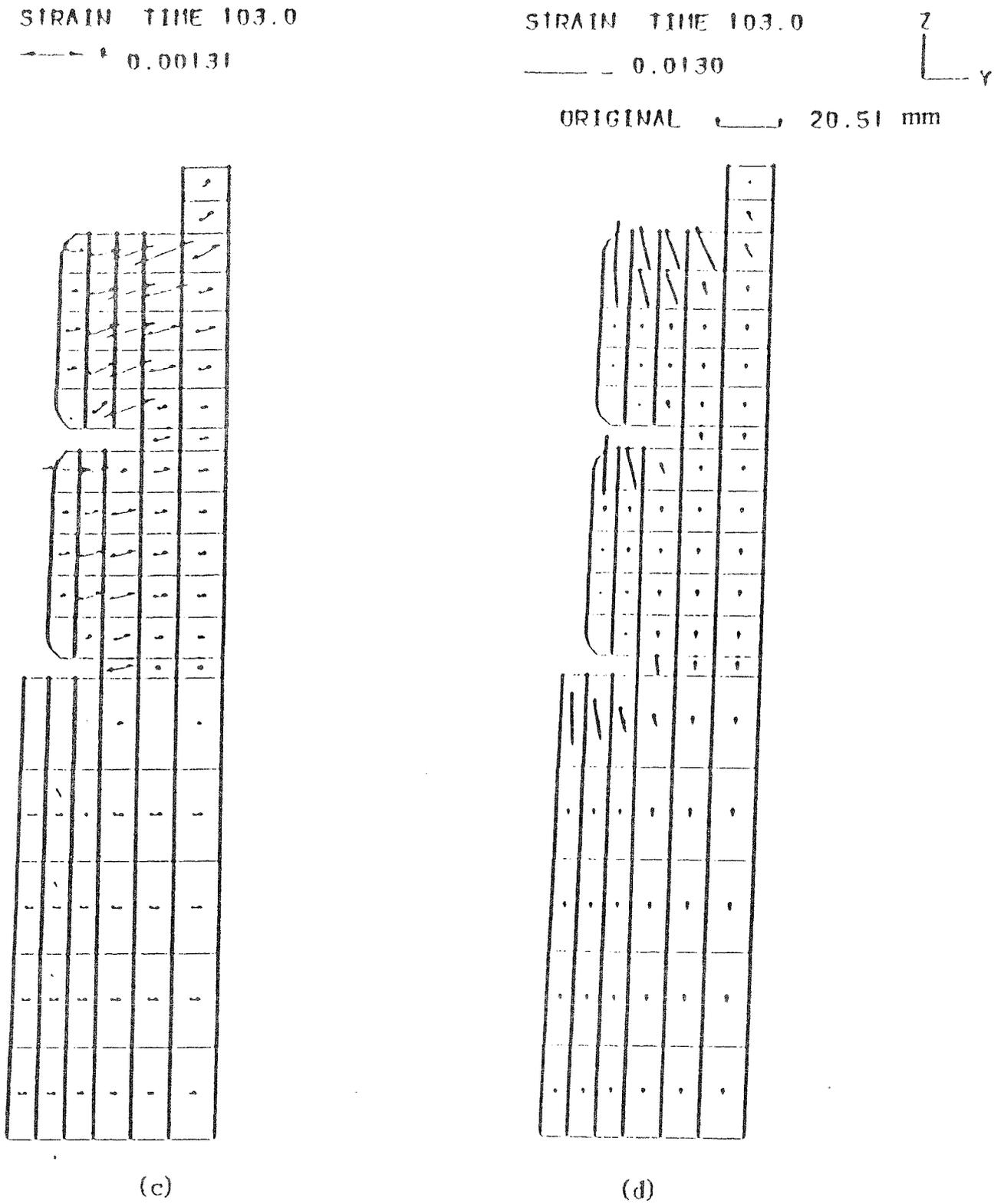


Bild 4.11 c +ve Hauptverzerrungen in den elastischen Elementen
Bild 4.11 d -ve Hauptverzerrungen in den elastischen Elementen

ORIGINAL  23.68 mm

STRAIN TIME 103.0

 ± 0.00229

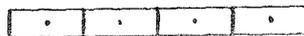
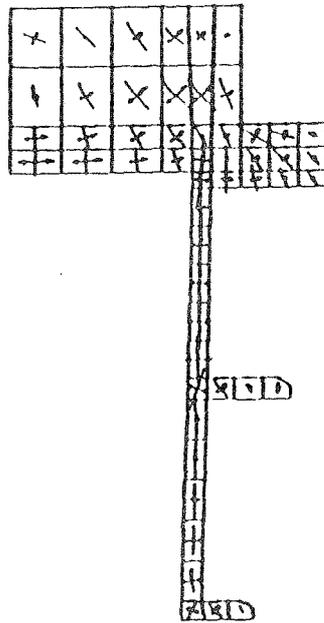


Bild 4.11 e Hauptverzerrungen in den Stahl-Elementen.

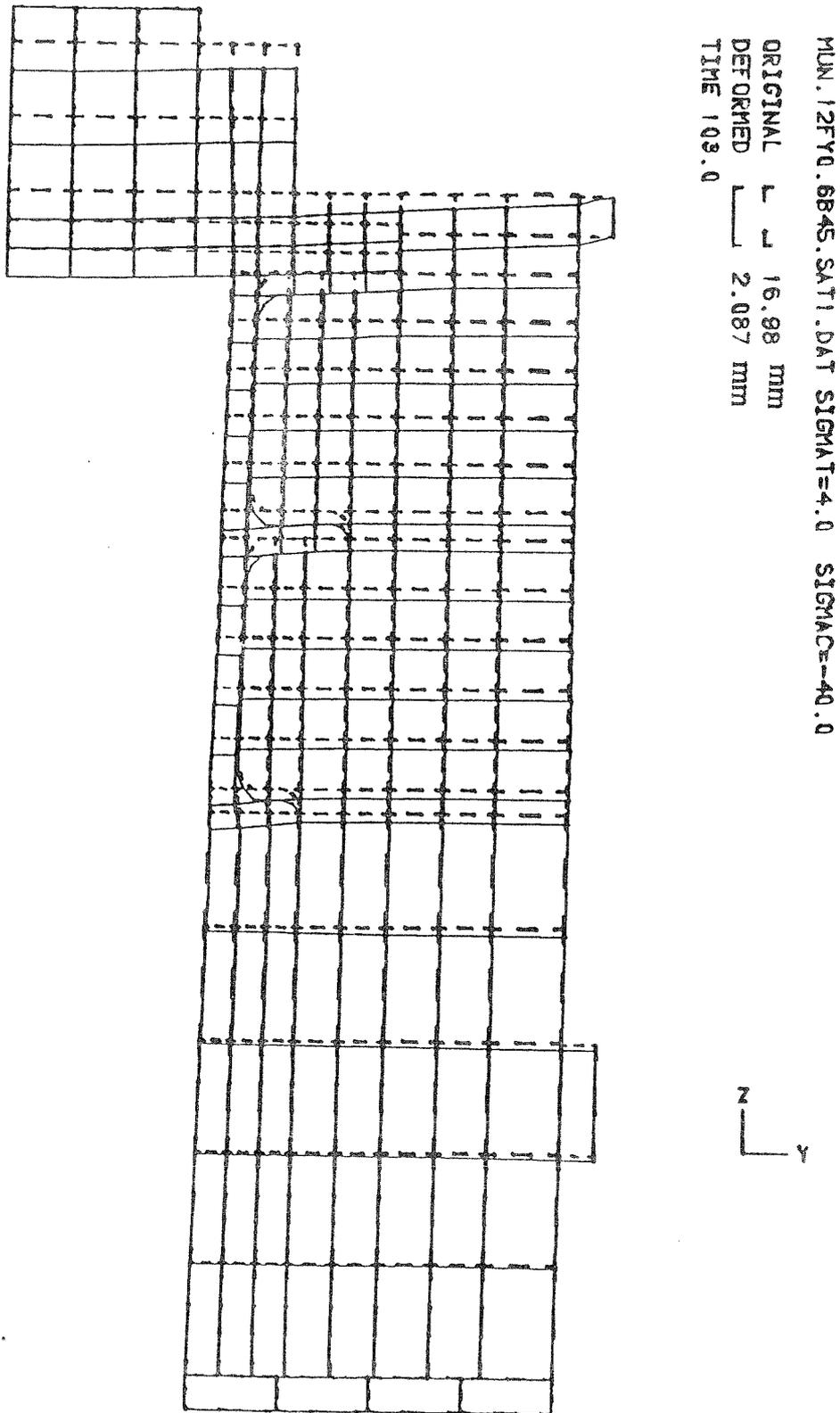
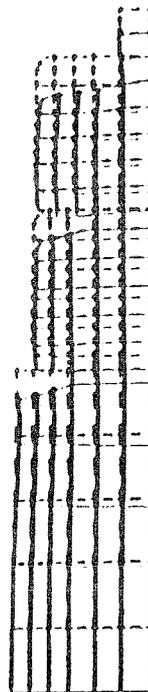
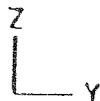
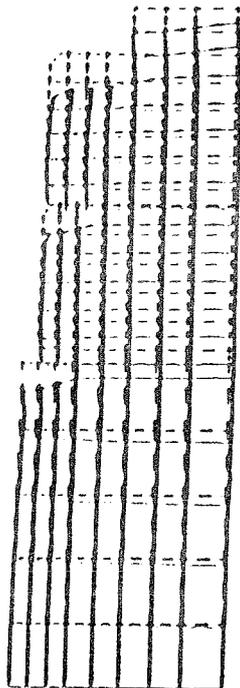


Bild 4.12 a Verformungen des Körpers vor dem Bruch.

HUN.12FY0.6B15.SATI.DAT SIGMAT=4.0 SIGMAC=-40.0

ORIGINAL  37.75 mm
DEFORMED  1.623 mm
TIME 103.0

ORIGINAL  37.75 mm
DEFORMED  1.623 mm
TIME 103.0



ORIGINAL  43.57
DEFORMED  2.087
TIME 103.0

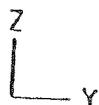
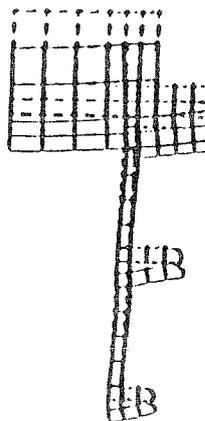


Bild 4.12 b, c, d Verformungen der einzelnen Teile des Körpers.

4.3 FE Berechnungen mehrflächiger Verankerungskörper

Rostasy und Holzkämfer [R4] haben ein Formel für die Ermittlung der Bruchlast von mehrflächigen Verankerungskörper vorgeschlagen. Dabei ist die Wirkung der Ringe der Wendelbewehrung auf die Traglast einzeln betrachtet.

Die Bruchlast einiger Versuche für mehrflächige Verankerungskörper aus [K6] wurden mit diesem Formel ermittelt und in [R4] angegeben.

Eine FE Berechnung (wie in Abschnitt 4.2) wurde für die Ermittlung der Bruchlast dieser Verankerungskörper durchgeführt. Die Rechenergebnisse entsprechen prinzipiell den im Abschnitt 4.2 berechneten Versuchskörper 698. Sie werden deshalb hier nicht ausführlich dargestellt. Lediglich die ermittelten Bruchlasten werden in der Tabelle 4.4 angegeben.

In der Tabelle 4.4 sind die Ergebnisse der Versuchsbruchlasten aus [K6] mit den aus der angegebenen Formel von Rostasy [R4] und aus den FEM Berechnungen vergleichend zusammengestellt.

Vers. Nr. nach [K6]	Bezeichn. nach [R4]	β_{we} N/mm ²	β^* N/mm ²	$\frac{\text{exp. } F_u}{\text{rech. } F_u}$	$\frac{\text{exp. } F_u}{F_u \text{ (FEM)}}$
				nach [R4]	
712	173	39,0	41,2	0,94	0,98
694	174	21,2	26,0	1,32	1,08
53	175	19,3	24,4	1,11	1,07
909	177	36,0	38,6	0,94	1,10
938	178	35,3	38,0	0,93	1,09
66	184	36,1	38,7	0,90	0,95

Tabelle 4.4

darin

β^* : der Mittelwert der Betondruckfestigkeit nach CEB [C3].

5. Die Berechnung umschnürter Druckglieder

5.1 Einleitung:

Durch die Anwendung der FEM kann der Verlauf des Kraftflusses im elastischen Zustand ermittelt werden. Der Kraftfluß dient als Hilfsmittel für die Entwicklung des Fachwerkmodells, wobei die Betondruckstreben die Druckspannungslinien und die Stahlzugstreben die Zugspannungslinien ersetzen. Die Bereiche, wo Streben miteinander verbunden sind, werden als Knoten bezeichnet.

In Endblöcken von Balken, bei denen die Kraft durch Ankerplatten eingeleitet wird, wobei die Plattenbreite bzw. Plattenfläche kleiner als der Balkenquerschnitt ist, entsteht ein zwei- bzw. dreidimensionaler Spannungszustand im Beton. Die Geometrie des Übergangsbereiches wird mit dem Kraftfluß beschrieben.

Durch die Kombination von Druckkräften und Spaltzugkräften in diesem Bereich wird die Zugfestigkeit des Betons früher erreicht, und der Beton versagt.

Schlaich et. al. [S5] haben ein erweitertes Modell für die Bemessung der Druckstäbe im Übergangsbereich entwickelt, Bild 5.1 .

Sie ersetzen den prismatischen Druckstab durch ein Spannungsfeld, das dem Kraftfluß entspricht. In Anlehnung an das St. Venantsche Prinzip ($d = b$) beschränken sie sich auf die Länge des Übergangsbereiches $d = 1,5 b_{ef}$, wobei b_{ef} die effektive Breite des Übergangsbereiches ist.

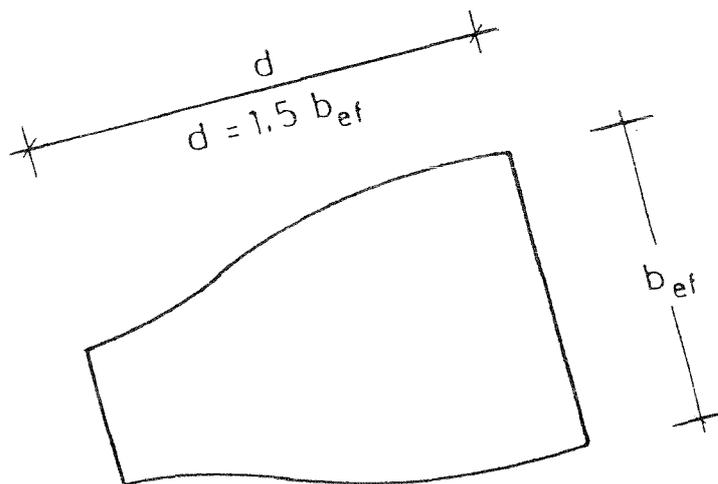
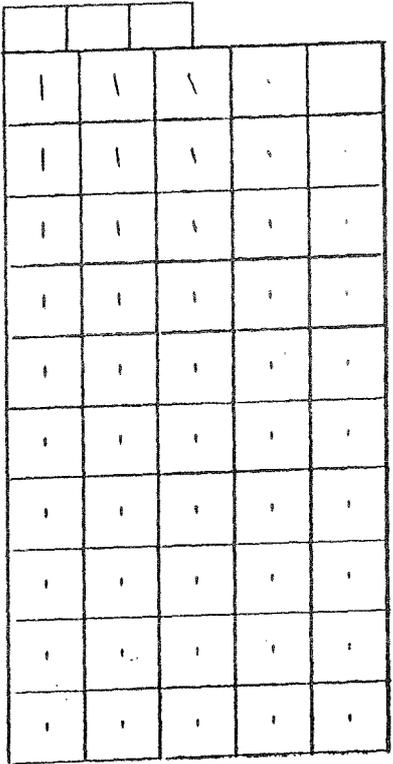


Bild 5.1 Effektive Druckstrebenbreite nach Schlaich, Schäfer und Jennewein [S5]

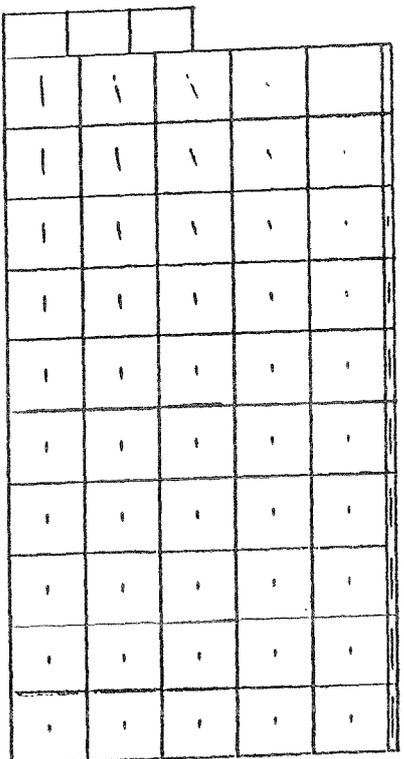
Die Geometrie des Kraftflusses und die Betoneigenschaften bestimmen die Tragfähigkeit des Bauelementes, welches stark von der Bewehrungsart und der -menge beeinflusst wird. Versuche [I1, W3] und Rechnung (s. Abschnitt 3 dieses Berichts) haben gezeigt, daß die Tragfähigkeit des Betons mit zunehmender Wendelbewehrung bis zu einem bestimmten Bewehrungsgrad erheblich steigt.

Die Spannungstrajektorien oder den Kraftfluß kann man mit Hilfe der linearen FE-Analyse ausreichend genau darstellen. Die unterschiedliche Wendelbewehrung verändert den Kraftfluß kaum, was aus Bild 5.2, in dem Kraftflußdiagramme für verschiedene Wendelbewehrungen dargestellt sind, ersichtlich ist. Deshalb kann man die Geometrie des Kraftflusses für solche Fälle nicht verwenden.

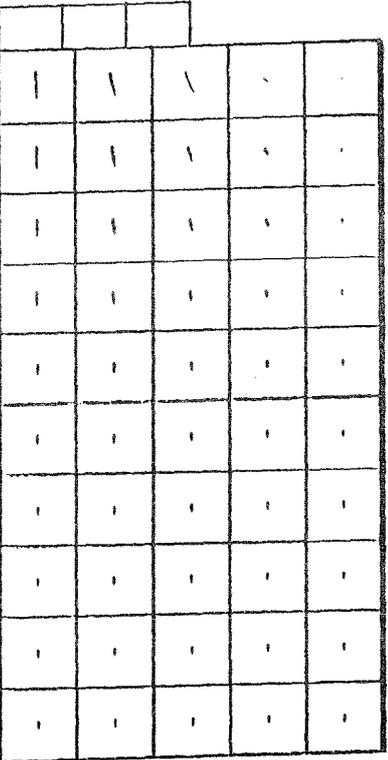
Wendelbewehrungseffekt, Gangshöhe $S_w = 40$ mm, Zylinder 400 mm * 400 mm
 Original 25.35



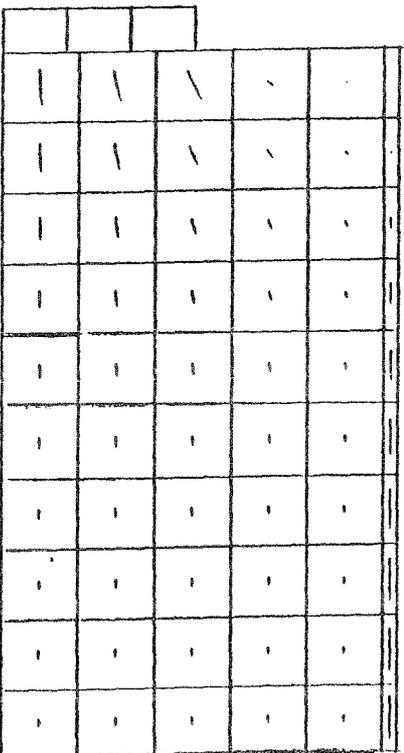
Kraftflußdiagramm $b/a = 2$ Gangshöhe $S_w = 40$ mm
 Wendel Durchmesser $\Phi_w = 8$ mm



Kraftflußdiagramm $b/a = 2$ Gangshöhe $S_w = 40$ mm
 Wendel Durchmesser $\Phi_w = 16$ mm



Kraftflußdiagramm $b/a = 2$ Gangshöhe $S_w = 40$ mm
 Wendel Durchmesser $\Phi_w = 10$ mm



Kraftflußdiagramm $b/a = 2$ Gangshöhe $S_w = 40$ mm
 Wendel Durchmesser $\Phi_w = 20$ mm



Bild 5.2 Kraftflußdiagramme für verschiedene Wendelbewehrungen

5.2 Berücksichtigung der Duktilität des Betons bei Querbehinderung durch Wendelbewehrung

Es ist bekannt, daß die Duktilität sowie die Festigkeit des Betons mit der Zunahme der Wendelbewehrung steigt. Zahlreiche Versuche zu dieser Thematik wurden in der Literatur wiedergegeben. Beispielhaft seien die Versuche von Richart et. al. [R3] genannt, bei denen Druckzylinder mit Wendelbewehrung durch Druckkräfte beansprucht wurden und dabei der Einfluß verschiedener Wendelbewehrungen untersucht wurde.

Iyengar et al. [I1] haben die Festigkeit des Betons als eine Funktion von einem definierten Umschürungsindex (Confining index), der in diesem Bericht als ein mechanischer Umschnürungsgrad bezeichnet wurde, dargestellt.

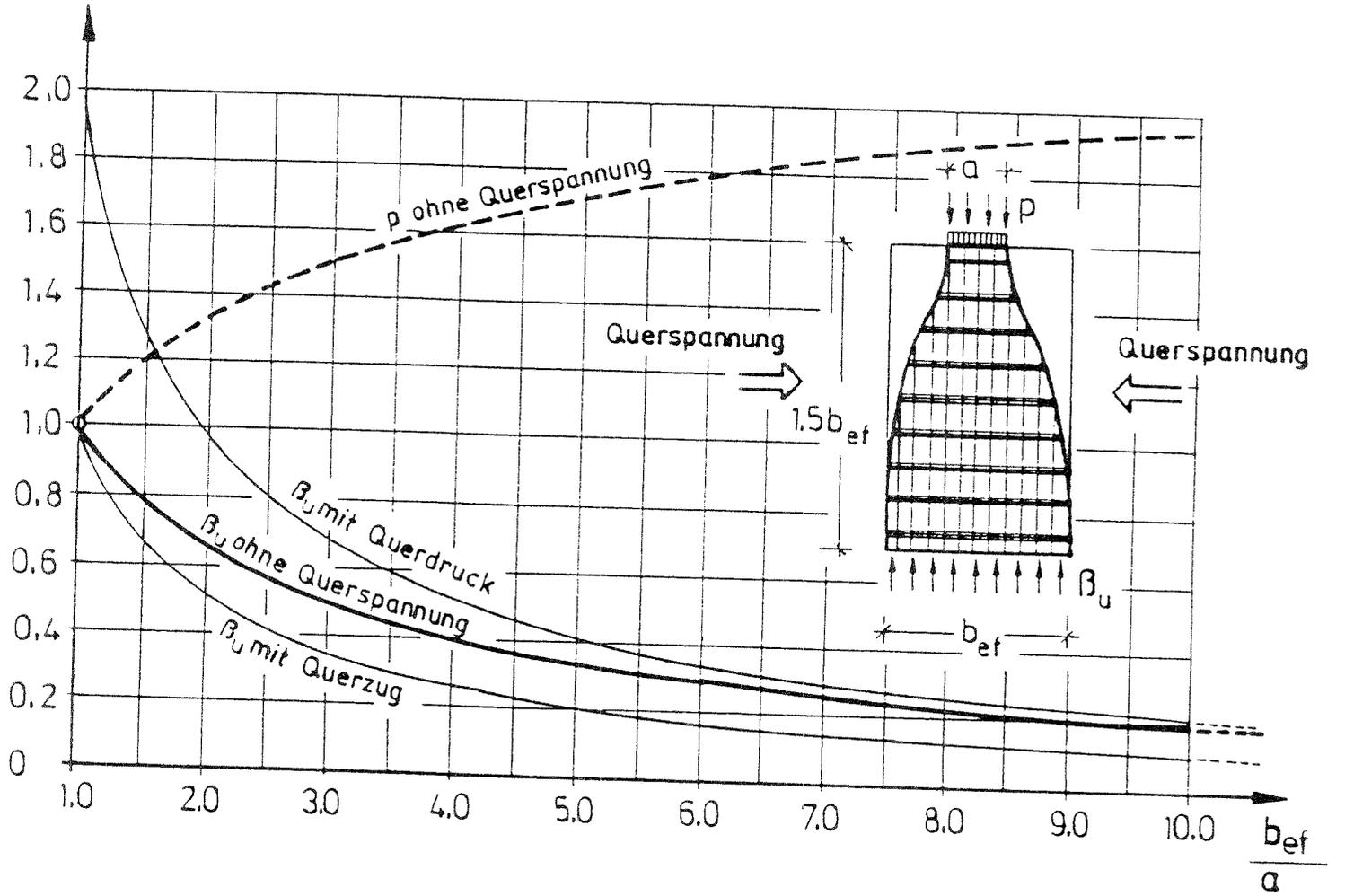
Weischede [W1] hat in der Analyse von D-Bereichen die Strukturelemente als Elemente mit oder ohne Querbehinderung bezeichnet. Dadurch wurde die Duktilität des Betons durch die Wendelbewehrung aber nicht berücksichtigt.

Als Beispiele zur Erläuterung dieses Problems werden die Versuche von Iyengar et. al [I1] mit dem in Bild 5.3 dargestellten Diagramm von Weischede [W1] und nach der von Iyengar angegebenen Beziehungen [I1] nachgerechnet und anschließend verglichen.

Weiterhin werden mechanische Umschnürungsgrade für die Versuche von Wurm und Daschner [W3] nach den von Iyengar [I1] angegebenen Beziehungen nachgerechnet und die Zusammenhänge zwischen dem Verhältnis der maximal erreichten Spannung zu der Betondruckfestigkeit (β_u/β_p) und dem mechanischen Umschnürungsgrad, im Bild 5.4 dargestellt, und schließlich die als Gl. (2.5, -2.7) entwickelten Beziehungen, aufgestellt. Eine FEM Parameterstudie für den Effekt der Wendelbewehrung von Ukhagbe [U1] wird ebenfalls in die Vergleiche einbezogen.

Bild 5.3 Diagramm D nach Weischede [W1]

$$\nu = \frac{\beta_u}{\beta_p} ; \frac{p}{\beta_p}$$



5.3 Beispiele

Ausgehend von den Versuchsergebnissen haben Iyengar et al. [I1] die auf der Seite 10 dieses Berichts gegebenen Beziehungen (2.5 - 2.7) angegeben.

Tabelle (5.1) Ergebnisse der Druckfestigkeit des umschnürten Betons nach den von Iyengar [I1] angegebenen Beziehungen (2.5) bis (2.7) für eine einaxiale Betondruckfestigkeit $\beta_p = 27.2 \text{ N/mm}^2$, aus [I2].

Versuchskörper	Wendelgang- höhe S_w (mm)	Umschnürungs- index (%) $(P_b - \bar{P}_b) \beta_s / \beta_p$	maximale Druckfestig- keit β_u (N/mm^2) nach Gl.(2.5) bis (2.7)
Kreisförmige Wendelbewehrung			
150*300 mm Zylinder $\Phi_w = 5 \text{ mm}$	30	33,50	48,2
	45	19,65	39,6
	60	12,70	35,2
100*200 mm zylinder $\Phi_w = 5 \text{ mm}$	30	44,60	51,1
	45	23,30	41,8
	60	12,70	35,2
150*300 mm Zylinder $\Phi_w = 6,5 \text{ mm}$	30	28,60	45,1
	45	16,70	37,7
	60	10,80	34,0
	90	4,80	30,2
	120	1,70	28,4
Quadratische "Wendelbewehrung"			
100*200 mm Prism $\Phi_w = 5 \text{ mm}$	30	44,60	37,4
	45	23,30	32,5
	60	12,70	30,1
Bügel Umschnürung			
100*100*200 mm Prism $\Phi_w = 5 \text{ mm}$	30	44,60	32,2
	45	23,30	29,8
	60	12,70	28,6

Φ_w : Durchmesser der Wendelbewehrung.

Aus der Tabelle (5.1) ist der Einfluß der Umschnürung auf die maximale Druckfestigkeit des Betons ersichtlich, (siehe hierzu Seite 10)

Zum Vergleich zu den in der Tabelle (5.1) angegebenen Werten sind die folgenden Berechnungen nach Weischede [W1] in Tabelle (5.2) gegenübergestellt.

Tabelle (5.2) Die maximale Druckfestigkeit des Betons β_u nach Weischede [W1]

	Ohne Quer- dehnungs- behinderung	mit Querdehnungs- behinderung
Versuchskörper	alle	alle
b_{ef}/a	1	1
ν_1, ν_2	1	2
$\beta_u = \nu_1 * \nu_2 * \beta_p$	27,2 (N/mm ²)	108,8 (N/mm ²)

wobei a : die Lasteinleitungsplattenbreite,

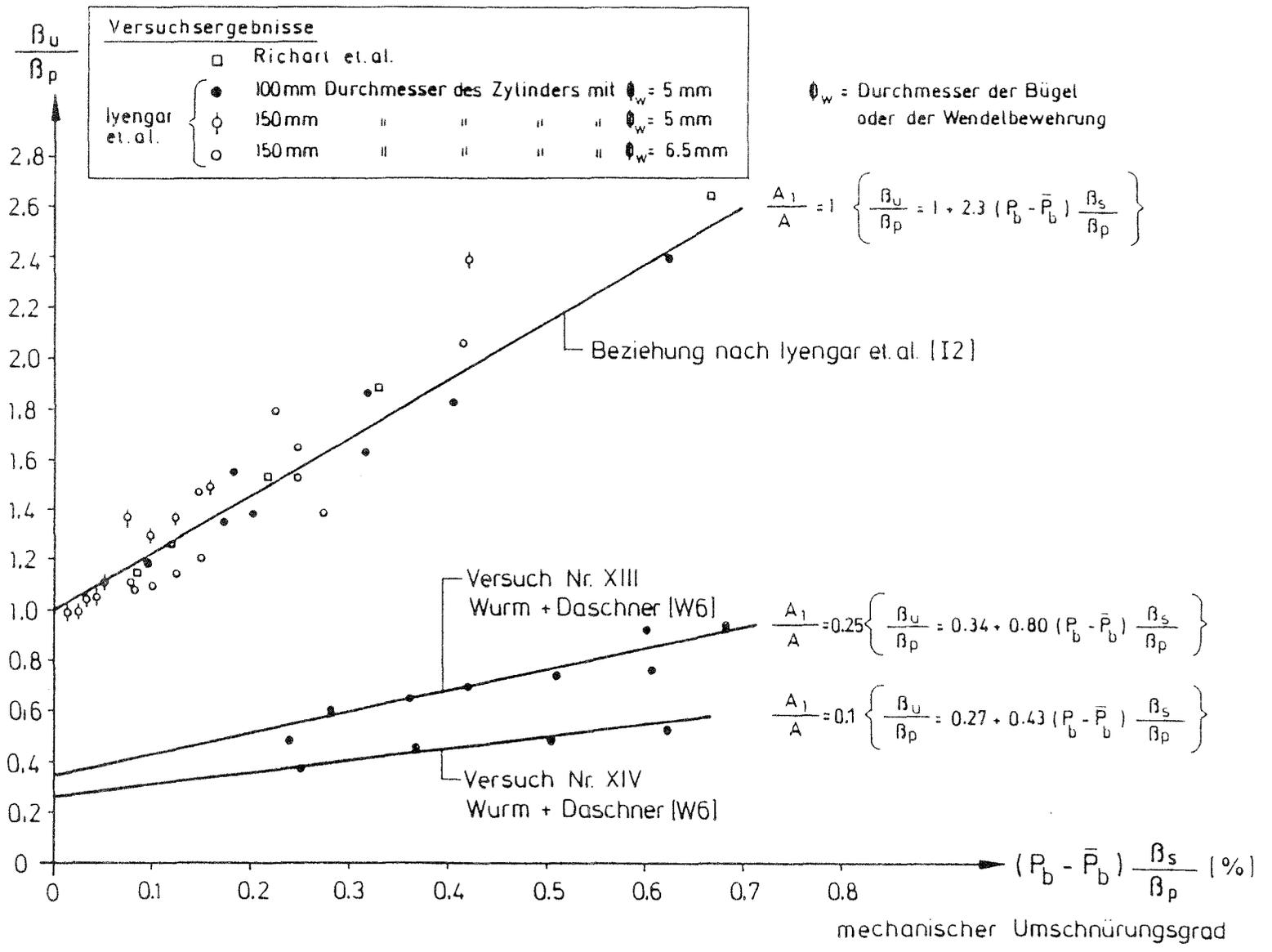
b_{ef} : Durchmesser der Zylinder oder die kleinste Seite des Prismas,

ν_1, ν_2 : Faktoren aus Bild (5.3).

Um die Duktilität des Betons für verschiedene Wendelbewehrungen und verschiedene Lasteinleitungsflächen zu berücksichtigen, werden die Versuchsergebnisse von Iyengar et. al. [I2] für ($b_{ef}/a=1$) in Bild (5.4) angegeben. Für die Versuche von Wurm und Daschner [W3] für ($b_{ef}/a=2$ und 3) wurden zuerst die mechanische Umschnürungsgrade nach Iyengar et.al. [I1] berechnet und dann die Beziehungen zwischen dem Verhältnis der maximalen, erreichten Spannung zur einaxialen Druckfestigkeit des Betons (β_u/β_p) und dem mechanischen Umschnürungsgrad in Bild (5.4) ebenfalls zum Vergleich angegeben.

Hier wurde b_{ef} als die totale Breite oder der Durchmesser des Querschnittes betrachtet.

Bild 5.4 Verhältnis zwischen maximal erreichter Druckspannung zur einaxialen Druckfestigkeit des Betons bei verschiedenen Umschnürungsgraden und verschiedenen Verhältnissen der effektiven Breite bzw. Fläche zur Lastleitungsplattenbreite.



Die Versuchsergebnisse von Wurm und Daschner [W3] zeigten ebenso, daß die Beziehungen zwischen dem Verhältnis den maximal erreichten Spannungen zur einaxialen Druckfestigkeit des Betons und dem mechanischen Umschnürungsgrad für ($b_{ef}/a=2$ und 3) linear sind und durch die folgenden Beziehungen gut erfaßt werden:

$$\text{für } (b_{ef}/a=2); \beta_u/\beta_p = 0,34 + 0,80 (P_b - \bar{P}_b) \beta_s/\beta_p \quad (5.1)$$

$$\text{für } (b_{ef}/a=3); \beta_u/\beta_p = 0,27 + 0,43 (P_b - \bar{P}_b) \beta_s/\beta_p \quad (5.2)$$

Ukhagbe [U1] hat eine Parameterstudie zur Analyse von umschnürten rotations-symmetrischen Körpern mit Hilfe der FEM durchgeführt. Das Verhältnis der maximal erreichten Druckspannung β_u zu der einaxialen Druckfestigkeit β_p des Betons und der mechanischen Umschnürungsgrade wurden für ($b_{ef}/a=1$) berechnet und in Bild 5.5 aufgezeigt.

Nach dem in Bild 5.5 dargestellten Zusammenhang verläuft die Beziehung in dem Bereich $\Phi_w=0$ mm bis $\Phi_w=16$ mm linear, wobei Φ_w der Durchmesser der Wendelbewehrung ist.

Ab Durchmesser $\Phi_w=16$ mm verhält sich die Bruchlast weitestgehend konstant. Es ist anzumerken, daß die Ergebnisse der FEM Analyse im Lastniveau niedriger

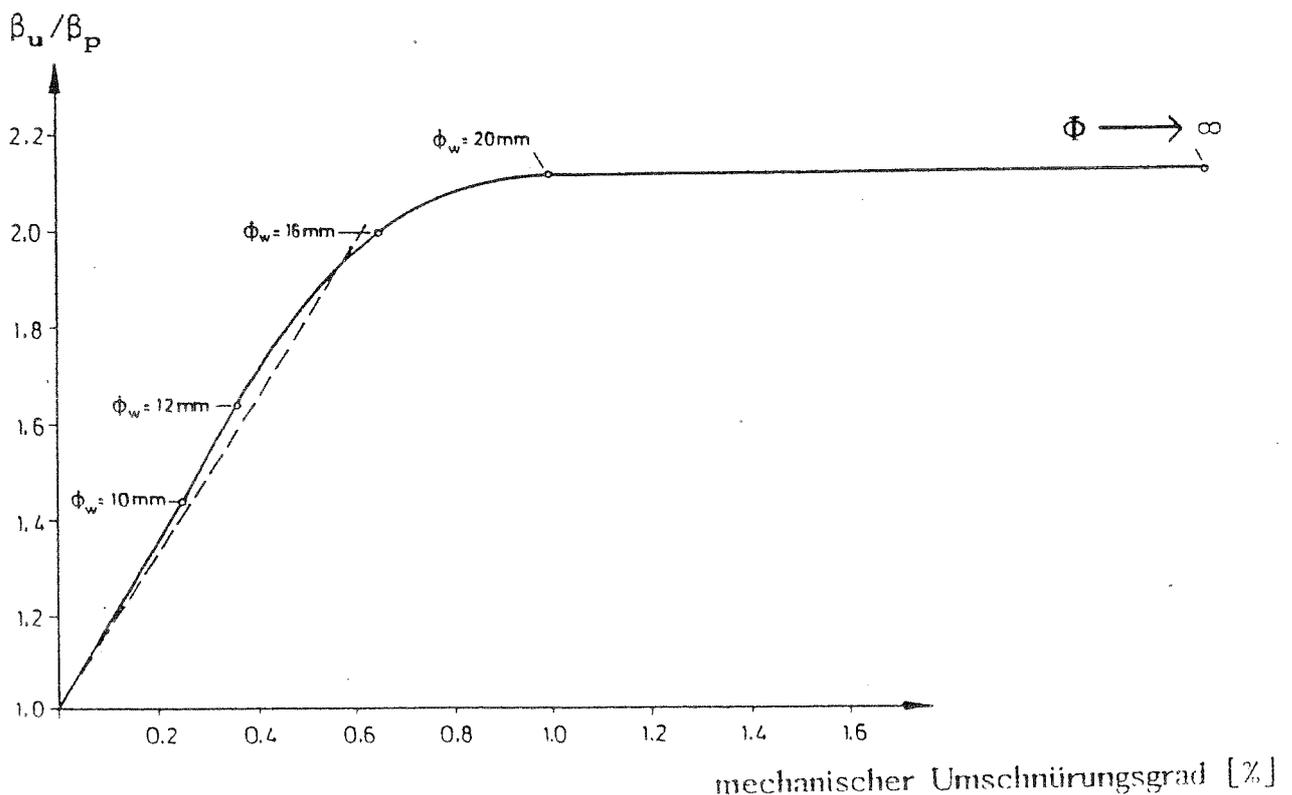


Bild 5.5 Tragfähigkeit des Betons bei verschiedenen Wendelbewehrungen

liegen als die Versuchsergebnisse von Iyengar et. al. [I1]. Bei einem Verhältnis von $(b_{ef}/a \geq 3.5)$ hat die FEM Analyse gezeigt, daß der Körper kaum noch von der Stahlmenge der Wendelbewehrung beeinflusst wird [U1].

5.4 Fachwerkmodell für einen mehrflächigen Verankerungskörper

Bild 5.6 zeigt einen mehrflächigen Verankerungskörper, der im Kapitel 4 bereits ausführlich beschrieben ist. Aus den Spannungsvektoren der linearen FE-Berechnung des mehrflächigen Verankerungskörpers, die im Bild 4.6 angegeben sind wird der Körper nach Schlaich in B- und D- Bereiche unterteilt.

Die Stör- oder D- Bereiche des Verankerungskörpers sind im Bild 5.7 angegeben. Diese Bereiche sind wie der Verankerungskörper rotationssymmetrisch, jeder Bereich konnte durch Druckstäbe und querliegende Zugstäbe ersetzt werden.

Bild 5.8 zeigt das Fachwerkmodell des Verankerungskörpers, das durch die Kombination der Stäbe der einzeln Störbereiche zusammengesetzt wurde.

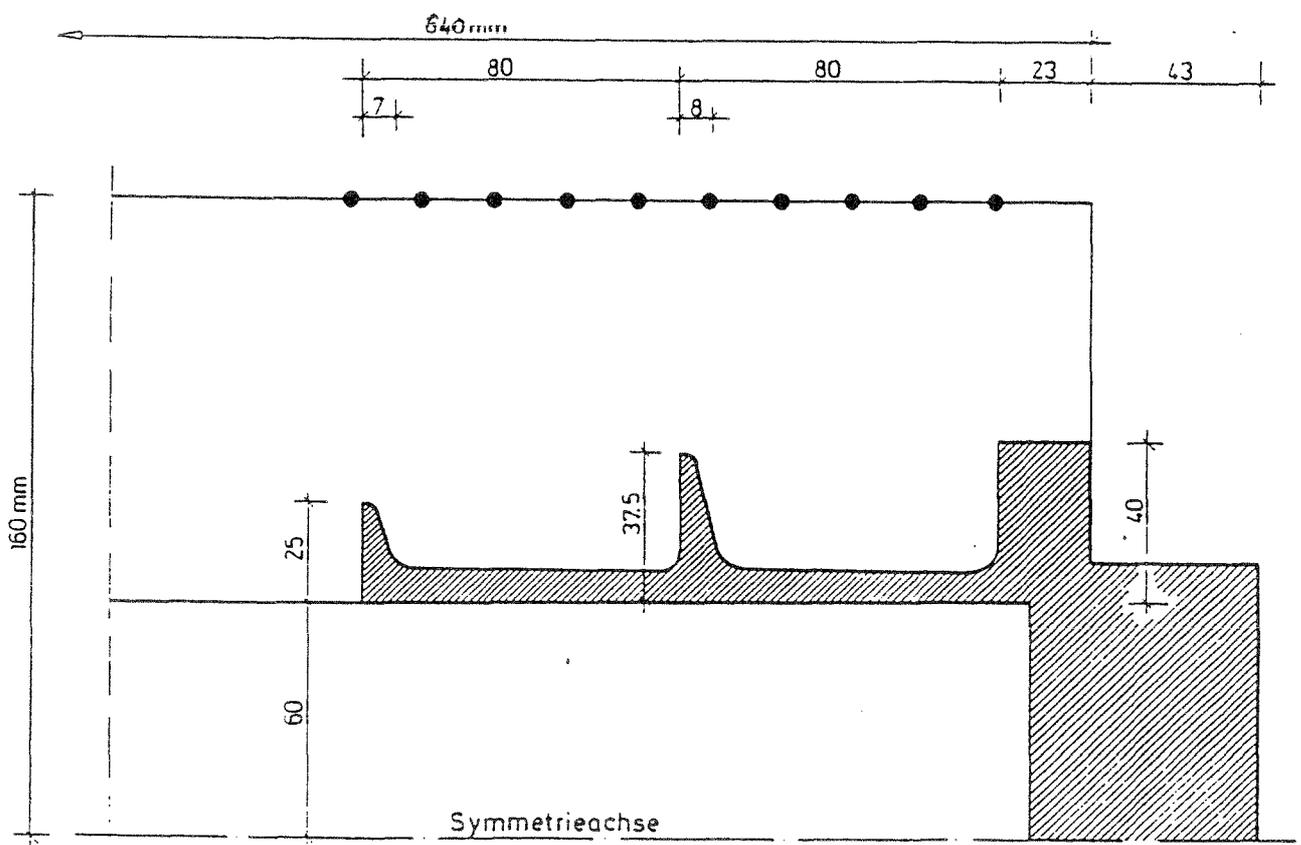


Bild 5.6 Mehrflächenverankerungskörper, rotationssymmetrisches Ersatzmodell

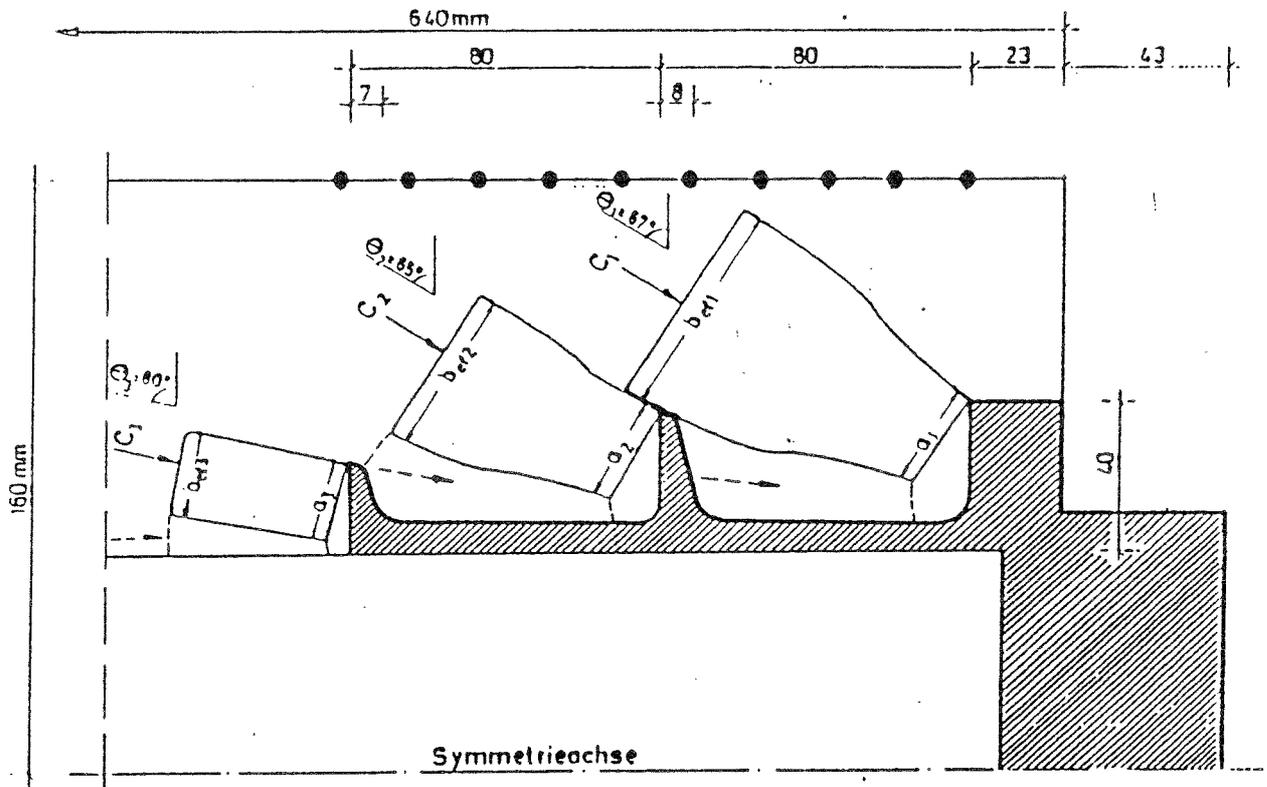


Bild 5.7 Störbereiche (D- Bereiche) eines mehrflächigen Verankerungskörpers

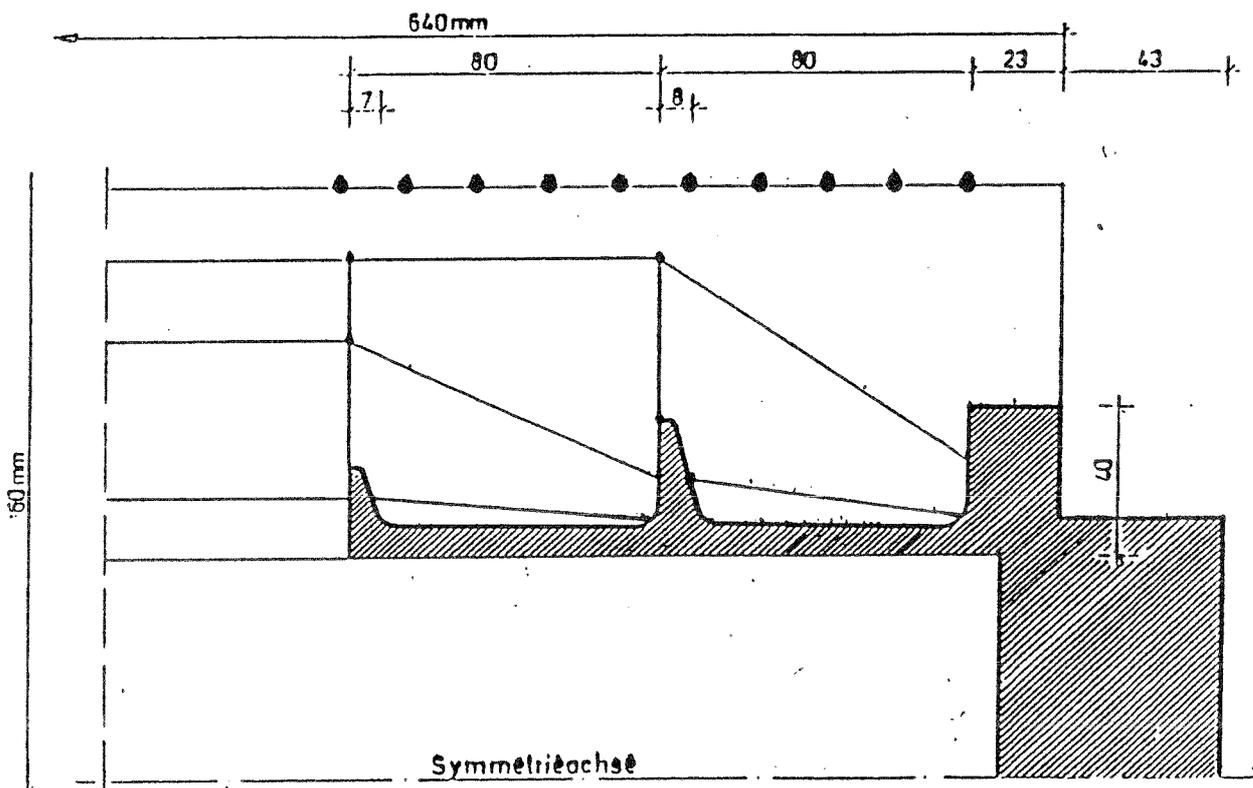


Bild 5.8 Kombiniertes Scheiben-Stabwerkmodell eines mehrflächigen Verankerungskörpers.

5.5 Die Berechnung mehrflächiger Verankerungskörper

Mehrfächige Verankerungskörper haben den Vorteil, daß sie die Kraft an verschiedenen Stellen übertragen können. Dadurch wird eine Verminderung der Spannungskonzentration erreicht. Die Spannungsverteilung wird relativ ausgeweitet, so daß das Material besser ausgenutzt wird und die Tragfähigkeit des Körpers sich erhöht.

Bild 5.9 gibt eine Darstellung eines Verankerungskörpers, wobei die schraffierten Teile die Stahlplatten sind, und die nach außen ausgeweiteten Linien die Störbereiche des Körpers repräsentieren. Für die Berechnung wurde der Körper in drei Teile aufgeteilt. Jedes Teil fängt mit einer Lasteinleitungsplatte an und endet mit der Grenze des Störbereiches. Die Form der Störbereiche hängt von den Abmessungen des axialen Rohrs sowie von den Breiten und Dicken der Lasteinleitungsplatten und den Abständen zwischen den benachbarten Platten ab.

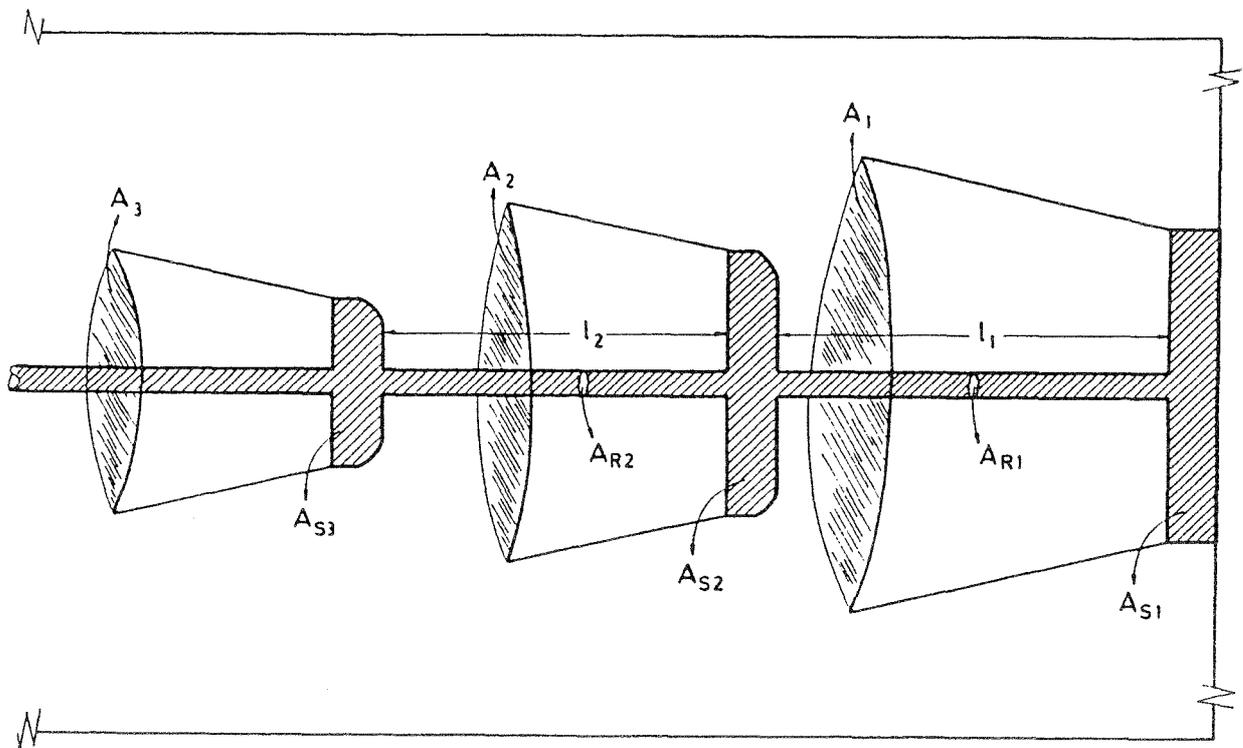


Bild 5.9 Störbereiche eines mehrflächigen Verankerungskörpers.

Aus Bild 5.9 folgt:

$$\text{Totale Druckkraft} = A_1\beta_{u1} + A_2\beta_{u2} + A_3\beta_{u3} - A_R(\beta_{u1} + \beta_{u2} + \beta_{u3}) \quad (5.3)$$

wobei:

A_1, A_2, A_3 : die Querschnittsflächen der Störbereiche 1,2,3.

A_R : die Querschnittsfläche des Rohrs.

β_{u1} , β_{u2} , β_{u3} : die maximal aufnehmbaren Spannungen im Beton, aus Bild 5.4 bedeuten.

Es ist anzumerken, daß um die größte Tragfähigkeit des Körpers zu erzeugen, die Abstände zwischen den Platten so gewählt werden sollten, daß sie das 1,5 fache der effektiven Breite des Störbereiches annehmen, dann ist die maximale Fläche durch den Beton voll ausgenutzt.

Für stark geneigte Störbereiche, sollte die Neigung Θ bei der Modellbildung in Betracht gezogen werden.

5.5.1 Beispiel

Hier wurde das Beispiel des mehrflächigen Verankerungskörpers, das im Abschnitt 5.4 beschrieben wurde, berechnet. Dabei wird die Beziehung (5.3) verwendet. Bild 4.2 zeigt die Bewehrung in dem Körper.

Zuerst folgt eine Berechnung des mechanischen Umschnürungsgrades:

5 Bügel, Durchmesser $\Phi_{w1} = 10 \text{ mm} / S_w = 60 \text{ mm}$
5 Wendeln, Durchmesser $\Phi_{w2} = 12 \text{ mm} / S_w = 50 \text{ mm}$ } siehe Bild 5.10
Der Umfang des Verankerungskörpers: $U = \pi d_k$, $d_k = 320 \text{ mm}$,
Höhe der Umschnürung: $h = 183 \text{ mm}$.

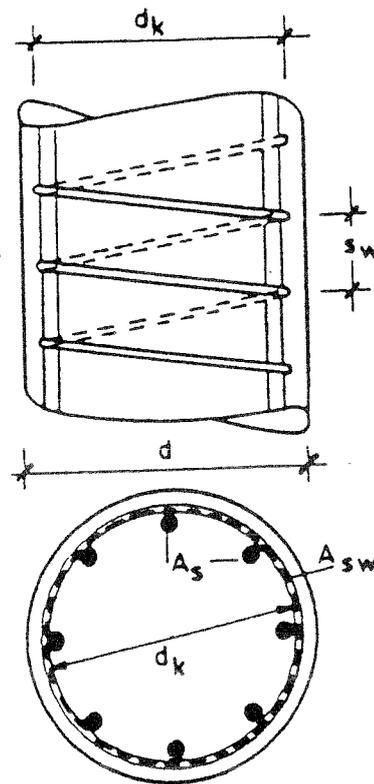


Bild 5.10 Schematische Darstellung eines umschnürten zylindrischen Betonkörpers.

$$\text{Stahlvolumen: } V_s = (5/4) * (\pi \Phi_{w1}^2 + \pi \Phi_{w2}^2) * \pi d_k$$

$$\text{Betonvolumen: } V_b = (\pi d_k^2 / 4) * h$$

$$P_b = V_s / V_b = 6,54 \%$$

$$\bar{P}_b = P_b / 5 = 1,31 \%$$

Für den oberen Teil des Körpers gilt:

$$\text{Der Umschnürungsindex } I_1 = (P_b - \bar{P}_b) \beta_s / \beta_p = 5,24 \% * 420 / 36,8 = 0,597 \approx 0,6$$

Für den unteren Teil des Körpers $I_2 \approx 0,4$

$$b_{ef1} = 68,9 \text{ mm}, b_{ef2} = 42,4 \text{ mm}, b_{ef3} = 29 \text{ mm}$$

$$A_{c1} = 40888,5 \text{ mm}^2, \quad A_{c2} = 21621 \text{ mm}^2, \quad A_{c3} = 10327,5 \text{ mm}^2$$

$$(b_{ef1} / a_{s1}) = 1,7, \quad \text{mit Umschnürungsgrad } I_1 = 0,6 \Rightarrow \beta_{u1} / \beta_p = 1,2$$

$$(b_{ef2} / a_{s3}) = 1,54, \quad \text{mit Umschnürungsgrad } I_1 = 0,6 \Rightarrow \beta_{u2} / \beta_p = 1,5$$

$$(b_{ef3} / a_{s3}) = 2, \quad \text{mit Umschnürungsgrad } I_2 = 0,4 \Rightarrow \beta_{u3} / \beta_p = 0,7$$

worin a_s die Breite der Lasteinleitungsplatte ist.

Das Verhältnis (β_u / β_p) wird aus Bild 5.4 interpoliert.

$$\text{Totale Kraft in dem Körper: } T = A_{c1} * \beta_{u1} + A_{c2} * \beta_{u2} + A_{c3} * \beta_{u3}$$

$$T = (40888,5 * 1,2 + 21621 * 1,5 + 10327,5 * 0,7) * 36,8$$

$$T = 3265,15 \text{ kN}$$

Werden die in Bild 5.7 dargestellten Neigungen: $\Theta_1 = 67^\circ$, $\Theta_2 = 65^\circ$, $\Theta_3 = 80^\circ$ angesetzt, reduziert sich die totale Kraft auf $T = 3005,75 \text{ kN}$.

Diese Kraft stimmt mit den Versuchsergebnissen sowie mit den Ergebnissen der FE- Berechnung, die im Kapitel 4. angegeben werden, gut überein.

Eine lineare FE- Berechnung wird für das kombinierte Scheiben- Fachwerkmodell des mehrflächigen Verankerungskörpers durchgeführt. Dabei wird nur 1 rad des rotationssymmetrischen Verankerungskörpers berechnet. Das FE- Netz des kombinierten Scheiben- Fachwerkmodells ist im Bild 5.11 dargestellt.

ORIGINAL  23.08 [mm]

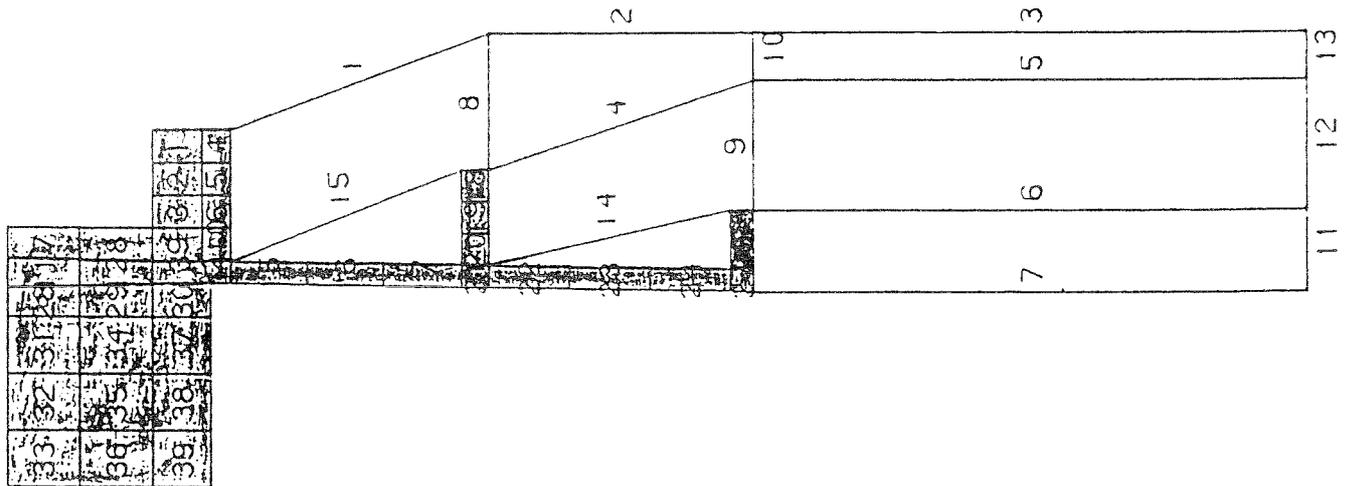


Bild 5.11 FE- Netz des kombinierten Scheiben- Fachwerkmodells des mehrflächigen Verankerungskörpers.

Die wesentlichen Rechenergebnisse für die Kräfte in den Stäben des kombinierten Scheiben- Fachwerkmodells bei einer Last von 3300.0 kN (die Bruchlast im Versuch) werden hier zusammengefaßt und ergeben:

Element Nr.	Kraft (N)	Element Nr.	Kraft (N)
1	-0.113183E+05	9	0.380789E+04
2	-0.105649E+05	10	0.000000E+00
3	-0.105649E+05	11	0.865609E+00
4	-0.117101E+05	12	0.000000E+00
5	-0.110736E+05	13	0.000000E+00
6	-0.141961E+05	14	-0.109307E+05
7	-0.172232E+05	15	-0.100101E+05
8	0.405996E+04		

Die Ergebnisse der FE-Berechnung des kombinierten Scheiben- Fachwerkmodells stimmen mit der im Kapitel 4. vorgenommenen Berechnungen überein.

Die Berechnung nach der von Weischede entwickelten Methode [W1], siehe Abuassab [A1], hat zwei verschiedene Werte gegeben, einen mit Wendelbewehrung von 3826 kN und einen ohne Wendelbewehrung von \approx 1800 kN.

Die Versuchsergebnisse von [K6] ergaben eine Bruchlast von 3300 kN.

Die nach Abschnitt 5.5.1 durchgeführte Berechnung hat eine Bruchlast von 3005.75 kN ergeben.

6. Zusammenfassung

Querbewehrung:

Die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen lassen den Schluß zu, daß neben der Betonfestigkeitsklasse und der geometrischen Abmessungen der Querbewehrungsgehalt zweifellos der bedeutendste Parameter auf die Tragfähigkeit der durch Ankerkörper auf den Beton übertragbaren Verankerungen von Spanngliedern ist und auf die Bruchlast starken Einfluß nimmt, weil er die Art des Versagens bestimmt. Bei nichtlinearen FE-Berechnungen ist es daher äußerst wichtig, alle künstlichen Versagensmechanismen mit absoluter Sicherheit auszuschließen. Gemeint sind dabei solche Mechanismen, die nur auf eine schlechte Modellierung der Struktur oder auf die Unzulänglichkeiten der numerischen Lösungsmethoden zurückzuführen sind und deshalb mit der Wirklichkeit wenig zu tun haben.

Bei gänzlich fehlender Querbewehrung tritt bei Erreichen der aufnehmbaren Kraft ein schlagartiger Bruch ein, sobald die Querspannung die Zugfestigkeit des Betons überschreitet. Wird nun eine sehr geringe Bewehrung angeordnet, tritt der Bruch ein, wenn die Bewehrung in einigen hochbeanspruchten Bügeln die Fließgrenze erreicht. Bei weiter zunehmendem Bewehrungsgehalt kann eindeutig beobachtet werden, wie der Beton in Längsrichtung aufreißt und dabei mehr und mehr Bügel mit freigesetzten Betonzugkräften belastet, ohne sie unbedingt zum Fließen zu bringen. Es ist dabei möglich, daß der Ribbereich den üblicherweise querbewehrten Eintragungsbereich von $L = d$ überschreitet, also wenig oder nicht querbewehrten Beton antrifft. Es ist dann wieder mit einem schlagartigen, wenn auch verzögerten Bruch zu rechnen. Ist der Beton überall ausreichend querbewehrt, wird Versagen infolge Druckbruch unter der Lastplatte eintreten.

Zwischen der Lastplattenbreite und der Spaltzugkraft besteht aufgrund der nichtlinearen FE-Berechnungen und auch anderer Arbeiten [W2] ein etwa linearer Zusammenhang, der mit Gleichung 3.1 näherungsweise bestimmt werden kann. In diesem Ausdruck ist kein Sicherheitsfaktor gegen Spaltzugversagen enthalten. Bei der Dimensionierung der erforderlichen Bewehrung sollten vor allem zur Dehnungs- und Ribbreitenbegrenzung die zulässigen Stahlspannungen gering gewählt werden. Selbstverständlich ist das bei kleinen Lastplatten eintretende Druckversagen als Folge von großen Eindrückungen zu vermeiden.

Plattenbreite:

Direkt unter der Lastplatte treten die höchsten Druckspannungen auf. Versuche haben aber ergeben, daß der Beton dort selten versagt, da die Querdehnungsbehinderung durch die Lastplatte und die Wendelbewehrung einen dreiaxialen Druckspannungszustand erzeugt. Bei relativ großen Lastplatten ($a_1/a \geq 0,6$) treten nur geringe Querkzugspannungen auf.

Das Verhältnis der Breite der Lastplatte a_1 zur Breite des Betonkörpers a hat einen wesentlichen Einfluß auf die Bruchlast. Je größer das Verhältnis a_1/a ist, desto größer ist die Bruchlast. Bruchlasten der verschiedenen Modelle sind in Tabelle 3.7 zusammengestellt.

Lastexzentrizität:

Exzentrisch aufgebrachte Lasten oder Lastpaare mit relativ großer Exzentrizität e (Bild 3.36 b) oder großem Abstand e' (Bild 3.36 a) erzeugen große Stirnzugspannungen (s. Bild 3.39), die zum Bruch führen, wenn nicht eine entsprechend ausreichende Bewehrung angeordnet ist. Die Summe der Stirn und Spaltzugkräfte, bezogen auf die Bruchlast, ist von der Lastexzentrizität fast unabhängig. Bei sehr großen Lastexzentrizitäten muß durch eine ausreichende Biegebewehrung am gegenüberliegenden Rand ein Biegebruchversagen verhindert werden. Es läßt sich feststellen, daß die Resultierende der Querkzugkräfte mit zunehmender Lastexzentrizität in Richtung der Lastplatte wandert. Für eine optimale Ausnutzung sind die Bügel also näher am Trägerende anzuordnen.

Es sei hier aber noch darauf hingewiesen, daß die vorstehenden Ausführungen unter der Voraussetzung gelten, daß der Betonkörper so ausreichend bemessen ist, daß im Bereich außerhalb der Krafteintragung und -verteilung die Betondruckfestigkeit nicht erreicht wird.

Durchmesser der Wendelbewehrung:

- a) Je größer der Durchmesser der Wendelbewehrung, desto größer ist die Tragfähigkeit des Betonkörpers bei gleicher Ganghöhe.
- b) Mit zunehmendem Durchmesser ist bei gleicher Ganghöhe ab einem gewissen Durchmesser der Wendelbewehrung (hier $\Phi = 16$ mm) keine Steigerung der Tragfähigkeit des Betonkörpers mehr erkennbar.
- c) Je größer der Durchmesser der Wendelbewehrung bei einer kleinen Ganghöhe z.B. $s_w = 40$ mm, desto kleiner ist die entstehende maximale Querkzugspannung

vor dem Bruch, und desto mehr tendiert die Versagensursache zum Druckversagen.

- d) Je kleiner der Durchmesser der Wendelbewehrung bei gleicher Ganghöhe, desto kleiner ist die maximale effektive Spannung in dem umschnürten Betonkörper vor dem Bruch.

Plattendicke und Lastbreite:

In den Bildern 3.23 und 3.24 sind für einen berechneten Verankerungskörper unterschiedliche Verhältnisse von a_1/a die Dehnungen der Wendelbewehrungen in Abhängigkeit von der Lastplattendicke für eine konstante Last $P = 1750 \text{ kN}$ dargestellt. Dort ist zu erkennen, daß die Dehnungen bei dünneren Platten nur geringfügig größer sind als für dickere Platten. Dies gilt aber nur ab einer entsprechenden Mindestplattendicke (vergl. Abschnitt 3.6.2.2).

In Bild 3.25 ist die Abhängigkeit der Dehnung in der Wendelbewehrung von der Lastbreite w' bei konstanter Belastung ($P = 1750 \text{ kN}$) dargestellt. Je kleiner die Lastbreite w' , umso größer werden die Dehnungen in der Wendelbewehrung. In Bild 3.26 ist die Abhängigkeit der Bruchlast P_u von der Plattendicke $2t$ dargestellt. In Bild 3.27 ist zu erkennen, daß mit zunehmender Lastbreite w' die Bruchlast P_u deutlich größer werden.

Die Ergebnisse können zusammengefaßt werden:

- a) Je größer die Lastplattendicke t ist, desto größer ist die Tragfähigkeit der Betonkörper. Ab einer bestimmten Lastplattendicke ist bei zunehmender Dicke eine wesentliche Steigerung nicht mehr zu erzielen.
- b) Je größer die Ankerplattendicke t und daraus folgend die Tragfähigkeit der Betonkörper anwächst, desto größer sind die vorhandenen maximalen Spaltzug- bzw. Querspannungen und die Spaltzugkraft. Bei konstanter Vorspannkraft ergeben sich aber mit zunehmender Plattendicke kleiner Querspannungen und Spaltzugkräfte.
- c) Die Lage der Nullstelle der Spaltzugspannungen ($\sigma_z = 0$) ist nahezu unabhängig von der Dicke der Ankerplatte.
- d) Je dicker die Ankerplatte ist, desto größer ist die bei zunehmender Bruchlast P_u auftretende Zugspannung in der Ankerplatte.
- e) Je dünner die Ankerplatte ist, desto größer ist die Biegeverformung der

Ankerplatte. Die Ankerplattendicken sollten deshalb nicht zu gering gewählt werden.

- f) Eine Vergrößerung der Ankerplattendicke t führt nur zu einer geringeren Verkleinerung der Randzugspannung $\sigma_{Z,R}$.
- g) Je größer die Ankerplattendicke t ist, desto kleiner ist auch die resultierende Randzugkraft parallel zum Rand der Krafteintragung.

Mehrflächige Verankerungskörper:

Die Schubkräfte, die infolge der Reibung zwischen den Betonelementen und den Stahlelementen, die entlang des Verankerungskörpers liegen, entstehen, erzeugen große Zugspannungen in den Betonelementen.

Der Druck unter den vorspringenden Teilen des Verankerungskörpers mit dem Druck in den Ringelementen und den o.g. Schubkräften erzeugen eine Spannung, die im Druck-Druck-Zug Bereich des Betonmodells liegt. Die Versagensumhüllende für den Druck-Druck-Zug Bereich des Betonmodells ist schwach modelliert, da die Zugspannungen linear mit der Zunahme der Druckspannungen einer anderen Richtung abnehmen. Dies ermöglicht die Abnahme der Zugfestigkeiten früher als die experimentellen Ergebnisse verschiedener Autoren wie Kupfer [K5] und Kotsovovs [K4] ergaben.

Die Zugfestigkeit des Betons unter den vorspringenden Teilen des Verankerungskörpers wurde deshalb rechnerisch früher als im Versuch erreicht. Danach wurde rechnerisch keine Kraft mehr von diesen Elementen getragen, sie wurde stattdessen von den elastischen Elementen übernommen, siehe Bild 4.10.

Die Neigung der Hauptspannungsvektoren im Kernbereich der oberen Hälfte des Versuchskörpers entspricht einer Spaltzugwirkung, die auf die genannten Kräfte zurückzuführen ist.

Im Versuch Nr. 698 liegen die Risse im oberen Teil des Versuchskörpers. Die Spannungen der nichtlinear durchgeführten Berechnung zeigen deutlich, daß die Dichte der Zugspannungen im oberen Teil des Körpers höher als im unteren Teil ist. Das stimmt mit den Versuchsergebnissen überein. Das Versagen bei der nichtlinearen FEM Berechnung ist durch das Erreichen der Betonzugfestigkeit eingeleitet worden.

Wenn die Spaltzugspannung im Kernbereich des Körpers die Zugfestigkeit des

Betons erreicht hat, entstehen Risse. Mit erhöhter Kraft entwickeln sich die Risse von Innen nach Außen bis die Oberfläche des Körpers erreicht ist.

Die Spannungen im unteren Teil des Körpers sind hauptsächlich Druckspannungen, Bild 4.10 Die Zugspannungen sind so klein, daß sie vernachlässigt werden können.

Die Druckfestigkeit des Betons ist in einigen Elementen erreicht worden. Dies führt jedoch zu keinem Versagen da sich die Druckfestigkeit des Betons im Vergleich zur einaxialen Druckfestigkeit durch mehraxialen Druck erhöht, siehe Abschnitt 4.2.3.

Die in der nichtlinearen FEM Berechnung erreichte Versagenslast beträgt ca. 93 % der im Versuch erreichten Versagenslast. Dies wurde durch die Anordnung zusätzlicher elastischer Elemente, die im Kernbereich des Körpers liegen ermöglicht, wobei diese Elemente die lokalen Effekte konzentrierter Spannungen ausschalten. Diese zusätzlichen elastischen Elemente steifen den Körper jedoch nicht aus, da der totale Elastizitätsmodul im Kernbereich von den elastischen Elementen und von den Betonelementen gleich dem Elastizitätsmodul des Betons außerhalb des Kernbereichs ist.

Die Ergebnisse der durchgeführten nichtlinearen FEM Berechnungen für 6 weitere mehrflächige Verankerungskörper (siehe Abschnitt 4.3, Tabelle 4.4) stimmen mit den Versuchsergebnissen nach [K6] sehr gut überein. Daraus kann man schließen, daß solche komplizierte Verankerungskörper mit der FEM gut modelliert werden können.

Die im Abschnitt 4 gegebenen Hinweise sollten bei solchen Modellierungen beachtet werden.

Umschnürte Druckglieder:

Im Kapitel 5. wurde eine Methode zur Berechnung von umschnürten Druckgliedern mit Wendelbewehrung gegeben. Dabei wurde die Duktilität des Betons bei Querdehnungsbehinderung durch Wendelbewehrung berücksichtigt. Hierzu wurden Diagramme für die Beziehung zwischen der maximal erreichten Druckspannung zu der einaxialen Druckfestigkeit des Betons bei verschiedenen Umschnürungsgraden und verschiedenen Verhältnissen der effektiven Breite bzw. Fläche zur Lasteinleitungsplattenbreite bzw. -fläche gegeben.

Das Beispiel für den mehrflächigen Verankerungskörper (Kapitel 4) wurde hier nochmals berechnet. Die Ergebnisse stimmen mit den im Kapitel 4, die mit der FEM berechnet wurden, überein.

Literaturverzeichnis :

- [A1] Abuassab, W. H.:
Anwendung der Finite-Elemente-Methode bei nichtlinearen Berechnungen zur Entwicklung und Verbesserung von Fachwerkmodellen für die Entwurfspraxis im Stahlbetonbau, Dissertation, Gesamthochschule Kassel, 1993.
- [A2] Abuassab, W. H.; Schulz, J-U. und Mehlhorn, G.:
Erweiterung des Betonmodells von Bathe/Ramaswamy, Forschungsbericht Nr. 18 aus dem Fachgebiet Massivbau, Gesamthochschule Kassel, Universität, 1991.
- [A3] ADINA-IN Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis-In. Users Manual, Report AE 84-6 ADINA Engineering, Dec. 1984.
- [B1] Ban, S.; Nuguruma, H. and Ogaki, Z.:
Anchorage zone stress distributions in post-tensioned concrete members, Proceedings of the World Conference on Prestressed Concrete, San Francisco, pp. 16.1 - 16.14, July 1957.
- [B2] Bathe, K.-J. and Chaudhary, A.:
A solution method for planar and Axisymmetric Contact Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, pp. 65-88, 1985.
- [B3] Bathe Klaus-Jürgen ; Ramaswamy Seshadri :
On Three Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures. Journal for Nuclear Eng. & Design, Vol 52, pp. 385-409, 1979.
- [B4] Bazant, Z.P.:
Concrete Fracture in Concrete and Reinforced Concrete, Mechanics of Geomaterials, edited by Bazant, Wiley & Sons, pp. 259-303, 1985.
- [B5] Blanks, Robert F.:
Concrete for Prestressing, Proceedings of the First United States Conference on Prestressed Concrete, Massachusetts Institute of Technology, pp. 136-149, 1951.
- [B6] Bleich, F.:
Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem, Der Bauingenieur, Nr. 9, pp. 255-259, 1923 und Nr. 10. pp. 304-307, 1923.

- [B7] Bortsch, R.:
Die Spannungen in Walzelenkquadern, Beton und Eisen, Vol. 35, Nr.4,
pp. 61-66, 1935.
- [C1] Campos, L.T.; Oden, J.T. and Kikuchi, N.:
A Numerical Analysis of a Class of Contact Problems with Friction in
Elastostatics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,
Vol. 34, pp. 821-845, 1982.
- [C2] CEB, Comite Euro-International Du Beton:
Concrete under Multiaxial States of Stress , Constitutive Equations for
Practical Design, Bulletin Nr. 156, (1983).
- [C3] CEB-FIP Model Crack Code 1990:
Bulletin D'Information Nr. 196, Comite Euro-International Du Beton,
Paris.
- [C4] Cervenka, V. and Gerstle, K.H.:
Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels, Publications of IABSE,
Vol. 31, and Vol. 32, 1972.
- [C5] Chen, W.F.; D.J. Han:
Plasticity for Structural Engineers, Springer-Verlag, New York 1988.
- [C6] Christodoulides, S.P:
A two-dimensional investigation of the end anchorages of post-tensioned
concrete beam, The Structural Engineer, Vol. 33, No. 4, pp. 120-133,
April 1955.
- [C7] Christodoulides, S.P:
A photoelastic investigation of prestressed concrete anchorages, Civil
Engineering and Public Works Review, Vol. 51, No. 603, pp. 994-997,
Sept. 1956.
- [D1] De Groot, A.K.; Kusters, G.M.A. and Monnier, T.:
Numerical modelling of Bond-Slip Behaviour, Heron Concrete Mechanics,
Vol. 26, No. 1B, 1981.
- [D2] Dinges, D.; Keuser, M.; Kolmar, W. und Mehlhorn, M.:
Untersuchung verschiedener Elementsteifigkeitsmatrizen auf Ihre Eignung
zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen. Dritter Zwischenbericht,
Institut für Massivbau, TH Darmstadt 1983.

- [D3] Douglas, D.J. und N.S. Trahir:
An examination of the anchorage zone of a post tensioned prestressed concrete beam, Mag. Concr. Res. 12, No. 34, pp. 9 - 18, March 1960.
- [D4] Duvant, G. and Lious, J.L.:
Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.
- [F1] Figueiras J.A.:
Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells. Thesis, Department of Civil Engineering, University of Wales, Sep. 1983.
- [G1] Godman, R.; Taylor, R. and Brekke, T.:
A model for the mechanics of rocks, Soil Mechanics and Foundations, Division 5, pp. 637-659, 1986.
- [G2] Grasser, E. und G. Thielen:
Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgröße und Formänderung von Stahlbetontragwerken nach DIN 1045, Ausgabe Januar 1972.
DAfStb Heft 240, 1976.
- [G3] Guyon, Y.:
Contraints dans les pieces prismatiques soumises à des forces appliquées sur leurs bases, au voisinage de ces bases, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 11, pp. 165-226, 1951.
- [G4] Guyon, Y.:
Prestressed Concrete, 1st edition, London Contractors Record and Municipal Engineering, pp. 127-200, 1953.
- [H1] Hawkins, N.M.:
The Bearing Strength of Concrete Loaded Through Rigid Plates, Magazine of Concrete Research, Vol. 20, p. 31-40, 1968.
- [H2] Hawkins, N.M.:
The behaviour and design of end blocks for prestressed concrete beams. Civil Eng. Transactions, Inst. of. Engineers, Australia, Vol. CE8, No.2, Oct. 1966.
- [H3] Hawkins, N.M.:
The bearing strength of concrete for strip loadings, Mag. of concr. Res. Vol. 22, No. 71, pp. 87-98, June 1970.

- [H4] Heilmann H.G., P. Wurm:
Versuche über Teilflächenbelastung, Forschungsbericht, Institut für
Massivbau der TU München, 1974.
- [H5] Hertz, H.:
Miscellaneous Papers, Mc Millan, London 1896.
- [H6] Hoshino, M.:
Ein Beitrag zur Untersuchung des Spannungszustandes an Arbeitsfugen
mit Spanngliedkopplungen von abschnittweise hergestellten Spannbeton-
brücken. Dissertation D 17, Darmstadt, 1974.
- [I1] Iyengar, K. T.; Desayi, P. and Reddy, K.:
Stress-strain characteristics of concrete confined in steel binders,
Magazine of Concrete Research, Vol 22, No. 72, pp.173-184, Sept. 1970.
- [I2] Iyengar, K.T.:
Two dimensional theories of Anchorage zone stresses in Post-tensioned
prestressed Beam, Journal of the American Concrete Institute (ACI),
Vol. 59, No. 10, pp. 1443-1465, Oct. 1962.
- Anchor zone stresses in prestressed concr. Beams, Journal of the
Structural Division, Proceedings of the ASCE, pp. 807-824, March 1971.
- Der Spannungszustand in einem elastischen Halbstreifen und seine
technischen Anwendungen, Dissertation, TH Hannover, 1960.
- [K1] Kalker, J. J.:
The Computation of three Dimensional Rolling Contact with dry Friction,
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14,
No. 9, p. 1293-1307 (1979).
- [K2] Keuser, M. :
Verbundmodelle für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen von
Stahlbetonkonstruktionen, VDI-Verlag, Reihe 4, Nr. 71, 1985.
- [K3] Khan, M. and Saugy, B.:
Evaluation of the Influence of Some Concrete Characteristics on Non-
linear Behaviour of a Prestressed Concrete Reactor Vessel, ACI Publi-
cation SP-34, Concrete for Neuclear Reactors, 1972.

- [K4] Kotsovos M.D.:
A mathematical Description of the Strength properties of Concrete under generalised Stress. Magazine of Concrete Research, Vol. 31, No. 108, pp. 151-158, 1979.
- [K5] Kupfer Helmut:
Das Verhalten des Betons unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton Heft 229, 1973.
- [K6] Kupfer, H.:
Bericht über die Prüfung der Verbindung Ankerkörper-Beton (mehrfächiger Verankerungskörper mit aufsetzbarer Verankerungsscheibe) für die DYWIDAG-Bündelspannglieder mit 12 und 19 Litzen Φ 0,6" St 1570/1770. Technische Universität München, Institut für Bauingenieurwesen III. Berichte Nr. 1247/ Hau/K 1983 und 1088/ Hau/K 1986.
- [L1] Leonhardt, F.:
Vorlesungen über Massivbau, 1. Teil, Springer-Verlag, 1973.
- [L2] Leonhardt, F.:
Spannbeton für die Praxis, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf 1973.
- [L3] Leonhardt, F.; E. Mönning:
Vorlesung über Massivbau, 2. Teil, Springer-Verlag, 1975.
- [M1] Magnel, G.:
Presstressed Concrete, 2nd edition, Concrete Publicateion Ltd. London, pp. vii, 300, 1950.
- [M2] Mehlhorn, G.:
Anwendung der Methode der finiten Elemente im Stahlbetonbau - Grundlagen, Anwendungen in Forschung und Praxis. Finite Elemente Anwendungen in der Baupraxis, Tagung an der Technischen Universität München, Herausgeber: Grundmann, H.; Stein, E. und Wunderlich, W., Ernst und Sohn, pp. 50-85, 1984.
- [M3] Mörsch, E.:
Über die Berechnung der Gelenkquader, Beton und Eisen 23 (1924), H.12, S. 156-161.

- [N1] Ngo, D.; Scordelis, A.C.:
Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, Proceedings of the Speciality conference on F.E.M. in civil Engineering, Montreal, Quebec, Canada, 1972.
- [O1] Oden, J.T. and Lin, T.L.:
On the General Rolling Contact Problem for Finite Deformations of a Viscoelastic Cylinder, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 57, pp. 297-367, 1986.
- [O2] Oden, J.T. and Pires, E.B.:
Nonlocal and Nonlinear Friction Laws and Variational Principles for Contact Problems in Elasticity, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, p. 67 March 1983.
- [O3] Okamoto, N. and Nakasawa, M.:
Finite Element Incremental Contact Analysis with Various Frictional Conditions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, No. 3, pp. 337-357, 1979.
- [R1] Rasheeduzzafar:
An investigation of the distribution in the anchorage zone of a post tensioned prestressed concrete beams, Ph.D. thesis, University of London, 1964.
- [R2] Rashid, Y.R.:
Three dimensional analysis of elastic solid - I, analysis procedure, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, pp. 1311- 1331, 1969.
Three dimensional analysis of elastic solid - II, the computational problems, Int. J. Solids Structures, Vol. 6, pp. 175, 1970.
- [R3] Richard, F.E.; A. Brandtzaeg und R.L. Brown:
A study of the failur of concrete under combined compressive stress. University of Illinois Engineering and Experimental Station, Bulletin No. 185, 104 pp.
- [R4] Rostásy, F.S.; P. Holzenkämpfer:
Rechenmodelle zur Ermittlung der Tragfähigkeit für die Verbindung Ankerkörper-Beton von Spannverfahren, Forschungsbericht, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, TU Braunschweig, Dez. 1991.

- [R5] Rowe, R.E.:
End block stresses in post-tensioned concrete members, *The Structural Engineer*, Vol. 41, No. 2, Feb. 1963.
- [R6] Rydzewski, J.R. und F.J. Whitebread:
Short end blocks for prestressed beams, *Struct. Engineering*, 41, No. 2, pp. 41-53, Feb. 1963.
- [S1] Samkari, M.:
Vorspannkrafteintragung im Spannbeton. Dissertation, Gesamthochschule Kassel, Universität, 1987.
- [S2] Sargious, M.:
Beitrag zur Ermittlung der Hauptzugspannungen am Endauflager vorgespannter Betonbalken, Dissertation, TH Stuttgart, 1960.
- [S3] Sargious, M.:
Hauptzugkräfte am Endauflager vorgespannter Betonbalken, *Die Bautechnik* 38, H. 3, S. 91-97, 1961.
- [S4] Schäfer, H.:
A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 6, p. 335, 1975.
- [S5] Schlaich, J.; Schäfer, K. and Jennewein, M.:
Towards a Consistent Design of Structural Concrete, *PCI-Journal*, Vol. 32, No. 3, p. 74, 1987.
- [S6] Sievers, H.:
Über den Spannungszustand im Bereich der Ankerplatten von Spanngliedern vorgespannter Stahlbetonkonstruktionen, *Der Bauingenieur*, 31, Nr. 4, pp. 134-135, April 1956.
- [S7] Sievers, H.:
Die Berechnung von Auflagerbänken und Auflagerquarden von Brückenpfeilern, *Der Bauingenieur*, 27, Nr. 6, pp. 209-213, Juni 1952.
- [S8] Spieth, H.P.:
Das Verhalten von Beton unter hoher örtlicher Pressung und Teilbelastung unter besonderer Berücksichtigung von Spannbetonverankerungen. Dissertation, TH Stuttgart 1959.

- [U1] Ukhagbe, J.:
Ausgewählte Probleme zur Vorspannkrafteintragung im Spannbeton
Dissertation, Gesamthochschule Kassel, Universität, 1989.
- [W1] Weischede, D.:
Untersuchungen zum Methodischen Konstruieren im Stahlbetonbau,
Dissertation, Institut für Massivbau der Universität Stuttgart, 1983.
- [W2] Wurm, P. und F. Daschner:
Teilflächenbelastung von Normalbeton. Versuche an bewehrten Scheiben.
DafStb, Heft 344, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1983.
- [W3] Wurm, P. und F. Daschner :
Versuche über Teilflächenbelastung von Normalbeton. Deutscher Aus-
schuss für Stahlbeton, Heft 286, Ernst & Sohn Verlag, Berlin 1977.
- [Y1] Yettram, A.L.; K. Robbins:
Anchorage zone stresses in axially post-tensioned I-section members
with end blocks, Magazine of Concrete Research, Vol. 23, No. 74, pp.
37-42, March 1971.
- [Z1] Zielinski, J. und R.E. Rowe:
An investigation of the stress distribution in the anchorage zones of post-
tensioned concrete members, Cement and Concrete Association, Research
Report No. 9, London, pp. 1-32, Sep. 1960.
- [Z2] Zielinski, J. und R.E. Rowe:
The stress distribution associated with groups of anchorages in post-
tensioned concrete members, Cement and Concrete Association, Research
Report No. 13, P. 39, London, Oct. 1962.
- [Z3] Zienkiewics, O. and Taylor, R.:
The Finite Element Method. Vol. 1, McGraw Hill Co. IV Edition, London,
1989.

ANHANG A

Seiten 1 bis 21

Beschreibung des verwendeten Betonmodells von Bathe/Ramaswamy

Das Betonmodell von Bathe/Ramaswamy [B3] wurde von Abuassab et al. [A2] weiterentwickelt und ist in den Programmsystemen ADINA-84 bzw. SOLVIA-87 implementiert. Es hat die folgenden Charakteristika:

- (i) Das Modell ist ein hypoelastisches Modell, das eine einaxiale Spannungs-Verzerrungsbeziehung als Grundlage hat und auch für zwei- und dreiaxiale Spannungszustände verwendet wird.
- (ii) Zug- und Druckversagen ist durch Versagensebenen definiert.
- (iii) Strain Softening ist nur in der Druckzone definiert bis Totalversagen eintritt.
- (iv) Kriechen und Schwinden werden nicht betrachtet.

Dieses vereinfachte Modell zur Beschreibung des mehraxialen Verhaltens des Betons, ist so formuliert, daß die im Bild 3.1 angegebene Bruchumhüllende verschiedene Modellierungen von Beton und Felsmaterialien ermöglicht. Hierin werden in den Programmsystemen ADINA bzw. SOLVIA vierundzwanzig Eingabeparameter für das Beton-Druckversagen verlangt.

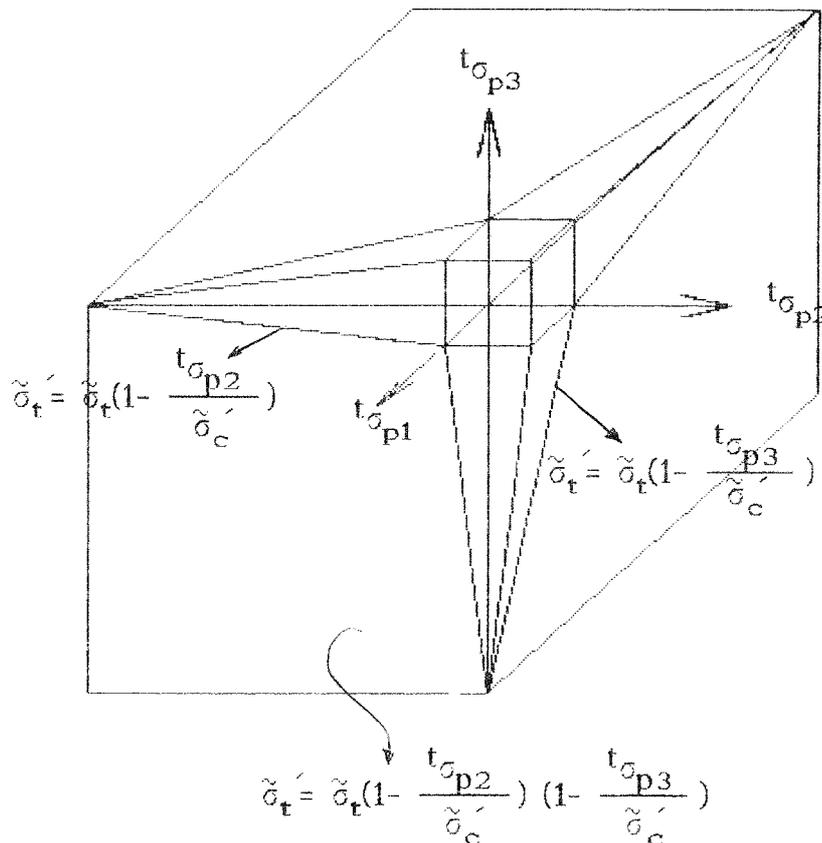


Bild 1 Bathe/Ramaswamy Betonmodell [B3] für mehraxiales Beton-Zug-Bruchversagen.

Im Bild 1 bedeuten:

$\tilde{\sigma}'_t$ = die einaxiale Zugfestigkeit unter mehraxialer Beanspruchung

$\tilde{\sigma}_t$ = die einaxiale Zugfestigkeit

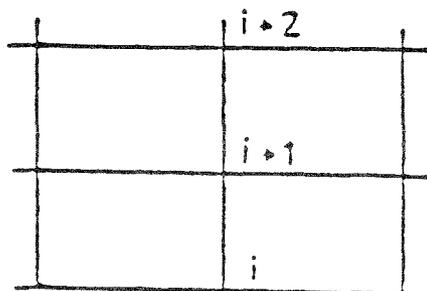
$\tilde{\sigma}'_c$ = die einaxiale Druckfestigkeit unter mehraxialer Beanspruchung zum Zeitpunkt t.

${}^t\sigma_{p1}, {}^t\sigma_{p2}, {}^t\sigma_{p3}$ = die Hauptspannungen in den Richtungen 1, 2, 3

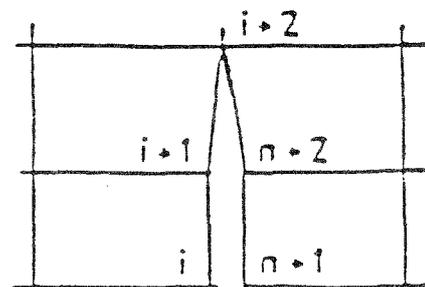
Für die Erfassung der Ribbildung existieren zwei verschiedene Möglichkeiten der Diskretisierung.

a) Methode der diskreten Risse [N1]

Risse können nur an den Elementrändern entstehen (diskrete Risse). Damit wird es erforderlich, das System nach jedem RiB neu zu formulieren. Die Ribverläufe können dabei exakt lokalisiert werden. Hier wird ein Elementnetz benutzt, bei dem die Lage der Elementgrenzen möglichst entsprechend den zu erwartenden Ribverläufen gewählt wird. In der FE - Berechnung wird die Last inkrementell gesteigert. Nach jedem Lastschritt wird überprüft, ob entlang einer Elementgrenze die Zugfestigkeit des Betons überschritten wird. Wenn dies der Fall ist, wird der Kontakt zwischen den beiden betroffenen Elementen aufgehoben, indem zusätzliche Knotenpunkte so definiert werden, daß die Elemente in der Ribfläche jeweils eigene, voneinander unabhängige Elementknoten besitzen (s. Bild 2). Im nächsten Lastschritt werden die Knotenkräfte an den betroffenen Elementen mit umgekehrtem Vorzeichen aufgebracht, so daß die resultierende Spannung im Rib zu Null wird. Anschließend wird die Last wieder gesteigert,



vor der Ribentstehung



nach der Ribentstehung

i= die Knotennummer

n= die Gesamtzahl der Knoten

Bild 2 Diskretes Ribmodell, s. z.B. [M2].

wobei sich nun die Rißufer unabhängig voneinander verformen können. Bei einer erneuten Überschreitung der Zugfestigkeit entlang einer Elementgrenze wird analog verfahren. Bei diesem Verfahren werden die möglichen Rißverläufe durch die Elementgrenzen vorgegeben. Außerdem ist der einzelne Riß exakt lokalisiert und bietet die Möglichkeit, bei entsprechend feiner Elementeinteilung, Rißweiten und -abstände als Ergebnisse einer FE - Berechnung zu erhalten.

b) Methode der verschmierten Risse [R6], [C4]

Rißfelder treten innerhalb des Elementes auf, wobei nach Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons ein Teil oder das gesamte Element für die weitere Berechnung als anisotrop betrachtet wird (s. Bild 3). Hier werden in jedem Lastschritt die Hauptspannungen in den Integrationspunkten der Betonelemente mit der Betonzugfestigkeit verglichen.

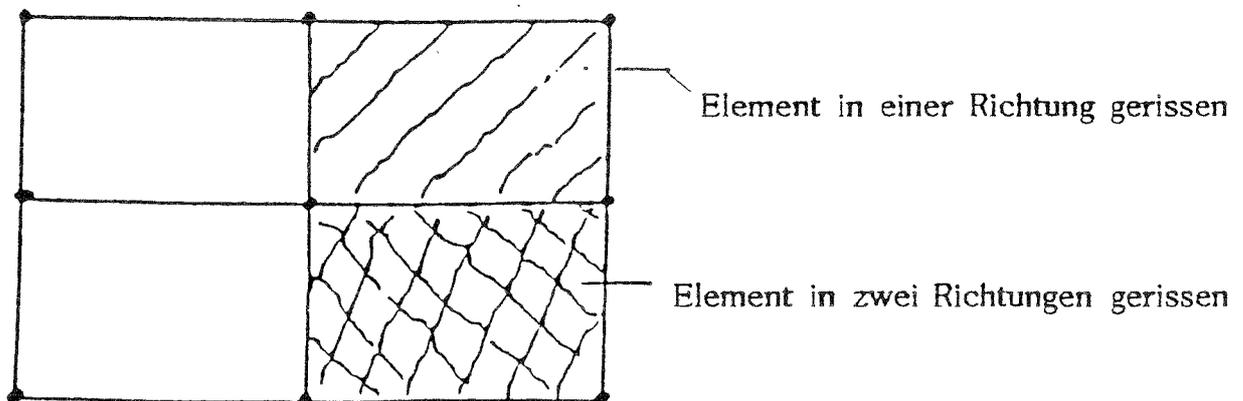


Bild 3 Rißfelder im Element, s. z.B. [M2].

Überschreitet die Hauptzugspannung die Zugfestigkeit des Betons, so wird der Beton für die Einzugsfläche des betreffenden Integrationspunktes als gerissen angesehen. Es wird ein Rißfeld angenommen, dessen Rißrichtung senkrecht zur Hauptzugspannung verläuft. Dies wird in der Werkstoffbeziehung dadurch erfaßt, daß die Steifigkeit senkrecht zum Riß zu Null gesetzt und die Schubsteifigkeit abgemindert wird. Für die Elementsteifigkeitsmatrix bedeutet dies den Übergang vom isotropen zu einem anisotropen Materialverhalten, da parallel zu den angenommenen Rissen weiterhin Spannungen übertragen werden. Außerdem wird die im Riß frei werdende Spannung auf Nachbarelemente umgelagert. Wegen der Annahme von Rißfeldern an Stelle von Einzelrissen wird dieses Verfahren als "verschmierte Rißbildung" bezeichnet.

Ein Vergleich der beiden Verfahren miteinander ist in [D2] ausführlich behandelt. In der vorliegenden Arbeit wird nur das Verfahren mit "verschmierter Rißbildung" verwendet. Im folgenden wird das Werkstoffmodell des ADINA-84 bzw. SOLVIA-87 Programms beschrieben.

1. Beschreibung der einaxialen Spannungs-Verzerrungsbeziehung

In Bild 4 ist ein typischer Verlauf einer einaxialen Spannungs-Verzerrungsbeziehung für das Material Beton dargestellt. Bathe und Ramaswany haben diese Kurve in drei Verzerrungsbereiche aufgeteilt:

$$t_{\tilde{e}} \geq 0 \quad , \quad 0 > t_{\tilde{e}} \geq \tilde{e}_c \quad , \quad \tilde{e}_c > t_{\tilde{e}} \geq \tilde{e}_u$$

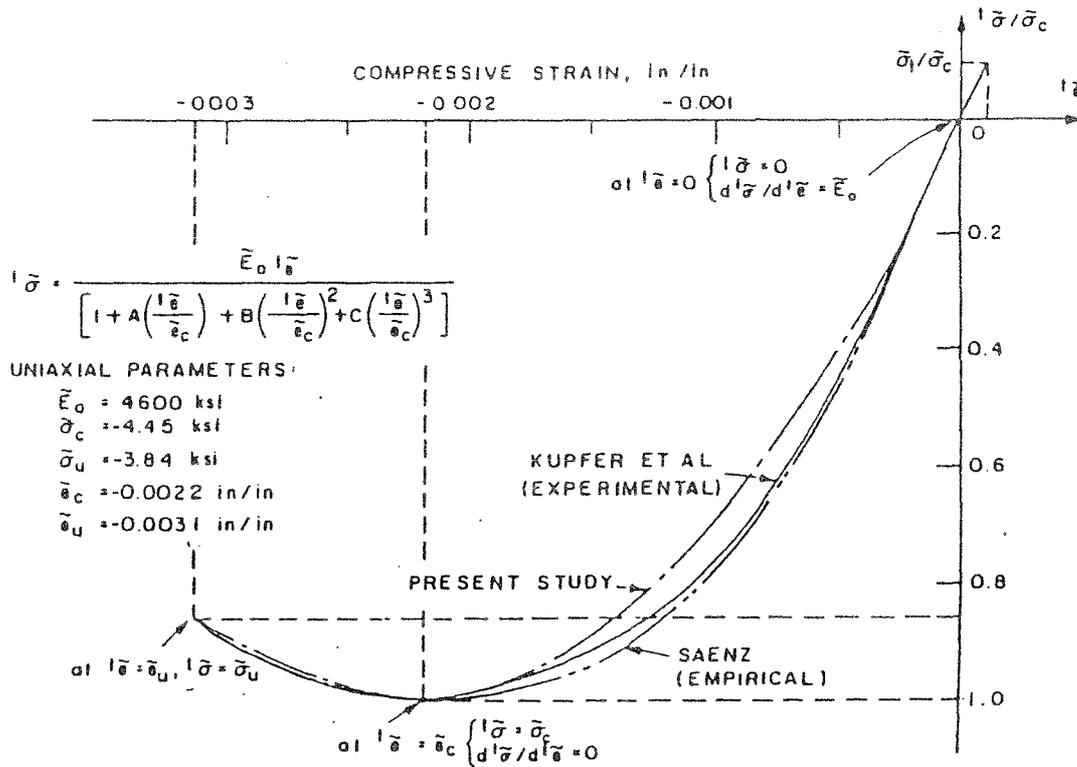


Bild 4 Einaxiale Spannungs-Verzerrungsbeziehung des Betons, nach [B3].

Es bedeuten:

$t_{\tilde{e}}$: die einaxiale Verzerrung zum Zeitpunkt t .

\tilde{e}_c : die einaxiale Verzerrung bei Auftreten der minimalen Spannung $\tilde{\sigma}_c$.

\tilde{e}_u : die Bruchstauchung.

Für $t_{\tilde{e}} \geq 0$, wird eine lineare Spannungs-Verzerrungsbeziehung mit einem konstanten Elastizitätsmodul \tilde{E}_0 vorgesehen

$$t_{\tilde{\sigma}} = \tilde{E}_0 t_{\tilde{e}}$$

Die Betonspannung und die Steifigkeit senkrecht zum RiB nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons fallen plötzlich (direkt) auf Null ab.

Für $0 > t_{\tilde{\sigma}} > \tilde{\sigma}_c$, wird folgende auf die einaxiale Druckfestigkeit normierte Spannungs-Verzerrungsbeziehung verwendet :

$$\frac{t_{\tilde{\sigma}}}{\tilde{\sigma}_c} = \frac{(\tilde{E}_0 / \tilde{E}_s) (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)}{1 + A (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c) + B (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^2 + C (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^3} \quad (1)$$

Der Tangentenmodul ergibt sich aus Gl.(1) durch Differenzieren nach der Verzerrung $t_{\tilde{\epsilon}}$ zu

$$t_{\tilde{E}} = \frac{\partial \tilde{\sigma}(t_{\tilde{\epsilon}})}{\partial t_{\tilde{\epsilon}}}$$

und

$$t_{\tilde{E}} = \frac{\tilde{E}_0 [1 - B (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^2 - 2C (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^3]}{1 + A (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c) + B (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^2 + C (t_{\tilde{\sigma}} / \tilde{\sigma}_c)^3} \quad (2)$$

mit

$$A = \left[\frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_u} + (p^3 - 2p^2) \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} - (2p^3 - 3p^2 + 1) \right] / \left[(p^2 - 2p + 1) p \right]$$

$$B = \left[\left(2 \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} - 3 \right) - 2A \right] \quad ; \quad C = \left[\left(2 - \frac{\tilde{E}_0}{\tilde{E}_s} \right) + A \right]$$

$$\tilde{E}_u = \tilde{\sigma}_u / \tilde{\epsilon}_u \quad ; \quad \tilde{E}_s = \tilde{\sigma}_c / \tilde{\epsilon}_c \quad ; \quad p = \tilde{\epsilon}_u / \tilde{\epsilon}_c$$

Als Parameter, die durch Versuche ermittelt werden müssen, dienen: \tilde{E}_0 , $\tilde{\epsilon}_c$, $\tilde{\epsilon}_u$, $\tilde{\sigma}_c$

2. Beschreibung der mehraxialen Spannungs-Verzerrungsbeziehung

Die Betonspannungs-Verzerrungsbeziehung ist abhängig vom Belastungszustand (Belastung oder Entlastung). Bei Entlastung ist das Material isotrop und der Anfangselastizitätsmodul \tilde{E}_0 wird für die inkrementelle Spannungs-Verzerrungsmatrix verwendet, um die Steifigkeit bzw. Spannung zu berechnen. Bei Belastung sind die Hauptspannungen zur Zeit t so geordnet, daß

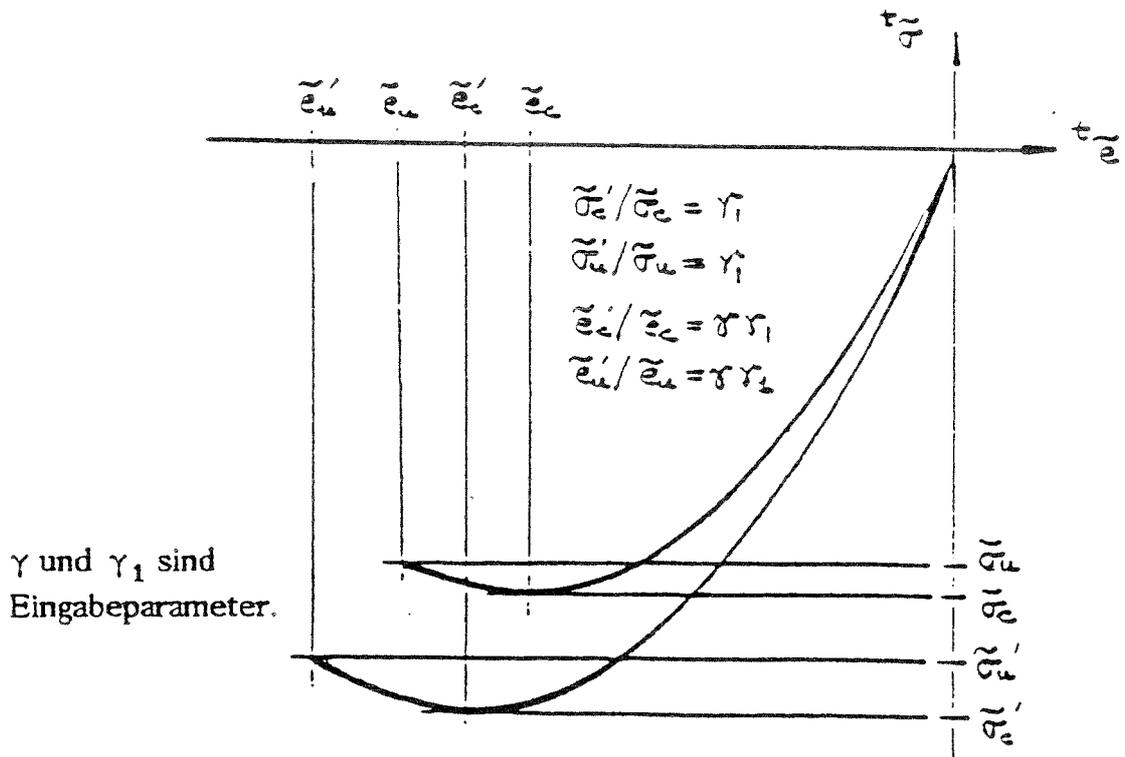
$$t_{\sigma_{p1}} \geq t_{\sigma_{p2}} \geq t_{\sigma_{p3}} \quad \text{gilt.}$$

Um mehraxiale Spannungen zu berücksichtigen, sind die Materialwerte $\tilde{\sigma}_c$, $\tilde{\sigma}_u$, $\tilde{\epsilon}_u$ in Gl.(1) durch $\tilde{\sigma}'_c$, $\tilde{\sigma}'_u$, $\tilde{\epsilon}'_c$ zu ersetzen,

wobei gilt:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}'_u &= \gamma_1 \tilde{\sigma}_u & \tilde{\epsilon}'_u &= \gamma_1 \gamma \tilde{\epsilon}_u \\ \tilde{\epsilon}'_c &= \gamma_1 \gamma \tilde{\epsilon}_c & \gamma &= \tilde{\sigma}'_c / \tilde{\sigma}_c \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

γ_1 ist ein Erhöhungsfaktor für die Verzerrungen, der über die Programmeingabe steuerbar ist (s. Bild 5). Der Wert γ ist der Erhöhungsfaktor zur Berücksichtigung des mehraxialen Verhaltens des Betons, da Beton unter mehraxialem Druck eine Erhöhung der Druckfestigkeit aufweist. Das mehraxiale Druckverhalten des Betons, das im Betonmodell implementiert ist, basiert auf den Kurven von Khan/Saugy [K3].



Die multilinearisierten Bruchumhüllenden sind im Bild 6 dargestellt. Die Ermittlung des Faktors γ folgt aus dem Diagramm des Bildes (6 b). Mit Hilfe des Spannungsverhältnisses $\tilde{\sigma}_{p2} / \tilde{\sigma}_c$ und dem Schnittpunkt der Linie $\tilde{\sigma}_{p1} / \tilde{\sigma}_c$ läßt sich als Ordinate das Verhältnis $\gamma = \tilde{\sigma}'_c / \tilde{\sigma}_c$ entnehmen.

Der Elastizitätsmodul jeder Hauptspannungsrichtung wird aus Gl.(2) mit den Werten, die man aus Gl.(3) erhält, ermittelt.

Wenn $\sigma_{p3} \geq \alpha \tilde{\sigma}'_c$, wobei α ein Eingabeparameter ist, wird das Material als isotrop mit äquivalentem mehraxialem Elastizitätsmodul tE betrachtet. In diesem Fall ist der Körper nur durch Zug- oder geringe Druckbeanspruchung belastet. Die entsprechende Spannungs-Verzerrungsbeziehung ist in diesem Fall eine isotrope Spannungs-Verzerrungsbeziehung der Form:

$$C = \frac{t_E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4 a)$$

In Gleichung (3-3.4 a) ist t_E :

$$t_E = \frac{|\tau_{\sigma p_1}| t_{\tilde{E}' p_1} + |\tau_{\sigma p_2}| t_{\tilde{E}' p_2} + |\tau_{\sigma p_3}| t_{\tilde{E}' p_3}}{|\tau_{\sigma p_1}| + |\tau_{\sigma p_2}| + |\tau_{\sigma p_3}|} \quad (4 b)$$

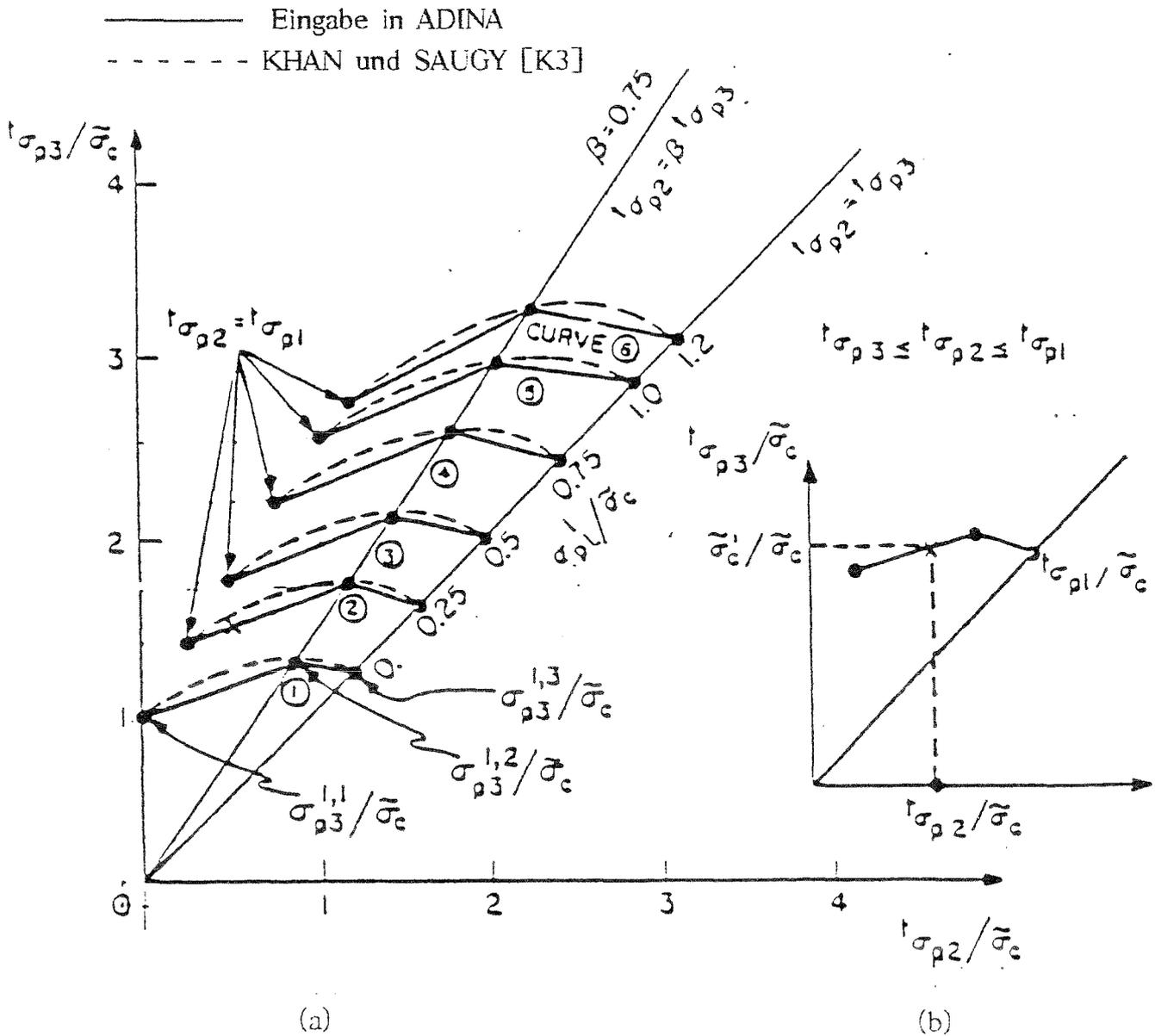


Bild 6 a,b Modell eines mehraxialen Beton-Druck-Bruchversagens nach Bathe [B3].

Wenn der Körper durch höheren Druck beansprucht wird, d.h. $\sigma_{p3} < \kappa \tilde{\sigma}'_c$, ist das Material orthotrop und die Materialgleichung wird auf die Achsenrichtung der Hauptspannungen transformiert.

$$\underline{C} = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) {}^t\tilde{E}'_{p1} & \nu {}^tE_{12} & \nu {}^tE_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) {}^t\tilde{E}'_{p2} & \nu {}^tE_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu) {}^t\tilde{E}'_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} E_{12} & 0 & 0 \\ & \text{Symm.} & & & \frac{1-2\nu}{2} {}^tE_{13} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} E_{23} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{mit } {}^tE_{ij} = \frac{|{}^t\sigma_{pi}| {}^t\tilde{E}'_{pi} + |{}^t\sigma_{pj}| {}^t\tilde{E}'_{pj}}{|{}^t\sigma_{pi}| + |{}^t\sigma_{pj}|} \quad (6)$$

Der Schubmodul ${}^tG_{ij}$ wird wie folgt berechnet:

$${}^tG_{ij} = \frac{{}^tE_{ij}}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

Die Spannungs-Verzerrungsbeziehung Gl.(5) ist nur für die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix gültig.

Die Ermittlung der Spannungen erfolgt durch die Anwendung von

$$\underline{\sigma} = \hat{\underline{c}} \underline{e} \quad (8)$$

worin $\hat{\underline{c}}$ die Matrix in Gleichung (5) jedoch mit einem bekannten Elastizitätsmodul ${}^t\tilde{E}'_{pi}$ in jeder Hauptrichtung ist, wobei

$${}^t\tilde{E}'_{pi} = \left[\tilde{\sigma} |{}^te_{pi} + e_{pi} - \tilde{\sigma} |{}^te_{pi} \right] / e_{pi} \quad (9)$$

${}^te_{pi}$, e_{pi} die Verzerrungen bzw. die inkrementellen Verzerrungen zur Zeit t in den Hauptspannungsrichtungen ${}^t\sigma_{pi}$ sind.

Die Elastizitätsmoduli der anderen Richtungen ${}^tE_{ij}$ werden hier nicht berücksichtigt.

3. Be- und Entlastungszustände

Die Betonspannungs-Verzerrungsbeziehung ist in Abhängigkeit vom Belastungszustand (Belastung oder Entlastung) ausgewertet worden. Im Materialmodell von Bathe/Ramaswamy [B3] wird die Querdehnungszahl ν als konstant angenommen. Um Belastung und Entlastung zu unterscheiden, ist die folgende Gleichung

definiert worden:

$${}^t f = {}^t \bar{s} + 3\alpha {}^t \sigma_m \quad , \quad (10)$$

wobei α ein dem jeweiligen Werkstoff anzupassender Faktor ist, der das nicht-lineare Verhalten (α dann meist negativ) berücksichtigt.

$${}^t \sigma_m = \frac{1}{3} ({}^t \sigma_1 + {}^t \sigma_2 + {}^t \sigma_3)$$

$${}^t \bar{s} = \frac{1}{6} [({}^t \sigma_1 - {}^t \sigma_2) + ({}^t \sigma_2 - {}^t \sigma_3) + ({}^t \sigma_3 - {}^t \sigma_1)]$$

Der Term ${}^t \bar{s}$ entspricht der von v. Mises eingeführten "reduzierten Schubspannung" und bewirkt die Gestaltsänderung eines Körpers, während ${}^t \sigma_m$ eine Volumenänderung hervorruft. Eine Steigerung der Beanspruchung des Materials auf ein zuvor nicht erreichtes Maß liegt vor, wenn

$${}^t f \geq f_{\max} \quad (11)$$

gilt, wobei f_{\max} dem an der betrachteten Stelle bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Größtwert dieser Funktion entspricht. Eine Entlastung bzw. Wiederbelastung liegt vor, wenn

$${}^t f < f_{\max} \quad (12)$$

ist. Bei Entlastung ist das Material isotrop und der Anfangselastizitätsmodul \tilde{E}_0 ist für die inkrementelle Spannungs- Verzerrungsmatrix verwendet worden, um die Steifigkeit bzw. Spannung zu berechnen.

Die Lastfunktion in Gl (10) konnte in Abhängigkeit von den Invarianten I_1 und J_2 geschrieben werden:

$${}^t f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} \quad (13)$$

worin I_1 die erste Invariante des Spannungstensors ist

$$I_1 = 3 \cdot {}^t \sigma_m = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

Die Gl.(3.13) beruht auf dem Drucker-Prager Kriterium, das Kriterium repräsentiert eine Modifikation des von Mises-Kriteriums, dessen Funktion lautet:

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (14)$$

worin k die Fließspannung aus reinem Schub bedeutet.

Das Drucker-Prager Kriterium lautet:

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (15)$$

worin α und k Materialkonstanten sind. Der zusätzliche Term αI_1 in der Gl.(15) stellt den Einfluß der hydrostatischen Spannungskomponente dar. Wenn α gleich Null wird, so folgt hieraus das von Mises-Kriterium.

Bild 7 stellt die Bruchumhüllende des Materials in der Meridianebene und in der Deviatorebene dar.

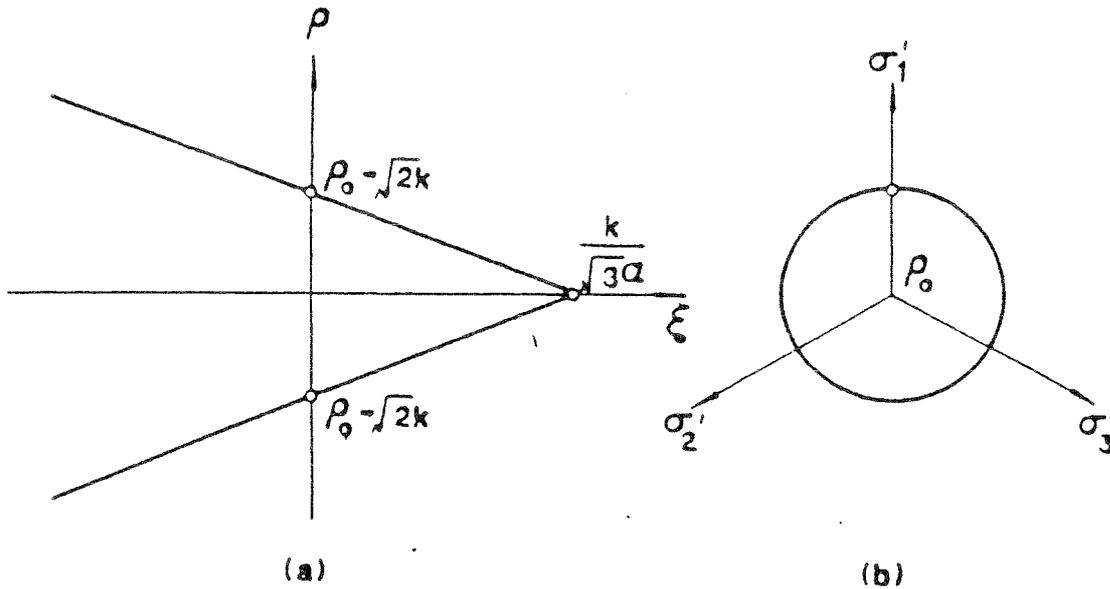


Bild 7 Drucker-Prager-Kriterium: (a) Meridianebene, $\vartheta = 0^\circ$, (b) Deviator-ebene, aus [C7].

Die Lastfunktion t_f ist gültig, wenn sie die Bruchumhüllende in korrekter Weise beschreibt. Da die Meridiane der Bruchoberfläche parabelförmig sind, muß die Lastfunktion der jeweiligen definierten Form der Bruchumhüllenden angepaßt werden.

4. Versagenskriterium

Das Modell der Hüllkurve für das Zugversagen in Bild 1 wird häufig verwendet. Dabei werden die Zugfestigkeiten des Werkstoffs in den Hauptspannungsrichtungen unabhängig voneinander angenommen, wobei auftretende Druckspannungen die Größe der Zugfestigkeiten jedoch beeinflussen können. Mittels der relativ einfachen Beziehung nach Bild 4 kann die Steigerung der maximal aufnehmbaren Druckspannung $t_{\sigma_{p3}}$ bei gegebenen Spannungen $t_{\sigma_{p1}}$ und $t_{\sigma_{p2}}$ gegenüber der einaxialen Druckfestigkeit $\tilde{\sigma}_c$ unmittelbar abgelesen werden. Im Bathe/Ramaswamy Materialmodell [B3] wird die dreiaxiale Bruchhüllkurve durch sechs Linienzüge angenähert. Je drei Versuchsparameter müssen vom Benutzer für das vorliegende Material eingegeben werden. Die Bereiche zwischen den Versuchspunkten werden durch Interpolation approximiert.

Um festzustellen, ob das Material versagt hat, wird der Spannungszustand innerhalb der Hüllkurve durch die Hauptspannungen ermittelt. Zugversagen liegt vor, wenn die Betonzugfestigkeit in einer Hauptspannungsrichtung überschritten ist. Es wird angenommen, daß die Versagensebene senkrecht zu der Hauptspannungsrichtung steht. Infolge des Versagens werden die Normal- und Schubsteifigkeiten senkrecht zur Versagensebene abgemindert.

Wenn die Hauptspannung ${}^t\sigma_{p1}$ größer als die Betonzugfestigkeit ist, ist die neue Spannungs- Verzerrungsbeziehung gleich

$$C = \frac{{}^tE}{1 - \nu^2} \begin{matrix} \eta_n & \nu\eta_n & \nu\eta_n & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{symmetrisch} & & & \eta_s \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \eta_s \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \eta_s \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \quad (16)$$

wobei meistens, $\eta_n = 0.01$, $\eta_s = 0.50$ gesetzt werden können. Für den Zugbruchbereich wird ein ebener Spannungszustand zugrunde gelegt. Der Faktor η_n wird nicht gleich Null gesetzt, um eine singuläre Steifigkeitsmatrix auszuschalten. Die Fähigkeit des Materials, Schubkräfte über einen Riß abzutragen, nimmt mit der Rißbreite ab. Das Bathe/Ramaswamy Betonmodell erlaubt jedoch nur, einen konstanten Faktor η_s einzugeben. Empfohlen wird nach Bathe [B3] einen Wert zwischen 0.4 und 1.0, wobei der Wert 1.0 zu hoch gegriffen ist. Wird das Material mit höherer Druckspannung in Querrichtung beansprucht, so daß $\sigma_{p3} < \kappa \sigma'_c$ gilt, wird anstelle der Gl.(16) die Gl.(5) verwendet.

5. Nachriß- und Nachbruchverhalten

Nachdem Zugversagen aufgetreten ist, wird in jedem nachfolgenden Lösungsschritt kontrolliert, ob das Versagen noch vorhanden ist. Das Versagen wird als inaktiv betrachtet, falls die Normalverzerrungen über die Versagensebene negativ werden und die Verzerrungen an der Ursprungsstelle des Versagens kleiner sind als zu Versagensbeginn. Andernfalls ist es aktiv, d.h. eine Zugbruchebene kann wechselweise aktiv und inaktiv sein.

Die Entstehung einer Zugversagensebene mit den zuvor beschriebenen Materialgleichungen ist abhängig von den Hauptspannungsrichtungen in der Ebene und den Richtungen senkrecht zur Versagensebene. Der Spannungszustand entlang der Zugbruchebene ist für die Ermittlung der Spannungs - Verzerrungsmatrix zu verwenden. Wenn eine Versagensebene aktiv ist oder war, wird auch die nachfolgende Versagensebene, die rechtwinklig zur ersten liegt, so angenommen, bis

die Normalspannung entlang der originalen Versagensebene die Zugversagensspannungen erreicht hat. Daraus folgt, daß an jedem Integrationspunkt die Richtung der dritten Versagensebene festgehalten wird, wenn einmal das Versagen in zwei Richtungen eingetreten ist.

Wenn das Material auf Druck versagt, wird angenommen, daß Materialerweichungen in allen Richtungen bestehen bis die minimale Hauptverzerrung ${}^t e_{p3}$ den Wert $\tilde{\epsilon}'_u$ erreicht. Wenn ${}^t e_{p3}$ genauso groß wie $\tilde{\epsilon}'_u$ wird, verschwinden alle Spannungen, so daß das Material keine Steifigkeit mehr besitzt.

6. Entfestigungsbereiche

6.1 Entfestigungsbereich für Druckbeanspruchung

Wie aus Bild 8 ersichtlich ist, beginnt die Gefügestörung und damit der Zerfall des Materials bereits schon bevor die einaxiale Verzerrung kleiner ist als $\tilde{\epsilon}'_c$, und erweicht mit zunehmender Stauchung, d.h. ${}^t \tilde{E}$ wird nun negativ. In einer FE-Berechnung könnte dies zu Lösungsschwierigkeiten führen, wenn die Steifigkeitsmatrix nicht positiv definit ist. Infolgedessen werden grundsätzlich sehr kleine positive Werte von ${}^t \tilde{E}$ anstelle negativer Werte in der Berechnung verwendet.

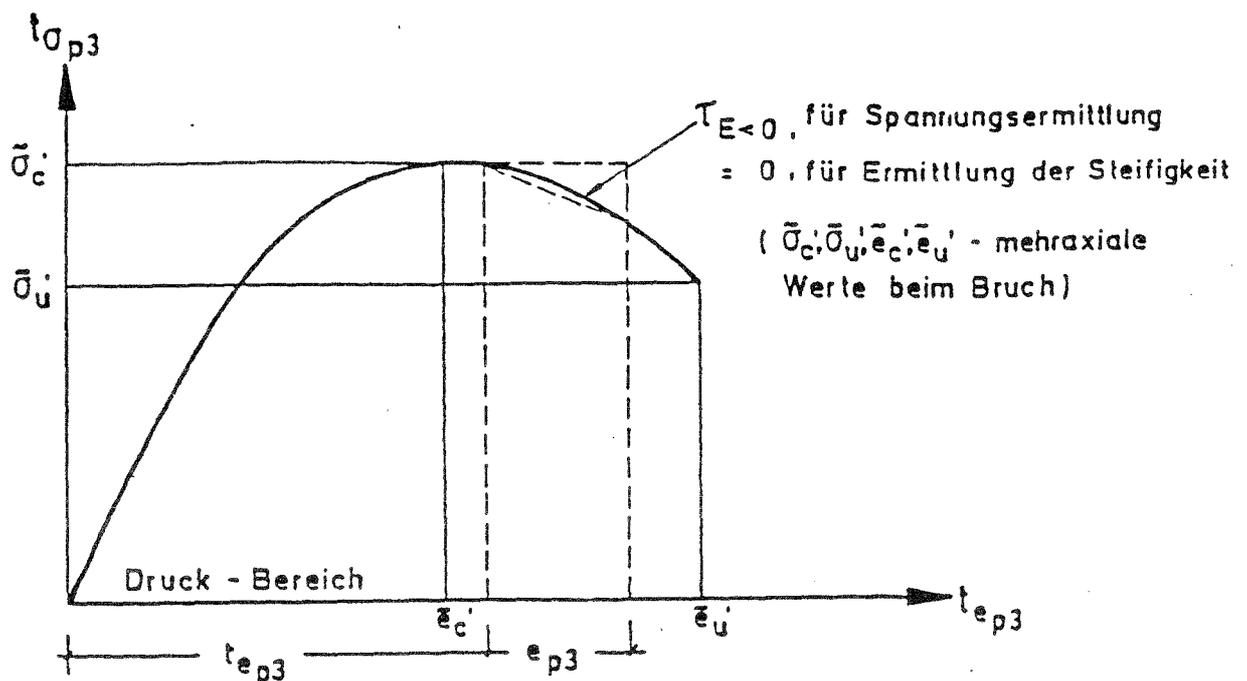


Bild 8 Entfestigung des Betons im Druck-Bereich.

Bei Ermittlung der inkrementellen Spannung wird jedoch der wahre Wert von ${}^t \tilde{E}$ verwendet. In Bild 8 ist die rechnerische Behandlung des Strain-softenings dargestellt. Beim mehraxialen Spannungszustand ist der Druckbruch erkennbar

durch die Anwendung der mehraxialen Versagenshüllkurve. Das Material wird als anisotrop betrachtet, wenn das Material zerfällt. Als Resultat wird der Elastizitätsmodul bei der Ermittlung der Steifigkeitsmatrix gleich Null gesetzt.

3.6.2 Entfestigungsbereich für Zugbeanspruchung

Die Zugspannungen und die Steifigkeit des Betons nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons fallen plötzlich auf Null ab (s. Bild 9).

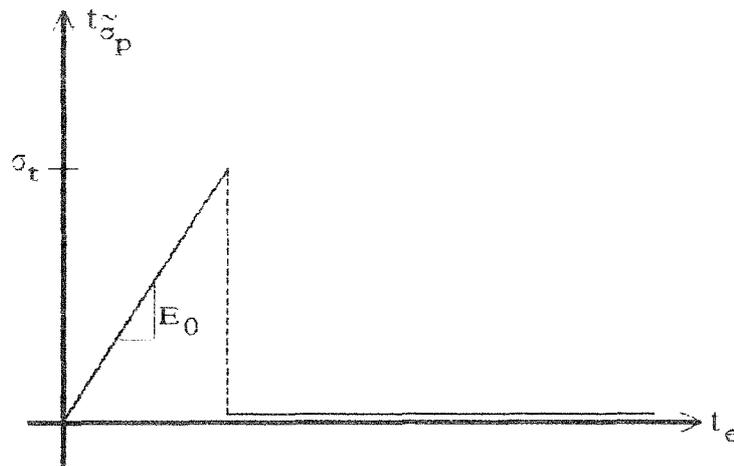


Bild 9 Entfestigung des Betons im Zug-Bereich.

3.7 Kritik an Bathe/Ramaswamy Betonmodell

Die Nachteile des Betonmodells von Bathe/Ramaswamy [B3] sind nachfolgend wiedergegeben:

1. Der Anwender muß gute Kenntnisse des mehraxialen Verhaltens des Betons haben.
2. Die Zugspannungen und die Steifigkeit des Betons werden nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit des Betons zu Null gesetzt. Das bedeutet, daß die Tension Softening bzw. Tension Stiffening Effekte nicht berücksichtigt werden.
3. Die Zugfestigkeit des Betons im Zug-Druckbereich wird unterschätzt. In Bild 10 ist die Kurve des Verhaltens des Betons dargestellt. Darin ist die Zug-Druckzone zur Verdeutlichung schraffiert.
4. Die Querdehnungszahl ist als konstant vorgesehen. Während das Comité Euro-International du Béton in [C2] ausführte, daß die Querdehnungszahl bis 80% der max. Druckspannung konstant bleibt, danach nimmt sie zu.

Die Versagenskurve der Zugspannungen nimmt linear mit der Zunahme der Druckspannungen in einer anderen Richtung (σ_{p1} oder σ_{p2}) ab, Bild 10. Dies setzt eine frühere Abnahme der Zugspannungen voraus als dies sich nach experimentellen Beobachtungen verschiedener Autoren (Kupfer [K5] und Kotsovovs [K4]) ergaben. Dazu sind noch weitere Einflüsse von Interesse, wie der Schubmodul und der γ -Faktor. Daraus erkennt man den Bedarf für Betonmodelle die die Berücksichtigung dieser Einflüsse ermöglichen, um die Realität des Verhaltens besser erfassen zu können.

In der jetzigen Studie werden einige der oben genannten Fälle betrachtet und sind weiterentwickelt worden, so daß die Nachrechnung verschiedener Versuche ermöglicht wird.

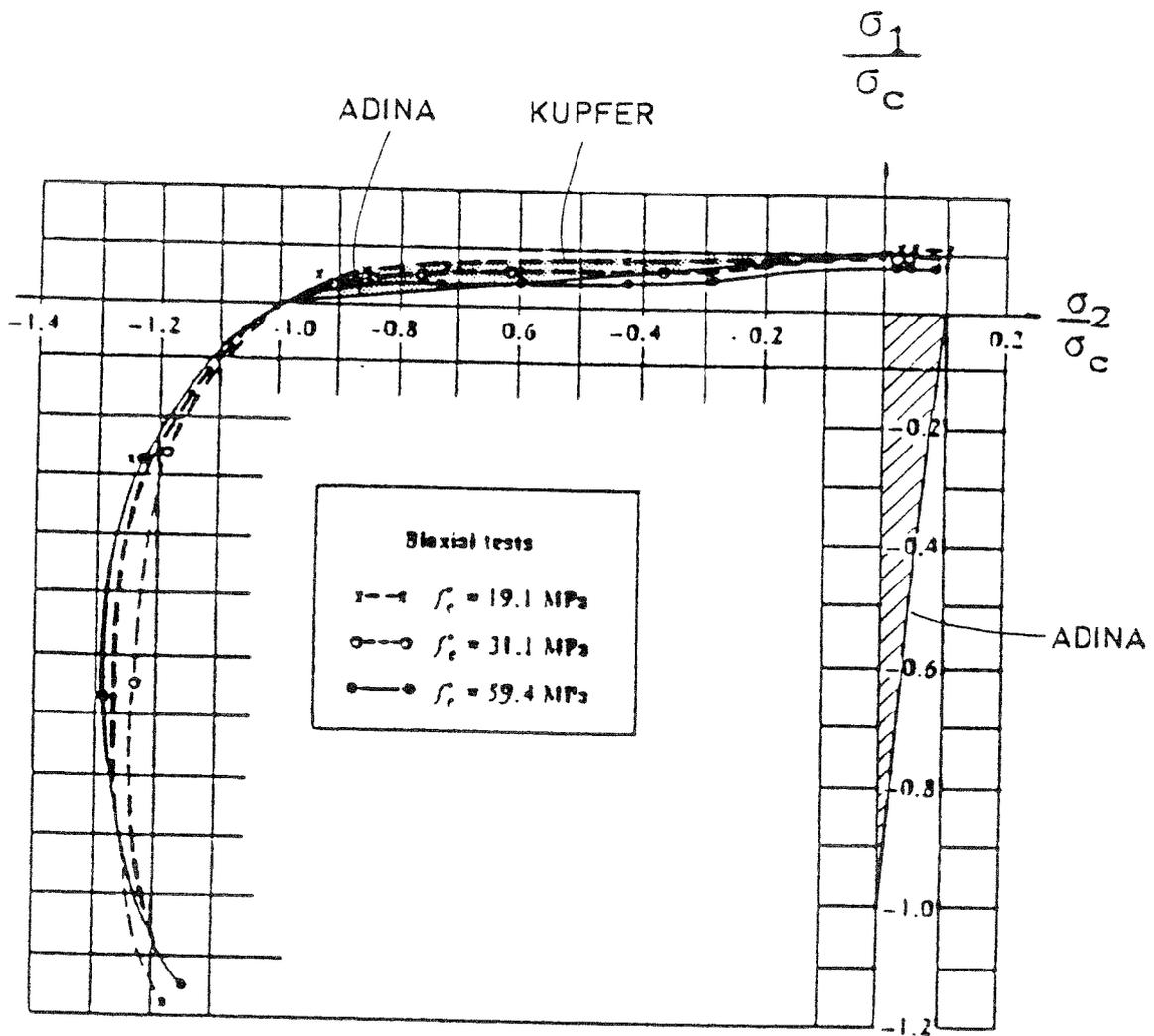


Bild 10 Der Unterschied zwischen Bathe/Ramaswamy [B3] und Kupfers zweidimensionale Bruchversagenskurve, [K5].

8. Erweiterung des Bathe / Ramaswamy Betonmodells

Die Erweiterungen des Betonmodells betreffen die folgende Bereiche:

8.1 Tension Softening bzw. Tension Stiffening Effekte

Nach dem Erreichen der Zugfestigkeit des Betons ist der Beton bei zunehmender Dehnung und entsprechender Entlastung durch aus noch in der Lage, Zugspannungen aufzunehmen. Man spricht dann vom Entfestigungsbereich bzw. von Tension Softening (verg. Bild 11).

Nach Rißbildungen müssen im Riß senkrecht zum Riß wirkende Zugkräfte allein von der Bewehrung übernommen werden. Durch die Verbundwirkung zwischen Beton und Bewehrung werden zwischen den Rissen Zugspannungen in den Beton übertragen. Dadurch hat der Beton im Vergleich zur volligen Vernachlässigung des zugbeanspruchten Betons zwischen den Rissen einen versteifenden Einfluß. Man nennt dies den Tension Stiffening Effekt bzw. den versteifenden Einfluß durch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen. Dieses Phänomen kann man entweder im Werkstoffmodell des Stahls oder des des Betons implementieren. Meistens wird es im Beton-Werkstoffmodell berücksichtigt, wobei eine Kurve mit einem abfallenden Ast für die Spannungs- Verzerrungsbeziehung eingeführt wird, siehe Bild 11 .

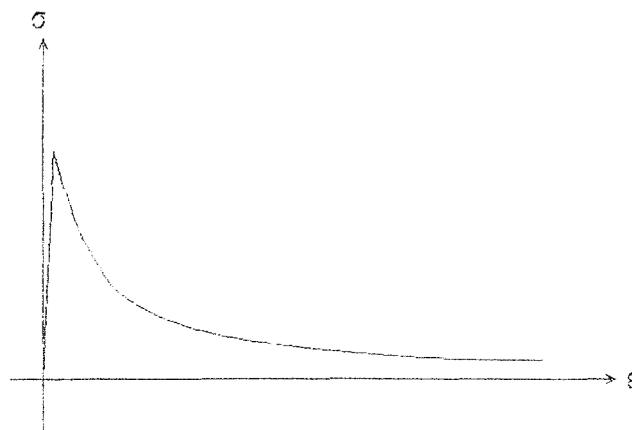


Bild 11 Spannungs-Verzerrungsbeziehung im Tension Softening bzw. Tension Stiffening Bereich

Die Parameter der σ - ϵ Kurve entsprechen der mittleren Spannung und der mittleren Dehnung.

8.2 Zug - Druckbeanspruchung

Der Unterschied zwischen der Bruchversagenskurve von Bathe in [B3], die Kurven von Kupfer [K5] und dem weiterentwickelten Betonmodell ist in Bild 12 angegeben.

Die Bruchversagenskurve des weiterentwickelten Betonmodells hat eine bilineare Formulierung im Zug-Druckbereich, die zu einem optimalen Zug-Druckverlauf führt. Ein weitere Eingabeparameter δ , der von der Betongüte abhängig ist, führt zu einer besseren Näherung. In Bild 12 sind die Bruchversagenskurven vergleichend dargestellt.

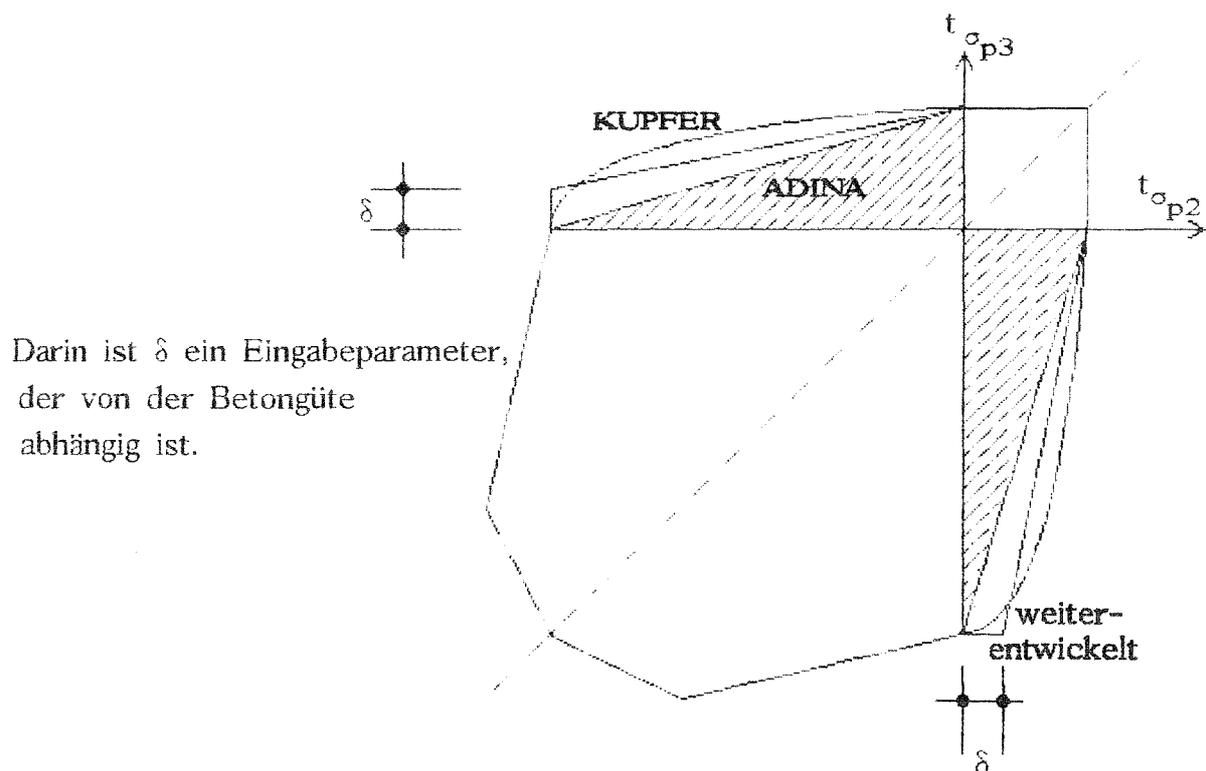


Bild 12 Der Unterschied zwischen dem weiterentwickelten Betonmodell in ADINA bzw. SOLVIA, ADINA bzw. SOLVIA Betonmodell und der Kurve nach Kupfer [K13].

8.3 Lineares Entfestigungsgesetz

Das Nachbruchverhalten des Betons unter Zugbeanspruchung ist "objektiv" durch die Bruchenergie G_f beschreibbar, d.h. die Bruchenergie in einem Element ist für den Beton konstant.

Nach einem Vorschlag von Bazant [B4], der einen linearen Ansatz für ein Reißöffnungsgesetz macht, folgt die Bruchenergie zu

$$G_f = W_f \cdot w_c \quad (17)$$

$$W_f = \int_0^{\varepsilon_0} \sigma_z d\varepsilon(z) \quad (18)$$

darin bedeuten

w_c : die Reißbandbreite

W_f : Die Arbeit pro Volumeneinheit geleistet bei der Hauptspannung, oder die Fläche unter der einaxialen Spannungs-Verzerrungs Kurve

Aus der Energiebilanz ergibt sich die Bruchenergie zu:

$$G_f = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_t^2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_T} \right) w_c = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_t^2 \varepsilon_0 w_c \quad (19)$$

darin bedeutet $\tilde{\sigma}_t$: die reduzierte Zugfestigkeit des Betons infolge mehraxialer Beanspruchung.

Durch Einführung der charakteristischen Länge l_{ch}

$$l_{ch} = \frac{w_c}{\varepsilon_0} \quad (20)$$

ergibt sich Gl. (19) zu:

$$G_f = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_t^2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_T} \right) \varepsilon_0 l_{ch} \quad (21)$$

Die charakteristische Länge für ein Element ist eigentlich vom Verzerrungszustand abhängig. Für Elemente mit quadratischem Einheitsgebiet kann sie näherungsweise durch die Fläche des Elementes bzw. der Determinante der Jacobimatrix bestimmt werden

$$l_c = \frac{A_e}{4} = \frac{\det J}{4} \quad (22)$$

Bei vorgegebener Bruchenergie kann somit die "homogenisierte" Grenzdehnung ε_0 bestimmt werden:

$$\varepsilon_0 = \frac{2G_f}{\tilde{\sigma}_t^2 \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_T} \right) \cdot l_{ch}} \quad (23)$$

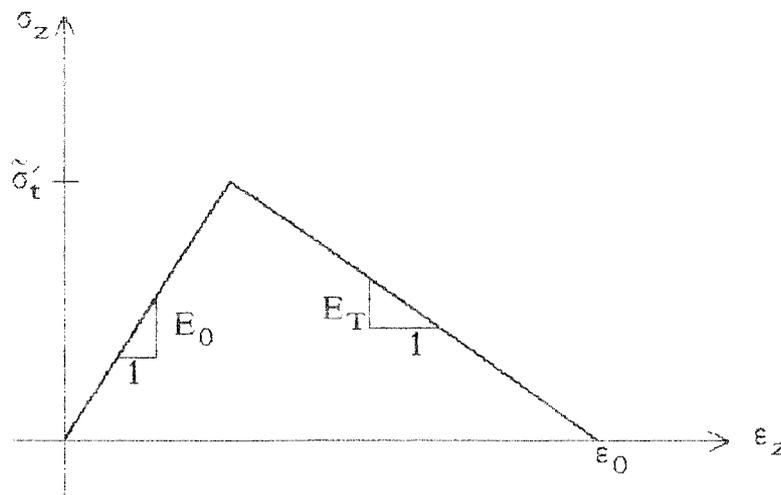


Bild 13 Bilineares Bruchenergiemodell eines Elementes.

9. Beschreibung des weiterentwickelten Betonmodells

9.1 Druck-Oktand

Es wird das Betonmodell von Bathe / Ramaswamy in [B3] direkt verwendet.

9.2 Zug- Oktand

9.2.1 Spannungs-Verzerrungsbeziehung

In der Subroutine TENSTF wurde das Betonmodell von Figueiras [F1] (Bild 14 a,b) implementiert, wobei für die Spannungs- Verzerrungsbeziehung die Gl. (24) verwendet wurde.

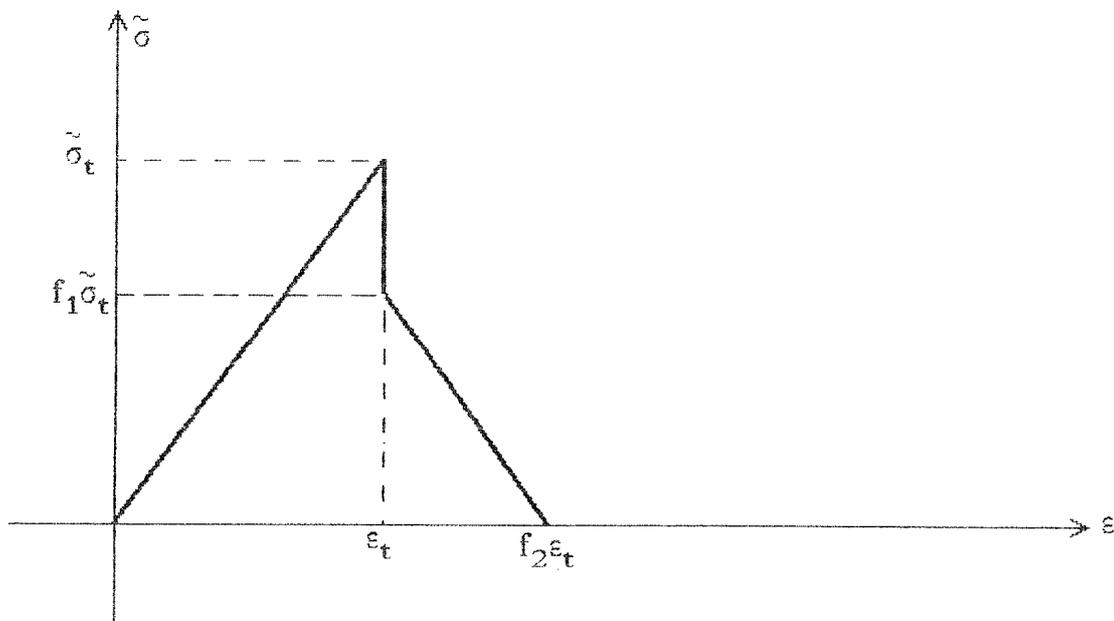


Bild 14 a Entfestigung bei Zugbeanspruchung, Tension Softening.

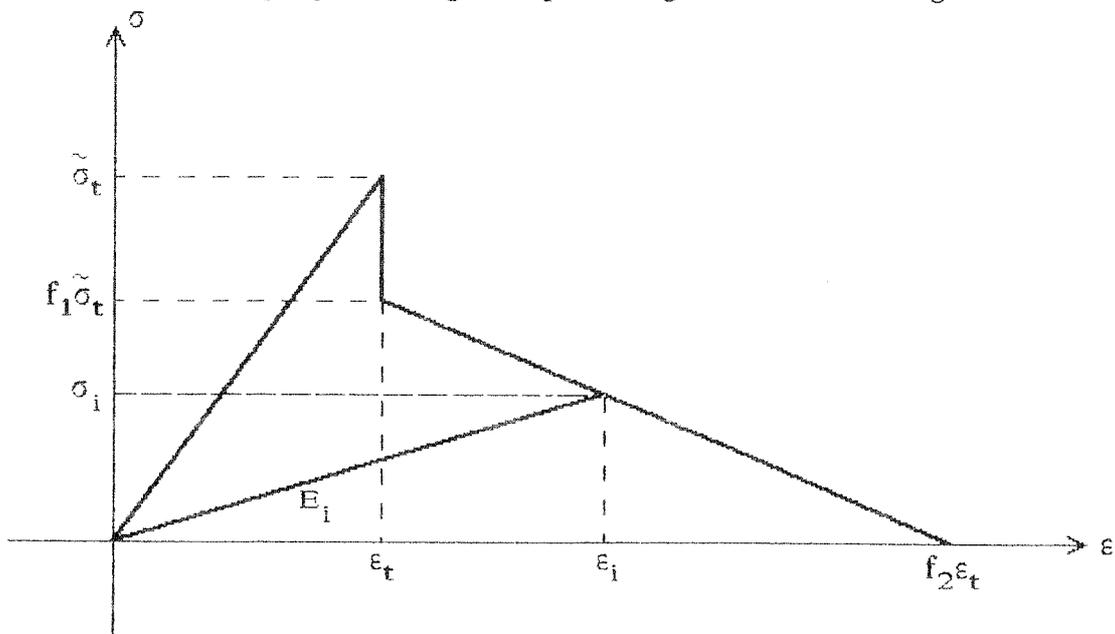


Bild 14 b Versteifender Einfluß durch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bei Zugbeanspruchung, Tension Stiffening.

$$\sigma_i(\varepsilon_i) = f_1 \tilde{\sigma}_t \frac{f_2 \varepsilon_t - \varepsilon_i}{f_2 \varepsilon_t - \varepsilon_t} \quad (24)$$

wobei:

$\tilde{\sigma}_t$ = Betonzugfestigkeit

ε_i = Rißdehnung

σ_i = Betonspannung am Lastschritt i

f_1, f_2 = Eingabefaktoren

bedeuten.

Die Entlastung und Wiederbelastung des gerissenen Betons wird mit dem veränderlichen Elastizitätsmodul E_i erfaßt.

$$E_i = \frac{f_1 \tilde{\sigma}_t}{\varepsilon_{(i-1)}} \cdot \frac{f_2 \varepsilon_t - \varepsilon_{(i-1)}}{f_2 \varepsilon_t - \varepsilon_t} \quad (25)$$

Die Eingabefaktoren f_1 und f_2 sind in einem Common Block (/TENST/) in das Betonmodell des Programmsystems ADINA eingefügt worden.

10. Zug-Druck-Oktand

Im Bild 10 ist das zweidimensionale Verhalten des Betons dargestellt.

Die in ADINA-84 bzw. SOLVIA verwendete Zug- Druckzone ist schraffiert. Aus seinen Versuchen hat Kupfer in [K5] die folgenden Beziehungen zwischen Zugspannungen und Druckspannungen aufgestellt.

$$\frac{\sigma_{p1}}{\sigma_t} = \sqrt{1 + \frac{\sigma_{p2}}{\sigma_c}} \quad \text{für Betongüte } 18 \text{ N/mm}^2 - 30 \text{ N/mm}^2 \quad (26)$$

$$\frac{\sigma_{p1}}{\sigma_t} = 1 + 0,8 \frac{\sigma_{p2}}{\sigma_c} \quad \text{für Betongüte } (57 \text{ N/mm}^2) \quad (27)$$

σ_{p1} = ist die Hauptspannung in der y-Richtung

σ_{p2} = ist die Hauptspannung in der x-Richtung

σ_c = Prismendruckfestigkeit des Betons

$\tilde{\sigma}_t$ = einaxiale Zugfestigkeit des Betons

Der Unterschied zwischen der Bruchumhüllenden von Bathe/Ramaswamy [B3] und der Bruchkurve nach Kupfer [K5] ist im Bild 10 deutlich gemacht. Das weiterentwickelte Materialmodell im Zug- Druckbereich ist in den Bildern 15 und 16 dargestellt.

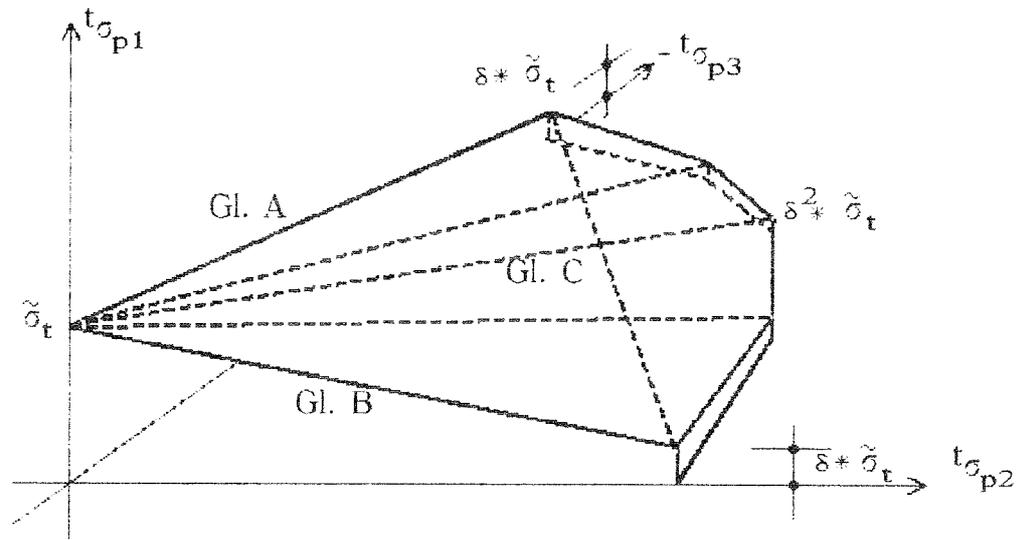


Bild 15 Zug- Druck- Druckbereich im erweiterten Betonmodell.

Im Bild 15 ist δ ein Eingabeparameter, der von der Betongüte abhängig ist.

$$\begin{aligned}
 \text{Gl. A: } \tilde{\sigma}'_t &= \tilde{\sigma}_t \left(1 - \frac{(1-\delta)t_{\sigma_{p3}}}{\tilde{\sigma}'_c} \right) \\
 \text{Gl. B: } \tilde{\sigma}'_t &= \tilde{\sigma}_t \left(1 - \frac{(1-\delta)t_{\sigma_{p2}}}{\tilde{\sigma}'_c} \right) \\
 \text{Gl. C: } \tilde{\sigma}'_t &= \tilde{\sigma}_t \left(1 - \frac{(1-\delta)t_{\sigma_{p3}}}{\tilde{\sigma}'_c} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Die Versagensebene ist definiert durch

$$\tilde{\sigma}'_t = \tilde{\sigma}_t \left(1 - \frac{(1-\delta)t_{\sigma_{p2}}}{\tilde{\sigma}'_c} \right) \left(1 - \frac{(1-\delta)t_{\sigma_{p3}}}{\tilde{\sigma}'_c} \right)
 \tag{29}$$

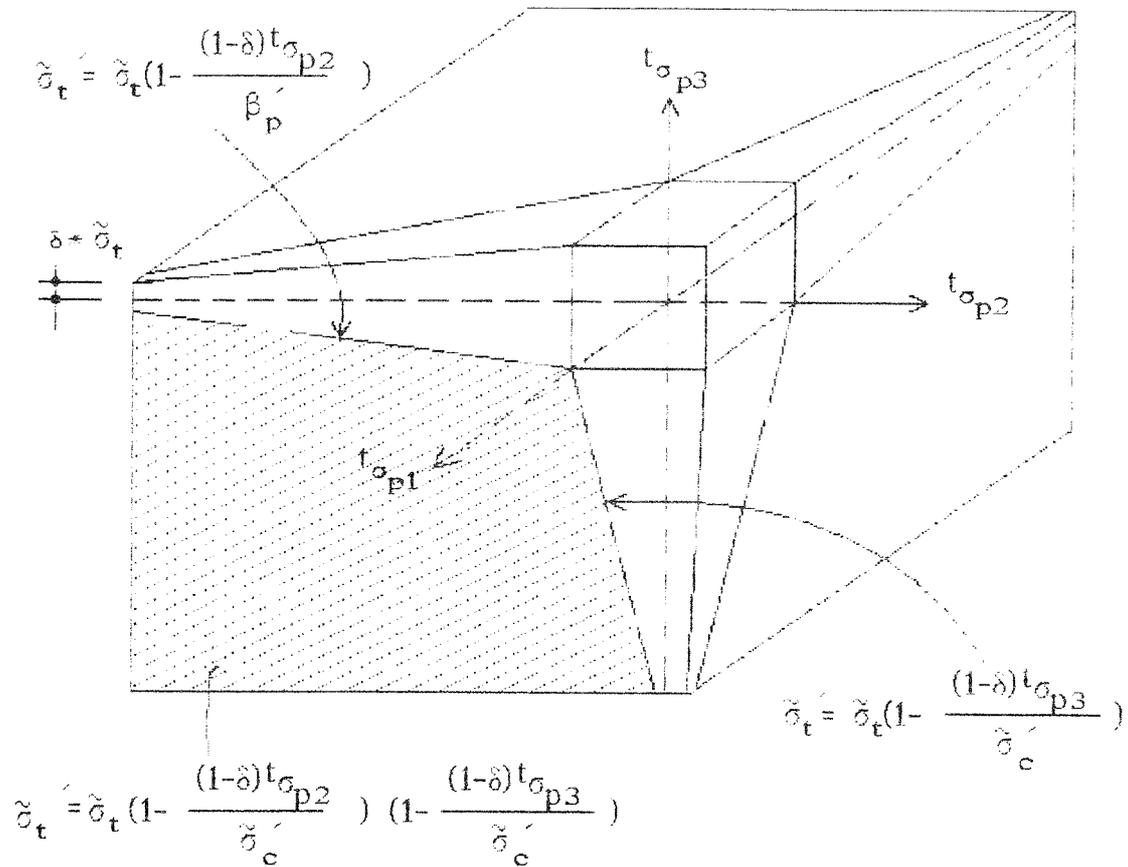


Bild 16 Weiterentwickeltes Betonmodell für mehraxiales Beton-Zug-Bruchversagen .

Darin ist δ ein Eingabeparameter, der von der Betongüte abhängig ist.

ANHANG B

Seiten 1 bis 7

Bathe / Chaudhary - Kontaktelementformulierung

Das Ziel der Verwendung der ADINA- bzw. SOLVIA- Kontaktelemente ist die Aufhebung eines möglichen Kontaktes zwischen flexiblen-flexiblen- und festen-flexiblen Körpern unter haftenden oder gleitenden Bedingungen (mit oder ohne Reibung) und großen Verschiebungen zwischen den jeweiligen Körpern. Bei Berührung von zweidimensionalen Ebenen oder rotationssymmetrischen Körpern [B2] wurden größere Verschiebungen unter statischen Bedingungen betrachtet. Die entwickelten Algorithmen beinhalten folgende Punkte:

1. Um die geometrische Kompatibilität entlang der Kontaktflächen zu gewährleisten, ist das gesamte Potential der Kontaktkräfte in der formulierten Variation einbezogen.
2. Die äußeren Kräfte bestimmen die Griffigkeit der Oberfläche in der Kontaktzone.
3. Ob der Knotenpunkt klebt, gleitet oder sich entfernt, wird durch die Griffigkeit der Oberfläche entschieden.
4. Die Anzahl der zu lösenden Gleichungen bei Kontaktproblemen ist auf zwei unterschiedliche Gleichungen, für den Fall, daß sich die Knotenpunkte berühren, und für den Fall, daß die Knotenpunkte gleiten, modifiziert.

Im Bild 4.1, ist das Kontaktproblem schematisch dargestellt. Die beiden dargestellten Körper werden Kontakt- und Zielkörper genannt. In der FE-Analyse enthält der Kontaktkörper die Knoten, die mit dem Zielkörper in Berührung kommen. Es wird vorausgesetzt, daß entlang der Kontaktebene keine Materialübergreifung vorhanden ist. Infolgedessen entstehen Kontaktkräfte zwischen dem Kontakt- und dem Zielkörper (s. Bild 1). Diese Kräfte sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet. Der Normalkräfteanteil erzeugt Druckkräfte. Die Tangentialkräfte erfüllen das Reibungsgesetz.

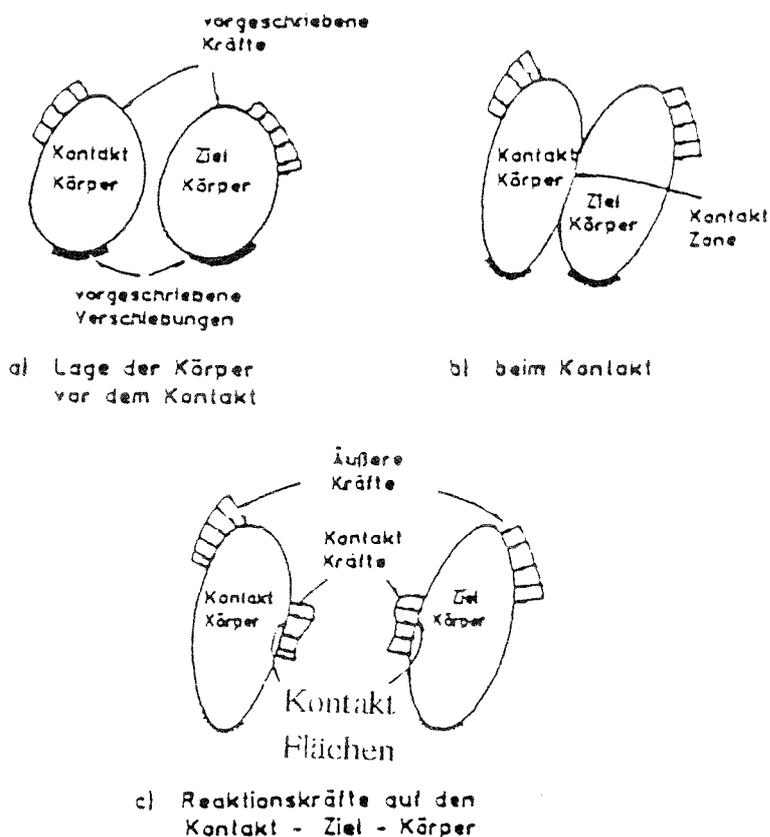


Bild 1 Schematische Darstellung der Kontaktprobleme

Als Reibungsgesetz wird das Coulombsche Reibungsgesetz mit dem statischen Reibungs-koeffizienten μ_s und dem dynamischen oder kinematischen Reibungs-koeffizienten μ_d aus analytischen Gründen bevorzugt [B2]. Entlang der Kontakt-ebene wird es keine Verschiebung bzw. Gleitung geben, solange die Tangential-kräfte $t_t \leq \mu_s t_n$ sind, wobei t_n gleich dem Druck-Normalkräfteanteil ist und $\mu_s t_n$ die maximale Reibungskraft ist, die den Körper zum Gleiten bringt. Bei Gleitung ist die maximale Reibungskraft $\mu_d t_n$ (mit $\mu_d \leq \mu_s$) die Kraft, die der Tangentialkraft entgegen wirkt. Die Gleitung hört auf, wenn die Tangentialkraft kleiner als die dynamische Reibung ist. Vorausgesetzt wird, daß die Elastizität der Körper nicht berücksichtigt, aber ein fester plastischer Kontakt zugrunde gelegt wird. Um die Kontaktprobleme zu berücksichtigen, wird zu dem üblichen Variationsfunktional das totale Potential der Kontaktkräfte unter Berücksichtigung der Randbedingungen addiert. Damit liefert das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials das folgende Funktional :

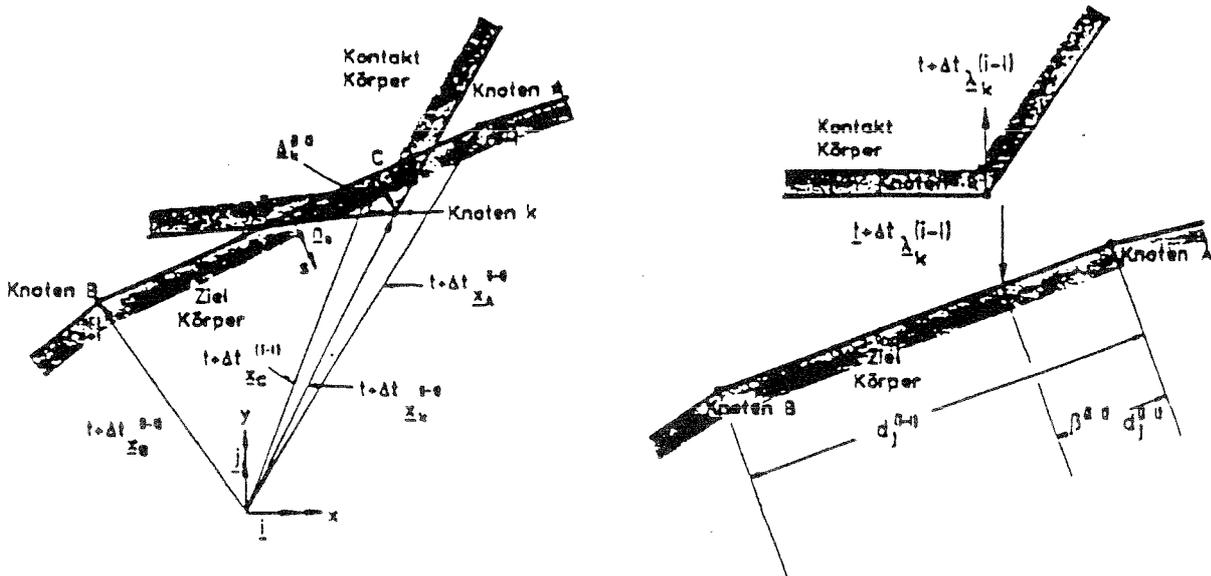
$$\Pi_1 = \Pi - \sum_k W_k \quad (1)$$

wobei Π das übliche (inkrementelle) Gesamtpotential ist, das zur normalen inkrementellen Gleichgewichtsbedingung führt, wenn keine Kontaktprobleme entstehen.

$\sum_k W_k$ bedeutet das inkrementelle Potential der Kontaktkräfte. Es ist zu der festgelegten Annahme zu bemerken, daß die Knoten der Kontaktkörper nicht innerhalb der Zielkörper, jedoch die Knoten der Zielkörper innerhalb der Kontaktkörper liegen dürfen. Die Knoten der Kontaktkörper können unter zwei Bedingungen als angeklebt betrachtet werden :

- a) wenn der Knoten des Kontaktkörpers den Zielkörper bei Iteration (i-1) durchdringt, obwohl er den Zielkörper bei Iteration (i-2) nicht berührt hat.
- b) der Reibungswiderstand groß genug ist, um Gleitung zwischen den Körpern bei Berührung zu verhindern.

Bild 4.2 zeigt, wie der Knoten k das Segment j zwischen den Knoten A und B berührt, wobei



a) Geometrische Variablen

(b) Kontaktkräfte

Bild 2 Definition der Variablen im Segment j, aus [B2]

$t+\Delta t \mathbf{X}_k^{(i-1)}$, $t+\Delta t \mathbf{X}_A^{(i-1)}$, $t+\Delta t \mathbf{X}_B^{(i-1)}$: gegenwärtige globale Koordinaten der Knoten k, A, B

$t+\Delta t \mathbf{X}_C^{(i-1)}$: gegenwärtige globale Koordinaten des Berührungspunktes des Knotens k

$\Delta_k^{(i-1)}$: Übergreifung

$d_j^{(i-1)}$: Länge des Segmentes j

\mathbf{r}, \mathbf{s} : lokales isoparametrisches Koordinatensystem entlang der Oberfläche des Zielkörpers

$\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s$: Einheitsvektor auf der Zielkörperoberfläche entlang der lokalen Achse r, s

\mathbf{i}, \mathbf{j} : Einheitsvektor entlang der globalen Koordinatenachse

$\beta^{(i-1)}$: Parameter, der die physikalische Kontaktstelle festlegt

$t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)}$: Kontaktkraft im Knoten k

bedeuten

$$t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)} = t+\Delta t \lambda_{kx}^{(i-1)} \mathbf{i} + t+\Delta t \lambda_{ky}^{(i-1)} \mathbf{j} \quad (2)$$

Aus der Geometrie in Bild 2 ist zu erkennen, daß

$$\Delta_k^{(i-1)} = t+\Delta t \mathbf{X}_k^{(i-1)} - t+\Delta t \mathbf{X}_C^{(i-1)} \quad (3)$$

$$d_j^{(i-1)} = \mathbf{n}_r^T [t+\Delta t \mathbf{X}_B^{(i-1)} - t+\Delta t \mathbf{X}_A^{(i-1)}] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \beta^{(i-1)} &= \mathbf{n}_r^T [t+\Delta t \mathbf{X}_C^{(i-1)} - t+\Delta t \mathbf{X}_A^{(i-1)}] \\ &= \mathbf{n}_r^T [(t+\Delta t \mathbf{X}_k^{(i-1)} - \Delta_k^{(i-1)}) - t+\Delta t \mathbf{X}_A^{(i-1)}] \end{aligned} \quad (5)$$

wobei

$$\mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{n}_r}{d_j^{(i-1)}} = \mathbf{n}_{rx} \mathbf{i} + \mathbf{n}_{ry} \mathbf{j} \quad (6)$$

bedeutet.

Auf das Zielkörpersegment j, wirkt die äquivalente Kraft $t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)}$,

$$t+\Delta t \lambda_A^{(i-1)} = -(1 - \beta^{(i-1)}) t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)} \quad (7)$$

$$t+\Delta t \lambda_B^{(i-1)} = -\beta^{(i-1)} t+\Delta t \lambda_k^{(i-1)} \quad (8)$$

Das Potential W_k im Knoten k ist wegen der Kontaktkraft und der zugehörigen Reaktion bei der Iteration i

$$W_k = t+\Delta t \lambda_k^{(i)T} (\Delta \mathbf{U}_k^{(i)} + \Delta_k^{(i-1)}) + t+\Delta t \lambda_A^{(i)T} \Delta \mathbf{U}_A^{(i)} + t+\Delta t \lambda_B^{(i)T} \Delta \mathbf{U}_B^{(i)}$$

also

$${}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i-1)} + \Delta\lambda_k^{(i)} \quad (9)$$

wobei

$\Delta\lambda_k^{(i)}$ die Änderung der Kontaktkraft im Knoten k ist. Aus den Gleichungen ((7) - (9)) folgt

$$\begin{aligned} W_k = & {}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i-1)T} [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i-1)})\Delta U_A^{(i)} - \beta^{(i-1)}\Delta U_B^{(i)}] \\ & + \Delta\lambda_k^{(i)T} [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i-1)})\Delta U_A^{(i)} - \beta^{(i-1)}\Delta U_B^{(i)}] \end{aligned} \quad (10)$$

Der Knoten k des Kontaktkörpers ist als gleitend anzunehmen, wenn die Tangentialekraft größer als der Reibungswiderstand ist. Bei sich berührenden gleitenden Körpern, ist die Ermittlung des gesamten Potentials schwierig, weil $\beta^{(i-1)}$ sich während der Iteration (\mathbf{U}) zu neuen Werten $\beta^{(i)}$ verändert. Die Reibungskraft bleibt während der Iteration konstant. Bei Anwendung der Gleichungen ((7) - (9)) folgt

wobei

$$W_k = {}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i)T} [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i)})\Delta U_A^{(i)} - \beta^{(i)}\Delta U_B^{(i)}] \quad (11)$$

$$\beta^{(i)} = \beta^{(i-1)} + \Delta\beta^{(i)} \quad (12)$$

bedeutet. Durch Linearisierung der Gleichung (5), entsteht

$$\Delta\beta^{(i)} = \bar{n}_r^T [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i-1)})\Delta U_A^{(i)} - \beta^{(i-1)}\Delta U_B^{(i)}] \quad (13)$$

und für Gleitung

$${}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i-1)} + \Delta\lambda_k^{(i)} \quad (14)$$

$$\Delta\lambda_k^{(i)} = -\Delta\lambda_s^{(i)} \bar{n}_s \quad (15)$$

Das negative Vorzeichen der rechten Seite der Gleichung (15) kommt daher, weil eine Vergrößerung der Normalkraft in entgegengesetzter Richtung von \bar{n}_s wirkt. Das Einsetzen der Gleichungen (14) und (15) in Gleichung (11) unter der Annahme, daß $\Delta\beta^{(i)}$ klein ist, ergibt

$$\begin{aligned} W_k = & {}^{t+\Delta t}\lambda_k^{(i-1)T} [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i-1)})\Delta U_A^{(i)} - \beta^{(i-1)}\Delta U_B^{(i)}] \\ & + \Delta\lambda_s^{(i)} \{ -\bar{n}_s^T [(\Delta U_k^{(i)} + \Delta k^{(i-1)}) - (1 - \beta^{(i-1)})\Delta U_A^{(i)} \\ & - \beta^{(i-1)}\Delta U_B^{(i)}] \} \end{aligned} \quad (16)$$

Dieses Potential ist gültig für alle Knoten k im gleitenden Kontakt. Die inkrementelle Bewegungsgleichung mit Kontaktbedingungen der Finiten - Elemente wird durch Einsetzen von Gleichung (10) und (16) in Gleichung (1) gewonnen. Aus dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials $\delta \Pi_1 = 0$ folgt

$$\left[\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + [{}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_c^{(i-1)}] \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \Delta_c^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

wobei

$\Delta \mathbf{U}^{(i)}$: Vektor der inkrementellen Verschiebung bei Iteration (i), mit der Dimension (NEQ * 1).

$\Delta \lambda^{(i)}$: Vektor der Vergrößerung der Kontaktkräfte bei Iteration (i), (NEQC * 1)

${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)}$: übliche Tangenten - Steifigkeitsmatrix nach Iteration (i-1), (NEQ * NEQ).

${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_c^{(i-1)}$: Kontakt - Steifigkeitmatrix nach Iteration (i-1), (NEQT * NEQT).

${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$: Vektor der Knotenpunktkräfte, (NEQ * 1).

${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$: Vektor der gesamten äußeren Kräfte zur Zeit $t+\Delta t$, (NEQ * 1).

${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c^{(i-1)}$: Vektor der verbesserten Kontaktkräfte nach Iteration (i-1), (NEQ * 1).

${}^{t+\Delta t} \Delta_c^{(i-1)}$: Übergreifungsvektor (NEQC * 1).

NEQ : Gesamtzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade

NEQC : Gesamtzahl der Gleichungen zur Erfüllung der Zwangsbedingungen des inkrementellen Kontaktes

NEQT : NEQ + NEQC

Jeder Kontaktkörperknoten leistet einen Beitrag zu ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_c^{(i-1)}$, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c^{(i-1)}$ und ${}^{t+\Delta t} \Delta_c^{(i-1)}$. Bei zwei sich berührenden Körpern folgt:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c^{(i-1)} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \lambda_{kx}^{(i-1)} \\ {}^{t+\Delta t} \lambda_{ky}^{(i-1)} \\ -(1 - \beta^{(i-1)}) {}^{t+\Delta t} \lambda_{kx}^{(i-1)} \\ -(1 - \beta^{(i-1)}) {}^{t+\Delta t} \lambda_{ky}^{(i-1)} \\ -\beta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \lambda_{kx}^{(i-1)} \\ -\beta^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \lambda_{ky}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$${}^{t+\Delta t} \Delta_{\mathbf{c}}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} \Delta_{\mathbf{kx}}^{(i-1)} \\ \Delta_{\mathbf{ky}}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{\mathbf{c}}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ & 0 & 1 - \beta^{(i-1)} & 0 \\ & & 0 & 1 - \beta^{(i-1)} \\ & & \beta^{(i-1)} & 0 \\ & & 0 & \beta^{(i-1)} \\ \hline \text{symmetrisch} & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

wobei der zugehörige Ergebnisvektor lautet

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{k}}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{A}}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{B}}^{(i)} \\ \Delta \lambda_{\mathbf{k}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Für Körper in gleitendem Kontakt folgt:

$${}^{t+\Delta t} \Delta_{\mathbf{c}}^{(i-1)} = \begin{bmatrix} -\mathbf{n}_{\mathbf{sx}} \Delta_{\mathbf{kx}}^{(i-1)} & -\mathbf{n}_{\mathbf{sy}} \Delta_{\mathbf{ky}}^{(i-1)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

und der Ergebnisvektor ist

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta \lambda^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{k}}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{A}}^{(i)} \\ \Delta \mathbf{U}_{\mathbf{B}}^{(i)} \\ \Delta \lambda_{\mathbf{s}}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Auf eine ausführliche Beschreibung der ADINA- bzw. SOLVIA-Kontaktelemente wird auf die Literatur [B2] verwiesen.