

Kippverhalten und Kippaussteifung
von Holzträgern unter schwerpunkt-
mäßiger Berücksichtigung von Trägern
aus nachgiebig miteinander verbunde-
nen Querschnittsteilen

T 2590

T 2590

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die in dieser Forschungsarbeit enthaltenen Darstellungen und Empfehlungen geben die fachlichen Auffassungen der Verfasser wieder. Diese werden hier unverändert wiedergegeben, sie geben nicht unbedingt die Meinung des Zuwendungsgebers oder des Herausgebers wieder.

Die Originalmanuskripte wurden reprototechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprototechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

© by Fraunhofer IRB Verlag

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

E-Mail irb@irb.fraunhofer.de

www.baufachinformation.de

Bitte beachten:

Fehlende Seiten sind **Leerseiten**,
die bei Erstellung
der PDF-Datei für den Download nicht
berücksichtigt wurden

Fraunhofer IRB Verlag

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fachgebiet Baukonstruktionen, Holz- und Mauerwerksbau

FORSCHUNGSBERICHT

Kippverhalten und Kippaussteifung von Holzträgern
unter schwerpunktmäßiger Berücksichtigung von Trägern
aus nachgiebig miteinander verbundenen
Querschnittsteilen

Prof. Dipl.-Ing. Claus Scheer

Dipl.-Ing. Christian Laschinski

cand.-Ing. Shen-Fang Szu

Berlin, im Dezember 1993

Vorwort

In guter Tradition möchten sich die Verfasser dieses Forschungsberichts bei all denen bedanken, ohne deren beratende, organisatorische und finanzielle Unterstützung dieses Projekt nicht hätte durchgeführt werden können.

Als erstes seien hier die Entwicklungsgemeinschaft Holzbau (EGH) in der Deutschen Gesellschaft für Holzforschung (DGfH) in München und das Institut für Bautechnik (IfBt) in Berlin genannt. Sie stellten die finanzielle Ausstattung zur Verfügung und sorgten für einen reibungslosen organisatorischen Ablauf in Zusammenarbeit mit der Technischen Universität Berlin. Ohne diesen sicheren und zuverlässigen Rahmen hätten sich die Verfasser nicht mit der gleichen Intensität der thematischen Bearbeitung widmen können.

Den Mitgliedern der begleitenden Arbeitsgruppe, den Herren Prof. Bodo Heimeshoff, Prof. Heinz Brüninghoff und Hans-Jörg Irmschler sei für ihr Mitdenken und ihre Anregungen herzlich gedankt. Jedes Forschungsprojekt lebt aus der wissenschaftlichen Diskussion über die gewonnenen Erkenntnisse.

Ein solches „Ingenieurwerk“ verlangt nach sprachlicher „Formung“. Für diese einfühlsam geleistete Hilfe sind wir Frau Waltraud Riese zu besonderem Dank verpflichtet. Viele Zeichnungen wurden von Frau Daniela Drechsel mit CAD und viel Engagement angefertigt, was uns sehr geholfen hat.

Ein besonderer Dank gebührt auch unseren Ehepartnern, die immer wieder bereit waren, auf manche gemeinsame Stunde zu verzichten und uns in Momenten des Zweifels den Blick für das Wesentliche bewahrten. Dieser moralische Rückhalt trug viel zum Gelingen des Ganzen bei.

Berlin, zu Weihnachten 1993

Claus Scheer
Christian Laschinski
Shen-Fang Szu

Kurzfassung

Im vorliegenden Forschungsbericht wird das Kippverhalten und die Kippaussteifung von Holzträgern unter schwerpunktmäßiger Berücksichtigung von Trägern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen untersucht. Solche Träger findet man vor allem im Brückenbau, wo sie — hergestellt aus Laubhölzern — wegen ihrer Witterungsresistenz gerne eingesetzt werden. Die Verbindung der einzelnen Querschnitte erfolgt in der Regel durch Stabdübel/Paßbolzen, ist also nicht starr, sondern nachgiebig. Eine Verleimung scheidet aus vielfältigen Gründen aus.

Die Träger werden aus äußeren und inneren Lasten auf Biegung und Normalkraft beansprucht. Dabei erfahren die Querschnitte infolge zwangsläufiger Imperfektionen Verdrehungen und auch Verschiebungen senkrecht zur Lastrichtung. Zur Begrenzung der genannten Verformungen und um ein „Kippen“ der Träger zu verhindern, werden Aussteifungsverbände eingebaut. Diese Verbände werden durch „Bettungslasten“ (Seitenlasten) beansprucht. Bettungslasten sind Lasten, die aus einem Anlehnen der Träger an die steiferen Verbände resultieren.

Die Größe der Seitenlasten wird bisher nach den Gleichungen der DIN 1052 Teil 1 berechnet. Allerdings werden in den dortigen Formeln implizit monolithische Träger vorausgesetzt, an deren Oberkante der Aussteifungsverband und die Lasten angreifen. Die zu untersuchenden Träger sind aber zum einen nicht monolithisch, zum anderen greifen Verband und Last häufig nicht an der Trägeroberkante an. Aus diesen Gründen ergeben sich für die genannten Träger nach genauere Rechnung häufig höhere Seitenlasten als nach den Formeln aus DIN 1052 Teil 1, so daß die DIN-Formeln in diesen Fällen strenggenommen nicht angewendet werden dürften.

In diesem Forschungsvorhaben wurde bei der Herleitung der Seitenlastgleichungen auf die Berücksichtigung einiger besonders auch für Brückenträger wichtiger Einflüsse großer Wert gelegt. Diese Einflüsse sind deshalb auch durch ihre entsprechenden mechanischen Parameter explizit in den Formeln enthalten. Daraus ergibt sich eine vielfältige Verwendungsmöglichkeit der hergeleiteten Gleichungen. Im folgenden Abschnitt werden die erwähnten Einflüsse kurz erläutert.

Die Torsionssteifigkeit der Träger ist eine Hauptwiderstandsgröße für das Kippen. Sie ist für nachgiebig zusammengesetzte Träger erheblich kleiner als bei monolithischen Trägern der gleichen Abmessung. Ein Verbandsangriff am Obergurt gewährt i. d. R. eine maximale Stabilisierung. Tiefer angeordnete Verbände rufen erhöhte Seitenlasten hervor. Die Angriffshöhe einer Streckenlast hat ebenfalls große Auswirkungen auf das Kippverhalten der Träger; hier ist zu beachten, ob die Last oberhalb der Verbandsebene angreift. Brückenträger werden zusätzlich auch signifikant durch

seitliche Windlasten beansprucht, deren Auswirkungen mit den bisherigen Berechnungsformeln nicht erfaßt werden können. Schließlich sind mit den Gleichungen nach DIN 1052 Teil 1 mögliche Vorverdrehungen der Träger, gleichzeitig mit den Biegemomenten wirkende Normalkräfte und asymmetrische Momentenverläufe rechen-technisch nicht zu erfassen.

Um die genannten Effekte berücksichtigen zu können, wurden mit der Energiemethode auf analytischem und numerischem Weg baupraktische Formeln zur Berechnung der Seitenlast (Stabilisierungslast) für Träger mit beliebigen Querschnitten hergeleitet. Speziell für übereinandergestapelte Rechteckquerschnitte mit nachgiebigem Verbund wurden auch Gleichungen zur Bestimmung einer effektiven Torsionssteifigkeit aufgestellt. Diese Torsionssteifigkeit kann dann in die Seitenlastformeln eingesetzt werden. Im Zuge der Herleitungen ergaben sich auch Gleichungen zur Berechnung der Schnittgrößen infolge der Seitenlast in den Querschnittsteilen.

Zusätzlich wurde auch das Verhalten der Träger zwischen den Abstützungspunkten des Verbands untersucht und der Berechnung zugänglich gemacht. Die Ergebnissgleichungen sind Kap. 7 zu entnehmen, die Herleitungen den entsprechenden vorgeschalteten Kapiteln.

Abstract

The present research project examines the lateral buckling characteristics and the stiffening of timber beams against lateral buckling, focussing on beams formed from flexibly connected cross-section components. Such beams are found mainly in bridge construction - made from hardwood - where they are favoured for their resistance to weathering. The individual cross-sections are usually joined using dowels or shear pins and is therefore flexible rather than rigid. Gluing is not possible for a number of reasons.

The beams are subject to internal and external stresses from bending and normal load. Due to imperfections, the cross-sections are exposed to twisting, and shifting perpendicular to the direction of the load. To limit this distortion and prevent the beams from "lateral buckling", bracing bonds are installed. These bracing bonds are exposed to "bedding loads" (lateral loads). Bedding loads are loads which result from the beams leaning against the bracing bonds.

The extent of the lateral loads has until now been calculated using the equations of DIN 1052 Part 1, but these equations implicitly assume monolithic beams with the bracing bond and the load acting upon their top edge. But the beams under investigation are not monolithic, nor do the bracing bond and load always act upon the top edge of the beam. For these reasons, a more accurate calculation shows that these beams are often subject to higher lateral loads than the equations of DIN 1052 Part 1 would suggest, and, strictly speaking, the DIN formulae should not really be applied in these cases.

In deriving the lateral load equations, this research project emphasizes a number of influences that are of special significance to bridge trusses. These influences are therefore included explicitly in the formulae with their corresponding mechanical parameters, as a result of which the derived equations have a wide range of useful applications. The influences are explained briefly in the following section.

The stiffness of the beams against torsion is a main resistance variable in lateral buckling. It is considerably smaller for flexibly formed beams than for monolithic beams of the same dimensions. A bracing bond applied to the upper flange usually provides maximum stabilisation. bracing bonds located lower cause increased lateral loads. The height of attack of a sectional load also has a major effect on the lateral buckling characteristics of the beam; it is important to note whether the load is acting on a point above the bracing bond level. Bridge trusses are also strongly affected by side winds, whose effects cannot be calculated with the previous formulae. And finally, the equations of DIN 1052 Part 1 cannot calculate potential forward

twisting of the beams, normal forces acting simultaneously with the moment of bending, and asymmetrical progressions of moment.

In order to account for the exact effects, practical construction formulae were derived with the energy method by analytical and numerical means, to calculate the lateral load (stabilisation load) for beams of any rectangular cross-section. Equations were also specially prepared to determine an effective stiffness against torsion for stacked, flexible composite rectangular cross-sections. This stiffness against torsion can then be used in the lateral load formula. In the process of deriving the formula, equations were also produced for calculating the section sizes as a result of the lateral load in the cross-section components.

The characteristics of the beams between the support nodes of the bracing bond were also examined, and the calculation made accessible. The result equations are given in chapter 7, their derivations in the preceding chapters.

Version abrégée

Le présent rapport de recherche examine le comportement et le raidissement de basculement de poutres en bois en tenant particulièrement compte de poutres composées d'éléments de section reliés soupement entre-eux. De telles poutres sont surtout utilisées dans la construction de ponts - fabriquées en bois d'arbres à feuilles caduques - à cause de leur résistance aux intempéries. La liaison des différentes sections a lieu en règle générale par chevilles à barre/boulons usinés. Celle-ci n'est donc pas rigide mais souple. Tout collage est exclu pour de multiples raisons.

Les poutres sont soumises au pliage et à la force normale par des charges externes et internes. Les sections éprouvent obligatoirement à cette occasion des imperfections, des torsions et des déplacements verticalement par rapport à la direction des charges. Afin de limiter les déformations nommées et d'empêcher un «basculement» des poutres, on insère des assemblages de raidissement. Ces assemblages sont sollicités par des «charges de base» (charges latérales). Les charges de base sont des charges qui résultent d'un adossement des poutres sur les assemblages rigides.

La grandeur des charges latérales est calculée jusqu'à présent selon les équations de la norme DIN 1052 partie 1. En fait, on présuppose implicitement dans ces formules qu'il s'agisse de poutres monolithiques sur l'arête supérieure desquelles l'assemblage de raidissement et les charges agissent. Mais les poutres à examiner ne sont d'une part pas monolithiques et, d'autre part, l'assemblage et la charge n'agissent souvent pas sur l'arête supérieur. C'est pour cette raison qu'il résulte souvent, après calcul plus exact, des charges latérales plus élevées pour les poutres sus-nommées que d'après les formules de la norme DIN 1052 partie 1 de telle sorte que celles-ci ne doivent pas être utilisées dans ces cas.

Ce projet de recherche a accordé une grande valeur lors de la déduction des équations de charge latérale à la prise en considération de quelques influences importantes en particulier également pour les poutres de pont. C'est pourquoi ces influences sont explicitement comprises dans les formules par leur paramètres mécaniques correspondants. Il en résulte de multiples possibilités d'application des équations déduites. Le paragraphe suivant expliquera brièvement les influences mentionnées.

La rigidité à la torsion des poutres est une grandeur de résistance principale pour le basculement. Elle est considérablement plus petite pour les poutres composées soupement que pour les poutres monolithiques de même dimension. Une action de l'assemblage sur la membrure supérieure assure en règle générale une stabilisation maximale. Les assemblages disposés plus bas provoquent des charges latérales accrues. La hauteur d'action d'un charge linéaire a également de grands effets sur

le comportement de basculement des poutres; il faut observer ici que la charge au-dessus du niveau de l'assemblage agit. Les poutres de pont sont en plus grandement sollicitées par des charges latérales dues au vent dont les conséquences ne peuvent pas être saisies avec les formules de calcul existant jusqu'à présent. Enfin, les équations selon la norme DIN 1052 partie 1 ne permettent pas de saisir par le calcul de possibles prétorsions des poutres, les forces normales agissant simultanément avec les moments de pliage et les déroulements de moment asymétriques.

Afin de pouvoir prendre en considération les effets nommés, on a déduit avec la méthode d'énergie, par voie analytique et numérique, des formules destinées à la construction pour le calcul de la charge latérale (charge de stabilisation) pour des poutres avec des sections quelconques. On a établi également des équations afin de déterminer une rigidité de torsion spécialement pour des sections carrées empilées les unes sur les autres avec un assemblage souple. Cette rigidité de torsion peut alors être utilisée dans les formules de charge latérale. Les déductions ont également révélées des équations sur le calcul des tailles de coupe conséquemment à la charge latérale dans les éléments de section.

De plus, on a examiné le comportement des poutres entre les points d'appui de l'assemblage et donné accès au calcul. On trouvera le résultat des équations dans le chapitre 7 et les déductions dans les chapitres précédents correspondants.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	I
Kurzfassung	III
Abstract	V
Version abrégée	VII
1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Lösungsansatz	2
1.3 Verwendete Bezeichnungen	4
2 Effektive Torsionssteifigkeit	7
2.1 Vorbetrachtungen	7
2.1.1 Lösungsweg	7
2.1.2 Voraussetzungen für die Berechnung	8
2.1.3 Schubmittelpunkt	12
2.1.4 Stabdübelabstände nach Hauptachsenberechnung	13
2.1.5 Berechnungsansätze für die Federsteifigkeiten	14
2.2 Herleitungen nach der Energiemethode	16
2.2.1 Herleitung für n asymmetrische Teilquerschnitte	16
2.2.2 Vereinfachungen für unendliche Drehfedersteifigkeiten	19
2.3 Analytische Herleitung von Näherungsformeln	21
2.3.1 Herleitung für den Fall unendlicher Drehfedersteifigkeit	21
2.3.2 Herleitung für den Fall endlicher Drehfedersteifigkeit	24
2.4 Numerische Betrachtungen	26
2.4.1 Programmbeschreibung	26
2.4.2 Auswertung der Vergleichsrechnungen	27

2.4.3	Anwendungsempfehlungen	30
2.4.4	Berechnung des Schubflusses	30
2.5	Innere Torsionsvorgänge	31
3	Seitenlast q_s	33
3.1	Vorbetrachtungen	33
3.1.1	Lösungsweg	33
3.1.2	Voraussetzungen für die Berechnung	34
3.2	Herleitung für symm. Momentenlinien	40
3.2.1	Analytische Herleitung — q_s^M	40
3.2.2	Plausibilität des Faktorenprinzips	45
3.3	Herleitung für asymm. Momentenlinien	45
3.3.1	Analytische Herleitung — Faktor k_M	45
3.3.2	Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformel	49
3.4	Herleitung für symm. Normalkraftlinien	54
3.4.1	Analytische Herleitung — q_s^N	55
3.4.2	Rechenwerte für α und φ	59
3.4.3	Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformeln	60
3.4.4	Kritische Normalkraft	63
3.5	Herleitung für Momente und Normalkräfte	64
3.5.1	Aufstellung der Grundgleichungen	64
3.5.2	Analytische Herleitung für symm. Momente — q_s^{M+N}	67
3.5.3	Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformeln	71
3.5.4	Verfahren bei asymmetrischen Momentenlinien	74
3.6	Kritische Parameter	76
4	Interaktionen	79
4.1	Torsionsbeanspruchung	79
4.2	Querbiegebeanspruchung	80
4.3	Torsionsstreckenlast	81
5	Verhalten zwischen den Festhaltepunkten	83
5.1	Abschätzung mit Hilfe der vorliegenden Formeln	84
5.2	Abschätzung nach Theorie II. Ordnung	84
6	Berechnung der Verbandssteifigkeit	87

7	Formeln für die Anwendung	91
7.1	Torsionssteifigkeit	91
7.2	Seitenlast	92
7.2.1	Seitenlast für reine Momentenbeanspruchung	93
7.2.2	Seitenlast für reine Normalkraftbeanspruchung	94
7.2.3	Seitenlast für kombinierte Beanspruchung	94
7.2.4	Vereinfachte, allgemeingültige Seitenlastformeln	95
7.3	Schnittgrößen	96
7.3.1	Torsion	96
7.3.2	Querbiegung	96
7.3.3	Stabdübelschubkräfte	97
7.4	Kippuntersuchung zwischen den Abstützungen	97
7.5	Verbandssteifigkeit	97
8	Berechnungsbeispiel	99
8.1	Hauptachsenberechnung	100
8.2	Berechnung der Torsionssteifigkeit	101
8.3	Seitenlastberechnung	102
8.4	Zusatzschnittgrößen	104
8.5	Kippverhalten zwischen den Verbandsknoten	106
	Literaturverzeichnis	107

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

In den letzten Jahren wurde beim Bauen zunehmend Wert auf ökologisch sinnvolle und ästhetisch ansprechende Konstruktionen gelegt. Holz als natürlicher und regenerativer Werkstoff erfüllt diese Ansprüche in einmaliger Weise. So wurden auch vermehrt Brücken für Fußgänger, Radfahrer und in Sonderfällen für Kraftfahrzeuge aus Holz hergestellt. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einigen Stabilitätsproblemen von Holzbrückenkonstruktionen.

Die Hauptträger der Holzbrücken bestehen entweder aus Fachwerken oder aus Vollwandbindern. Die aus einzelnen Querschnitten zusammengesetzten, mit Stabdübeln untereinander verbundenen nachgiebigen Biegeträger sind als eine Sonderform der Vollwandbinder anzusehen und werden — hergestellt aus Laubhölzern — wegen ihrer hohen Witterungsresistenz gerne eingesetzt.

Im belasteten Zustand sind die Hauptträger der Brücken stark auf Biegung und — sekundär infolge Verbandswirkung — auch auf Normalkräfte beansprucht. Die Biegemomente rufen bei den relativ schlanken Vollwandträgern Kipperscheinungen hervor. Um das Kippen zu verhindern, werden Aussteifungsverbände eingebaut. Diese Aussteifungsverbände bestehen zumeist aus Fachwerkstrukturen.

Da die Hauptträger immer gewisse seitliche Imperfektionen aufweisen, werden sie bei der Wirkung von Biegemomenten zusätzlich seitlich verformt (Theorie II. Ordnung) und somit gegen die Aussteifungsverbände gedrückt. Die Lasten, die die Verbände so erhalten, bezeichnet man als Seitenlasten q_s (Lasten infolge des seitlichen Ausweichens der Träger). Diese q_s -Lasten werden zur Dimensionierung der Aussteifungsverbände benötigt.

Für nicht untergliederte Vollwandträger und für Fachwerkträger können die Seitenlasten nach DIN 1052 Teil 1 [1] berechnet werden. Allerdings ist hierbei die Einschränkung zu machen, daß sowohl die Last als auch der Aussteifungsverband an der Oberkante des Trägers angreifen müssen; ansonsten gelten die dortigen Gleichungen nicht.

Brückenträger bestehen jedoch häufig aus nachgiebig miteinander verbundenen Biegeträgern. Diese Träger weisen gegenüber den Vollwandträgern geringere Torsionssteifigkeiten T auf. Die Torsionssteifigkeit ist aber ein für die Kippstabilität entscheidender Parameter. Träger mit geringerer Torsionssteifigkeit weisen auch eine geringere Kippstabilität auf und führen infolge ihrer größeren Weichheit zu höheren

Seitenlasten. Mit der Formel nach [1] kann dieser Effekt nicht berücksichtigt werden, weil die Torsionssteifigkeit T nicht explizit in die Formel einfließt, sondern im Gang der Herleitung schon mit ihren Einzelparametern für monolithische Rechteckquerschnitte eingesetzt und ausgewertet wurde. Zusätzlich greifen bei Brückenhauptträgern Lasten und Verband oftmals nicht an der Trägeroberkante an, was die Verwendung der Gleichung nach [1] strenggenommen ausschließt.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Herleitung einer einfachen, baupraktischen Formel für die Seitenlast q_s , die auch für *nachgiebige* Biegeträger unter Momenten- und Normalkraftbeanspruchung gilt (ungleiche Randmomente werden zur Erfassung von Durchlaufträgerfeldern eingearbeitet). Außerdem soll berücksichtigt werden, daß Verbände, Lasten und Normalkräfte in beliebiger Trägerhöhe angreifen können. Der Träger an sich soll sowohl eine Vorkrümmung als auch eine Vorverdrehung aufweisen können. Schließlich wird bei der Herleitung auch der Einfluß einer Windlast in beliebiger Trägerhöhe in Rechnung gestellt.

Ein weiterer Grund für die Neuentwicklung der Seitenlastformel ist, daß mit der Gleichung nach [1] stabilitäts-kritische Zustände des Systems nicht erkannt werden können.

Zusätzlich soll in diesem Forschungsvorhaben untersucht werden, wie groß die Torsionssteifigkeit eines aus mehreren Teilquerschnitten bestehenden, nachgiebig zusammengesetzten Biegeträgers ist.

1.2 Lösungsansatz

Die mechanische Erfassung und Benennung des *Kippens* geht auf *Prandtl* [2] zurück. Er interpretierte und beschrieb dieses Stabilitätsversagen schlanker Biegeträger als ein seitliches Ausweichen der Träger aus der Lastebene bei gleichzeitiger Verdrillung. Ihm gelang die erste Herleitung eines kritischen Kippmoments nach Theorie II. Ordnung. Weitere Schritte in der Analyse dieses Phänomens wurden von *Federhofer* [3], *Chwalla* [4, 5, 6], *Roik* [7] u.v.a. unternommen.

Nach den Untersuchungen des Kippproblems von Einzelträgern wurde das Verhalten des durch einen Aussteifungsverband gehaltenen Trägersystems analysiert. Hier sind auf dem Gebiet des Holzbaus besonders die Arbeiten von *Möhler* [8, 9, 10], *Brüninghoff* [11, 12] und *Heimeshoff* [13] zu nennen. Auch der vorliegende Forschungsbericht befaßt sich mit ausgesteiften Systemen.

Während früher fast ausschließlich die Differentialgleichungsmethode zur Erfassung des mechanischen Geschehens verwendet wurde, wird heute zunehmend die Energiemethode nach Theorie II. Ordnung benutzt. Außerdem wird — wie in diesem Bericht — zumeist nicht das reine Stabilitätsproblem, sondern aufgrund von Vorverformungen des Tragwerks und von sekundären Lasten senkrecht zur Trägerhauptebene das Spannungsproblem untersucht.

Bei der Energiemethode wird das Potential Π des verformten Gleichgewichtszustands der äußeren und inneren Kräfte aufgestellt. Die Variation¹ $\delta(\Pi) = 0$ liefert nach den Regeln der Variationsrechnung das gesuchte, beim Spannungsproblem in-

¹Der mathematische Begriff der Variation entspricht hier dem mechanischen Begriff der virtuellen Verrückung. Eine solche — bei Einhaltung der Randbedingungen willkürliche — virtuelle Verrückung wird dem verformten Grundzustand eingepreßt. Befindet sich der Grundzustand im Gleichgewicht, zeichnet er sich gegenüber allen möglichen variierten Nachbarzuständen dadurch aus, daß sein Potential Π ein Minimum ist, was mit der Bedingung $\delta(\Pi) = 0$ überprüfbar ist. Die Art des Gleichgewichts kann aus der zweiten Variation bestimmt werden (s. [14]).

homogene Differentialgleichungssystem. Ist dieses Differentialgleichungssystem mathematisch lösbar, kann es in ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem überführt werden, aus dem die gesuchten Freiwerte bestimmbar sind. Scheitert die Lösung des Differentialgleichungssystems (z.B. wegen vieler nicht konstanter Koeffizienten wie im vorliegenden Fall) an mathematischen Schwierigkeiten, kann mit Hilfe des *Ritzschen* Verfahrens eine Näherungslösung gefunden werden. Hierbei werden für die unbekanntenen Verformungsfunktionen im Potential Näherungsansätze gemacht, die mindestens die geometrischen Randbedingungen befriedigen müssen. In den Näherungsansätzen $v_i(x)$ sind Freiwerte a_i enthalten. Zur Bestimmung des energetischen Minimums wird das Potential Π partiell nach den Freiwerten abgeleitet. Die Ableitungsterme sind zu Null zu setzen:

$$\frac{\partial [\Pi(v_i)]}{\partial a_i} = 0.$$

Man erhält so ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem in den Freiwerten a_i , aus dem die gesuchten Freiwerte bestimmt werden können. Je besser sich die Näherungsansätze $v_i(x)$ der exakten, aber unbekanntenen Lösungskurve anpassen können, desto besser ist die Ergebnisqualität der Näherung. Dennoch liegt die Näherung immer auf der unsicheren Seite. Aus diesen Gründen werden häufig Ansätze mit einer großen Anzahl von Freiwerten gewählt, die sich der exakten Lösung besser annähern können. Nachteilig hierbei ist, daß die Lösungen nur noch numerisch zu gewinnen sind.

In diesem Forschungsvorhaben wurden zur Handrechnung stets einfache Ansätze gewählt, um einfache und baupraktische Lösungsgleichungen zu erhalten. Zudem wurde von *Möhler* und *Müller* in [10] bestätigt, daß bei Parallelträgern *einparametrische* Ansätze genügend genaue Ergebnisse liefern. Im Rahmen von [15] sind die hergeleiteten Lösungen mit Ansätzen höheren Grades überprüft worden. Entsprechende Korrekturvorschläge finden sich in Kap. 7.

Im folgenden werden zuerst Formeln für die effektive Torsionssteifigkeit hergeleitet, woran sich Betrachtungen über die Seitenlasten unter verschiedenen äußeren Lasten anschließen. Danach werden Rückschlüsse auf die Beanspruchung der Träger aus den Seitenlasten gezogen. Schließlich wird das Verhalten der Träger zwischen den Festhaltepunkten des Verbands untersucht. Nach einigen Angaben zur Berechnung der Verbandssteifigkeit im Holzbau werden die wichtigsten Anwenderformeln zusammengestellt und an einem abschließenden Beispiel erläutert.

1.3 Verwendete Bezeichnungen

Zeichen	Bedeutung
L	Trägerlänge
s	Teilfeldlänge
b, b_i	Trägerbreite, Einzelquerschnittsbreite
h, h_i	Trägerhöhe, Einzelquerschnittshöhe
A	Querschnittsfläche
$v(x)$	elastische Verschiebung des Trägerschwerpunkts
$v_0(x)$	Vorverformung des Trägers
$\vartheta(x)$	elastische Verdrehung des Trägers
$\vartheta_0(x)$	Vorverdrehung des Trägers
$\vartheta_g(x)$	Querschnittsverdrehung nach der Gesamtsteifigkeitsmethode
$v_v(x)$	elastische Verschiebung des Aussteifungsverbands
ϵ	Stichmaß der Vorverformung
β	Stichmaß der maximalen Verbandsdurchbiegung
z_v	Abstand des Verbands zum Schubmittelpunkt des Trägers
z_q	Abstand der Gleichlast zum Schwerpunkt des Trägers
z_N	Abstand der Normalkraft zum Schwerpunkt des Trägers
z_w	Abstand der Windlastangriffslinie zum Trägerschwerpunkt
Δz	Windversatzstrecke; $\Delta z = z_v - z_w$
$s_{i,j}$	Abstand der Teilquerschnittsschwerpunkte S_i und S_j
s_g	Abstand der Teilquerschnittsschwerpunkte S_1 und S_n
z_M	Ordinate des Gesamtquerschnittschubmittelpunkts
z_{M_i}	Abstand zwischen M_i und M
z_S	Ordinate des Gesamtquerschnittschwerpunkts
z_{S_i}	Abstand zwischen S_i und S
d_{S_i}	Stabdübeldurchmesser
e_{S_i}	Stabdübelabstand
d	Durchmesser von Rundstählen

Tabelle 1.1: Geometrische Größen

Zeichen	Bedeutung
m	Anzahl der durch einen Verband ausgesteiften Träger
n	Anzahl der Teilquerschnitte
k	Anzahl der Felder des Aussteifungsverbands
γ_1	Lasterhöhungsbeiwert
NH II	Vollholz aus Nadelholz der Güteklasse II (Sortierklasse S 10)
BSH I	Brettschichtholz aus Nadelholz der Güteklasse I (Sortierklasse S 13)
LH A	Vollholz aus Laubholz der Gruppe A
LH C	Vollholz aus Laubholz der Gruppe C

Tabelle 1.2: Weitere Größen

Zeichen	Bedeutung
T	Torsionssteifigkeit; $T = G_T I_T$
T_i	Torsionssteifigkeit des Querschnitts i
efT	effektive (wirksame) Torsionssteifigkeit
T_w	Wölbsteifigkeitsanteil
B_y	Biegesteifigkeit um die y -Achse; $B_y = E_{ } I_y$
B_z	Biegesteifigkeit um die z -Achse; $B_z = E_{ } I_z$
B_v	effektive Biegesteifigkeit des Aussteifungsverbands
I_T	Torsionsflächenmoment; für Rechtecke: $I_T = \eta b^3 h / 3$
η	Koeffizient; $\eta \approx 1 - 0.63b/h + 0.052(b/h)^5$
W_T	Torsionswiderstandsmoment; für Rechtecke: $W_T = \frac{\eta}{\eta_2} b^2 h / 3$
η_2	Koeffizient; $\eta_2 \approx 1 - \frac{0.63(b/h)^3}{1+(b/h)^3}$
I_y	Flächenträgheitsmoment des Trägers um die y -Achse
I_z	Flächenträgheitsmoment des Trägers um die z -Achse
i_p	polarer Trägheitsradius; für Rechtecke: $i_p^2 = (b^2 + h^2) / 12$
G_T	Torsionsmodul
$E_{ }$	Elastizitätsmodul parallel zur Faser
S_{id}	ideelle Schubweichheit
$zul\sigma_{D }$	zulässige Druckspannung parallel zur Holzfaserichtung
$zul\sigma_B$	zulässige Biegespannung
$M_y(x)$	Momentenverlauf im Träger
M_y	einwirkendes Hauptbiegemoment; $M_y = \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2}$
efM_y	effektives einwirkendes Hauptbiegemoment; $efM_y = M_y - 2\varphi z_N N_0$
M_{ykrit}	kritisches Kippmoment
q	Gleichlast in z -Richtung
M_L, M_R	linkes und rechtes Stützmoment des Trägers
κ	Stützmomentenverhältnis; $\kappa = M_R / M_L$
$N(x)$	Normalkraftverlauf im Träger
N_0	maximale Normalkraft im Träger
N_j	Normalkraft im Trägerbereich j
n_j	bezogene Normalkraftordinate im Bereich j ; $n_j = N_j / N_0$
$q_v(x)$	Verbandslast
$q_s(x)$	Seitenlast
q_{s0}	Grundseitenlast
k_s	Systemfaktor
k_w	Windlastfaktor
k_{t0}	Vorverdrehungsfaktor
k_M	Momentenfaktor
f_T	Schlankheitsfaktor; $f_T = 1 - \frac{1}{150} \left(\frac{h}{b}\right)^2$
α, φ	Parameter für q_s
Δ	Fehlerglied im Faktor k_M
$q_w(x), q_w$	Windlastverlauf, Windlastordinate
M_w	Winddrehmoment; $M_w = q_w L \Delta z$
$m_T(x)$	Torsionsstreckenmoment
$q_y(x)$	Torsionsstreckenlast
γ_i	Nachgiebigkeitsfaktoren für zusammengesetzte Querschnitte
M_t^i	inneres Torsionsmoment
γ_T	Torsionsverbundfaktor
k_T	Hilfswert für γ_T
c_y	Dehnfedersteifigkeit
c_ϑ	Drehfedersteifigkeit
$t_j(x)$	Schubfluß in Fuge j
Q_j	Schubkraft pro Stabdübel in Fuge j
k_B	Kippbeiwert

Tabelle 1.3: Mechanische Größen

Kapitel 2

Effektive Torsionssteifigkeit

2.1 Vorbetrachtungen

2.1.1 Lösungsweg

Die Torsionssteifigkeit $T = G_T I_T$ ist formelmäßig für verschiedene Querschnittstypen bekannt. Hierunter fallen fast alle einteiligen, beliebig geformten geometrische Figuren, doppelt-symmetrische Kastenquerschnitte und doppelt-symmetrische I-Träger (s. [16] und [17]). Dagegen war es bisher nicht möglich, die Torsionssteifigkeit T für Träger, die aus übereinander gestapelten und nachgiebig miteinander verbundenen Rechteckquerschnitten bestehen, zu berechnen.

Im Rahmen dieses Forschungsvorhabens wurden entsprechende Formeln theoretisch abgeleitet. Grundsätzlich standen hierfür die Differentialgleichungsmethode und die Energiemethode zur Verfügung. Nach ersten Ansätzen mit der Differentialgleichungsmethode wurde jedoch die Energiemethode in Gestalt des *Ritzschen* Verfahrens gewählt.¹ Wie in Kap. 1.2 beschrieben, werden nach der Aufstellung des Potentials der inneren und äußeren Kräfte für die unbekanntes Verformungsfunktionen Näherungsansätze aufgestellt. Durch Ableitung des Potentials nach den Unbekannten in den Näherungsansätzen erhält man dann ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten, die hieraus bestimmt werden können.

Zur Berechnung der Torsionssteifigkeit wurden eingliedrige Sinusansätze gewählt, die der Verformungsrealität eines symmetrischen und gabelgelagerten Trägers gut entsprechen. Außerdem war es so möglich, baupraktische Ergebnisgleichungen auf analytischem Weg abschätzen zu können.

Da bei einem reinen Torsionsstab kein Stabilitätsversagen zu erwarten ist, wurde das System grundsätzlich unter *einfachen* Lasten berechnet.

¹ Schon bei kleinen Systemen ergaben sich bei der Differentialgleichungsmethode umfangreiche gekoppelte Differentialgleichungssysteme, aus denen auf analytischem Weg keine baupraktischen Ergebnisgleichungen mehr zu gewinnen waren.

2.1.2 Voraussetzungen für die Berechnung

Darstellung des Systems

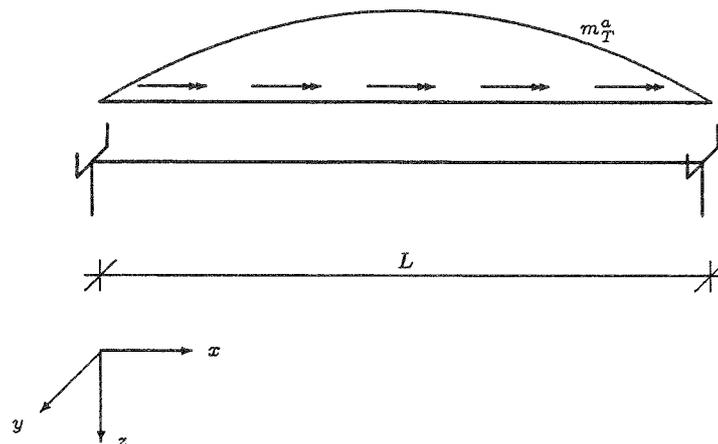


Abbildung 2.1: Statisches System des Trägers

Als statisches System wird ein gabelgelagerter Einfeldträger gewählt (s. Abb. 2.1). Die einzelnen Teilquerschnitte liegen übereinandergestapelt in den Auflagergabeln und können sich so an den Randpunkten nicht verdrehen. Die Teilquerschnitte sind im Abstand e durch Stabdübel elastisch miteinander verbunden. Dadurch können sie sich im Feld gegeneinander verschieben und verdrehen.

Mechanische Voraussetzungen

Die Herleitungen basieren auf folgenden Voraussetzungen:

- Das *Hookesche* Gesetz gilt. Für die einzelnen Querschnittsteile soll auch die *Bernoulli-Hypothese* Gültigkeit haben.
- Die Wölbwiderstände C_{M_i} der Einzelquerschnitte wurden vernachlässigt, da Rechteckquerschnitte „quasi-wölbfrei“ sind (vgl. [14, Seite 714]). Für die Einzelquerschnitte wurden also nur die Anteile nach *de Saint-Venant* berücksichtigt. Gegenrechnungen mit den Eigenwölbanteilen der Teilquerschnitte ergaben für Trägerlängen über 5 m und üblichen Querschnittsabmessungen Einflüsse unter 5%, zumeist sogar unter 1%.² Bei der Berechnung des Gesamtquerschnitts ergibt sich im Verlauf der Ableitungen eine „Quasi-Wölbsteifigkeit“, die aus der gegenseitigen Verschiebung der Einzelquerschnitte zu erklären ist.
- Es wird nach isotroper, homogener Werkstofftheorie gerechnet, was sich auch für den anisotropen, inhomogenen Baustoff Holz unter Torsionsbelastung bewährt hat, solange die Anisotropie des verwendeten Holzes nicht zu stark ausgeprägt ist (s. [11] und [18]). Für Hölzer mit ausgeprägter Anisotropie (z.B.

²Für einen 5 m langen Träger mit Querschnitten $h/b = 30/30$ cm aus LH C ergab sich ein Eigenwölbanteil von 4,3 %. Bei Querschnitten $h/b = 20/20$ cm lag der Anteil nur noch bei 1,9 %.

Kiefer) sollte bei der Ermittlung der Spannungen ein Erhöhungsfaktor berücksichtigt werden (vgl. [18]). Laubhölzer weisen i.A. eine schwächer ausgeprägte Anisotropie auf (vgl. [19, 20]).

- Die Verformungen des Systems sollen im Vergleich mit den Tragwerksabmessungen klein sein.
- Die Stabachse ist gerade.
- Die Trägerquerschnitte sollen bezüglich der z -Achse symmetrisch und über die Trägerlänge konstant sein.
- Die Schwerpunkte S_i der Einzelquerschnitte fallen mit den Schubmittelpunkten M_i zusammen, was bei Rechteckquerschnitten evident ist.
- Die äußeren Lasten sollen richtungstreu sein.

Elastisches Gesamtpotential des Systems

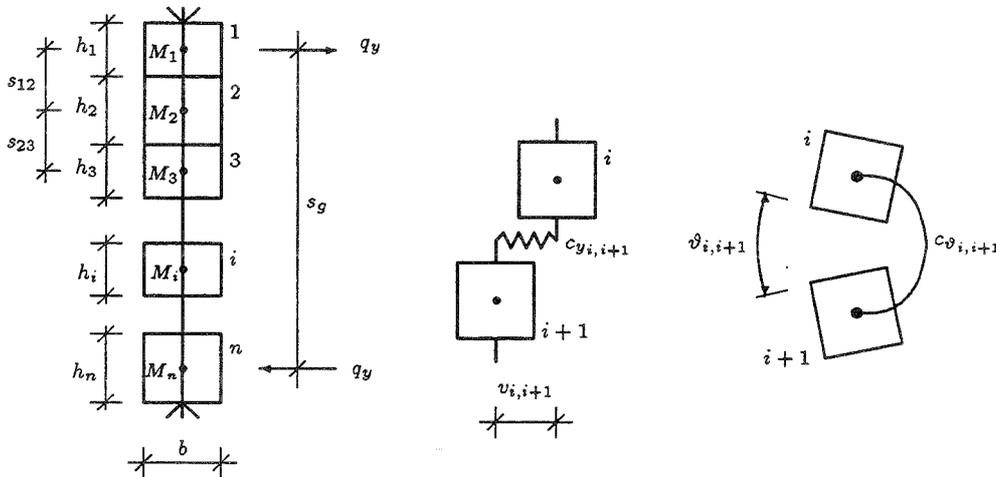


Abbildung 2.2: Trägerquerschnitt und Federbeziehungen

Es wird ein Träger, der aus n rechteckigen Teilquerschnitten zusammengesetzt und an den Randpunkten gabelgelagert ist, betrachtet. Die einzelnen Teilquerschnitte sind durch Stabdübel miteinander verbunden, woraus eine dehn- und drehelastische Verbindung der Querschnittsteile untereinander resultiert (s. Abb. 2.2). Die Federkennwerte c_y und c_φ sind nach Kap. 2.1.5 zu ermitteln. Belastet wird der Träger durch ein symmetrisches Streckentorsionsmoment m_T , das am Querschnitt in Form zweier gegengleicher, symmetrischer Steckenlasten q_y , die am obersten und untersten Teilquerschnitt angreifen, realisiert wird.³

³Der gewählte Lastansatz ist auch unter dem Aspekt, daß letztlich das Kippen der Träger betrachtet werden soll, plausibel. Beim Kippen infolge positiver Biegemomente herrschen im obersten Teilquerschnitt große Druckkräfte, die ein seitliches Ausweichen dieses Teilquerschnitts hervorrufen. Dieses Verhalten wird hier durch die obere Querlast q_y nachvollzogen. Im untersten Teilquerschnitt herrschen entsprechende Zugkräfte, die bei einem vorgekrümmten Träger rückdrehend wirken, da immer eine Begradigung der Zuglinie angestrebt ist. Dieser rückdrehende Effekt wird beim vorliegenden Lastansatz durch die gegengleiche Last symbolisiert. Alternativ könnte das Streckentorsionsmoment m_T auch entsprechend der Steifigkeiten der Einzelquerschnitte auf diese verteilt werden. Gegenrechnungen ergaben aber, daß das hier gewählte Verfahren auf der sicheren Seite liegt, also die Torsionssteifigkeit konservativ abschätzt.

Die Gleichung für das innere und äußere elastische Potential des betrachteten Systems lautet:⁴

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[\sum_{i=1}^n (T_i v_i'^2) + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_i''^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} \Delta v_{i,i+1}^2) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{\vartheta_{i,i+1}} \Delta \vartheta_{i,i+1}^2) - 2q_y v_1 + 2q_y v_n \right] dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Für die unbekanntenen Verformungsfunktionen sind solche Ansatzfunktionen zu wählen, die mindestens die geometrischen Randbedingungen und möglichst auch die dynamische Randbedingungen erfüllen sollten.

Ansatzfunktionen für die Verformungen

Für die Systemverformungen werden eingliedrige lineare Sinusfunktionen als Ansatzfunktionen gewählt. Diese erfüllen bei dem vorliegenden System die geometrischen Randbedingungen. Die Funktionen lauten für die Verschiebungen der Teilquerschnittsschwerpunkte

$$v_i(x) = v_{i0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.2)$$

und entsprechend für die Verdrehung der Teilquerschnitte

$$\vartheta_i(x) = \vartheta_{i0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2.3)$$

Im elastischen Potential 2.1 werden Ableitungen der Ansatzfunktionen benötigt. Diese Ableitungen sind:

$$v_i''(x) = -v_{i0} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (2.4)$$

$$\vartheta_i'(x) = \vartheta_{i0} \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2.5)$$

Ansätze für die Belastungsfunktion

Wie oben erläutert, wird das äußere Streckentorsionsmoment m_T in Form zweier gegengleicher Streckenlasten q_y , die in den Schwerpunkten der äußeren Teilquerschnitte angreifen, auf den Träger aufgebracht (vgl. Abb. 2.2):

$$m_T(x) = q_y(x) s_g \quad \rightsquigarrow \quad q_y(x) = \frac{m_T(x)}{s_g} \quad (2.6)$$

mit

$$s_g = \sum_{i=1}^{n-1} s_{i,i+1}. \quad (2.7)$$

Das Streckentorsionsmoment und somit die Streckenlast werden zur einfacheren Handhabung der Herleitungen als Sinusfunktionen angesetzt:⁵

$$q_y(x) = q_{y0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2.8)$$

⁴Die Potentialgleichung kann in ihren Einzeltermen einfach mit [14] und [7] nachvollzogen werden.

⁵Es ist zu erwarten, daß der Einfluß der Form der Lastfunktion auf die Größe der effektiven Torsionssteifigkeit, die aus den Herleitungen hervorgehen soll, gering bleibt (vgl. [21]).

Integralauswertungen

Für die folgenden zwei Integralausdrücke, die bei der Anwendung des *Ritzschen* Verfahrens stets auftreten, werden die Auswertungen vorgenommen (vgl. [22]):

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2}$$

Betrachtung der Querschnittsverdrehung

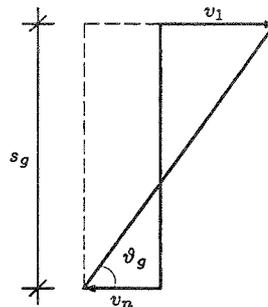


Abbildung 2.3: Gesamtquerschnittsverdrehung

Infolge der elastischen Verbindung der Teilquerschnitte gibt es bei dem betrachteten Träger vielfältige Verdrehungen.⁶ Zum einen weisen die Teilquerschnitte selbst unterschiedliche Einzelverdrehungen ϑ_e auf, zum anderen wird der gesamte Träger um den Winkel ϑ_g verdreht. Die Gesamtverdrehung ϑ_g berechnet sich dabei aus der Verschiebungsdifferenz des obersten zum untersten Teilquerschnittsschwerpunkt und der Strecke zwischen diesen beiden Punkten (s. Abb. 2.3). Über die Größe der Verdrehungen entscheidet die Stärke des elastischen Verbunds (Federsteifigkeit). Bei einem Querschnitt *ohne* Kopplung werden nur der oberste und unterste Teilquerschnitt *verschoben*;⁷ kein Einzelquerschnitt wird verdreht, da hierzu der Mitnahmeeffekt der Federn notwendig ist. Mit wachsender Federsteifigkeit werden die mittleren Teilquerschnitte stärker am Lastabtrag beteiligt, wodurch sich die Einzelverdrehungen ϑ_e vergrößern,⁸ die Gesamtverdrehung sich aber infolge der anwachsenden Torsionssteifigkeit verkleinert. Bei starker Kopplung ($c_y, c_\vartheta \rightarrow \infty$) gibt es keine Verdrehungsdifferenzen zwischen den Einzelquerschnitten und dem Gesamtquerschnitt mehr (Konvergenzfall $\vartheta_e = \vartheta_g$).

Die Berechnung der *wirksamen Torsionssteifigkeit* efT wird über die Gleichung

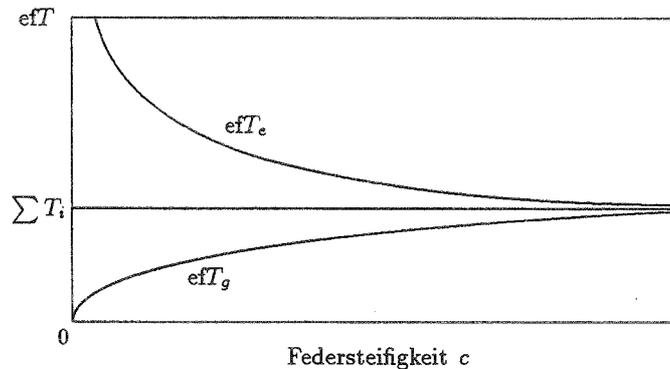
$$efT = \frac{m_T}{\vartheta''}, \quad (2.9)$$

die sich durch Differentiation der bekannten Drillungsbeziehung ergibt, vorgenommen. Für die Verdrehung ϑ kann entweder die größte Einzelverdrehung ϑ_e (*Einzelquerschnittsmethode* $\rightarrow efT_e$) oder die Gesamtverdrehung ϑ_g (*Gesamtquerschnittsmethode* $\rightarrow efT_g$) eingesetzt werden. Der Verlauf dieser beiden Torsionssteifigkeiten

⁶Bei den folgenden Betrachtungen ist zu berücksichtigen, daß das äußere Torsionsmoment in Form zweier gegengleicher Streckenlasten an den äußeren Teilquerschnitten aufgebracht wird.

⁷Die Querlasten greifen im Schubmittelpunkt der beiden Teilquerschnitte an!

⁸Die Verdrehung der Außenquerschnitte ist stets etwas kleiner als die Verdrehung der inneren Querschnitte, da die Innenquerschnitte bei einsetzender Federsteifigkeit versuchen, die Verschiebungsdifferenz der Außenquerschnitte durch Verdrehen zu überbrücken. Bei wachsender Federsteifigkeit beteiligen sie die Außenquerschnitte zunehmend an dieser Verdrehung.

Abbildung 2.4: Funktionsverlauf der wirksamen Torsionssteifigkeit über c

in Abhängigkeit der Federsteifigkeiten ist in Abb. 2.4 dargestellt. Bei kleinen Federsteifigkeiten ist die Einzelsteifigkeit efT_e sehr groß, weil sich die Querschnitte kaum verdrehen, sondern nur verschieben. Dagegen ist die Gesamtsteifigkeit efT_g minimal, weil bei reiner Verschiebung keine Torsionswiderstände aktiviert werden. Bei wachsender Federsteifigkeit konvergieren beide Torsionssteifigkeiten gegen den gleichen Grenzwert, da die Einzeldrehwinkel gegen den Gesamtdrehwinkel konvergieren.⁹

Die Berechnung der Torsionssteifigkeit über die Gesamtquerschnittsmethode erfasst eher die Widerstandsmechanismen, die beim Kippversagen aktiviert werden¹⁰ und liegt auf der sicheren Seite. Deshalb wurde in diesem Forschungsvorhaben die Gesamtquerschnittsmethode verwendet.

2.1.3 Schubmittelpunkt

Der Schubmittelpunkt M , auch Drillruhepunkt genannt, ist derjenige Punkt eines Querschnitts, durch den die Wirkungslinie einer äußeren Kraft verlaufen muß, damit sich der Querschnitt nicht verdrillt, sondern nur verschoben wird. Dieser Punkt läßt sich für beliebige Querschnitte aus der Bedingung $\sum M_t = 0$ bestimmen.

Bei Rechteckquerschnitten fällt der Schubmittelpunkt M mit dem Schwerpunkt S im Querschnittsmittelpunkt zusammen. Bei offenen, dünnwandigen Querschnitten ist die Lage von M rechnerisch leicht bestimmbar (s. z.B. [23]). Auch für geschlossene Querschnitte liegen in der Literatur Lösungen vor. Für die hier untersuchten Querschnitte, die aus einzelnen, übereinandergestapelten Rechteckquerschnitten bestehen, kann die Lage von M aus der o.g. Bedingung mit der Energiemethode ermittelt werden.¹¹ Für die Lage von M erhält man die bekannte Beziehung (vgl. Abb. 2.5):

$$z_M = \frac{\sum_{i=1}^n (B_{z_i} z_i)}{\sum_{i=1}^n B_{z_i}}. \quad (2.10)$$

⁹Wie es sich später herausstellen wird, ist dieser Grenzwert die Summe der Einzeltorsionssteifigkeiten der Querschnitte $\sum T_i$.

¹⁰Beim Kippversagen wird die resultierende Gesamtverdrehung des Querschnitts und nicht die Verdrehung eines Einzelquerschnitts für das System stabilitätsgefährdend.

¹¹Zur Herleitung wird ein Querschnittsbündel betrachtet, das durch einen aufgesattelten Querträger mit einer Kraft in variabler Höhe belastet wird. Aus der Bedingung $\vartheta = 0$ läßt sich die Lage von M finden.

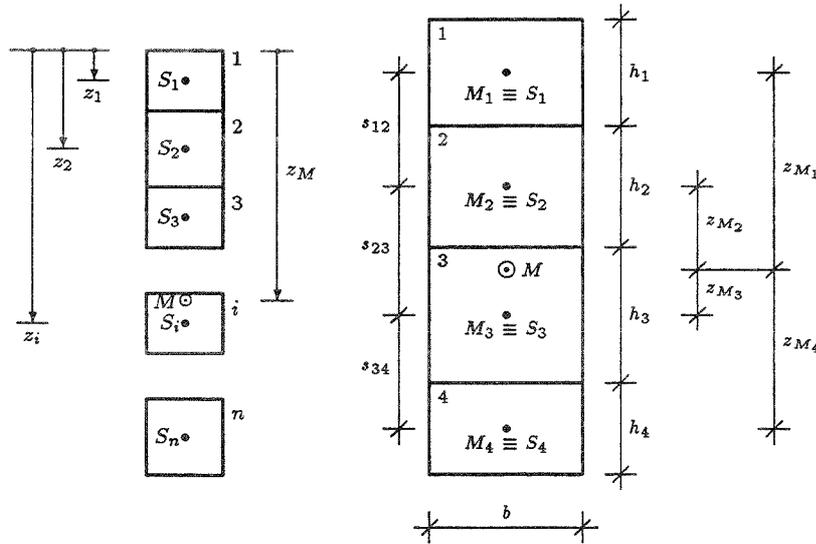


Abbildung 2.5: Berechnung des Schubmittelpunkts M mit Bezeichnungsbeispiel

Weisen alle Querschnitte die gleiche Breite auf, liegt der Schubmittelpunkt in halber Querschnittshöhe.

Zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunkts in horizontaler Richtung bei unterschiedlichen Breiten der Einzelquerschnitte läßt sich die Gleichung (2.10) entsprechend verwenden.

2.1.4 Stabdübelabstände nach Hauptachsenberechnung

Die Berechnung von nachgiebig zusammengesetzten Biegeträgern aus beliebig vielen Einzelquerschnitten um die *Hauptachse* ist von *Schelling* in [24] und *Heimeshoff* in [25] erläutert worden. Ein Näherungsverfahren für Kragträger und Zweifeldträger ist in [26] angegeben.

Nach der Bestimmung des Trägerschwerpunkts aus der Gleichung

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i z_i)}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (2.11)$$

läßt sich mit Hilfe einiger geometrischer und mechanischer Größen ein lineares Gleichungssystem aufstellen. Als Lösungen des Gleichungssystems erhält man die Nachgiebigkeitsfaktoren γ_i der Einzelquerschnitte, mit welchen sich das effektive Flächenträgheitsmoment um die Hauptachse

$$ef I_y = \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i z_{S_i}^2 A_i \quad (2.12)$$

berechnen läßt. Im Zuge einer Nachlaufrechnung können dann die Spannungen und Schubflüsse in den Querschnittsteilen berechnet werden.

Führt man diese Berechnungen für Brückenhauptträger durch, zeigt es sich, daß die Schubkräfte in den Querschnittsfugen, die von den Stabdübeln übertragen werden müssen, fast immer für die Wahl der Stabdübelabstände maßgebend werden. Sollen die zulässigen Scherkräfte in den Stabdübeln nicht überschritten werden, empfiehlt es sich, für die Stabdübelabstände e_{St} die Bedingung

$$e_{St} \leq 5 \dots 7 d_{St} \quad (2.13)$$

einzuhalten.

2.1.5 Berechnungsansätze für die Federsteifigkeiten

Die einzelnen Teilquerschnitte des Trägers werden durch die Stabdübel miteinander verbunden. Der Verbund wirkt auch im Lastfall Torsion. Wird beispielsweise der oberste Querschnitt seitlich verschoben, dann werden die unteren Querschnitte je nach Steifigkeit der Stabdübelverbindung mehr oder weniger stark mitverschoben und tordiert. Die Wirkung der Stabdübel läßt sich dabei mechanisch durch Federn veranschaulichen.

Zum einen ist eine *seitliche Dehnfedersteifigkeit* anzusetzen, um die gegenseitige Querverschiebung der Teilquerschnitte zu erfassen. Zum anderen können sich die Teilquerschnitte auch gegeneinander verdrehen, was durch *Drehfedern* berücksichtigt werden kann.

In den folgenden Unterkapiteln werden von den Verfassern Ansätze zur Berechnung der Federsteifigkeiten vorgeschlagen.

Berechnung der Dehnfedersteifigkeit c_y

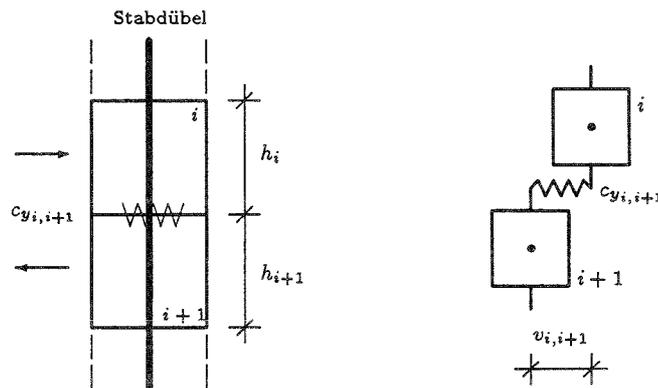


Abbildung 2.6: Geometrische Grundlagen zur Ermittlung von c_y

Der Berechnung der Dehnfedersteifigkeit c_y für die Querrichtung wird das Tragmodell nach Abb. 2.6 zugrundegelegt. Jedem einzelnen Stabdübel ist nach [1, Tab.8] eine Federsteifigkeit der Größe

$$C_{N_{i,i+1}} = \begin{cases} 0,7 \text{zul}N & \text{allgemein} \\ 1,0 \text{zul}N & \text{für LH C} \end{cases}$$

pro Fuge zuzuordnen. Zur Vereinfachung der Berechnung werden diese diskreten Federn in den Fugen zu den gesuchten Federsteifigkeiten c_y über die Stabdübelabstände e „verschmiert“:

$$c_{y_{i,i+1}} = \frac{C_{N_{i,i+1}}}{e}. \quad (2.14)$$

Die zulässigen Belastungen $zulN$ eines Stabdübels können nach [27, Abschnitt 5.8] berechnet werden:

$$zulN = \min \left\{ \frac{zul\sigma_1 d_{st} \min\{h_i, h_{i+1}\}}{B d_{st}^2} \right\} 0,75 \quad (2.15)$$

Die beiden Bedingungsgleichungen erfassen die Versagensarten „Überschreitung der Lochleibungsspannung im Holz“ und „Überschreitung der Stabdübelvergleichsspannung“. Der Faktor 0,75 berücksichtigt, daß das Holz senkrecht zur Faser beansprucht wird (s. [27, Abschnitt 5.8]). Werte für die zulässige Lochleibungsspannung $zul\sigma_1$ und den Festwert B sind in [27, Tab.10] enthalten. Dabei sollten nach Ansicht der Verfasser wegen des asymmetrischen Verformungsbildes des tordierten Querschnitts die Werte der *einschnittigen* Verbindung verwendet werden.

Berechnung der Drehfedersteifigkeit c_ϑ

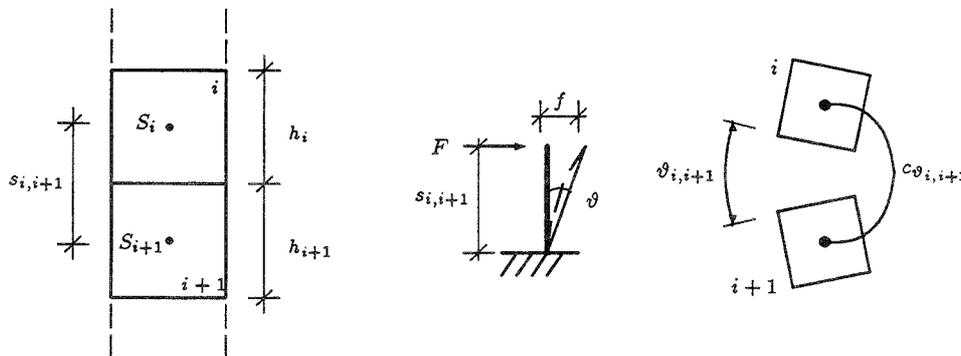


Abbildung 2.7: Geometrische Grundlagen zur Ermittlung von c_ϑ

Der Berechnung der Drehfedersteifigkeit c_ϑ für die Querrichtung soll das Näherungssystem nach Abb. 2.7 zugrundegelegt werden.¹² Dabei wird angenommen, daß der Stabdübel einem eingespannten Stab mit dem Schwerpunktsabstand s_{ij} zweier benachbarter Querschnitte als Stablänge entspricht.¹³ Die Drehfedersteifigkeit eines Stabdübels in der betrachteten Fuge kann dann über die Verformung berechnet werden:

$$f = \frac{F s_{i,i+1}^3}{3EI_0}$$

$$\leadsto \vartheta \approx \frac{f}{s_{i,i+1}}; \quad M = F s_{i,i+1}.$$

¹²Die Berechnung der Drehfedersteifigkeit dient zur Abschätzung ihres Einflusses auf das Gesamtergebnis und sollte auf der sicheren Seite liegend vorgenommen werden. Bei der Auswertung wird sich zeigen, daß ihr Einfluß minimal ist.

¹³Diese Näherung liegt auf der „weichen“, also sicheren Seite.

Daraus folgt für die Drehfedersteifigkeit eines Stabdübels:

$$C_M = \frac{M}{\vartheta} = \frac{3EI_o}{s_{i,i+1}}$$

Die über die Länge „verschmierte“ Drehfedersteifigkeit beträgt dann bei einem Stabdübelabstand e :

$$c_\vartheta = \frac{C_M}{e} = \frac{3EI_o}{s_{i,i+1}e} \quad (2.16)$$

Allerdings sind hier nur die Verformungen des Stahls berücksichtigt worden. Das Holz wird aber infolge der Lochleibungspressung ebenfalls verformt, wodurch sich die Federsteifigkeiten verkleinern. Deshalb wird von den Verfassern vorgeschlagen, den Wert für c_ϑ durch einen Korrekturbeiwert κ zu dividieren, der die Holzverformungen einfließen läßt. Je nach Größe von κ gilt:

$$\kappa = \begin{cases} 1 & \text{nur Stahlverformung} \\ 2 & f_{\text{Holz}} = f_{\text{Stahl}} \\ 3 & f_{\text{Holz}} = 2f_{\text{Stahl}} \end{cases}$$

Der größte Korrekturbeiwert $\kappa = 3$ wird später bei den numerischen Auswertungen verwendet. Für den Elastizitätsmodul ist $21.000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ einzusetzen. Das Trägheitsmoment des Stabdübels berechnet sich nach der Gleichung:

$$I_o = \frac{d_{st}^4 \pi}{64}$$

2.2 Herleitungen nach der Energiemethode

2.2.1 Herleitung für n asymmetrische Teilquerschnitte

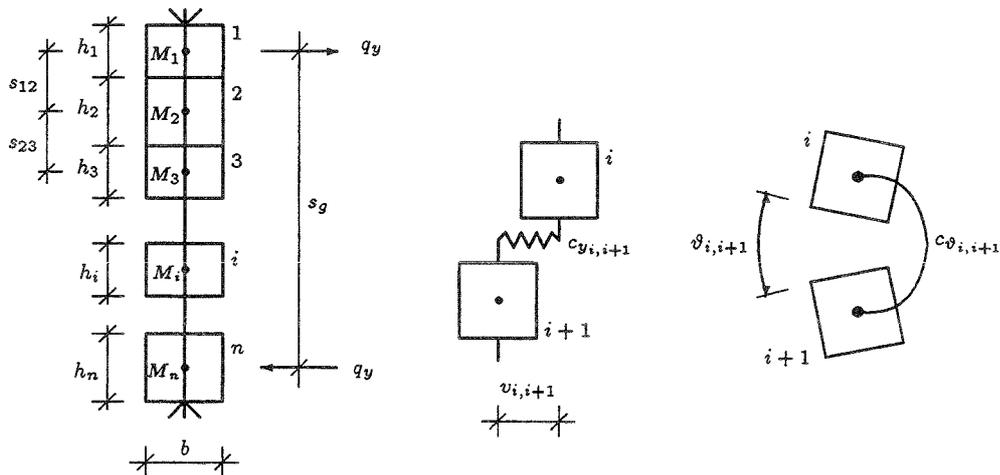


Abbildung 2.8: Trägerquerschnitt und geometrische Beziehungen

Es wird ein gabelgelagerter Einfeldträger aus n ungleichen Teilquerschnitten betrachtet (s. Abb. 2.8). Das äußere, sinusförmige Torsionsstreckenmoment wird in

Gestalt zweier gegengleicher Streckenlasten q_y aufgebracht, die an den äußeren Querschnitten 1 und n angreifen. Die Verschiebungs- und Winkeldifferenzen, die infolge des elastischen Verbunds entstehen, sind aus den Gleichungen

$$\Delta v_{i,i+1} = \left(v_i - \frac{h_i}{2} \vartheta_i \right) - \left(v_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \vartheta_{i+1} \right)$$

und

$$\Delta \vartheta_{i,i+1} = \vartheta_i - \vartheta_{i+1}$$

zu berechnen. Die Federkonstanten $c_{y_{i,i+1}}$ und $c_{\vartheta_{i,i+1}}$ folgen aus den Formeln des Kap. 2.1.5.

Für das elastische Gesamtpotential der inneren und äußeren Kräfte wird die Gl. (2.1) verwendet:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n (T_i \vartheta_i'^2) + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_i''^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} \Delta v_{i,i+1}^2) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{\vartheta_{i,i+1}} \Delta \vartheta_{i,i+1}^2) - 2q_y v_1 + 2q_y v_n \right] dx. \end{aligned}$$

Werden in diese Gleichung die Ansatzfunktionen für die unbekanntenen Verformungen $v_i(x)$ und $\vartheta_i(x)$ eingesetzt, ergibt sich für das Potential:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n (T_i \vartheta_{i0}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_{i0}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[c_{y_{i,i+1}} \left(v_{i0} - \frac{h_i}{2} \vartheta_{i0} - v_{(i+1)0} - \frac{h_{i+1}}{2} \vartheta_{(i+1)0} \right)^2 \right] \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{\vartheta_{i,i+1}} (\vartheta_{i0} - \vartheta_{(i+1)0})^2 \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 2q_{y0} (v_{10} - v_{n0}) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Eine termweise Auswertung der Integrale führt dann zu folgendem Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{L}{4} \left[\sum_{i=1}^n (T_i \vartheta_{i0}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_{i0}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[c_{y_{i,i+1}} \left(v_{i0} - \frac{h_i}{2} \vartheta_{i0} - v_{(i+1)0} - \frac{h_{i+1}}{2} \vartheta_{(i+1)0} \right)^2 \right] \\ & \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{\vartheta_{i,i+1}} (\vartheta_{i0} - \vartheta_{(i+1)0})^2 \right) - 2q_{y0} (v_{10} - v_{n0}) \right] dx. \end{aligned}$$

Dieser Potentialausdruck wird gemäß dem *Ritzschen* Verfahren partiell nach den unbekanntenen Freiwerten v_{i0} und ϑ_{i0} abgeleitet. Durch Nullsetzung der abgeleiteten Terme erhält man die Grundgleichungen, aus denen das lineare Gleichungssystem für die $2n$ Unbekannten aufgebaut wird.¹⁴ Für die partielle Ableitung nach v_{i0} ergibt sich:

$$\begin{aligned} - & v_{(i-1)0} c_{y_{i-1,i}} + v_{i0} \left(B_{zi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_{y_{i-1,i}} + c_{y_{i,i+1}} \right) - v_{(i+1)0} c_{y_{i,i+1}} \quad (2.17) \\ + & \vartheta_{(i-1)0} c_{y_{i-1,i}} \frac{h_{i-1}}{2} + \vartheta_{i0} (c_{y_{i-1,i}} - c_{y_{i,i+1}}) \frac{h_i}{2} - \vartheta_{(i+1)0} c_{y_{i,i+1}} \frac{h_{i+1}}{2} = q_{y0(1,n)}, \end{aligned}$$

¹⁴Werden die Ableitungen konkret für alle $2n$ Unbekannten durchgeführt, ergibt sich direkt das gesuchte Gleichungssystem.

und für die partielle Ableitung nach ϑ_{i0} :

$$\begin{aligned}
& - v_{(i-1)0} \frac{h_i}{2} c_{y_{i-1,i}} + v_{i0} (c_{y_{i-1,i}} - c_{y_{i,i+1}}) \frac{h_i}{2} + v_{(i+1)0} c_{y_{i,i+1}} \frac{h_i}{2} \\
& + \vartheta_{(i-1)0} \left(c_{y_{i-1,i}} \frac{h_i h_{i-1}}{4} - c_{\vartheta_{i-1,i}} \right) \\
& + \vartheta_{i0} \left(T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + c_{y_{i-1,i}} \frac{h_i^2}{4} + c_{y_{i,i+1}} \frac{h_i^2}{4} + c_{\vartheta_{i-1,i}} + c_{\vartheta_{i,i+1}} \right) \\
& + \vartheta_{(i+1)0} \left(c_{y_{i,i+1}} \frac{h_i h_{i+1}}{4} - c_{\vartheta_{i,i+1}} \right) = 0. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

In Gl. (2.17) ist q_{y0} in der ersten und n -ten Gleichung als Lastterm auf der rechten Seite zu berücksichtigen.¹⁵ Für alle anderen Gleichungen ist die rechte Seite gleich Null.

Aus diesen Grundgleichungen läßt sich für $i = 1 \dots n$ ein lineares Gleichungssystem aufbauen, indem die Submatrix, die sich aus den Gln.(2.17) und (2.18) ergibt, n mal innerhalb einer Gesamtsteifigkeitsmatrix in richtiger Zuordnung zu den Unbekannten angeordnet wird. In den Zeilen der Gesamtsteifigkeitsmatrix stehen abwechselnd die partiellen Ableitungsgleichungen nach v_i und nach ϑ_i , so daß sich bei $2n$ Unbekannten auch $2n$ Zeilen ergeben. Die Spalten der Gesamtsteifigkeitsmatrix stehen abwechselnd für die Unbekannten v_{i0} und ϑ_{i0} , so daß sich auch hier $2n$ Spalten ergeben. Die anzuordnende Submatrix lautet:

$$\begin{pmatrix} a_{v_i, v_{i-1}} & a_{v_i, \vartheta_{i-1}} & a_{v_i, v_i} & a_{v_i, \vartheta_i} & a_{v_i, v_{i+1}} & a_{v_i, \vartheta_{i+1}} \\ a_{\vartheta_i, v_{i-1}} & a_{\vartheta_i, \vartheta_{i-1}} & a_{\vartheta_i, v_i} & a_{\vartheta_i, \vartheta_i} & a_{\vartheta_i, v_{i+1}} & a_{\vartheta_i, \vartheta_{i+1}} \end{pmatrix}$$

mit den Matrixgliedern¹⁶

$$\begin{aligned}
a_{v_i, v_{i-1}} &= -c_{y_{i-}} \\
a_{v_i, \vartheta_{i-1}} &= c_{y_{i-}} \frac{h_{i-1}}{2} \\
a_{v_i, v_i} &= B_{zi} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_{y_{i-}} + c_{y_{i+}} \\
a_{v_i, \vartheta_i} &= \frac{h_i}{2} (c_{y_{i-}} - c_{y_{i+}}) \\
a_{v_i, v_{i+1}} &= -c_{y_{i+}} \\
a_{v_i, \vartheta_{i+1}} &= -c_{y_{i+}} \frac{h_{i+1}}{2} \\
a_{\vartheta_i, v_{i-1}} &= -c_{y_{i-}} \frac{h_i}{2} \\
a_{\vartheta_i, \vartheta_{i-1}} &= c_{y_{i-}} \frac{h_i h_{i-1}}{4} - c_{\vartheta_{i-}} \\
a_{\vartheta_i, v_i} &= \frac{h_i}{2} (c_{y_{i-}} - c_{y_{i+}}) \\
a_{\vartheta_i, \vartheta_i} &= T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{h_i^2}{2} (c_{y_{i-}} + c_{y_{i+}}) + c_{\vartheta_{i-}} + c_{\vartheta_{i+}} \\
a_{\vartheta_i, v_{i+1}} &= c_{y_{i+}} \frac{h_i}{2} \\
a_{\vartheta_i, \vartheta_{i+1}} &= c_{y_{i+}} \frac{h_i h_{i+1}}{4} - c_{\vartheta_{i+}}
\end{aligned}$$

¹⁵ In der n -ten Gleichung erhält er ein negatives Vorzeichen.

¹⁶ Als Schreibvereinfachung wurde bei den Indizes $i+$ für $i, i+1$ und $i-$ für $i, i-1$ geschrieben.

Als Gesamtsteifigkeitsmatrix erhält man so eine Matrix $(2n, 2n)$. Ebenso wird mit dem Rechte-Seiten-Vektor verfahren, indem in der ersten Zeile (Gleichung $\frac{\partial \Pi}{\partial v_1} + q_{y0}$) und in der $(2n - 1)$ -ten Zeile (Gleichung $\frac{\partial \Pi}{\partial v_n} - q_{y0}$) eingetragen wird.

Die gesuchten Verformungen v_{i0} und ϑ_{i0} stellen die Lösung des linearen Gleichungssystems dar. In Kenntnis von v_{10} und v_{n0} kann dann die Gesamtverdrehung des Trägers zu

$$\vartheta_g = \frac{v_{10} - v_{n0}}{s_g} \quad (2.19)$$

mit

$$s_g = \sum_{i=1}^{n-1} s_{i,i+1}$$

berechnet werden (vgl. Abb. 2.3). Aus der Ableitung der Drillungsbeziehung $D = \vartheta' = \frac{M_T}{T}$ der Torsionstheorie (vgl. [28, S. 149 f]) folgt dann für den Drillwinkel:

$$\vartheta_g'' = -\frac{v_{10} - v_{n0}}{s_g} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = -\frac{m_T}{efT_g}. \quad (2.20)$$

Wird das Torsionsstreckenmoment durch die Beziehung

$$m_T = q_{y0} s_g \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

ersetzt, folgt aus der Gleichsetzung

$$\frac{v_{10} - v_{n0}}{s_g} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \frac{q_{y0} s_g}{efT_g}$$

die Berechnungsformel für die effektive Torsionssteifigkeit:

$$efT_g = \frac{q_{y0} L^2 s_g^2}{\pi^2 (v_{10} - v_{n0})}. \quad (2.21)$$

In Kap. 2.4 wird zur Überprüfung der im folgenden Kapitel hergeleiteten Näherungsformeln dieses Gleichungssystem in einem Computerprogramm implementiert.

2.2.2 Vereinfachungen für unendliche Drehfedersteifigkeiten

Numerische Auswertungen ergaben, daß die Drehfedersteifigkeit c_ϑ nur einen untergeordneten Einfluß auf die Torsionssteifigkeit hat. Deshalb wird hier nochmals die Ableitung der Grundgleichungen für den Fall $c_\vartheta = \infty$ vorgenommen. Hervorzuheben ist, daß sich bei unendlicher Drehfedersteifigkeit die Einzelquerschnitte *nicht* gegeneinander verdrehen können; also gilt:

$$\vartheta_1 = \dots = \vartheta_i = \dots = \vartheta_n = \vartheta, \quad \rightsquigarrow \quad \Delta\vartheta_{i,i+1} = 0.$$

Aus diesem Grund kann in der Potentialgleichung (2.1) der von der Winkeldifferenz abhängige Term entfallen:¹⁷

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n (T_i \vartheta_i'^2) + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_i''^2) + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} \Delta v_{i,i+1}^2) - 2q_y v_1 + 2q_y v_n \right] dx.$$

¹⁷Da die Verdrehwinkel der Einzelquerschnitte gleich sind, kann der Index des Verdrehwinkels entfallen.

Weil die Verdrehwinkel der Einzelquerschnitte gleich sind, vereinfacht sich auch die Berechnung der Verschiebungsdifferenz:

$$\Delta v_{i,i+1} = \left(v_i - \frac{h_i}{2} \vartheta \right) - \left(v_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \vartheta \right) = v_i - v_{i+1} - s_{i,i+1} \vartheta.$$

Die einheitliche Verdrehungsfunktion und ihre erste Ableitung lauten jetzt:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \vartheta_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \\ \vartheta'(x) &= \vartheta_0 \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Die Ansatzfunktionen werden in die Potentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n (T_i \vartheta_0^2) \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_{i0}^2) \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{y_{i,i+1}} (v_{i0} - v_{(i+1)0} - s_{i,i+1} \vartheta_0)^2 \right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2q_y (v_{10} - v_{n0}) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] dx. \end{aligned}$$

Nach Ausführung der Integrationen (vgl. Kap. 2.1.2) folgt dann:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{L}{4} \left[\vartheta_0^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sum_{i=1}^n (B_{zi} v_{i0}^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left(c_{y_{i,i+1}} (v_{i0} - v_{(i+1)0} - s_{i,i+1} \vartheta_0)^2 \right) - 2q_y (v_{10} - v_{n0}) \right]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung des elastischen Potentials wird gemäß dem *Ritzschen* Verfahren nach den Freiwerten v_{i0} und ϑ_0 partiell abgeleitet. Die abgeleiteten Terme werden gleich *Null* gesetzt, um so die „energetische Minimallage“ des Systems zu ermitteln. Aus der Ableitung $\frac{\partial \Pi}{\partial v_{i0}}$ ergibt sich die allgemeine Gleichung

$$\begin{aligned} - v_{(i-1)0} c_{y_{i-1,i}} + v_{i0} \left(B_{zi} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 + c_{y_{i-1,i}} + c_{y_{i,i+1}} \right) - v_{(i+1)0} c_{y_{i,i+1}} \\ + \vartheta_0 (c_{y_{i-1,i}} s_{i-1,i} - c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}) = q_y 0_{(1,n)}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

und aus der Ableitung $\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta_0}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \vartheta_0 \left(\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2) \right) \\ + \left(\sum_{i=2}^n v_{i0} (c_{y_{i-1,i}} s_{i-1,i}) - \sum_{i=1}^{n-1} v_{i0} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

In Gl. (2.22) ist $q_y 0$ wiederum in der ersten und n -ten Gleichung als Lastterm auf der rechten Seite zu berücksichtigen.¹⁸ Für alle anderen Gleichungen ist die rechte Seite gleich *Null*.

¹⁸In der n -ten Gleichung erhält er ein negatives Vorzeichen.

Aus den Gln.(2.22) und (2.23) kann ein lineares Gleichungssystem $(n + 1, n + 1)$ in den Unbekannten $v_{i0}, i = 1 \dots n$ und ϑ_0 aufgebaut werden. In den ersten n Zeilen der Steifigkeitsmatrix werden die aus Gl. (2.22) gewonnenen Terme

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= -c_{y_{i-1,i}} \\ a_{i,i} &= B_{z_i} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_{y_{i-1,i}} + c_{y_{i,i+1}} \\ a_{i,i+1} &= -c_{y_{i,i+1}} \\ a_{i,n+1} &= c_{y_{i-1,i}} s_{i-1,i} - c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1} \end{aligned}$$

eingefügt.¹⁹ In der $n + 1$ -ten Zeile wird die Gl. (2.23) mit den Termen

$$\begin{aligned} a_{n+1,i} &= a_{i,n+1} \\ a_{n+1,n+1} &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2) \end{aligned}$$

notiert. Die ersten n Spalten stehen demnach für die Unbekannten v_{i0} , die Spalte $n + 1$ für die zu ermittelnde Verdrehung ϑ_0 . Im Lastvektor sind, wie aus dem Vorkapitel bekannt, in der ersten Zeile die positive Streckenlastordinate q_{y0} und in der n -ten Zeile die gegengeleiche, negative Last $-q_{y0}$ anzuschreiben.

Aus dem so festgelegten Gleichungssystem können dann die Unbekannten errechnet werden. Nach der Herleitung von Näherungslösungen im folgenden Kapitel wird das obige System in Kap. 2.4 zur Überprüfung numerisch ausgewertet.

Die Berechnung der effektiven Torsionssteifigkeit nach der Gesamtquerschnittsmethode geschieht dann nach Gl. (2.21).

2.3 Analytische Herleitung von Näherungsformeln

In diesem Kapitel werden an vereinfachten Systemen auf analytischem Weg Näherungsgleichungen für die Torsionssteifigkeit hergeleitet. Diese Gleichungen sind dann mit Hilfe eines Computerprogramms in Kap. 2.4 mit den „exakten“ Lösungen aus Kap. 2.2 zu vergleichen und evtl. zu korrigieren.

2.3.1 Herleitung für den Fall unendlicher Drehfedersteifigkeit

Es wird ein Träger aus fünf *gleichen* Teilquerschnitten betrachtet. Wegen der postulierten unendlichen Drehfedersteifigkeit sind zuerst sechs unbekannte Verformungsvariablen $v_{10} \dots v_{50}$ und ϑ_0 zu bestimmen. Aufgrund der Symmetrie des Systems können aber drei Unbekannte eliminiert werden:

$$\begin{aligned} v_{50} &= -v_{10} \\ v_{40} &= -v_{20} \\ v_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Für die verbleibenden Variablen v_{10}, v_{20} und ϑ_0 werden die Gleichungen (2.22) und (2.23) ausgewertet:

$$v_{10} \left(B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_y \right) - v_{20} c_y - \vartheta_0 c_y h = q_{y0} \quad (2.24)$$

¹⁹Zu beachten ist, daß in der Kernmatrix (n, n) neben der Hauptdiagonalen (Glieder $a_{i,i}$) nur die ersten Nebendiagonalen (Glieder $a_{i,i-1}$ und $a_{i,i+1}$) besetzt sind.

$$-v_{10}c_y + v_{20} \left(B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2c_y \right) = 0 \quad (2.25)$$

$$-v_{10}2c_y h + \vartheta_0 \left(5T \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_y h^2 \right) = 0 \quad (2.26)$$

Gl. (2.25) wird nach v_{20} aufgelöst:

$$v_{20} = \frac{v_{10}c_y}{B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2c_y}. \quad (2.27)$$

Gl. (2.26) wird nach ϑ_0 aufgelöst:

$$\vartheta_0 = \frac{2c_y h v_{10}}{5T \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_y h^2}. \quad (2.28)$$

Durch Einsetzen der Gln.(2.27) und (2.28) in Gl. (2.24) erhält man nach einigen Umformungen eine Bestimmungsgleichung für die benötigte Verschiebung v_{10} :

$$v_{10} = \frac{q_{y0}}{\text{Nenner}} \quad (2.29)$$

mit dem Nennerterm

$$\begin{aligned} \text{Nenner} = & B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}c_y}{B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2c_y} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{c_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{\sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_y h^2} \right). \end{aligned}$$

Die effektive Torsionssteifigkeit kann jetzt mit Hilfe der Gl. (2.21) berechnet werden:

$$\text{ef}T_g = \frac{q_{y0} L^2 s_g^2}{\pi^2 (v_{10} - v_{50})}.$$

Setzt man hier $v_{50} = -v_{10}$ und $v_{10} = \frac{q_{y0}}{\text{Nenner}}$, dann erhält man:

$$\begin{aligned} \text{ef}T_g &= \frac{8h^2 \text{Nenner}}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \\ &= \frac{8h^2}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \left[B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(1 + \frac{\frac{c_y}{2}}{B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 2c_y} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{c_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{\sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_y h^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Durch einigen Umformungen kann folgende Gleichung erzeugt werden:

$$\text{ef}T_g = (B_{z1} z_{M1}^2 + B_{z5} z_{M5}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4 + \frac{2B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4}{c_y}} \right) + \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{1}{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n T_i}{4c_y h^2}} \right),$$

die entsprechend den mechanischen Wirkungen in zwei Terme aufgeteilt ist:

$$\text{ef}T_g = T_w + \text{ef}T_{gT}. \quad (2.30)$$

Der Term $\text{ef}T_{gT}$ bezeichnet eine effektive elastische Torsionssteifigkeit nach *de Saint-Venant*, der Term T_w eine „Torsionssteifigkeit“, die auf einer seitlichen Querbiegesteifigkeit der Einzelquerschnitte beruht, also mit der *Wölbsteifigkeit* oder „drehenden Biegung“ vergleichbar ist.

Der Anteil der *de Saint-Vénantschen* Torsionssteifigkeit

$$\text{ef}T_{g_T} = \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{1}{1 + \frac{(\frac{\pi}{L})^2 \sum_{i=1}^n T_i}{4c_y h^2}} \right) \quad (2.31)$$

läßt sich in Übereinstimmung mit Herleitungen an anderen Querschnittstypen in der auch aus [17] bekannten Form

$$\text{ef}T_{g_T} = \gamma_T \sum_{i=1}^n T_i \quad (2.32)$$

mit

$$\gamma_T = \frac{1}{1 + k_T} \quad 0 \leq \gamma_T \leq 1 \quad (2.33)$$

und

$$k_T = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^n T_i}{L^2 \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} \delta_{i,i+1}^2)} \quad (2.34)$$

schreiben, wobei γ_T als Torsionsverbundfaktor bezeichnet wird. Dieser Faktor gibt an, wie stark die Federn in der Lage sind, die Torsionssteifigkeiten T_i der Einzelquerschnitte zu aktivieren. Für $c_y \rightarrow \infty$ geht γ_T gegen *Eins*, d.h. die Torsionssteifigkeiten der Einzelquerschnitte sind voll aktiviert. Bemerkenswert ist, daß bei starrer Kopplung die elastische Torsionssteifigkeit *nur* der Summe der Torsionssteifigkeiten der Einzelquerschnitte entspricht. Die höhere Torsionssteifigkeit eines gleichgroßen monolithischen Querschnitts, die sich aus einem größeren Beiwert η ergibt, wird rechnerisch nicht erreicht. Die mechanischen Ursachen für dieses Phänomen werden in Kap. 2.5 diskutiert.

Der Wölbsteifigkeitsanteil

$$\begin{aligned} T_w &= (B_{z1} z_{M1}^2 + B_{z5} z_{M5}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4 + \left\{ \frac{2B_z (\frac{\pi}{L})^4}{c_y} \right\}} \right) \\ &\approx 1,25 (B_{z1} z_{M1}^2 + B_{z5} z_{M5}^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2, \end{aligned}$$

der den Verdrehwiderstand des Querschnitts infolge der gegenseitigen seitlichen Verschiebungen der Einzelquerschnitte beschreibt, kann allgemeingültig in der Form

$$T_w = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n B_{zi} z_{Mi}^2 \quad (2.35)$$

geschrieben werden,²⁰ wie auch Berechnungen an anderen Querschnittstypen zeigen. Der in der oberen Gleichung in geschweifte Klammern gesetzte, von der Federsteifigkeit c_y abhängige Term ist vernachlässigbar klein.²¹

²⁰ Kennzeichnend für die Wölbsteifigkeit ist hier die Summe der Querbiegesteifigkeiten B_z der Einzelquerschnitte, multipliziert mit den Abstandsquadraten z_M^2 der Einzelquerschnitte zum Gesamtschubmittelpunkt M (vgl. [29, Kap. 14.5]).

²¹ Numerische Auswertungen haben gezeigt, daß sein Einfluß auf den Wölbanteil kleiner als 1% ist. Mechanisch gibt dieser Term an, wie stark die Federn in der Lage sind, die inneren Querschnitte an den seitlichen Verschiebungen zu beteiligen, so daß sie Anteile zur Wölbsteifigkeit beitragen. Durch die in der Praxis recht steifen Federn ist jedoch fast grundsätzlich eine vollständige Verschiebungskopplung gegeben.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß das äußere Torsionsmoment aufgenommen wird durch die Verdrillungen der Einzelquerschnitte *und* durch eine drehende Biegung der Einzelquerschnitte bezüglich des Schubmittelpunkts M des Gesamtquerschnitts.²²

Die beiden Näherungsgleichungen (2.32) und (2.35) für die Torsionsanteile²³ werden in Kap. 2.4 numerisch überprüft.

2.3.2 Herleitung für den Fall endlicher Drehfedersteifigkeit

Im vorigen Unterkapitel wurden Näherungslösungen für den Fall unendlicher Drehfedersteifigkeit hergeleitet. Jetzt soll untersucht werden, welchen Einfluß die Drehfedersteifigkeit auf die Näherungsformeln hat.

Hierzu wird ein Träger aus drei gleichen Teilquerschnitten betrachtet. Es sind sechs unbekannte Verformungsvariablen $v_{10} \dots v_{30}$ und $\vartheta_{10} \dots \vartheta_{30}$ zu bestimmen. Aufgrund der Symmetrie des Systems können aber drei Unbekannte eliminiert werden:

$$\begin{aligned} v_{30} &= -v_{10} \\ v_{20} &= 0 \\ \vartheta_{30} &= \vartheta_{10}. \end{aligned}$$

Für die verbleibenden Variablen v_{10} , ϑ_{10} und ϑ_{20} werden die Gleichungen (2.17) und (2.18) ausgewertet:

$$\left(B_{z_i} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_y \right) v_{10} - c_y \frac{h}{2} \vartheta_{10} - c_y \frac{h}{2} \vartheta_{20} = q_{y0}, \quad (2.36)$$

$$- c_y \frac{h}{2} v_{10} + \left(T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \vartheta_{10} + \left(c_y \frac{h^2}{4} - c_\vartheta \right) \vartheta_{20} = 0, \quad (2.37)$$

$$- c_y \frac{h}{2} v_{10} + \left(c_y \frac{h^2}{4} - c_\vartheta \right) \vartheta_{10} + \left(\frac{1}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \vartheta_{20} = 0. \quad (2.38)$$

Wird Gl. (2.37) in (2.38) eingesetzt, erhält man eine Bestimmungsgleichung für ϑ_{20} :

$$\vartheta_{20} = \vartheta_{10} \frac{T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 2c_\vartheta}{\frac{1}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 2c_\vartheta}. \quad (2.39)$$

In gleicher Weise folgt aus den Gln. (2.36) und (2.38) eine Gleichung für ϑ_{10} :

$$\vartheta_{10} = v_{20} \frac{c_y \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 2c_\vartheta \right)}{\frac{1}{2} \left[T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \right] + 4c_y \frac{h^2}{4} c_\vartheta}. \quad (2.40)$$

Die Gln.(2.39) und (2.40) werden jetzt in Gl. (2.36) eingesetzt. Nach einigen Umformungen ergibt sich so die zur Ermittlung von eT_g erforderliche Größe v_{10} :

$$v_{10} = \frac{q_{y0}}{B_{z_i} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + c_y - \frac{c_y^2 \frac{h^2}{4} \left(\frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_\vartheta \right)}{\frac{1}{2} \left[T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \right] + 4c_y \frac{h^2}{4} c_\vartheta}. \quad (2.41)$$

²²Die Steifigkeitsanteile eT_{gT} und T_w können zur Betrachtung des Drillwiderstands des Trägers addiert werden, da die zugehörigen Torsionsmomentenverläufe M_{S_t} und M_{T_w} affin sind, was sich auch unmittelbar aus der Lösung der Torsionsdifferentialgleichung ergibt (vgl. [29, S. 293 ff]). Bezüglich der spannungsmäßigen Beanspruchung der Einzelquerschnitte sind sie allerdings getrennt zu betrachten!

²³Gültig für unendliche Drehfedersteifigkeiten!

Die effektive Torsionssteifigkeit kann jetzt wiederum mit Hilfe der Gl. (2.21) berechnet werden:

$$\text{ef}T_g = \frac{q_{y0} L^2 s_g^2}{\pi^2 (v_{10} - v_{30})}.$$

Setzt man hier $v_{30} = -v_{10}$, dann erhält man nach einigen Zwischenschritten:

$$\text{ef}T_g = 2B_{z_i} h^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \frac{2h^2}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \left(c_y - \frac{c_y^2 \frac{h^2}{4} \left(\frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_\vartheta \right)}{\frac{1}{2} \left[T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \right] + 4c_y \frac{h^2}{4} c_\vartheta} \right).$$

Der erste Summand steht wieder für den schon bekannten Wölbsteifigkeitsanteil:

$$T_w = 2B_{z_i} h^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n B_{z_i} z_{M_i}^2, \quad (2.42)$$

wobei hier der Federanteil entfällt, da bei drei gleichen Querschnitten der mittlere Querschnitt nicht verschoben wird, also über die Federn auch nicht aktiviert werden kann und muß.²⁴

Der zweite Summand entspricht der *de Saint-Vénantschen* Torsionswirkung. Für diesen Anteil soll auch die im vorigen Unterkapitel eingeführte Schreibweise Verwendung finden:

$$\text{ef}T_{gT} = \gamma_T \sum_{i=1}^n T_i = \frac{2h^2}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \left(c_y - \frac{c_y^2 \frac{h^2}{4} \left(\frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_\vartheta \right)}{\frac{1}{2} \left[T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \right] + 4c_y \frac{h^2}{4} c_\vartheta} \right).$$

Diese Gleichung wird nach dem Torsionsverbundfaktor γ_T aufgelöst:

$$\gamma_T = \frac{2h^2}{3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \left(c_y - \frac{c_y^2 \frac{h^2}{4} \left(\frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + 4c_\vartheta \right)}{\frac{1}{2} \left[T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + 3T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(c_y \frac{h^2}{4} + c_\vartheta \right) \right] + 4c_y \frac{h^2}{4} c_\vartheta} \right),$$

wobei durch Umstellungen innerhalb der Formel die bekannte Form

$$\gamma_T = \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{2} T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + \frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 c_\vartheta + \frac{1}{24} h^2 c_y T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{\frac{1}{3} h^2 c_y T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + h^2 c_y c_\vartheta}} = \frac{1}{1 + k_T}$$

erzeugt werden kann. Der Hilfswert

$$k_T = \frac{\frac{1}{2} T_i^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + \frac{3}{2} T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 c_\vartheta + \frac{1}{24} h^2 c_y T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{\frac{1}{3} h^2 c_y T_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + h^2 c_y c_\vartheta}$$

wird schließlich noch durch die Einführung der Summenschreibweise in die Form

$$k_T = \frac{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + 4 \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta, i+1} + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} c_{y, i+1} s_{i, i+1}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y, i+1} s_{i, i+1}^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta, i+1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y, i+1} s_{i, i+1}^2}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^n T_i}}$$

²⁴Der Einfluß der Federn ist, wie numerische Überprüfungen ergaben, hier auch so gering, daß sich eine analytische Betrachtung nicht lohnt.

überführt.²⁵ Die Zahlenwerte 4 und 1/8 sind abhängig von der Anzahl und der Art der Teilquerschnitte. Deshalb werden sie für die numerische Überprüfung der Formel verallgemeinert:

$$k_T = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + a \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2 + a \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i}} \quad (2.43)$$

Die numerische Auswertung dieser Gleichung wird im folgenden Kapitel vorgenommen.

2.4 Numerische Betrachtungen

2.4.1 Programmbeschreibung

Zur numerischen Überprüfung der Näherungsformeln wurde ein Computerprogramm in der Sprache C entwickelt. Nach der Eingabe der Trägerlänge, des Trägeraufbaus und der Verdübelungsgeometrie werden im Rahmen einer Vorlaufrechnung die Federsteifigkeiten c_y und c_{ϑ} in den Fugen nach den Formeln des Kapitels 2.1.5 berechnet. Nach der Bereitstellung aller Eingangswerte ermittelt das Programm in einer *ersten Stufe* die effektive Torsionssteifigkeit efT_g nach der Gesamtsteifigkeitsmethode aus den Verschiebungen der Randquerschnitte für den Fall unendlicher Drehfedersteifigkeit.²⁶ In einer Nachlaufrechnung wird dann die Dehnfedersteifigkeit auf einen sehr hohen, numerisch aber noch unkritischen Wert gesetzt, um durch eine erneute Berechnung der Torsionssteifigkeit diejenige Steifigkeit bei jetzt völlig starrer Kopplung zu ermitteln, die der Summe aus den Torsionssteifigkeiten der Einzelquerschnitte und der voll aktivierten Wölbsteifigkeit entspricht:

$$efT_{g\infty} = T_w + \sum_{i=1}^n T_i.$$

Durch Umstellung dieser Gleichung läßt sich der Wölbanteil T_w bestimmen. In Kenntnis des Wölbanteils kann dann auch der Torsionsverbundfaktor γ_T berechnet werden:

$$\gamma_T = \frac{efT_g - T_w}{\sum_{i=1}^n T_i}.$$

Anschließend wird die Näherungsformel (2.33 f) für den Verbundfaktor ausgewertet und die Abweichung zum „exakten“ Faktor ermittelt. Nach der Berechnung des Schubmittelpunkts wird die Näherung (2.35) für den Wölbanteil T_w bestimmt und mit dem Wert aus der obigen Berechnung verglichen. Zusätzlich können die

²⁵ Werden Zähler und Nenner durch den Term $\sum c_{\vartheta}$ dividiert, erhält man für $c_{\vartheta} \rightarrow \infty$ wieder

$$\text{die Gl. (2.34): } k_T = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^n T_i}{L^2 \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2)}.$$

²⁶ Hierzu wird das lineare Gleichungssystem nach Abschnitt 2.2.2 aufgebaut und gelöst.

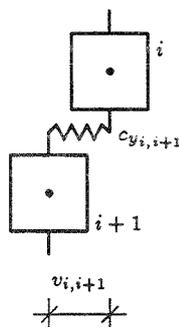


Abbildung 2.9: Verschiebungsbeziehung zwischen zwei Teilquerschnitten

Schubkräfte Q_j in den $(n-1)$ Fugen zwischen den Querschnitten aus den Verschiebungsdifferenzen bestimmt werden (s. Abb. 2.9):²⁷

$$Q_j = \Delta v_j c_{y_j} e \quad (2.44)$$

mit

$$\Delta v_j = v_i - v_{i+1} - s_{i,i+1} \vartheta. \quad (2.45)$$

In einer *zweiten Stufe* werden dann die genannten Berechnungen für den Fall endlicher Drehfedersteifigkeit wiederholt.²⁸ Als Näherung für den Faktor γ_T wird jetzt die Gl. (2.43) verwendet. Zusätzlich wird auch durch die Ermittlung der prozentualen Abweichung der γ_T 's aus beiden Stufen der Einfluß der Drehfedersteifigkeit bestimmt.²⁹

Um die Näherungsformeln zu testen, wurden ca. 300 Brückenträger, die sich an den ausgeführten Beispielen aus [30] orientierten, mit dem Programm berechnet. Zusätzlich wurden viele Parameter zur ungünstigen Seite hin variiert, um die Auswirkungen auf die Näherungsformeln abzuschätzen.

2.4.2 Auswertung der Vergleichsrechnungen

In diesem Unterkapitel werden die Einflüsse einzelner Parameter auf die Näherungsformeln aufgezeigt.

Formel für γ_T bei unendlicher Drehfedersteifigkeit

Die in Kap. 2.3.1 hergeleitete Formel für den Torsionsverbundfaktor

$$\gamma_T = \frac{1}{1 + k_T}$$

mit

$$k_T = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^n T_i}{L^2 \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2)}$$

²⁷Die Fuge j liegt zwischen den Querschnitten i und $i+1$.

²⁸Die Berechnungen erfolgen für die „weicheste“ Drehfeder mit dem Korrekturfaktor $\kappa = 3$.

²⁹Das Programm kann bei den Verfassern eingesehen werden.

erwies sich bei den Vergleichsrechnungen als nahezu exakt. Die Fehler lagen auch bei ungünstigen Querschnitten i.d.R. unter 0,1%. Werden die Stabdübelabstände, die sich aus der Hauptachsenberechnung ergeben, nicht zu stark überschritten, liegt der Faktor zahlenwertmäßig zwischen 0,98 und 1,0.

Formel für den Wölbanteil T_w

Die in Kap. 2.3.1 hergeleitete Näherungsformel für den Wölbanteil, der den Torsionswiderstand des Trägers infolge „drehender Biegung“ der Einzelquerschnitte beschreibt, lautete:

$$T_w = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n B_{zi} z_{M_i}^2.$$

Ein Term, der die Aktivierung der Verschiebungen der inneren Querschnitte durch die Stabdübel beschrieb, war in der Gleichung vernachlässigt worden. Die Vergleichsrechnungen haben diese Vereinfachung bestätigt, da der Fehler der Näherung gegenüber der „exakten“ Berechnung bei den Beispielträgern grundsätzlich unter 0,5% lag. Somit kann die Näherungsformel grundsätzlich zur Berechnung eines Wölbanteils verwendet werden.

Formel für γ_T bei endlicher Drehfedersteifigkeit

In Kap. 2.3.2 wurde eine Näherungsgleichung für den Torsionsverbundfaktor in Abhängigkeit von der Drehfedersteifigkeit abgeleitet. Der Hilfswert k_T zur Bestimmung von γ_T lautete:

$$k_T = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + a \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2 + a \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i}}.$$

Es wurden zuerst Berechnungen zur Bestimmung der Beiwerte a und b mit dem Kriterium möglichst kleiner Fehler bei praxisrelevanten Trägern durchgeführt. Für $a = b = 4$ waren bei der genannten Vorgabe die Fehler am kleinsten.

Eine Analyse der Auswirkungen der Einzelparameter auf die Güte der Näherungsformel besagt, daß die Näherung umso ungenauer wird,

- je kleiner die Trägerlänge L ist (mit $L \geq 800$ cm läßt sich der Fehler minimieren),
- je weicher die Stabdübelverbindung ist, also je größer der Stabdübelabstand e und je kleiner der Stabdübeldurchmesser d_{St} sind,³⁰
- je größer das Seitenverhältnis h/b der Einzelquerschnitte ist (mit $h/b \leq 1,2$ läßt sich der Fehler minimieren),
- je größer die absoluten Einzelquerschnittsbreiten sind (mit $b \leq 20$ cm lassen sich die Fehler minimieren),

³⁰ Sind die Stabdübelabstände nach der Hauptachsenberechnung eingehalten, ergeben sich sehr steife Verbindungen und infolgedessen minimale Fehler.

- je asymmetrischer der Träger aufgebaut ist, d.h. je stärker sich die Einzelquerschnitte voneinander unterscheiden.³¹

Werden die obigen Empfehlungen beachtet, was bei den gängigen Konstruktionen nach [30] immer der Fall ist, weicht die Näherung um höchstens 1% von den „exakten“ Werten nach der Computerberechnung ab. Außerdem ergeben sich Zahlenwerte für γ_T zwischen 0,94 und 1,0.

Einfluß der Drehfedersteifigkeit

Um den Einfluß der Drehfedersteifigkeiten abzuschätzen, wurden die Abweichungen der Torsionsverbundfaktoren γ_T mit und ohne Drehfederansatz aufgezeichnet. Es zeigte sich, daß für Konstruktionen, bei denen die Stabdübelabstände nach der Hauptachsenberechnung nicht überschritten werden, der Einfluß von c_ϑ kleiner als 2% ist. Die Abweichung wird hauptsächlich vom Stabdübelabstand e und von der Trägerlänge L beeinflusst. Bei Trägerlängen von 500 cm und Stabdübelabständen von $15d_{St}$ können Abweichungen von 5% zur unsicheren Seite auftreten.

Es ist festzustellen, daß der Einfluß der Drehfedersteifigkeit i.d.R. unter 2% liegt. Die Verfasser empfehlen daher, die Torsionssteifigkeit für *unendliche* Drehfedersteifigkeiten zu berechnen. Werden gleichzeitig die Wölbanteile ebenfalls *nicht* in Ansatz gebracht, liegt man auf der *sicheren* Seite.³²

Betrachtung der Verdrehungen

In einem späteren Kapitel werden die Beanspruchungen der Einzelquerschnitte infolge der Verdrehung des Trägers untersucht. Vereinfachend wird dort davon ausgegangen, daß die Verdrehung der Einzelquerschnitte in etwa gleich der Verdrehung des Gesamtquerschnitts ist:

$$\vartheta_i \approx \vartheta_g.$$

Diese Annahme trifft umso besser zu, aus je mehr Einzelquerschnitten sich der Träger zusammensetzt und je länger der Träger ist. Grundsätzlich ist der Fehler für die üblichen Träger kleiner als 20%; zumeist wird er bei 5% liegen. Im einzelnen ließen sich die in Tab. 2.1 angegebenen Fehlergrenzen ermitteln. Dabei ist

n	$L = 600$ cm	$L = 1000$ cm
3	20%	10%
4	10%	5%
5	8%	4%
6	7%	3,5%

Tabelle 2.1: Abweichung der Einzelverdrehungen von der Gesamtverdrehung

zu beachten, daß die Einzelverdrehungen der äußeren Querschnitte kleiner sind als

³¹Bei ungleichen Teilquerschnitten sollten die kleineren Teilquerschnitte außen liegen, weil der Träger so durch die Vergrößerung des Gesamthebelarms der inneren Kräfte torsionssteifer wird.

³²Die Tendenzen des Wölbanteils und des Drehfederfehlers sind ähnlich. Steigt der Fehler infolge Vernachlässigung der Drehfedersteifigkeit an, erhöht sich auch der Anteil der Wölbsteifigkeit an der Gesamtsteifigkeit. Prozentual ist der versteifende Wölbanteil *immer* größer als der Drehfederfehler auf der unsicheren Seite, so daß man auf der sicheren Seite liegt, wenn beide nicht angesetzt werden.

die Gesamtverdrehung, die der inneren Querschnitte aber größer. Entsprechend den Tabellenwerten können so die später ermittelten Schnittgrößen für die jeweils betrachteten Tabellenwerte korrigiert werden.

2.4.3 Anwendungsempfehlungen

Zusammenfassend ist zu empfehlen, die effektive Torsionssteifigkeit eines Trägers aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen, soweit die Stabdübelabstände nach der Hauptachsenberechnung eingehalten sind, nach der Formel

$$e\Gamma = \sum_{i=1}^n T_i \quad (2.46)$$

ohne Berücksichtigung der Feder- und Wölbanteile zu berechnen.³³ Sind die Stabdübelabstände $e > 10d_{St}$ oder ist die Trägerlänge $L < 800$ cm, sollte der Verbundfaktor überprüft werden.

Bei Verwendung von *Dübeln besonderer Bauart* nach [27] anstelle der Stabdübel ist eine steifere Verbindung zu erwarten, so daß auch hier i.d.R. der Verbundfaktor zu *Eins* gesetzt werden kann.

2.4.4 Berechnung des Schubflusses

Die Schubkraft in den Stabdübeln infolge der Torsionsbeanspruchung kann, wie zuvor in Gl. (2.44) formuliert, über die Verschiebungsdifferenz Δv_j in der jeweiligen Fuge j berechnet werden:

$$Q_j = \Delta v_j c_{y_j} e.$$

Der Term $\Delta v_j c_{y_j}$ stellt den Schubfluß t_j in der betrachteten Fuge dar:

$$t_j(x) = \Delta v_j(x) c_{y_j}. \quad (2.47)$$

Die analytische Herleitung einer baupraktischen Näherungsformel wurde an einem Träger aus zwei gleichen Teilquerschnitten bei starrer Drehfederkopplung vorgenommen. Die größten Schubflüsse erhält man für dehnstarre Kopplungen, also für $\Delta v_j \rightarrow 0$ (sic!). Nach vielen Zwischenschritten ergibt sich dann unter Verwendung der obigen Schreibweise:

$$t(x) = \frac{q_{y_0}}{1 + \frac{T_w}{\sum_{i=1}^n T_i}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (2.48)$$

Die Schubkräfte betragen dann pro Stabdübel:

$$Q_j = \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx \approx \frac{q_{y_0} e}{1 + \frac{T_w}{\sum_{i=1}^n T_i}}. \quad (2.49)$$

Numerisch wurde diese Formel an vielfältigen Beispielen überprüft. Es zeigte sich, daß mit dieser Formel ein *Mittelwert* des Schubflusses aller $j = 1 \dots n - 1$ Fugen sehr gut abgeschätzt wird (Fehler kleiner 5%). Außerdem ergab sich, daß

³³ Auch die Dehnfederanteile können in diesem Fall vernachlässigt werden, da bei Einhaltung der Randbedingungen $\gamma_T \approx 1$ ist.

- die größten Schubkräfte in den äußeren Fugen wirken, also dort, wo die Schubkräfte infolge der Hauptbiegung am geringsten sind,
- die Schubkräfte aller Fugen j bei einem betrachteten Träger um höchstens 10% voneinander abwichen,
- die Schubkräfte pro Stabdübel aber höchstens 5% der zulässigen Stabdübelbelastung senkrecht zur Faser betragen:

$$Q_j \leq 0,05 \text{ zur } N!$$

Daher erscheint es gerechtfertigt, die Schubkräfte in den Stabdübeln infolge Torsionswirkung zu vernachlässigen. Alternativ könnten die Stabdübel infolge der Schubkräfte aus Hauptbiegung nur zu 95% ausgelastet werden, wodurch der Torsionsschub berücksichtigt wäre.

Sollen die Schubkräfte berechnet werden, ist q_{y_0} nach der entsprechenden Gleichung des Kap. 4.3 zu bestimmen.

2.5 Innere Torsionsvorgänge

In den Vorkapiteln wurde deutlich, daß sich Träger, die aus mehreren Teilquerschnitten zusammengesetzt sind, nicht monolithisch verdrillen. Die Stabdübel haben die Aufgabe, die Verdrillungen und Verschiebungen der Einzelquerschnitte möglichst weitgehend zu aktivieren, um so einen großen Torsionswiderstand zu erzeugen. Hierzu werden die Federsteifigkeiten der Stabdübel benötigt. Bei starrem Verbund der Einzelquerschnitte, also bei $c_y = c_\vartheta = \infty$, sind die lokalen Verformungen v_i und ϑ_i voll aktiviert. Daraus folgte, daß die Einzeltorsionssteifigkeiten T_i der Querschnitte unabgemindert wirksam waren. Allerdings wurde die Torsionssteifigkeit eines entsprechenden monolithischen Querschnitts nicht erreicht. Dieses ist von der Mechanik her auf den Faktor η bei der Berechnung des Torsionsträgheitsmoments I_T zurückzuführen, der für kompakte Querschnitte kleiner ist als für schlanke Querschnitte.³⁴

Der Faktor η bei Rechteckquerschnitten hängt in erster Linie von der Form des Torsionsflusses im Querschnitt ab (vgl. [28, 29, 31]), wobei ja das innere Torsionsmoment durch den Torsionsschubfluß t^i aufgebaut wird, der zum Schubmittelpunkt jeweils den Hebel e^i hat:

$$M_t^i = \oint t^i e^i ds.$$

Bei Rechteckquerschnitten werden die Ecken vom Torsionsschubfluß „ausgerundet“, stehen also nicht mit dem maximal möglichen Hebelarm e^i zur Verfügung. Diese „Ausrundung der Ecken“ hat bei kompakten Querschnitten einen wesentlich größeren Einfluß als bei schlanken Rechteckquerschnitten, da bei ersteren der ausgerundete Bereich im Verhältnis zum „Normalbereich“ einen höheren Anteil hat. Bei schlanken Querschnitten nimmt dagegen der „Normalbereich“ einen großen Teil der Trägerhöhe ein. Mechanisch wird dieser Ausrundungseffekt durch den genannten Beiwert η bei der Berechnung des Torsionsträgheitsmoments erfaßt.³⁵

³⁴Für $h/b = 1$ beträgt $\eta = 0,42$, für $h/b = 4$ schon 0,84. Bei der Summe der Einzeltorsionssteifigkeiten für einen zusammengesetzten Querschnitt geht natürlich nur der kleinere Faktor der kompakten Querschnitte ein. Bei einem entsprechenden monolithischen Querschnitt würde die Torsionssteifigkeit etwa doppelt so groß sein.

³⁵Klar ist jetzt, daß für $h/b \rightarrow \infty$ der Beiwert η gegen Eins konvergiert, weil ja der Einfluß der Ecken zunehmend kleiner wird.

Eine weitere Methode, sich die Torsionssteifigkeit eines Querschnitts zu veranschaulichen, besteht in dem auf *Prandtl* (zitiert in [29, S. 289 ff] und [31, S.303 ff]) zurückgehenden *Membrangleichnis* (Seifenhautmethode). Hierzu wird in einen Behälter eine dem Stabquerschnitt kongruente Öffnung geschnitten und mit einer Membran (z.B. Seifenhaut) überspannt. Erzeugt man jetzt in dem Behälter einen kleinen Überdruck, wölbt sich die Membran auf. Die Torsionssteifigkeit des Querschnitts ist proportional zu dem Volumen des Membranhügels. Auf diese Weise können verschiedene Querschnitte miteinander verglichen werden.

Wird diese Membran zum einen über n nebeneinander angeordneten, kompakten Rechteckquerschnitten, zum anderen über dem umschreibenden Gesamtquerschnitt aufgespannt, ist es offensichtlich, daß das Volumen über dem Gesamtquerschnitt größer ist als die addierten Volumina über den Einzelquerschnitten, was auf das Abflachen der Membran an den Fugen zwischen den Einzelquerschnitten zurückzuführen ist. Das heißt, daß die Torsionssteifigkeit des Gesamtquerschnitts von den Einzelquerschnitten nicht erreicht wird.

Anschließend ist zu fragen, welchen Einfluß die Stabdübel auf den Torsionsschubfluß bzw. die Gestalt der Seifenhaut ausüben. Ausgehend vom Membrangleichnis ist zu vermuten, daß die punktuellen Verbindungen der Einzelquerschnitte die Form der Membran nicht wesentlich verändern werden. Bestätigt wird dieses durch eine Schubflußbetrachtung. Infolge nur einer Verbindung pro Fuge läßt sich sicherlich die Form des Schubflusses nicht so verändern, daß der Hebelarm e^i wesentlich vergrößert würde. Dieses wäre nur vorstellbar bei mehrreihigeren Verdübelungen breiterer Einzelquerschnitte, wo der Torsionsschubfluß durch die Verdübelung zum benachbarten Querschnitt umgelenkt und so der innere Hebelarm vergrößert wird. Um diese Hypothese zu stützen, müßten Versuche gefahren und vertiefende theoretische Herleitungen vorgenommen werden. Zu klären wären hier auch besonders die Schubverläufe im Bereich zwischen den Verdübelungen und eine evtl. Klemmwirkung der Stabdübel/Paßbolzen.³⁶

³⁶Dieses würde aber Sinn und Zielrichtung der vorliegenden Arbeit verfehlen und den Rahmen sprengen. Anregungen sind in [32] und [33] zu finden.

Kapitel 3

Seitenlast q_s

3.1 Vorbetrachtungen

3.1.1 Lösungsweg

Gewählte Methode

Nach ersten Ansätzen mit der Differentialgleichungsmethode entsprechend [8, 11] (weitergeführt in [9] und [34]) wurde jedoch wegen der einfacheren Handhabung die Energiemethode in Form des *Ritzschen* Verfahrens gewählt (Beschreibung des Verfahrens s. [7, 14, 35]). Als Näherungsansätze für die Verformungen wurden bei den symmetrischen Belastungen eingliedrige und bei den asymmetrischen Belastungen zweigliedrige Ansätze gewählt, wodurch es noch möglich war, auf analytischem Weg Ergebnisgleichungen herzuleiten, die den baupraktischen Bedürfnissen entsprechen. Ansätze bis zum 64. Grad werden in [15] getestet. Die Ergebnisse fließen im Kap. 7 in die Anwendungsformeln ein.

Implizite Berücksichtigung der Verbandssteifigkeit

Sind die Ableitungen nach der Energiemethode durchgeführt worden, erhält man als Ergebnis die Verschiebungen und Verdrehungen der Träger und aus diesen, wie im folgenden Unterabschnitt erläutert wird, die Verbandsverschiebung. Die vierte Ableitung der Verbandsverschiebung ist proportional zur Belastung des Verbands, also

$$q_v(x) = B_v v_v^{IV}(x). \quad (3.1)$$

Die Seitenlast $q_s(x)$, die aus der Verbandslast $q_v(x)$ nach Abzug einer eventuellen Windlast nach der Vorschrift

$$q_s(x) = q_v(x) - q_w(x) \quad (3.2)$$

gewonnen wird, ist in dieser Formulierung eine Funktion der Verbandssteifigkeit B_v . Es ist jedoch im Holzbau umständlich, zur Berechnung von q_s stets zuvor B_v ausrechnen zu müssen. Daher wurde im Rahmen dieses Forschungsvorhabens (vgl.[12]) stets nach der Ermittlung der Verbandsverschiebungsfunktion $v_v(x)$ für die maximale Ordinate dieser Funktion

$$\max v_v = \frac{L}{\beta}$$

gesetzt. Auf diesem Weg konnte durch Rückwärtsauflösung der Gl.(3.1) ein Ausdruck für diejenige Verbandssteifigkeit B_v gefunden werden, unter der der Verband eine elastische Verformung L/β aufweist. Wird dieser Ausdruck jetzt in Gl.(3.2) für die Verbandssteifigkeit eingesetzt, erhält man eine Formel für $q_s(x)$, die nur implizit von B_v über die maximale Verbandsverschiebung L/β abhängt. β stellt ein dimensionsloses Stichmaß dar, das im Holzbau üblicherweise zu 1000 gewählt wird. Die meisten Verbandsausbildungen weisen sogar Stichmaße β von ca. 1800 bis 2000 auf (vgl. [9]).

Faktorenprinzip

Die so erhaltene Formel für die Seitenlast ist bei den vielen zu berücksichtigenden Parametern sehr unhandlich. Deshalb wurde zur übersichtlicheren Ergebnisdarstellung eine Aufgliederung der Formel in einzelne Teile gewählt, wobei eine Grundlast q_{s0} mit verschiedenen Faktoren k multipliziert werden kann. Jeder Faktor berücksichtigt eine bestimmte Einflußgröße, z.B. Last- und Verbandsangriffshöhe, eine Vorverdrehung der Träger oder einen zusätzlichen Windlastangriff. Die Faktoren k wurden dabei so ausgelegt, daß sie gleich *Eins* sind, wenn die jeweilige Einflußgröße Standardwerte hat (für Lastangriffshöhen, Momentenlinienform) oder aber nicht vorhanden ist (für Vorverdrehung, Wind). Um dieses zu erreichen, wurden die Faktoren k folgendermaßen bestimmt:¹

$$k = \frac{q_s(\text{mit Einflußgröße})}{q_s(\text{ohne Einflußgröße})} \quad (3.3)$$

Die Grundlast q_{s0} gilt also für die Standardeinstellung, bei der alle Faktoren gleich *Eins* sind. In den folgenden Darstellungen wird sich daher immer die Form

$$q_s = q_{s0} \prod k_i$$

finden.

3.1.2 Voraussetzungen für die Berechnung

Darstellung des Systems

Als statisches System für die einzelnen Träger wird ein gabelgelagerter Einfeldträger gewählt (s. Abb. 3.2). Durch Aufbringung von Randmomenten können so auch Felder von Durchlaufträgern simuliert werden, wenn an den Stützstellen eine gabelähnliche Lagerung vorhanden ist. Bei Brückenträgern ist diese Voraussetzung zumeist in sehr guter Näherung erfüllt.

Die einzelnen Träger, die eine seitliche Vorverformung v_0 aufweisen, sind über Pfetten an Aussteifungsverbände angeschlossen (s. Abb.3.1 und 3.3).

Mechanische Voraussetzungen

Die Herleitungen basieren auf folgenden Voraussetzungen:

- Das *Hookesche* Gesetz und die *Bernoulli-Hypothese* gelten.

¹Dieses Vorgehen wird in Kap. 3.2.2 genauer erläutert. Außerdem wird die Richtigkeit für die beliebige Kombination verschiedener Faktoren bewiesen.

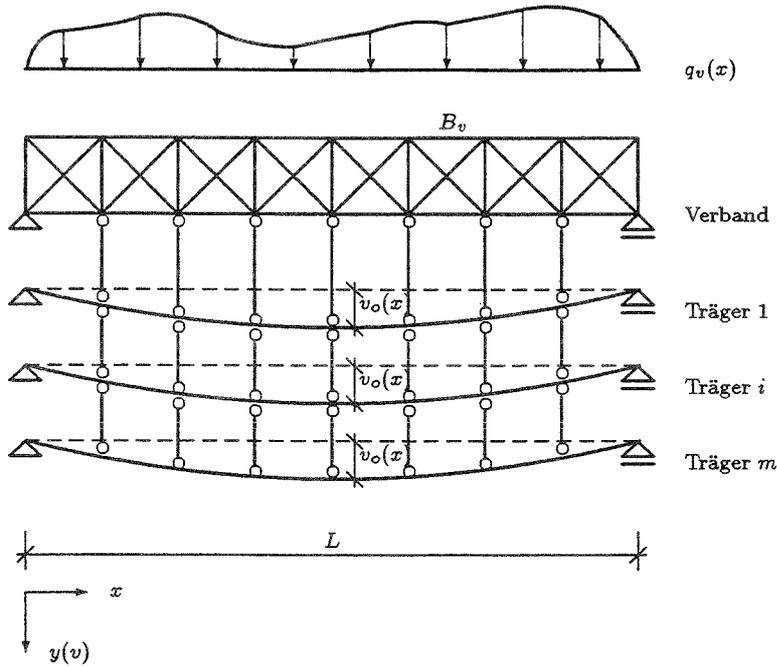


Abbildung 3.1: Ausgesteiftes Trägersystem im Grundriß

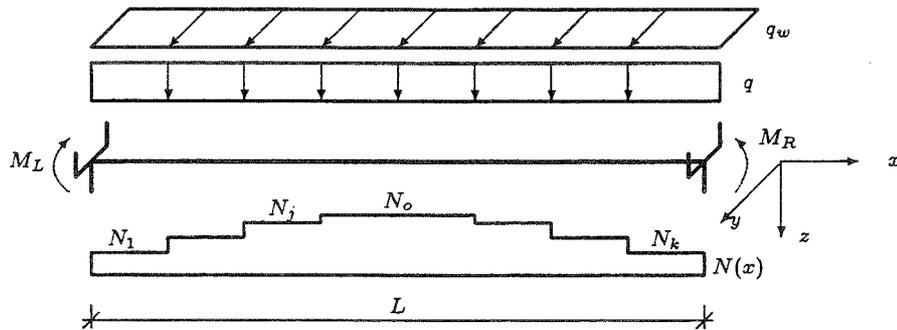


Abbildung 3.2: Koordinatensystem und Belastung eines Trägers

- Es wird nach isotroper, homogener Werkstofftheorie gerechnet, was sich nach Versuchsauswertungen auch für den anisotropen, inhomogenen Baustoff Holz bewährt hat [11].
- Die Verformungen des Systems sollen im Vergleich mit den Tragwerksabmessungen klein sein.
- Die Pfetten der Konstruktion, die die Träger mit dem Aussteifungsverband verbinden, sollen näherungsweise unendlich dehnsteif sein.
- Die Trägerquerschnitte sollen bezüglich der z -Achse symmetrisch und über die Trägerlänge konstant sein.
- Der Schwerpunkt S fällt mit dem Schubmittelpunkt M zusammen, was bei Rechteckquerschnitten evident ist.
- Der Einfluß der Hauptbiegung w wird im elastischen Potential auf der sicheren Seite liegend vernachlässigt.

Ansatzfunktionen für die Verformungen

Für die Systemverformungen werden zweigliedrige lineare Sinusfunktionen als Ansatzfunktionen gewählt.⁴ Diese erfüllen bei dem vorliegenden System die geometrischen Randbedingungen. Die Funktionen lauten:

$$v(x) = v_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + v_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.5)$$

und analog

$$\vartheta(x) = \vartheta_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \vartheta_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (3.6)$$

Für die Vorverformungen gelten folgende zu den elastischen Verformungen affine Ansätze:

$$v_0(x) = v_{01} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + v_{02} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.7)$$

und analog

$$\vartheta_0(x) = \vartheta_{01} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \vartheta_{02} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (3.8)$$

Die größte Vorverformung wird bestimmt durch die Gleichung

$$\max v_0 = \frac{L}{\epsilon}, \quad (3.9)$$

wobei das dimensionslose Stichmaß ϵ später zu 500 gewählt wird.

In den Herleitungen werden bestimmte Ableitungen der obigen Funktionen benötigt. Im weiteren sind diese Ableitungen angegeben:

$$v''(x) = -v_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 4v_2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (3.10)$$

$$v_0''(x) = -v_{01} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 4v_{02} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (3.11)$$

$$\vartheta'(x) = \vartheta_1 \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\vartheta_2 \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.12)$$

und

$$\vartheta_0'(x) = \vartheta_{01} \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\vartheta_{02} \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \quad (3.13)$$

Mit den obigen Ansätzen ergibt sich im gewählten Koordinatensystem die Verschiebung des Aussteifungsverbands zu

$$\begin{aligned} v_v(x) &= v(x) - z_v \vartheta(x) \\ &= (v_1 - z_v \vartheta_1) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + (v_2 - z_v \vartheta_2) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\ &= v_{v_1} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + v_{v_2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

⁴Gegenrechnungen mit quadratischen Sinus-Ansätzen haben ergeben, daß sich die linearen Ansätze bei Parallelträgern den „exakten Lösungen“ besser annähern und, verglichen mit den quadratischen Ansätzen, auf der sicheren Seite liegen.

Für die Potentialgleichung wird die zweite Ableitung von $v_v(x)$ benötigt:

$$v_v''(x) = -v_{v_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 4v_{v_2} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (3.15)$$

Im Fall symmetrischer Belastungsansätze werden nur die symmetrischen Teilansätze für die Verformungen benötigt. Alle Variablen, die mit den asymmetrischen Funktionen $\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ multipliziert werden, ergeben sich aus Symmetriegründen zu *Null*, wie auch später in der numerischen Auswertung gezeigt wird.

Ansätze für die Belastungsfunktionen

In die Potentialgleichung (3.4) des ausgesteiften Kippträgers ist die von x abhängige Funktion des Momentenverlaufs einzusetzen. Im Rahmen des Forschungsprojekts wurden als Belastung des Trägers eine Gleichlast q und zur Simulierung von Durchlaufträgerfeldern Randmomente M_L und M_R vorgegeben. Der so hervorgerufene parabelförmige Momentenverlauf wird durch die Gleichung

$$M_y(x) = M_q(x) + M_L(x) + M_R(x) \quad (3.16)$$

mit

$$\begin{aligned} M_q(x) &= \frac{qL^2}{2} \left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right] \\ M_L(x) &= M_L \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right) \right] \\ M_R(x) &= M_R \left(\frac{x}{L}\right) \end{aligned}$$

beschrieben. Das linke Stützmoment M_L soll stets betragsgrößer als das rechte Stützmoment M_R sein, so daß sich für das Stützmomentenverhältnis κ folgende Grenzen ergeben:⁵

$$0 \leq \kappa = \frac{M_R}{M_L} \leq 1 \quad (3.17)$$

Da die biegebeanspruchten Hauptträger der Brücken zumeist auch die Gurte des Aussteifungsverbands darstellen, sind sie gleichzeitig durch Normalkräfte (Gurtkräfte) belastet. Der Verlauf der Normalkräfte ist in diesem Fall abgestuft über k Intervalle und kann allgemein durch die Gleichung

$$N(x) = \begin{cases} N_1 = n_1 N_0 & : & 0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \\ N_j = n_j N_0 & : & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \vdots & \\ N_k = n_k N_0 & : & x_{k-1} \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.18)$$

mit der bezogenen Normalkraftordinate n_j

$$0 \leq n_j = \frac{N_j}{N_0} \leq 1; \quad j = 1, \dots, k$$

⁵ Aus der Bedingungsgleichung ist auch ersichtlich, daß beide Stützmomente das gleiche, vorzugsweise negative Vorzeichen haben müssen.

beschrieben werden.⁶ Die betragsgrößte Normalkraft ist als N_0 zu setzen, wie es auch in Abb.3.2 dargestellt ist. Zu Vergleichszwecken wird auch ein parabelförmiger Normalkraftverlauf angegeben, der den Normalkraftverlauf im Obergurt eines parallelgurtigen Fachwerkaussteifungsträgers mit fallenden oder steigenden Diagonalen sehr gut widerspiegelt:

$$N(x) = 4N_0 \left[\left(\frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (3.19)$$

In Kapitel 3.4.2 werden einfache Möglichkeiten zur Berücksichtigung verschiedener Normalkraftverläufe in den Ergebnisformeln angegeben.

Für die Windlast wurde ein einparametrischer Sinusansatz gewählt, der als erstes Glied einer Fourierreihenentwicklung für eine konstante Windlast angesehen werden kann (s. z.B. [14], Seite 543):

$$q_w(x) = \frac{4}{\pi} q_{wm} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (3.20)$$

Der Term q_{wm} stellt die Ordinate der konstanten Windlast dar. Zur Vereinfachung der weiteren Schreibweise wird im folgenden der Term $4/\pi q_{wm}$ mit q_w bezeichnet. Die Korrektur der Schreibweise wird in den Ergebnisformeln vorgenommen.

Für die Funktion der Verschiebung der Windlastangriffslinie $v_w(x)$ gilt analog zu Gl.(3.14) für $v_v(x)$ der Ansatz:

$$\begin{aligned} v_w(x) &= v(x) - z_w \vartheta(x) \\ &= (v_1 - z_w \vartheta_1) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + (v_2 - z_w \vartheta_2) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Höhenparameter

Die Angriffspunkte von Verband z_v , Gleichlast z_q , Normalkraft z_N und Windlast z_w sollen in beliebiger Höhe des Querschnitts liegen können; sie sollen jedoch nicht über x veränderlich sein:

$$z_v, z_q, z_N, z_w \neq f(x).$$

Laut vereinbartem Koordinatensystem sind Höhenordinaten *oberhalb* des Trägerschwerpunkts durch ein *negatives* Vorzeichen gekennzeichnet.

Integralauswertungen

Im folgenden werden für die Anwendung des Ritzschen Verfahrens einige immer wiederkehrende Integrale ausgewertet:⁷

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \\ \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \\ \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = 0 \end{aligned}$$

⁶Die Ermittlung der Normalkraftverläufe kann nach [36] vorgenommen werden.

⁷Die Berechnungen können mit [22] oder mit geeigneten Programmen leicht nachvollzogen werden

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{4} \\
\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= L \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2}\right) = 0.14134L \cong \frac{\sqrt{2}}{10}L \\
\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= L \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{16\pi^2}\right) = 0.16033L = \frac{L}{2\pi} \\
\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = -\frac{8L}{9\pi^2} \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \alpha_1 \frac{L}{2} N_0 \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx &= \varphi_1 \frac{L}{2} N_0 \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \alpha_2 \frac{L}{2} N_0 \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \varphi_2 \frac{L}{2} N_0 \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \varphi_{12} \frac{L}{2} N_0 = 0 \\
\sum_{j=1}^k \int_0^L N_j \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx &= \alpha_{12} \frac{L}{2} N_0 = 0.
\end{aligned}$$

Auf diese Werte wird an den entsprechenden Stellen bei den Herleitungen zurückgegriffen. Den Beiwerten α und φ ⁸ können Zahlenwerte in Abhängigkeit verschiedener Normalkraftverläufe durch die Auswertung der jeweiligen Integrale zugewiesen werden⁹ (s. auch Kap. 3.4.2).

3.2 Herleitung für symm. Momentenlinien

3.2.1 Analytische Herleitung — q_s^M

Es wird ein ausgesteifter, gabelgelagerter Einfeldträger nach Abb. 3.4, der durch eine Gleichlast, zwei gleiche Randmomente und eine Windlast belastet ist, betrachtet. Die Gleichung für das elastische Potential lautet in Reduktion der Gl. (3.4):

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z v''^2 + mT \vartheta'^2 + B_v v_v''^2 + 2m\gamma_1 M_y (\vartheta + \vartheta_0)(v'' + v_v'') \right. \\
&\quad \left. + m\gamma_1 qz_q (\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta_0) - 2\gamma_1 q_w v_w \right] dx \quad (3.22)
\end{aligned}$$

⁸Bei einparametrischen Ansätzen entfallen die Indizes von α und φ .

⁹Die Normalkraftverläufe hängen vom gewählten Fachwerkträgertyp der Aussteifungskonstruktion ab und können z.B. [36] entnommen werden.

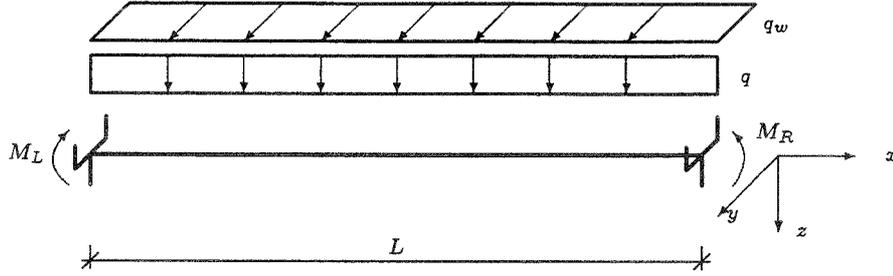


Abbildung 3.4: Koordinatensystem und Belastung eines Trägers

Werden in Gl. (3.22) aus Symmetriegründen die *eingliedrig*en Terme der Ansatzfunktionen aus Kap. 3.1.2 eingesetzt, ergibt sich für das Potential:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z v_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) + mT \vartheta_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right. \\ & + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 (v_1 - z_v \vartheta_1)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \\ & - 2m\gamma_1 (\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \\ & \left. \left[M_L + \left(\frac{qL^2}{2} - M_L + M_R \right) \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{qL^2}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right] \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right. \\ & \left. + m\gamma_1 qz_q (\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 \vartheta_{01}) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx \end{aligned}$$

Eine termweise Auswertung der Integrale nach Kap. 3.1.2 führt zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{L}{4} \left[mB_z v_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + mT \vartheta_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + B_v (v_1 - z_v \vartheta_1)^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \right. \\ & - m\gamma_1 (\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (M_L + M_R + 0.2174qL^2) \\ & \left. + m\gamma_1 qz_q (\vartheta_1^2 + 2\vartheta_1 \vartheta_{01}) - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \right] \end{aligned}$$

Dieser Potentialausdruck wird entsprechend dem *Ritzschen* Verfahren partiell nach den Freiwerten v_1 und ϑ_1 abgeleitet. Durch eine Nullsetzung der Ableitungen erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(B_v + mB_z) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 v_1 - \left(z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + m\gamma_1 M_y \right) \vartheta_1 = m\gamma_1 M_y \vartheta_{01} + \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2$$

und

$$\begin{aligned} - \left(z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + m\gamma_1 M_y \right) v_1 + \left(mT + z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + m\gamma_1 qz_q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \right) \vartheta_1 = \\ m\gamma_1 M_y v_{01} - m\gamma_1 qz_q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \vartheta_{01} - \gamma_1 q_w z_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \quad (3.23) \end{aligned}$$

Die sich aus der Herleitung ergebende Variable

$$M_y = \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2} \quad (3.24)$$

in den obigen Gleichungen steht für das *einwirkende Biegemoment* der Träger und findet sich im folgenden häufig wieder. Aus dem Gleichungssystem (3.23) lassen sich die gesuchten Freiwerte v_1 und ϑ_1 bestimmen:

$$\vartheta_1 = \frac{\gamma_1 M_y v_{01} + \gamma_1 M_y \vartheta_{01} \left(z_v + X - \frac{qz_q}{M_y} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \right) + \frac{\gamma_1 q_w}{m} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (z_v - z_w + X)}{Y - \gamma_1 M_y X} \quad (3.25)$$

$$v_1 = \vartheta_1 z_v + X(\vartheta_1 + \vartheta_{01}) + \frac{\gamma_1 q_w}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4} \quad (3.26)$$

mit den Hilfsgrößen

$$X = \frac{m\gamma_1 M_y}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}$$

und

$$Y = T + z_v^2 B_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 - 2\gamma_1 M_y z_v.$$

Die größte Verbandsverschiebung v_{v_m} in Trägermitte ($x = L/2$) wird betragsmäßig mit L/β festgelegt:

$$v_{v_1} = v_1 - z_v \vartheta_1 = X(\vartheta_1 + \vartheta_{01}) + X \frac{q_w}{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} = \frac{L}{\beta} \quad (3.27)$$

Gl. (3.27) ist über die Hilfsvariablen X und Y eine Funktion der Verbandssteifigkeit B_v . Löst man die Gleichung nach B_v auf, erhält man:¹⁰

$$B_v = \frac{m\gamma_1 M_y \beta}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 L} \left[\frac{\gamma_1 M_y \left(v_{01} + \frac{L}{\beta} \right) + \gamma_1 M_y \vartheta_{01} \left(z_v - \frac{qz_q}{M_y} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \right) + \frac{\gamma_1 q_w}{m \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} (z_v - z_w)}{Y} + \vartheta_{01} + \frac{q_w}{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \right] \quad (3.28)$$

Die zugeordnete Belastung des Verbands, die die maximale Verbandsverschiebung L/β hervorruft, kann über die Gleichung¹¹

$$q_v(x) = \frac{1}{\gamma_1} B_v v_v^{IV}(x) \quad (3.29)$$

¹⁰Die Eigenquerbiegesteifigkeiten mB_z des Systems werden auf der sicheren Seite liegend bei den analytischen Herleitungen vernachlässigt, um zu geschlossenen Ausdrücken zu gelangen. mB_z erhöht zwar die Gesamtquerbiegesteifigkeit durch die Addition mit B_v zu $(B_v + mB_z)$, hat aber kaum mehr als 10% Anteil an der Gesamtquerbiegesteifigkeit. Nur bei kleinen, geringbelasteten und kompakten Systemen hat mB_z einen nennenswerten Einfluß. Bei diesen Systemen ergibt sich aber auch eine sehr kleine Seitenlast, die für die Bemessung des Aussteifungsverbands nicht maßgebend ist. Durch die Vernachlässigung ist daher stets eine *stille Reserve* in den Seitenlastformeln vorhanden. Bei allen ausgearbeiteten Rechnerprogrammen wurde mB_z selbstverständlich berücksichtigt.

¹¹Das System wurde unter γ_1 -fachen Lasten gerechnet. Als Ergebnis sollen aber die *einfachen* Seitenlasten angegeben werden, also ist durch γ_1 zu dividieren. Schnittkraftvergrößerungen infolge Theorie II. Ordnung bleiben natürlich berücksichtigt.

mit

$$v_v^{IV}(x) = v_{v_m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad ; \quad v_{v_m} = \frac{L}{\beta}$$

zu

$$q_s(x) = q_v(x) - q_w(x) \quad (3.30)$$

bestimmt werden.¹² Durch Einsetzen von Gl. (3.28) in die Gln. (3.29 und 3.30) und Resubstitution der Hilfsvariablen wird die vollständige Formel für die Seitenlast bei symmetrischer Momenten- und Normalkraftbeanspruchung gewonnen:

$$q_s(x) = \left[\frac{m\gamma_1 M_y^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[v_{01} + \frac{L}{\beta} + \vartheta_{01} \left(z_v - \frac{qz_q}{M_y} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \right) \right] + \gamma_1 M_y q_w (z_v - z_w)}{T + \gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 - 2\gamma_1 M_y z_v} + m M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \vartheta_{01} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (3.31)$$

Diese für die Praxis umständlich zu handhabende Formel wird mit dem in Kap. 3.1.1 eingeführten Prinzip in Einzelterme zerlegt.

Grundseitenlast

Die Grundseitenlast q_{s0}^M unter Momentenbeanspruchung soll unter den Voraussetzungen $z_v = z_q = 0$, $q_w = 0$ und $\vartheta_0 = 0$ gelten. Werden diese Parameter in Gl. (3.31) zu Null gesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_{s0}^M(x) &= q_s^M(z_v = z_q = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0) \\ &= \frac{m\pi^2 \gamma_1 M_y^2}{TL} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Hervorzuheben ist, daß die Torsionssteifigkeit T der Einzelträger explizit als Parameter von $q_{s0}^M(x)$ erscheint. So können die nachgiebig verbundenen Brückenträger mit dieser Formel erfaßt werden, wenn ihre wirksame Torsionssteifigkeit ϵT an die Stelle von T gesetzt wird.

Systemfaktor

Die Formel für die Grundseitenlast kann anstelle von Gl. (3.31) nur unter den genannten einschränkenden Voraussetzungen verwendet werden. Sind die Höhenparameter z_v und/oder z_q ungleich Null, muß die Grundlast mit dem Systemfaktor k_s^M multipliziert werden. Dieser Faktor ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung¹³

$$k_s^M = \frac{q_s^M(z_v, z_q, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)}{q_s^M(z_v = z_q = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0) = q_{s0}^M}$$

nach einigen kurzen Umformungen zu

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{2\gamma_1 z_v M_y - \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{T}}. \quad (3.33)$$

Wie leicht nachvollziehbar ist, wird k_s^M für $z_v = z_q = 0$ gleich *Eins*, braucht also, wie es der Voraussetzung entsprach, in diesem Fall nicht berücksichtigt zu werden.

¹²Um die reine Seitenlast zu erhalten, ist eine eventuelle Windlast von der Verbandslast abzu ziehen, da diese später bei der Verbandsbemessung gesondert betrachtet wird.

¹³Die Windlast und eine eventuelle Vorverdrehung bleiben vorerst unberücksichtigt.

Windlastfaktor

Soll zusätzlich die Auswirkung einer auf den Träger wirkenden Windlast berücksichtigt werden, ist die Grundseitenlast mit dem Windlastfaktor k_w^M zu multiplizieren, der sich aus der Bestimmungsgleichung¹⁴

$$k_w^M = \frac{q_s^M(z_v, z_q, q_w, \vartheta_0 = 0)}{q_s^M(z_v, z_q, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)}$$

nach kurzen Zwischenrechnungen zu

$$k_w^M = 1 + \frac{M_w}{m\pi^2 M_y \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.34)$$

errechnet. Hierfür ist als Parameter, der sich aus der Herleitung ergibt, das *Wind-drehmoment* M_w zu bestimmen:

$$M_w = q_w L(z_v - z_w) = q_w L\Delta z. \quad (3.35)$$

Auch dieser Faktor ist gleich *Eins*, wenn keine Windlast vorhanden ist oder aber die Windlast in Höhe des Aussteifungsverbands angreift, da sie dann *direkt* in den Verband eingeleitet wird, ohne das Kippverhalten der Träger zu beeinflussen.¹⁵

An dieser Stelle sind noch einige Anmerkungen zur *Vorzeichenwahl* von q_w zu machen. Zuerst ist eine Fallunterscheidung vorzunehmen:

- I) $\Delta z = z_v - z_w > 0$ (Windlast greift oberhalb des Verbands an)
hier ist $q_w > 0$ zu wählen $\rightarrow k_w^M > 1$
Verbandslast $q_v = q_s + q_w$ (q_s und q_w wirken richtungsgleich)
- II) $\Delta z = z_v - z_w < 0$ (Windlast greift unterhalb des Verbands an)
Es sind zwei Fälle zu betrachten:
 - a) $q_w > 0$ (q_w vermindert das Kippen)
 $\rightarrow k_w^M < 1$
Verbandslast $q_v = q_s + q_w$ (q_s und q_w wirken richtungsgleich)
 - b) $q_w < 0$ (q_w verstärkt das Kippen)
 $\rightarrow k_w^M > 1$
Verbandslast $q_v = q_s - q_w$ (q_s und q_w wirken entgegengerichtet)

Nach analytischen und numerischen Untersuchungen ist für das Gesamtsystem *immer* die Windlast mit *positivem* Vorzeichen maßgebend. Sie kann im Einzelfall die Seitenlast vermindern, führt aber zu einer größeren Verbandslast, da sie mit der Seitenlast gleichgerichtet – also zu addieren – ist.

Ein Windlastfaktor $k_w^M < 0$ bedeutet ein „Durchschlagen“ des Trägers. In diesem Fall ist ein Windlastangriff aus der anderen Richtung zu betrachten.

¹⁴Eine eventuelle Vorverdrehung bleibt vorerst unberücksichtigt.

¹⁵Die dann von der Windlast hervorgerufene zusätzliche Verbandsdurchbiegung und damit auch Trägerverformung ist in der Seitenlast schon berücksichtigt, da die Seitenlast sich auf eine Gesamtverbandsverformung L/β unter Seiten- und Windlast bezieht.

Vorverdrehungsfaktor

Im Falle einer Vorverdrehung der Träger um den Winkel $\vartheta_0 = \vartheta_{01}$ muß die Grundseitenlast mit dem Vorverdrehungsfaktor k_{t0}^M multipliziert werden, der sich aus der Bedingungsgleichung

$$k_{t0}^M = \frac{q_s^M(z_v, z_q, q_w, \vartheta_0)}{q_s^M(z_v, z_q, q_w, \vartheta_0 = 0)}$$

nach einigen Umformungen zu

$$k_{t0}^M = 1 + \left| \frac{T - \gamma_1 z_v M_y}{k_w^M \gamma_1 M_y L \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \right| \vartheta_0 \quad (3.36)$$

bestimmen läßt. Auch hier ist klar ersichtlich, daß der Faktor für den Fall $\vartheta_0 = 0$ gleich *Eins* ist. Die Betragszeichen sind erforderlich, da durch eine Vorverdrehung der Träger stets die Seitenlast vergrößert wird.¹⁶

3.2.2 Plausibilität des Faktorenprinzips

Die Seitenlast unter symmetrischer Momentenbelastung nach Gl. (3.31) läßt sich also äquivalent in der Faktorenschreibweise

$$q_s^M = q_{s0}^M k_s^M k_w^M k_{t0}^M \quad (3.37)$$

darstellen. Die einzelnen Faktoren wurden zwar aufeinander aufbauend hergeleitet, sind aber unabhängig voneinander anwendbar. Einzelne Faktoren können also auch übersprungen werden. In den Faktoren wird kein Einfluß doppelt berücksichtigt.

Exemplarisch zum Beweis:

$$\begin{aligned} q_s^M(z_v, z_q, q_w = 0, \vartheta_0) &= q_{s0}^M k_s^M k_{t0}^M \\ &= q_s^M(z_v = z_q = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0) \\ &\quad \cdot \frac{q_s^M(z_v, z_q, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)}{q_s^M(z_v = z_q = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)} \\ &\quad \cdot \frac{q_s^M(z_v, z_q, q_w, \vartheta_0)}{q_s^M(z_v, z_q, q_w, \vartheta_0 = 0)} \\ &= q_s^M(z_v, z_q, q_w = 0, \vartheta_0), \end{aligned}$$

wobei $q_w = 0$ per def. gilt.

q.e.d.

3.3 Herleitung für asymm. Momentenlinien

3.3.1 Analytische Herleitung — Faktor k_M

Es wird das gleiche System wie in Kap. 3.2.1 betrachtet, mit dem einzigen Unterschied, daß die Randmomente ungleich sind. Durch diese Erweiterung wird ein

¹⁶Ergäbe sich aus der Formel ohne die Betragszeichen, daß k_{t0}^M kleiner *Eins* wird, würde sich bei einer genauso wahrscheinlichen Vorverdrehung $-\vartheta_0$ in die andere Richtung ein k_{t0}^M größer *Eins* ergeben. Zur Auswertungserleichterung kann also stets mit einer positiven Vorverdrehung gearbeitet werden.

asymmetrischer Momentenverlauf zugelassen. Ein asymmetrischer Momentenverlauf hat, wie sich unten zeigt, einen asymmetrischen Seitenlastverlauf zur Folge. Diesem wird Rechnung getragen, indem zweigliedrige Ansatzfunktionen zugelassen werden.

Das elastische Potential für diesen Fall entspricht der auch für die symmetrische Momentenform gültigen Gl. (3.22):

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[mB_z v''^2 + mT \vartheta'^2 + B_v v_v''^2 + 2m\gamma_1 M_y (\vartheta + \vartheta_0)(v'' + v_v'') \right. \\ & \left. + m\gamma_1 q z_q (\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta_0) - 2\gamma_1 q_w v_w \right] dx. \end{aligned}$$

In die Potentialgleichung werden jetzt aber die zweigliedrigen Ansatzfunktionen aus Kap. 3.1.2 eingesetzt. Anschließend werden die angezeigten Integrationen mit Hilfe der Standardintegrale aus Kap. 3.1.2 durchgeführt. Der Potentialausdruck wird nach einigen Zwischenschritten in die Form

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{L}{4} & \left[mB_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 (v_1^2 + 16v_2^2) + mT \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (\vartheta_1^2 + 4\vartheta_2^2) \right. \\ & + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 ((v_1 - z_v \vartheta_1)^2 + 16(v_2 - z_v \vartheta_2)^2) \\ & - 2m\gamma_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[\frac{M_L + M_R}{2} ((\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) + 4(\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_2 + v_{02})) \right. \\ & \quad \left. + \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} (4(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_2 + v_{02}) + (\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_1 + v_{01})) \right. \\ & \quad \left. + q l^2 (0.1087(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) + 0.3587(\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_2 + v_{02})) \right. \\ & \quad \left. + m\gamma_1 q z_q (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_1 \vartheta_{01} + 2\vartheta_2 \vartheta_{02}) - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \right] \end{aligned}$$

überführt. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Pi}{\partial \dots}$ nach den Freiwerten v_1, v_2, ϑ_1 und ϑ_2 lassen sich am besten in dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_1 v_1 + 0 + C_1 \vartheta_1 + D_1 \vartheta_2 &= E_1 \\ 0 + B_2 v_2 + C_2 \vartheta_1 + D_2 \vartheta_2 &= E_2 \\ A_3 v_1 + B_3 v_2 + C_3 \vartheta_1 + 0 &= E_3 \\ A_4 v_1 + B_4 v_2 + 0 + D_4 \vartheta_1 &= E_4 \end{aligned} \tag{3.38}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_1 &= mB_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \\ C_1 &= -z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2} \right) \\ D_1 &= -m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} \\ B_2 &= 4A_1 \\ C_2 &= D_1 \\ D_2 &= -4z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= C_1 \\
B_3 &= 4D_1 \\
C_3 &= mT + z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + m\gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \\
A_4 &= \frac{1}{4} D_1 \\
B_4 &= D_2 \\
D_4 &= mT + 4z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{4} m\gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \\
E_1 &= \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + \vartheta_{01} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2}\right) + \vartheta_{02} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} \\
E_2 &= \vartheta_{01} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} + \vartheta_{02} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2}\right) \\
E_3 &= v_{01} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2}\right) + v_{02} \left(m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{128}{9\pi^2}\right) \\
&\quad - \vartheta_{01} \left(n\gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2\right) - \gamma_1 q_w z_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \\
E_4 &= v_{01} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{8}{9\pi^2} + v_{02} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2}\right) - \vartheta_{02} \frac{1}{4} m\gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2
\end{aligned}$$

darstellen.¹⁷ Aus diesem Gleichungssystem lassen sich iterativ diejenigen Freiwerte v_1, v_2, ϑ_1 und ϑ_2 berechnen, unter denen das Aussteifungssystem eine Verschiebung $v_v = L/\beta$ aufweist. Diese größte Verschiebung liegt jetzt nicht mehr in Trägermitte, sondern je nach Asymmetrie der Momentenlinie mehr oder weniger weit exzentrisch. Aus den Freiwerten lassen sich dann über die Gln.(3.1 und 3.2) die zugehörige Verbandssteifigkeit B_v bzw. aus Integrationen der Gleichung die Belastungs-, Querkraft- und Momentenverläufe des Aussteifungsverbands berechnen. Einfache Extremwertrechnungen führen anschließend zur maximale Verbandslast, zur maximalen Querkraft und zum maximalen Moment des Verbands.

Problematisch wird jetzt, daß sich wegen des exzentrischen Lastverlaufs keine *einfache* Formel für die Ersatzlast q_s mehr finden läßt, aus der sich zugleich das maximale Moment und die maximale Querkraft berechnen lassen. Anschaulich ist dieses Phänomen anhand eines Balkens auf zwei Stützen mit einer Einzellast F zu erläutern (s. Abb. 3.5). Eine *exzentrische* Last erzeugt ein kleineres Biegemoment, aber eine größere Querkraft an einer Trägerseite im Vergleich zu einer gleich großen, aber *zentrischen* Last. Soll für die exzentrische Last jetzt eine sie repräsentierende zentrische Ersatzlast gefunden werden, die die ungünstigsten Schnittgrößen hervorruft, so muß die Ersatzlast über die Querkraft ermittelt werden. Das von ihr erzeugte Biegemoment liegt dann im Vergleich mit dem ursprünglichen Biegemoment auf der sicheren Seite.

Nach dem gleichen Gedanken wird jetzt bei der Bestimmung einer Ersatzlast für die aus dem Gleichungssystem (3.38) errechenbare Verbandslast verfahren. Es wird also für die asymmetrische Last über die größte Querkraft des Verbands eine symmetrische Ersatzlast hergeleitet, die die größte Querkraft genau und das größte Biegemoment auf der sicheren Seite liegend nachempfindet.¹⁸

Von der Gestaltung her soll die Formel in das aufbauende Faktorenprinzip nach

¹⁷Der Faktor ψ ergibt sich aus der Herleitung zu 0,825.

¹⁸Numerisch wurde nachgewiesen, daß die größte Querkraft bei einem zweiparametrischen Ansatz und einem Stützmomentenverhältnis $0 \leq \kappa = M_R/M_L \leq 1$ stets am Trägerrand vorliegt.

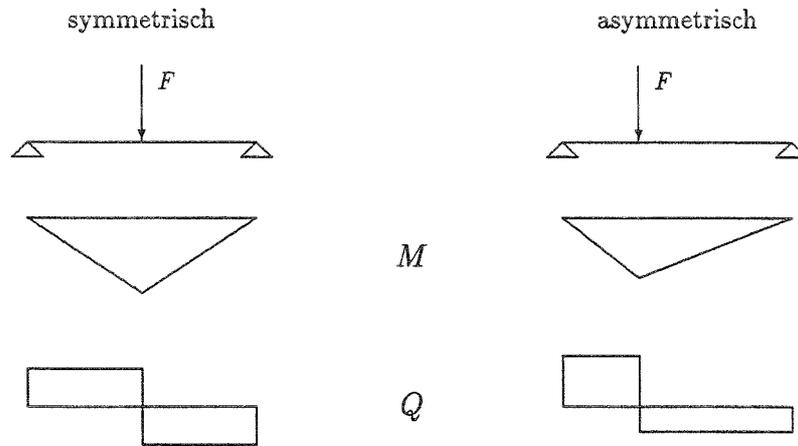


Abbildung 3.5: Schnittgrößenvergleich für asymmetrische Laststellung

Gl. (3.3) und (3.37) integriert werden. Hierzu wird ein Momentenfaktor k_M definiert:

$$k_M = \frac{\text{asym } Q_v}{\text{symm } Q_v}. \quad (3.39)$$

Gl. (3.37) soll mit diesem Faktor multipliziert werden können, um die durch den exzentrischen Belastungsverlauf erhöhte Querkraft zu erhalten. Die Verbandsquerkraft $\text{symm } Q_v$ kann aus der Gleichung

$$Q_v = B_v v_v''' \frac{1}{\gamma_1}$$

mit der Verbandssteifigkeit nach Gl. (3.28) bestimmt werden. Die größte Querkraft infolge asymmetrischer Last muß über eine Computerberechnung ermittelt werden. Hilfsweise kann allerdings auch die gleiche Berechnung wie für $\text{symm } Q_v$ verwendet werden, wenn in die Gleichung für B_v anstelle des symmetrischen einwirkenden Moments M_y das asymmetrische Moment

$$M_y = \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2} = M_L \frac{1 + \kappa}{2} + \frac{qL^2}{9,2} \quad (3.40)$$

mit

$$\kappa = \frac{M_R}{M_L} \quad (3.41)$$

als Stützmomentenverhältnis eingesetzt wird. In diesem Fall ist Gl. (3.39) mit einem numerisch zu ermittelnden Fehlerfaktor f zu gewichten:

$$k_M = \frac{\text{asym } Q_v (\kappa \neq 1)}{\text{symm } Q_v} f. \quad (3.42)$$

Führt man diese Berechnungen für die Seitenlast durch, zeigt es sich nach längeren Umformungen, daß sich alle Terme, die Funktionen des symmetrischen Einwirkungsmoments M_y mit $\kappa = 1$ sind, herauskürzen, und einzig die Grundseitenlast und die Faktoren, die Funktionen des asymmetrischen Einwirkungsmoments M_y mit $\kappa \neq 1$ sind, übrigbleiben. Der noch verbleibende Momentenfaktor kann dann in der Form

$$k_M = 1 + vf\Delta \quad (3.43)$$

geschrieben werden, wobei das asymmetrische Einwirkmoment M_y in den Faktoren k_s^M , k_w^M und k_{i0}^M zu berücksichtigen ist. Δ stellt in dieser Gleichung ein dimensionsloses Fehlerglied dar, das die Abweichung der vereinfachten asymmetrischen Formel von dem genauen Ergebnis nach Gl. (3.39) für die größte Momentenasymmetrie angibt, die betrachtet werden soll. Der Term vf ist ein Verlaufsfaktor, der die Veränderung des Fehlerglieds Δ über κ beschreibt. Für $\kappa = 1$ (symmetrischer Momentenverlauf) ist vf gleich *Null*; für die größte noch zu betrachtende Asymmetrie, die der Bestimmung von Δ zugrundeliegt, ist vf gleich *Eins*.

An dieser Stelle soll nochmals in Erinnerung gerufen werden, daß der Faktor k_M dazu dient, die größte Verbandsquerkraft zu berechnen. Das größte Verbandsmoment erhält man mit $k_M = 1$, wenn das asymmetrische Einwirkmoment M_y nach Gl. (3.40) in allen Teilformeln der Seitenlastgleichung berücksichtigt wurde.

3.3.2 Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformel

Um die Terme vf und Δ in der Gleichung (3.43) für k_M zahlenmäßig zu erfassen, wurde ein Computerprogramm ausgearbeitet, das beliebige ausgesteifte Systeme unter asymmetrischer Momentenbeanspruchung berechnen kann. Das Programm verändert iterativ die Verbandssteifigkeit B_v des Systems, bis eine vorgegebene Verschiebung $v_v = L/\beta$ erreicht ist. Hierzu wird das Gleichungssystem (3.38) ausgewertet, um aus den Freiwerten v_i und ϑ_i die Verbandsverschiebung v_v bestimmen zu können.¹⁹ Die Variation von κ wurde auf den praxisrelevanten Bereich

$$0 \leq \kappa = \frac{M_R}{M_L} \leq 1 \quad (3.44)$$

beschränkt.

Numerische Auswertungen des Programms an rund 300 Beispielträgern mit vielen Belastungsvariationen ergaben, daß der Parameter Δ primär von der Trägerschlankheit h/b , von den Angriffshöhen von Verband z_v und Gleichlast z_q und von der Form der Momentenlinie, die sich am besten durch die dimensionslose Variable $qL^2/|M_L|$ darstellen läßt, abhängt. Formelmäßig läßt sich Δ nicht bestimmen, so daß in den Abb. 3.6 bis 3.13 der Verlauf graphisch dargestellt wurde.²⁰

Der Verlaufsfaktor vf kann in sehr guter Näherung, die für fast alle Anwendungen leicht auf der sicheren Seite liegt, durch die Gleichung

$$vf = (1 - \kappa)^{2/3} \quad (3.45)$$

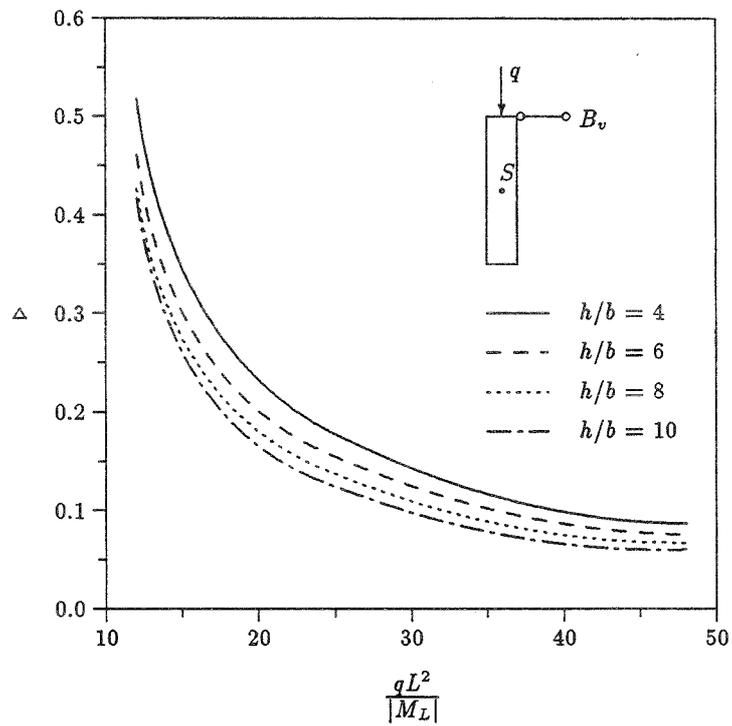
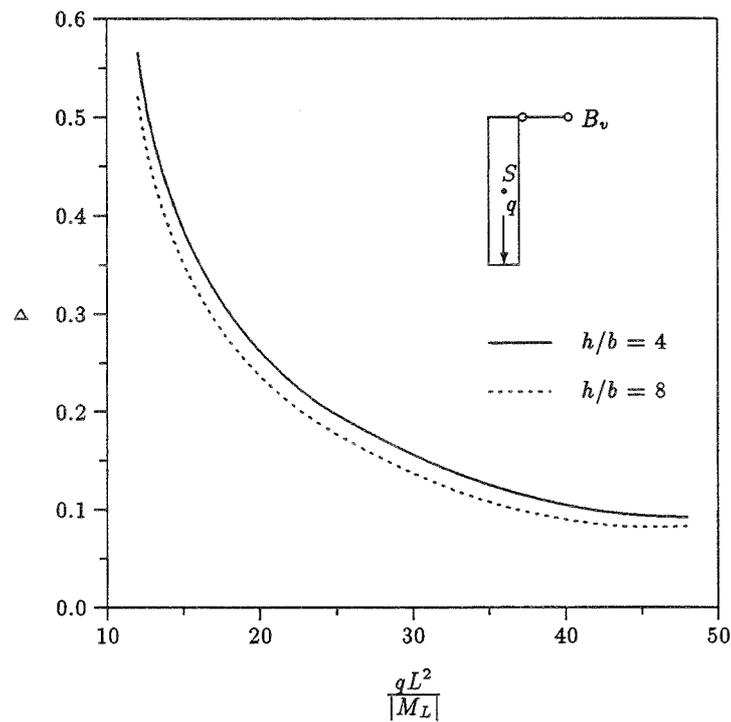
beschrieben werden. In Abb. 3.14 ist beispielhaft der Verlauf von Δ über κ mit den möglichen Näherungsfunktionen vf für einen Träger mit $h/b = 6$, $qL^2/|M_L| = 16$ und einem Verbands- und Lastangriff am Obergurt dargestellt. Als Formel für den Momentenfaktor ergibt sich jetzt:

$$k_M = 1 + (1 - \kappa)^{2/3} \Delta. \quad (3.46)$$

Einige weitere Parameter üben einen sekundären Einfluß auf die Größe von Δ aus. Die Tendenzen werden im folgenden diskutiert:

¹⁹Das Programm kann bei den Verfassern eingesehen werden.

²⁰Wenn in einzelnen Diagrammen die h/b -Kurven zu dicht beieinander lagen, wurden nur ausgewählte Kurven dargestellt. Es ist dann entsprechend zu interpolieren. Ebenso ist bezüglich der Laststellungen z_q zu verfahren. Funktionswerte $\Delta > 0,6$ wurden *nicht* gezeichnet, da die Verformungen der Träger unter diesen Lastbildern zu groß sind. Bei Verbänden, die unterhalb der Trägerschwerachse liegen, sollten die in den Diagrammen angegebenen größten h/b -Verhältnisse *nicht* überschritten werden, da sonst ein Stabilitätsversagen nicht ausgeschlossen werden kann.

Abbildung 3.6: Beiwert Δ für $z_v = -h/2$ und $z_q = -h/2$ Abbildung 3.7: Beiwert Δ für $z_v = -h/2$ und $z_q = +h/2$

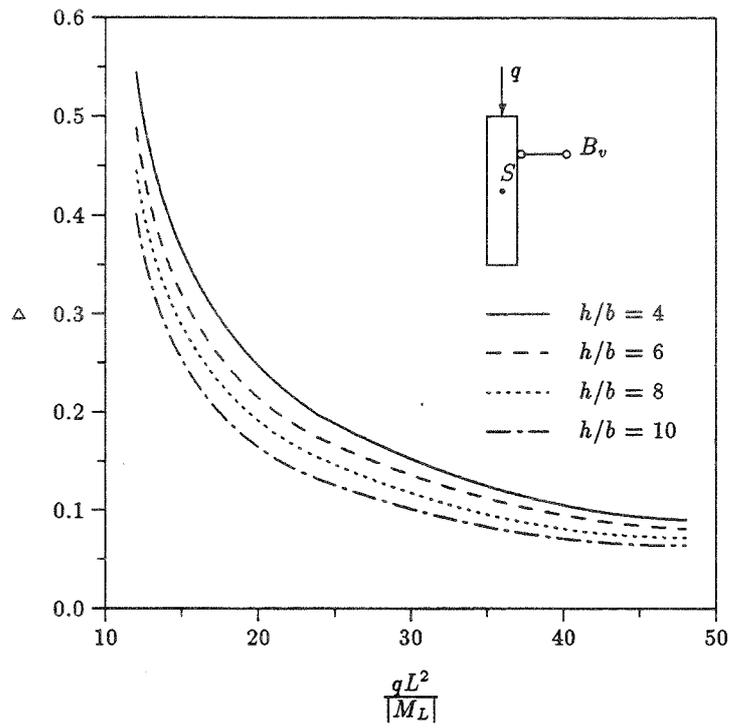


Abbildung 3.8: Beiwert Δ für $z_v = -h/4$ und $z_q = -h/2$

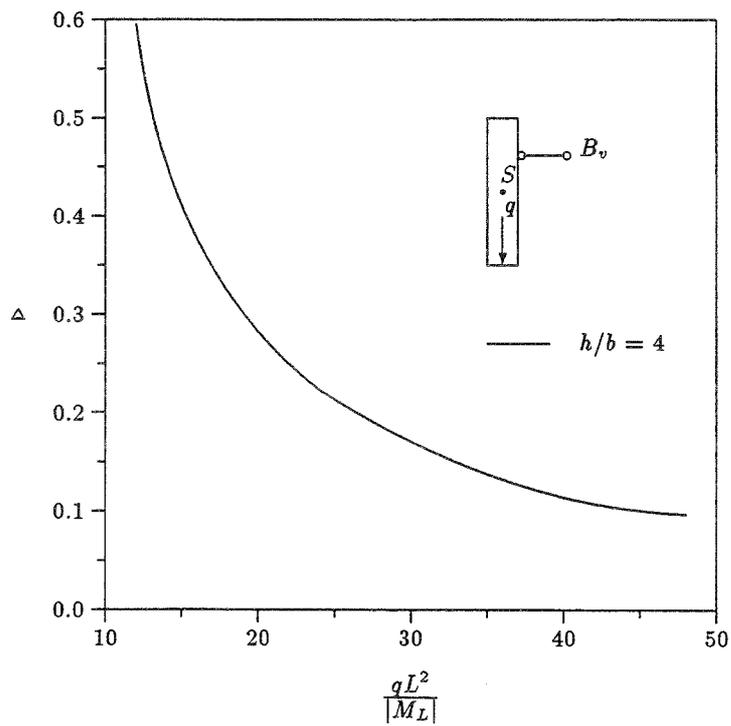
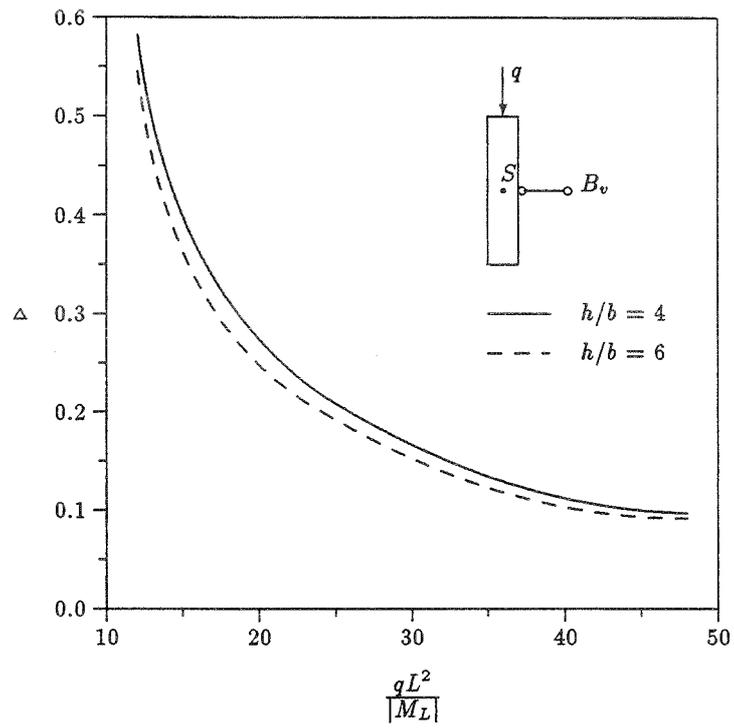
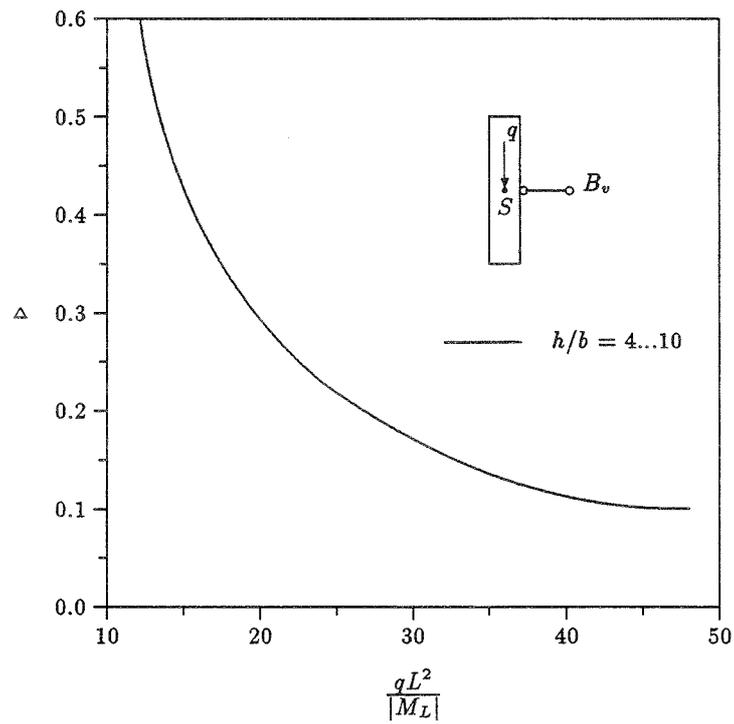


Abbildung 3.9: Beiwert Δ für $z_v = -h/4$ und $z_q = +h/2$

Abbildung 3.10: Beiwert Δ für $z_v = 0$ und $z_q = -h/2$ Abbildung 3.11: Beiwert Δ für $z_v = 0$ und $z_q = 0$

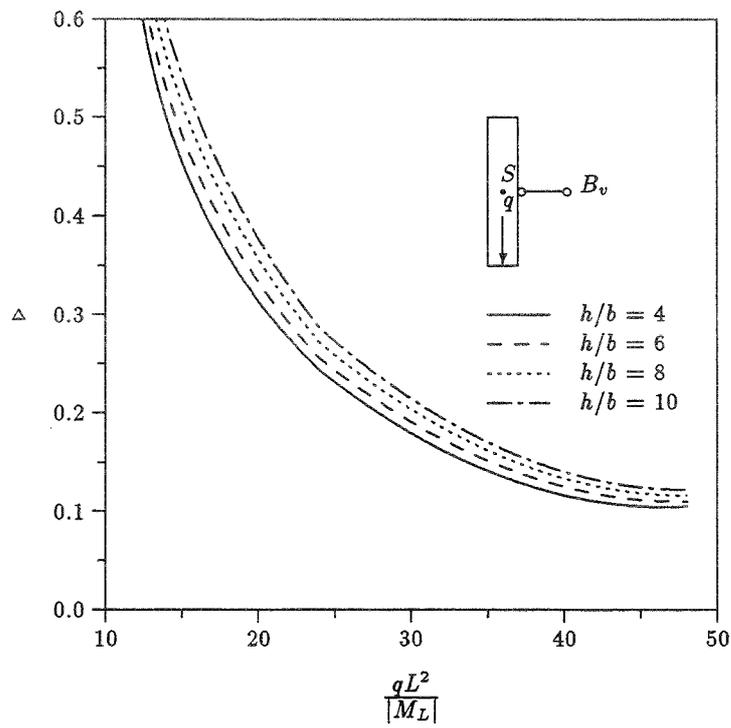


Abbildung 3.12: Beiwert Δ für $z_v = 0$ und $z_q = +h/2$

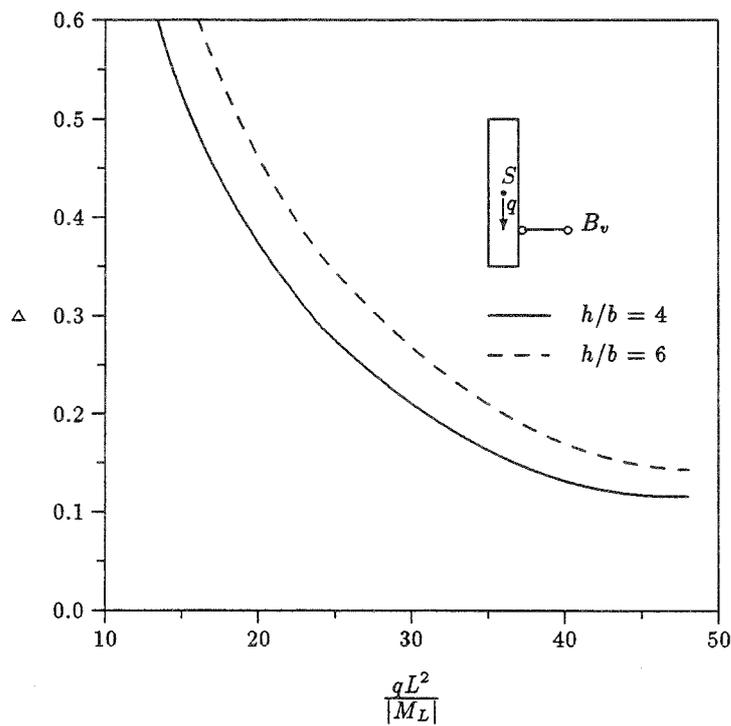
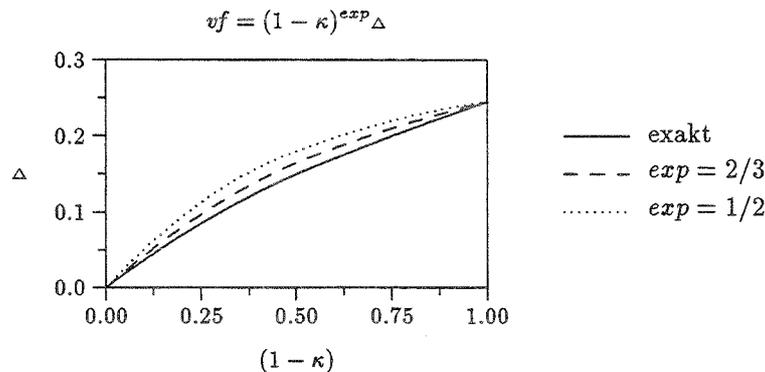


Abbildung 3.13: Beiwert Δ für $z_v = +h/4$ und $z_q = +h/4$

Abbildung 3.14: Beispielhafte Funktionsverläufe vf

- Δ wurde für $\epsilon = 500$ und $\beta = 600$ auf der sicheren Seite liegend ermittelt. Für $\beta = 1000$ oder $\epsilon = 250$ verringert sich Δ leicht ($\sim 1\%$). Die entscheidenden Veränderungen bei einer Variation von ϵ und β gehen in q_{s0} und in die Einflussfaktoren ein.
- Δ wurde für $\gamma_1 = 2,0$ berechnet. Für $\gamma_1 > 2,0$ verringert sich Δ , für $\gamma_1 < 2,0$ vergrößert es sich leicht.
- Δ ist am größten für $q_w = \vartheta_0 = 0$. Bei Windlasten und Vorverdrehungen, die die Seitenlast vergrößern, wird Δ kleiner, die Abweichung liegt aber i.d.R. unter 5%. Bei Windlasten, die die Seitenlast verkleinern, können Veränderungen von Δ zur unsicheren Seite hin entstehen. In diesen Fällen ist aber nach Gegenrechnungen die Seitenlast gegenüber der Windlast für den Verband nicht bemessungsmaßgebend.
- Die Anzahl m der auszusteifenden Träger hat Einfluß auf Δ , wenn eine Windlast angreift. Je größer m wird, desto kleiner wird Δ , wobei für $m > 5$ kaum noch Veränderungen auftreten.²¹ Die Δ -Werte der Diagramme wurden für $m = 1$ hergeleitet.
- Wirken im Träger zusätzlich Normalkräfte, liegen die Werte für Δ bei allen üblichen Anwendungen auf der sicheren Seite, wie es sich bei numerischen Auswertungen in Kap. 3.5.3 gezeigt hat.

Desweiteren ergaben vielfältige numerische Überprüfungen, daß im Falle nachgiebig verbundener Biegeträger mit den gleichen Diagrammen gearbeitet werden kann. Die Fehler bei üblichen Brückenträgern (s. Beispiele [30]) lagen unter $\pm 5\%$. In der Formel für die Seitenlast ist dabei natürlich eT an die Stelle von T zu setzen.

3.4 Herleitung für symm. Normalkraftlinien

Bei Brückenträgern wird es keine reine Normalkraftbeanspruchung geben. Trotzdem ist eine Betrachtung *nur* unter Normalkraft lohnenswert, um den prinzipiellen Aufbau der Seitenlastformel q_s^N zu erkennen und in Kap. 3.5 weiterverwenden zu

²¹ Es ist hier zu berücksichtigen, daß sich bei m Trägern die Windlast auch auf diese m Träger verteilt und so pro Träger einen kleineren Einfluß ausübt.

können. Außerdem sind die in diesem Kapitel abgeleiteten Gleichungen für die Berechnung der Aussteifungskonstruktionen von Fachwerkbindern und ähnlichen, nur normalkraftbeanspruchten Systemen nützlich.²²

3.4.1 Analytische Herleitung — q_s^N

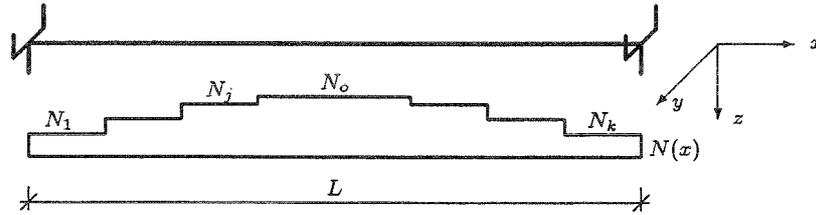


Abbildung 3.15: Koordinatensystem und Belastung eines Trägers

Es wird ein ausgesteifter, gabelgelagerter Einfeldträger nach Abb. 3.15, der durch eine beliebige, aber symmetrische Normalkraftfunktion $N(x)$ ²³ belastet ist, betrachtet. Die Gleichung für das elastische Potential lautet in Reduktion der Gl. (3.4):

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z v''^2 + mT \vartheta'^2 + B_v v_v'^2 - 2\gamma_1 q_w v_w \right] dx \\ &\quad - \frac{1}{2} m\gamma_1 \sum_{j=1}^n \int_{L_j} N_j \left[i_p^2 (\vartheta' + \vartheta_0')^2 + 2z_N (\vartheta + \vartheta_0) (v'' + v_0'') + (v' + v_0')^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (3.47)$$

In Gleichung (3.47) werden aufgrund der Symmetrie des Systems und der Belastung die eingliedrigen Terme der Ansatzfunktionen aus Kap. 3.1.2 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z v_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) + mT \vartheta_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 (v_1 - z_v \vartheta_1)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right] dx \\ &\quad - \frac{1}{2} m\gamma_1 \left[(i_p^2 (\vartheta_1 + \vartheta_{01})^2 + (v_1 + v_{01})^2) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \right. \\ &\quad \left. - 2z_N (\vartheta_1 + \vartheta_{01}) (v_1 + v_{01}) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \right]. \end{aligned}$$

Die Integrationen in obiger Potentialgleichung werden mit Hilfe der Standardintegrale aus Kap. 3.1.2 ausgeführt:

$$\Pi = \frac{L}{4} \left[mB_z v_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 + mT \vartheta_1^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 (v_1 - z_v \vartheta_1)^2 - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \right]$$

²²Die wesentlichen Ergebnisse für die Aussteifung von Fachwerkbindern sind von den Verfassern in [37] veröffentlicht worden.

²³Es werden nur symmetrische Normalkraftverläufe betrachtet, da bei den entsprechenden Traggliedern asymmetrische Verläufe sehr unwahrscheinlich sind.

$$-m\gamma_1 N_0 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\alpha i_p^2 (\vartheta_1 + \vartheta_{01})^2 + \alpha (v_1 + v_{01})^2 - 2\varphi z_N (\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) \right) \Big]. \quad (3.48)$$

Um die Herleitung unabhängig vom Normalkraftverlauf zu gestalten, werden den Variablen α und φ an dieser Stelle noch keine Zahlenwerte zugeordnet.²⁴ Für die üblichen Aussteifungssysteme können diese Werte Kap. 3.4.2 entnommen werden.

Das integrierte Potential (3.48) wird gemäß dem Ritzschen Verfahren partiell nach den Freiwerten v_1 und ϑ_1 abgeleitet. Durch Nullsetzen der Ableitungen ergibt sich nach kurzen Umformungen das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & \left(B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + mB_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \alpha m\gamma_1 N_0 \right) v_1 - \left(z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - \varphi m\gamma_1 z_N \right) \vartheta_1 \\ & = \alpha m\gamma_1 N_0 \vartheta_{01} - \varphi m\gamma_1 N_0 z_N \vartheta_{01} + \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} & - \left(z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\varphi\gamma_1 N_0 z_N \right) v_1 + \left(mT + z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\alpha\gamma_1 N_0 i_p^2 \right) \vartheta_1 \\ & = -m\varphi\gamma_1 N_0 z_N v_{01} + m\alpha\gamma_1 N_0 i_p^2 \vartheta_{01} - \gamma_1 q_w z_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die gesuchten Freiwerte v_1 und ϑ_1 lassen sich aus diesen Gleichungen ermitteln. Um die Ergebnisdarstellung zu verbessern, werden folgende Hilfsvariablen eingeführt:

$$\begin{aligned} e_1 & = T + 2\varphi\gamma_1 N_0 z_N z_v - \alpha\gamma_1 N_0 (z_v^2 + i_p^2) \\ e_2 & = T + \frac{\gamma_1}{\alpha} N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2) \\ e_3 & = \frac{\gamma_1}{\alpha} N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 \\ e_4 & = \gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N) \\ e_5 & = \gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N) (\alpha i_p^2 - \varphi z_N z_v). \end{aligned}$$

Aus den Gln. (3.49) und (3.50) folgt:²⁵

$$v_1 = \frac{\vartheta_1 \left(z_v B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\varphi\gamma_1 N_0 z_N \right) + m\alpha\gamma_1 N_0 v_{01} - m\varphi\gamma_1 N_0 z_N \vartheta_{01} + \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m\alpha\gamma_1 N_0} \quad (3.51)$$

und

$$\begin{aligned} \vartheta_1 & = \frac{a+b}{c-d} \quad \text{mit} \quad (3.52) \\ a & = \gamma_1 N_0 v_{01} (\alpha z_v - \varphi z_N) + \gamma_1 N_0 \vartheta_{01} (\alpha i_p^2 - \varphi z_N z_v) + \frac{\gamma_1 q_w}{m} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (z_v - z_w) \\ b & = \frac{m\gamma_1^2 N_0^2 \vartheta_{01} (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2) + \gamma_1^2 q_w N_0 \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 (\alpha z_w - \varphi z_N)}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \\ c & = T + 2\varphi\gamma_1 N_0 z_N z_v - \alpha\gamma_1 N_0 (z_v^2 + i_p^2) \\ d & = \frac{m\alpha\gamma_1 N_0 T + m^2\gamma_1^2 N_0^2 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2)}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}. \end{aligned}$$

²⁴Mit α und φ sind hier immer α_1 und φ_1 gemeint. α_2 und φ_2 haben bei symmetrischen Belastungen keinen Einfluß auf die Seitenlast.

²⁵Die Eigenquerbiegesteifigkeiten mB_z der Träger werden wiederum auf der sicheren Seite liegend gegenüber der Verbandssteifigkeit B_v wegen der besseren Auflösbarkeit der Gleichungen vernachlässigt.

Aus der Gleichung für die Verbandsverschiebung $v_v(x)$ kann nach dem aus Kap. 3.2.1 bekannten Prinzip die für eine maximale Verschiebung L/β erforderliche Steifigkeit B_v errechnet werden:²⁶

$$B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{L}{\beta} = m\alpha\gamma_1 N_0 \left[v_{01} \left(1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\right) + \frac{L}{\beta} \right] + m\gamma_1 N_0 \vartheta_{01} \left(\frac{\varrho_5}{\varrho_1} - \varphi z_N\right) + \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \left(1 + \Delta z \frac{\varrho_4}{\varrho_1}\right).$$

Über die vierte Ableitung der Verbandsverschiebung ergibt sich nach Multiplikation mit der Verbandssteifigkeit wieder die Verbandsbelastung. Wird von dieser die Windlast abgezogen, erhält man die Seitenlast zu

$$q_s(x) = \left[\frac{m\alpha N_0 \pi^2}{L} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\right) + \frac{1}{\beta} \right] + \frac{m N_0 \pi^2 \vartheta_{01}}{L^2} \left[\frac{\varrho_5}{\varrho_1} - \varphi z_N \right] + q_w \Delta z \frac{\varrho_4}{\varrho_1} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \quad (3.53)$$

Diese Gleichung ist in der Praxis schwer zu handhaben. Deshalb wird sie nach dem zuvor erläuterten Prinzip in Einzelterme zerlegt.

Grundseitenlast

Die Grundseitenlast q_{s0}^N unter Normalkraftbeanspruchung soll unter den Voraussetzungen $z_v = z_N = 0$, $q_w = 0$ und $\vartheta_0 = 0$ gelten. Werden diese Parameter in Gl. (3.53) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_{s0}^N(x) &= q_s^N(z_v = z_N = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0) \\ &= \frac{m\pi^2 \alpha N_0}{L} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\beta}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Der Lasterhöhungsbeiwert γ_1 kürzt sich hierbei heraus. Die Grundseitenlast ist auch keine Funktion von der Torsionssteifigkeit T , weil sowohl Verband als auch Normalkraft in der Schwerachse angreifen und infolgedessen keine Torsion auftritt.

Systemfaktor

Sind die Höhenparameter z_v und/oder z_N ungleich Null, muß die Grundlast mit einem Systemfaktor, der sich aus der Bestimmungsgleichung²⁷

$$k_s^N = \frac{q_s^N(z_v, z_N, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)}{q_s^N(z_v = z_N = 0, q_w = 0, \vartheta_0 = 0) = q_{s0}^N}.$$

nach einigen kurzen Umformungen zu

$$k_s = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \omega_1 \frac{\varrho_3}{\varrho_1} + \omega_2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) + \sqrt{\left(1 + \omega_1 \frac{\varrho_3}{\varrho_1} + \omega_2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 - 4\omega_2 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \right]$$

²⁶Die sich auf dem Rechenweg zuerst ergebende quadratische Gleichung in B_v kann durch geschickte Umformungen in eine lineare Gleichung umgewandelt werden.

²⁷Die Windlast und eine Vorverdrehung bleiben vorerst unberücksichtigt.

mit

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{1 + \epsilon/\beta} = 1 - \omega_2 \\ \omega_2 &= \frac{1}{1 + \beta/\epsilon} = 1 - \omega_1\end{aligned}$$

ergibt, multipliziert werden. Durch Umformung und anschließende Auflösung des Wurzelterms kann diese Gleichung in die sehr viel einfachere Form

$$k_s^N = 1 + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}$$

überführt werden. Die Resubstitution der Hilfsvariablen ϱ_1 und ϱ_3 und eine kurze Termumstellung führen dann zu einer dem Faktor k_s^M ähnlich gestalteten Gleichung für den Systemfaktor:

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2}{\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2)}} \quad (3.55)$$

Auch hier ist offensichtlich, daß der Systemfaktor für $z_v = z_N = 0$ zu *Eins* wird, also gemäß Voraussetzung nicht berücksichtigt werden muß. Aus der Formel ist erkennbar, daß die Stabilitätsgefährdung des System und damit die Seitenlast mit größer werdendem Abstand zwischen Verband und Normalkraftwirkungslinie anwächst, was auch der Anschauung entspricht. Im folgenden Kapitel wird für obigen Ausdruck anhand von Vergleichsrechnungen eine Näherungsformel vorgeschlagen.

Windlastfaktor

Bei einer auf die Träger wirkenden Windlast ist zusätzlich der Windlastfaktor k_w^N in Ansatz zu bringen. Er berechnet sich aus der Bestimmungsgleichung²⁸

$$k_w^N = \frac{q_s^N(z_v, z_N, q_w, \vartheta_0 = 0)}{q_s^N(z_v, z_N, q_w = 0, \vartheta_0 = 0)}$$

nach einigen Zwischenrechnungen zu

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (z_v - \frac{\varphi}{\alpha} z_N)}{m\pi^2 k_s^N \varrho_1 \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)}$$

Der Systemfaktor k_s^N wird in der Gestalt nach Gl. (3.55) eingesetzt und die Hilfsvariable ϱ_1 resubstituiert. Nach mehreren Schritten folgt dann für den Windlastfaktor:

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 [\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2)] \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.56)$$

Die Definition des Winddrehmoments M_w und die Vorzeichenregelung für q_w gelten analog zu Kap. 3.2.1. Auch dieser Faktor wird anschließend durch Vergleichsrechnungen vereinfacht.

²⁸Eine eventuelle Vorverdrehung bleibt vorerst noch unberücksichtigt.

Vorverdrehungsfaktor

Im Falle einer Vorverdrehung der Träger um den Winkel $\vartheta_0 = \vartheta_{01}$ soll auch hier die Grundseitenlast mit einem entsprechenden Vorverdrehungsfaktor k_{i0}^N multipliziert werden, der sich aus der Bedingungsgleichung

$$k_{i0}^N = \frac{q_s^N(z_v, z_N, q_w, \vartheta_0)}{q_s^N(z_v, z_N, q_w, \vartheta_0 = 0)}$$

nach längeren Umformungen zu

$$k_{i0}^N = 1 + \frac{\frac{\varrho_5}{\varrho_1} - \varphi z_N}{\alpha L k_s^N k_w^N \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \vartheta_0$$

ergibt. Werden die Hilfsvariablen ϱ resubstituiert und der Faktor k_s^N eingesetzt, folgt:

$$k_{i0}^N = 1 + \left| \frac{\gamma_1 N_0 z_v (\alpha^2 i_p^2 - \varphi^2 z_N^2) - \varphi z_N T}{k_w^N L [\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2)] \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.57)$$

Auch hier ist klar ersichtlich, daß der Faktor für den Fall $\vartheta_0 = 0$ gleich *Eins* ist. Die Betragszeichen sind erforderlich, da durch eine Vorverdrehung der Träger stets die Seitenlast vergrößert wird. Im folgenden Kapitel wird auch für diesen Faktor eine Näherungsformel vorgeschlagen.

3.4.2 Rechenwerte für α und φ

Zur Auswertung der Seitenlastformel ist die Kenntnis der Zahlenwerte von α und φ notwendig.²⁹ α beschreibt den Einfluß des Normalkraftverlaufs auf die Größe der Seitenlast. Normalkräfte in den Trägerrandbereichen haben einen größeren Einfluß auf q_s^N als in der Trägermitte, weil die Normalkräfte in den Randbereichen durch die größere Steigung der Querbiegelinie stärker umgelenkt werden und so größere Abtriebskräfte erzeugen. Dieses wird durch die Multiplikation mit $(\cos)^2$ mechanisch erfaßt. Der Faktor φ beschreibt die Intensität des Einflusses des Abstands z_N auf die Größe der Seitenlast. Maximal können beide Faktoren gleich *Eins* werden, wie es für Träger mit konstanter Normalkraft der Fall ist. Für veränderliche Normalkraftverläufe liegen α und φ zwischen *Null* und *Eins*.

Zur Bestimmung der Zahlenwerte werden die betreffenden Integrale des Kap. 3.1.2 nach α und φ aufgelöst:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{LN_0} \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{L} \sum_{j=1}^k \int_{L_j} n_j \cos^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \\ \varphi &= \frac{2}{LN_0} \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{2}{L} \sum_{j=1}^k \int_{L_j} n_j \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx. \end{aligned}$$

²⁹Mit α und φ sind hier immer α_1 und φ_1 gemeint. α_2 und φ_2 haben bei symmetrischen Belastungen keinen Einfluß auf die Seitenlast.

Durch die Substitution $u = x/L$ können die Integrale unabhängig von der aktuellen Trägerlänge gestaltet werden:

$$\alpha = 2 \sum_{j=1}^k \int_{u_j} n_j \cos^2(\pi u) du \quad (3.58)$$

$$\varphi = 2 \sum_{j=1}^k \int_{u_j} n_j \sin^2(\pi u) du. \quad (3.59)$$

Die Normalkräfte in den Trägern werden zumeist von den Aussteifungsverbänden hervorgerufen. Daher hängt der Normalkraftverlauf n_j von dem jeweiligen Typ des Aussteifungsfachwerks ab. In Tabelle 3.1 auf Seite 61 sind für die gängigen Fachwerke Zahlenwerte für α und φ angegeben. Als Aussteifungsverbände kommen allerdings nur die Parallelfachwerke der ersten beiden Zeilen in Frage.³⁰ Bei Stahldiagonalen sind die Werte für Parallelträger mit fallenden Diagonalen zu verwenden. Die von den jeweiligen Fachwerken erzeugten Normalkraftverläufe, die der Berechnung von α und φ zugrunde liegen, sind [36] entnommen worden. Läßt sich der Normalkraftverlauf eines zu untersuchenden Trägers keinem der Normalkraftverläufe der Tabelle zuordnen, können Werte für α und φ durch Integration (Gln. (3.58) und (3.59)) berechnet werden, oder es wird auf der sicheren Seite liegend mit $\alpha = \varphi = 1$ gerechnet.

Die Werte von α und φ hängen von der Anzahl der Felder des Fachwerks ab, da diese Anzahl einen Einfluß auf den Normalkraftverlauf hat. Die Satteldachbinder wurden mit einer Obergurtneigung von 5° , die Dreiecksbinder mit einer Neigung von 14° gerechnet.

3.4.3 Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformeln

Um die obigen Gleichungen der Einflußfaktoren zu vereinfachen und die Fehler der Näherungsformeln abschätzen zu können, wurde ein Rechnerprogramm in der Programmiersprache C ausgearbeitet. Dieses Programm erlaubt die Berechnung ausgesteifter Systeme, die durch beliebige symmetrische Normalkräfte belastet sind. Die Höhenparameter z_v und z_N können von Null verschieden sein. Die Träger dürfen eine Vorverdrehung ϑ_0 aufweisen. Windlasten sind in einer beliebigen Höhe zugelassen.³¹

Das Programm errechnet sich zuerst iterativ über das lineare Gleichungssystem des Kap. 3.4.1 die Seitenlast unter Vollast. Die Iterationsbedingung lautet, daß die maximale Verbandsverschiebung ein vorgegebenes Maß L/β erreichen soll. In den weiteren Schritten werden dann durch fortschreitendes Nullsetzen einzelner Einflußgrößen nach dem gleichen Schema die Faktoren k_{i0}^N , k_w^N und k_s^N berechnet. Beim letzten Schritt ergibt sich als Seitenlast die Grundseitenlast q_{s0}^N . Im anschließenden Nachlauf werden die zu testenden Näherungsgleichungen ausgewertet und mit den „exakten“ Lösungen verglichen.

Die Gleichungen für die Einflußfaktoren lassen sich durch die Einführung der Differenztorsionssteifigkeit ΔT

$$\Delta T = \frac{\gamma_1}{\alpha} N_0 (\alpha^2 i_p^2 - \varphi^2 z_N^2), \quad (3.60)$$

³⁰Die Werte für die übrigen Fachwerktypen sind nützlich bei der Anwendung der Seitenlastformeln für die Aussteifungsberechnung von Fachwerkbindern, wo die Normalkraftverläufe in den Fachwerkobergurten der Berechnung zugrunde gelegt werden müssen (s.[37]).

³¹Das Programm kann bei den Verfassern eingesehen werden.

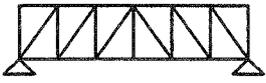
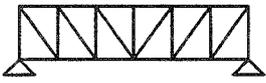
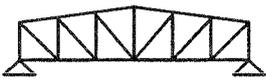
System	α		φ	
	6 Felder	≥ 8 Felder	6 Felder	≥ 8 Felder
	0,26	0,31	0,81	0,82
	0,69	0,64	0,94	0,93
	0,31	0,38	0,86	0,89
	0,85	0,79	0,96	0,95
	0,99	0,97	0,88	0,82
	0,91	0,90	0,69	0,68
	1,00		1,00	

Tabelle 3.1: Rechenwerte für α und φ

die in allen drei Faktoren enthalten ist, kompakter darstellen:

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2}{\alpha (T - \Delta T)}} \quad (3.61)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 \alpha (T - \Delta T) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.62)$$

$$k_{z0}^N = 1 + \left| \frac{\alpha z_v \Delta T - \varphi z_N T}{\alpha L (T - \Delta T) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right) k_w^N} \right| \vartheta_0. \quad (3.63)$$

In Gl. (3.63) wurde gleichzeitig der Windlastfaktor nach Gl. (3.62) eingearbeitet.

Mit dem Programm wurden an ca. 200 Trägern aus NH II, BSH I und LH C unter vielfältigen Variationen der Belastung und der geometrischen Eingangswerte Vergleichsrechnungen durchgeführt, um die Größe des Parameters ΔT abzuschätzen. Bezieht man ΔT auf die Torsionssteifigkeit T , ergeben sich für die üblichen Konstruktionen des Hallen- und Brückenbaus dimensionslose Quotienten

$$0 \sim \leq \frac{\Delta T}{T} \sim \leq 0,1.$$

Kompakte Trägerquerschnitte liegen eher bei $\Delta T/T \approx 0$, schlankere Querschnitte bei $\Delta T/T \approx 0,1$. Für die kompakten Querschnitte auf der sicheren Seite liegend wird hier zur Vereinfachung der Formeln

$$\frac{\Delta T}{T} = 0,1 \quad (3.64)$$

gewählt. Die Fehler, die sich hierfür in den Computerberechnungen zeigten, lagen in ungünstigen Fällen

- bei 8% auf der unsicheren Seite für schlanke Querschnitte und
- bei 15% auf der sicheren Seite für kompakte Querschnitte.

Wird $\Delta T/T = 0,1$ in die Gln. (3.61) – (3.63) eingesetzt, folgt:

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2}{0,9\alpha T}}, \quad (3.65)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 0,9\alpha T \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad (3.66)$$

$$k_{z0}^N = 1 + \left| \frac{0,1\alpha z_v - \varphi z_N}{0,9\alpha L \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right) k_w^N} \right| \vartheta_0. \quad (3.67)$$

Eine weitere Möglichkeit der Vereinfachung ergibt sich aus der Tatsache, daß der Beiwert φ im Vergleich zum Beiwert α eine untergeordnete Rolle spielt und in seinem Zahlenwert nicht stark von α abweicht (s. Tabelle 3.1). Setzt man

$$\varphi \approx \alpha, \quad (3.68)$$

vereinfachen sich die Gln. (3.65) – (3.67) weiter zu

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 \alpha (z_v - z_N)^2}{0,9T}} \quad (3.69)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (z_v - z_N)}{m\pi^2 0,9T \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.70)$$

$$k_{i0}^N = 1 + \left| \frac{0,1z_v - z_N}{0,9Lk_w^N \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.71)$$

Die zusätzlichen Fehler liegen im Bereich von 10%.³² In Kap. 7 werden für die obigen Faktoren durch das Einsetzen von weiteren Zahlenwerten anwendergerechte Formeln ausgearbeitet.

3.4.4 Kritische Normalkraft

Unter einer bestimmten Normalkraft $kritN$ wird das gesamte System instabil. Dieser Fall des Systemversagens ist durch die Bedingung

$$k_s^N = \infty$$

gekennzeichnet. Für k_s^N soll hier die allgemeine und nicht vereinfachte Gl. (3.55) betrachtet werden. Der Wert der Gleichung kann nur gegen *unendlich* gehen, wenn der Nenner gegen *Null* geht. Also folgt aus der Nullsetzung des Nenners von k_s^N

$$1 - \frac{\gamma_1 \text{krit}N (\alpha z_v - \varphi z_N)^2}{\alpha T + \gamma_1 \text{krit}N (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2)} = 0$$

die Bestimmungsgleichung für die kritische Normalkraft zu

$$\text{krit}N = \frac{T}{\gamma_1 [\alpha (z_v^2 + i_p^2) - 2\varphi z_N z_v]}. \quad (3.72)$$

Um ein ausreichendes Sicherheitsniveau zu erreichen, wird von den Verfassern vorgeschlagen, die Bedingung

$$\max N \leq \frac{\text{krit}N}{1,5} \quad (3.73)$$

einzuhalten.

³²Im Potentialansatz nach [7] ändert sich im Vergleich mit dem hier verwendeten Ansatz nach [14] der Term, auf den der Beiwert φ zurückzuführen ist, so, daß $\varphi = \alpha$ ist. Beide Potentialansätze führen nach dem Prinzip von Hamilton zum gleichen Differentialgleichungssystem, sind also mechanisch äquivalent. Aus diesem Grund läßt sich die letzte Vereinfachung der Ergebnisgleichungen unproblematisch vertreten. Im Ansatz nach [14] ist der betreffende Term anschaulicher als Einfluß eines Zusatzmoments aus der um die Ordinate z_N vom Schwerpunkt versetzten Normalkraft zu deuten, weshalb er im vorliegenden Forschungsvorhaben verwendet wurde.

3.5 Herleitung für Momente und Normalkräfte

In diesem Kapitel wird der Fall eines durch Momente *und* Normalkräfte belasteten Trägers untersucht. Es ist zugleich der in der Praxis am häufigsten auftretende Fall, bei dem in einem auf Biegung beanspruchten Brücken- oder Hallenhauptträger außerdem Normalkräfte wirken, die aus der Funktion des Hauptträgers als Gurt des Aussteifungssystems resultieren.

3.5.1 Aufstellung der Grundgleichungen

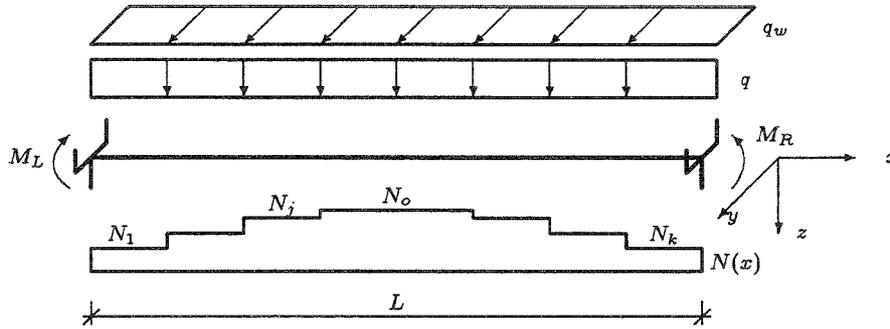


Abbildung 3.16: Koordinatensystem und Belastung eines Trägers

Es wird ein Träger nach Abb. 3.16 betrachtet, der durch asymmetrische Momente, symmetrische Normalkräfte und eine Windlast belastet ist. Als Vorverformung seien eine Verschiebung v_0 und eine Verdrehung ϑ_0 zugelassen. Das elastische Potential für diesen Fall lautet nach Gl. (3.4):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z v''^2 + mT \vartheta'^2 + B_v v_v''^2 + 2m\gamma_1 M_y (\vartheta + \vartheta_0)(v'' + v_0'') \right. \\ & \left. + m\gamma_1 qz_q (\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta_0) - 2\gamma_1 q_w v_w \right] dx \\ & - \frac{1}{2} m\gamma_1 \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \left[i_p^2 (\vartheta' + \vartheta_0')^2 + 2z_N (\vartheta + \vartheta_0)(v'' + v_0'') + (v' + v_0')^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Werden die zugehörigen zweiparametrischen Ansatzfunktionen nach Kapitel 3.1.2 eingesetzt, ergibt sich folgender Ausdruck für das Potential:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[mB_z \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[v_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4v_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]^2 \right. \\ & + mT \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[\vartheta_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\vartheta_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]^2 \\ & + B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left[v_{v_1} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4v_{v_2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right]^2 \\ & - 2m\gamma_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[M_L + \left(\frac{qL^2}{2} - M_L + M_R \right) \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{qL^2}{2} \left(\frac{x}{L} \right) \right] \\ & \left. \left[(v_1 + v_{01}) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4(v_2 + v_{02}) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(\vartheta_1 + \vartheta_{01}) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4(\vartheta_2 + \vartheta_{02}) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] \\
& + m\gamma_1 q z_q \left[\left(\vartheta_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \vartheta_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)^2 \right. \\
& + 2 \left(\vartheta_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \vartheta_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \left(\vartheta_{01} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \vartheta_{02} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \left. \right] \\
& - 2\gamma_1 q_w \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[v_{w1} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + v_{w2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right] dx \\
& - \frac{1}{2} m\gamma_1 \sum_{j=1}^k \int_{L_j} N_j \left[i_p^2 \left(\frac{\pi}{L}\right) \left((\vartheta_1 + \vartheta_{01}) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2(\vartheta_2 + \vartheta_{02}) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)^2 \right. \\
& - 2z_N \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left((\vartheta_1 + \vartheta_{01}) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + (\vartheta_2 + \vartheta_{02}) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \\
& \left((v_1 + v_{01}) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + (v_2 + v_{02}) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \\
& \left. + \left(\frac{\pi}{L}\right) \left((v_1 + v_{01}) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2(v_2 + v_{02}) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)^2 \right] dx.
\end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen und der anschließenden Ausführung der einzelnen Integrationen nimmt das Potential die Gestalt

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{L}{4} \left[mB_z \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 (v_1^2 + 16v_2^2) + mT \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (\vartheta_1^2 + 4\vartheta_2^2) \right. \\
& + B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 ((v_1 - z_v \vartheta_1)^2 + 16(v_2 - z_v \vartheta_2)^2) \\
& - 2m\gamma_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[M_L ((\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) + 4(\vartheta_2 + \vartheta_{01})(v_2 + v_{01})) \right. \\
& + \left(\frac{qL^2}{2} - M_L + M_R \right) \left(\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) + 2(\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_2 + v_{02}) \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{16}{9\pi^2} (4(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_2 + v_{02}) + (\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_1 + v_{01})) \right) \right] \\
& - \frac{qL^2}{2} (0.2826(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) + 1.2824(\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_2 + v_{02})) \\
& + \frac{qL^2}{2} \left(\frac{16}{9\pi^2} (4(\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_2 + v_{02}) + (\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_1 + v_{01})) \right) \left. \right] \\
& + m\gamma_1 q z_q (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 + 2\vartheta_2 \vartheta_{02} + 2\vartheta_1 \vartheta_{01}) - 2\gamma_1 q_w (v_1 - z_w \vartheta_1) \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} m\gamma_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left[i_p^2 (\vartheta_1 + \vartheta_{01})^2 N_0 + (v_1 + v_{01})^2 \alpha_1 N_0 \right. \\
& + 4(i_p^2 (\vartheta_2 + \vartheta_{02})^2 + (v_2 + v_{02})^2) \alpha_2 N_0 \\
& \left. - 2z_N (\vartheta_1 + \vartheta_{01})(v_1 + v_{01}) \varphi_1 N_0 - 8z_N (\vartheta_2 + \vartheta_{02})(v_2 + v_{02}) \varphi_2 N_0 \right]
\end{aligned}$$

an. Werden die partiellen Ableitungen des Potentials nach den Freiwerten v_1, v_2, ϑ_1 und ϑ_2 durchgeführt, erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A_1 v_1 + 0 + C_1 \vartheta_1 + D_1 \vartheta_2 &= E_1 \\
0 + B_2 v_2 + C_2 \vartheta_1 + D_2 \vartheta_2 &= E_2 \\
A_3 v_1 + B_3 v_2 + C_3 \vartheta_1 + 0 &= E_3 \\
A_4 v_1 + B_4 v_2 + 0 + D_4 \vartheta_2 &= E_4
\end{aligned} \tag{3.74}$$

in den Freiwerten mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A_1 &= mB_z \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \alpha_1 N_0 \\
A_3 &= -z_v B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2}\right) + m\gamma_1 \varphi_1 z_N N_0 \\
A_4 &= -m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{8}{9\pi^2} \\
B_2 &= 4mB_z \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + 4B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \alpha_2 N_0 \\
B_3 &= -m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{128}{9\pi^2} \\
B_4 &= -4z_v B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2}\right) + m\gamma_1 \varphi_2 z_N N_0 \\
C_1 &= -z_v B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2}\right) + m\gamma_1 \varphi_1 z_N N_0 \\
C_2 &= -m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} \\
C_3 &= mT + z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + m\gamma_1 qz_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 - m\gamma_1 i_p^2 \alpha_1 N_0 \\
D_1 &= -m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} \\
D_2 &= -4z_v B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2}\right) + m\gamma_1 \varphi_2 z_N N_0 \\
D_4 &= mT + 4z_v^2 B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{4} m\gamma_1 qz_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 - m\gamma_1 i_p^2 \alpha_2 N_0 \\
E_1 &= \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + \vartheta_{01} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2} - z_N \varphi_1 N_0\right) \\
&\quad + \vartheta_{02} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} + m\gamma_1 \alpha_1 v_{01} N_0 \\
E_2 &= \vartheta_{01} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{32}{9\pi^2} + \vartheta_{02} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2} - z_N \varphi_2 N_0\right) \\
&\quad + m\gamma_1 \alpha_2 v_{02} N_0 \\
E_3 &= v_{01} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9.2} - z_N \varphi_1 N_0\right) + v_{02} \left(m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{128}{9\pi^2}\right) \\
&\quad - \vartheta_{01} \left(m\gamma_1 qz_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 - m\gamma_1 i_p^2 \alpha_1 N_0\right) - \gamma_1 q_w z_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \\
E_4 &= v_{01} m\gamma_1 \frac{M_L - M_R}{2} \frac{8}{9\pi^2} + v_{02} m\gamma_1 \left(\frac{M_L + M_R}{2} + \psi \frac{qL^2}{9.2} - z_N \varphi_2 N_0\right)
\end{aligned}$$

$$-\vartheta_{02} \left(\frac{1}{4} m \gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 - m \gamma_1 i_p^2 \alpha_2 N_0 \right).$$

Der Parameter ψ steht für den Wert 0,825, der sich im Rahmen der Integraalauswertung ergibt.

3.5.2 Analytische Herleitung für symm. Momente — q_s^{M+N}

Im Falle symmetrischer Momentenlinien werden nur einparametrische Ansatzfunktionen benötigt, da sich bei der Lösung des Gleichungssystems (3.74) die asymmetrischen Teile der Ansatzfunktionen zu *Null* ergeben.

Aus dem so reduzierten Gleichungssystem läßt sich nach dem gleichen Verfahren wie in den vorigen Kapiteln diejenige Verbandssteifigkeit B_v errechnen, unter der das System eine Verbandsverschiebung $\max v_v = L/\beta$ erreicht.³³ Über die bekannten Beziehungen

$$q_s(x) = q_v(x) - q_w(x) \quad \text{mit} \quad q_v(x) = \frac{1}{\gamma_1} B_v \frac{L}{\beta} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4$$

kann dann die allgemeine Gleichung für die Seitenlast angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} q_s(x) &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad \text{mit} \quad (3.75) \\ Z_1 &= (\alpha X N_s + M_s^2) \left(\frac{L}{\varepsilon} + \frac{L}{\beta} \right) \\ Z_2 &= \vartheta_{01} \left[M_s (X - z_v M_s) + (M_s + \alpha N_s z_v) \left(\alpha N_s i_p^2 - m \gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \right) \right] \\ Z_3 &= \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \left(M_s (z_v - z_w) + \alpha N_s (z_v^2 - z_w z_v) \right). \end{aligned}$$

Zur Schreibvereinfachung wurden die Variablen

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2} \\ \text{ef}M_y &= M_y - 2\varphi z_N N_0 \\ M_S &= m \gamma_1 \text{ef}M_y \\ N_S &= m \gamma_1 N_0 \\ X &= mT + m \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 - \alpha N_S i_p^2 \end{aligned}$$

eingeführt, wobei das *effektive einwirkende Biegemoment* $\text{ef}M_y$, welches das infolge einer versetzten Normalkraft entstehende Zusatzmoment berücksichtigt, als eine im folgenden stetig wiederkehrende Größe hervorzuheben ist.³⁴ Diese mit diversen Hilfswerten versehene Formel ist keineswegs praxisgerecht. Deshalb wird auch hier eine Zerlegung in Einzelterme nach dem Faktorenprinzip angestrebt. Zusätzlich sollen die Terme so weit wie möglich in Momenten- und Normalkraftterme getrennt werden.

³³Die Rechenschritte bis zu diesem Ergebnis sind komplex. Besonders ist wiederum eine quadratische Gleichung in B_v , die aus den Normalkrafttermen resultiert, durch vielfältige Umformungen in eine lineare Gleichung zu überführen.

³⁴Ein positives Biegemoment M_y wird durch eine Druckkraft, die oberhalb der Schwerachse angreift, vergrößert, wie es auch der Vorstellung entspricht (z_N hat oberhalb S ein *negatives* Vorzeichen).

Grundseitenlasten

In Gleichung (3.75) werden die Terme, die aus Wind oder Vorverdrehung resultieren, eliminiert. Es ergibt sich dann die Seitenlastgleichung

$$q_s(x) = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{\varepsilon} + \frac{L}{\beta} \right) \frac{m\alpha\gamma_1 N_0 X + m^2\gamma_1^2 (M_y^2 - 2\varphi z_N N_0 M_y + \varphi^2 z_N^2 N_0^2)}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right),$$

die von den Einwirkungen her *additiv* in einen Momenten- und einen Normalkraftanteil getrennt werden kann:

$$q_s(x) = q_s^M(x) + q_s^N(x). \quad (3.76)$$

Die Einzelterme lauten:³⁵

$$\begin{aligned} q_s^M(x) &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{\varepsilon} + \frac{L}{\beta} \right) \frac{m^2\gamma_1 M_y (M_y - 2\varphi z_N N_0)}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right), \\ q_s^N(x) &= \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{L}{\varepsilon} + \frac{L}{\beta} \right) \frac{m\alpha N_0 X + m^2\gamma_1 \varphi^2 z_N^2 N_0^2}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Diese Terme werden jeweils wieder in Produkte aus Grundseitenlast und Systemfaktor zerlegt:

$$q_s(x) = q_{s0}^M(x) k_s^M + q_{s0}^N(x) k_s^N.$$

Für den Momententerm ergibt sich dabei als Grundseitenlast:

$$\begin{aligned} q_{s0}^M(x) &= q_s^M(x)(z_v = z_q = 0) = \\ &= \frac{m\pi^2\gamma_1 M_y (M_y - 2\varphi z_N N_0)}{L(T - \alpha\gamma_1 N_0 i_p^2)} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\beta} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Zu beachten ist hier, daß die Normalkraftordinate *nicht* auf Null gesetzt wurde, um für den Systemfaktor eine der Gl. (3.33) ähnliche Formulierung zu erhalten.

Die Grundseitenlast für den Normalkraftanteil folgt aus der Bedingung

$$q_{s0}^N(x) = q_s^N(x)(z_v = z_N = 0)$$

zu

$$q_{s0}^N(x) = \frac{m\pi^2\alpha N_0}{L} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\beta} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right). \quad (3.78)$$

Diese Gleichung entspricht voll der Gl. (3.55), die für die alleinige Wirkung von Normalkräften hergeleitet wurde.

Systemfaktoren

Um die verschiedenen Höhenordinaten, die auch ungleich *Null* sein können, zu erfassen, werden wieder Systemfaktoren definiert. Der Systemfaktor für den Momententerm ergibt sich aus der Bedingung

$$k_s^M = \frac{q_s^M(x)}{q_{s0}^M(x)}$$

³⁵Eine vollständige Trennung der Momente und Normalkräfte ist nicht möglich. Die hier vorgestellte Lösung stellt eine Optimierung aus mehreren Varianten dar.

zu

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{2\gamma_1 z_v M_y - \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + \gamma_1 z_v N_0 (\alpha z_v - 2\varphi z_N)}{T - \alpha \gamma_1 N_0 i_p^2}}. \quad (3.79)$$

Er entspricht nahezu dem Faktor (3.33) unter reiner Momentenbelastung, wobei zwei normalkraftabhängige Korrekturglieder zu beachten sind. Im folgenden Kapitel werden anhand von Vergleichsrechnungen für die Korrekturfaktoren zahlenmäßige Abschätzungen vorgenommen, um die Berechnung zu vereinfachen.

Der Normalkraftterm kann unter der Bedingung

$$k_s^N = \frac{q_s^N}{q_{s0}^N}$$

nach einigen Umformungen zu

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 + 2\gamma_1 \alpha z_v M_y}{\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2) + \alpha \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}}. \quad (3.80)$$

errechnet werden. Auch dieser Faktor entspricht nahezu dem reinen Normalkraftsystemfaktor (3.55) mit der Ergänzung zweier Korrekturanteile aus Momentenwirkung. Für die Korrekturanteile werden anschließend ebenfalls zahlenmäßige Abschätzungen durchgeführt. Beide Systemfaktoren sind definitionsgemäß gleich *Eins*, brauchen also nicht berücksichtigt zu werden, wenn die betreffenden Höhenordinaten gleich *Null* sind.

Windlastfaktoren

Um die Windlastfaktoren berechnen zu können, werden aus der allgemeinen Seitenlastgleichung (3.75) alle Anteile bis auf die von der Vorverdrehung ϑ_0 abhängigen Terme betrachtet:

$$q_s(x) = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{(\alpha X N_s + M_s^2) \left(\frac{L}{\epsilon} + \frac{L}{\beta}\right) + \gamma_1 q_w \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 (z_v - z_w)(\alpha N_s z_v + M_s)}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Diese Gleichung wird wieder in einen Momenten- und einen Normalkraftanteil aufgespalten

$$\begin{aligned} q_s^M(x) &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{Z_1 + Z_2}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \\ q_s^N(x) &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{Z_3 + Z_4}{X - \alpha N_s z_v^2 - 2M_s z_v} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

mit den Zählertermen

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{L}{\epsilon} + \frac{L}{\beta}\right) m^2 \gamma_1^2 M_y (M_y - 2\varphi z_N N_0), \\ Z_2 &= \gamma_1^2 q_w \Delta z \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 m M_y, \\ Z_3 &= \left(\frac{L}{\epsilon} + \frac{L}{\beta}\right) (m \alpha \gamma_1 N_0 X + m^2 \gamma_1^2 \varphi^2 z_N^2 N_0^2), \\ Z_4 &= m \gamma_1^2 q_w \Delta z \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N). \end{aligned}$$

Der Einfluß der Windlast auf den Momentenanteil folgt aus der Bedingungsgleichung

$$k_w^M = \frac{q_s^M}{q_s^M(q_w = 0) = q_{s0}^M k_s^M}$$

zu³⁶

$$k_w^M = 1 + \frac{M_w}{m\pi^2(M_y - 2\varphi z_N N_0) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)}. \quad (3.81)$$

Er entspricht dem reinen Momentenwindlastfaktor, wobei das einwirkende Biegemoment M_y durch ein Zusatzmoment aus der versetzten Normalkraft korrigiert wird.

Der Windlastfaktor für den Normalkraftanteil wird aus der Bedingung

$$k_w^N = \frac{q_s^N}{q_s^N(q_w = 0) = q_{s0}^N k_s^N}$$

nach einigen Zwischenschritten gewonnen:

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 \left[\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2) + \alpha \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \right] \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)}. \quad (3.82)$$

Zusätzlich zu dem reinen Normalkraftwindlastfaktor ist wiederum ein von der Gleichlast abhängiges Korrekturglied vorhanden, das später ebenso wie das Korrekturglied beim Momentenwindlastfaktor numerisch anhand von Vergleichsrechnungen abgeschätzt wird.

Vorverdrehungsfaktoren

Schließlich sollen auch hier die Einflüsse einer Vorverdrehung ϑ_0 berücksichtigt werden können. Hierzu wird die vollständige Seitenlastgleichung (3.75) mit allen Termen herangezogen, um dem bausteinartig aufeinanderbauenden Faktorenprinzip gemäß Kap. 3.2.2 zu entsprechen. Die Aufteilung in einen Momenten- und einen Normalkraftterm ergibt hier:

$$\begin{aligned} q_s^M(x) &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{X - \alpha N_S z_v^2 - 2M_S z_v} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \\ q_s^N(x) &= \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{Z_4 + Z_5 + Z_6}{X - \alpha N_S z_v^2 - 2M_S z_v} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \end{aligned}$$

mit den Zählertermen

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{L}{\epsilon} + \frac{L}{\beta}\right) m^2 \gamma_1^2 M_y (M_y - 2\varphi z_N N_0), \\ Z_2 &= \gamma_1^2 q_w \Delta z \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 m M_y, \\ Z_3 &= \vartheta_{01} f(M_y), \\ Z_4 &= \left(\frac{L}{\epsilon} + \frac{L}{\beta}\right) (m\alpha \gamma_1 N_0 X + m^2 \gamma_1^2 \varphi^2 z_N^2 N_0^2), \\ Z_5 &= m\gamma_1^2 q_w \Delta z \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N), \\ Z_6 &= \vartheta_{01} f(N_0). \end{aligned}$$

³⁶Bezüglich der Vorzeichenwahl für q_w wird auf Kap. 3.2.1 verwiesen.

Die Funktionen $f(M_y)$ und $f(N_0)$ stehen für längere Einwirkungsterme der jeweiligen Kraftgrößen.³⁷

Aus den entsprechenden Bedingungsgleichungen

$$k_{i0}^M = \frac{q_s^M}{q_s^M(\vartheta_0 = 0) = q_{s0}^M k_s^M k_w^M}$$

und

$$k_{i0}^N = \frac{q_s^N}{q_s^N(\vartheta_0 = 0) = q_{s0}^N k_s^N k_w^N}$$

lassen sich nach vielen Umformungen die Vorverdrehungsfaktoren für den Momententerm und den Normalkraftterm ermitteln:³⁸

$$k_{i0}^M = 1 + \left| \frac{T - \gamma_1 z_v (M_y - 2\varphi z_N N_0)}{k_w^M L \gamma_1 (M_y - 2\varphi z_N N_0) \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0, \quad (3.83)$$

$$k_{i0}^N = 1 + \left| \frac{\gamma_1 z_v \left[N_0 (\alpha^2 i_p^2 - \varphi^2 z_N^2) - \alpha q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \right] - \varphi z_N T}{k_w^N L \left[\alpha T - \gamma_1 N_0 (\alpha^2 i_p^2 + \varphi^2 z_N^2) + \alpha q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \right] \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.84)$$

Wie bei den übrigen Faktoren unter kombinierter Beanspruchung finden sich auch hier in beiden Formeln zwei Korrekturterme aus der jeweils anderen Beanspruchung wieder, die im folgenden Kapitel zahlenmäßig abgeschätzt werden. Ansonsten sind die obigen Faktoren mit den entsprechenden Faktoren aus den Kap. 3.2.1 und 3.4.1 identisch.

3.5.3 Numerische Vergleichsrechnungen — Näherungsformeln

Um die Richtigkeit der im Kap. 3.5 hergeleiteten Gleichungen zu beweisen und anschließend durch Vergleichsrechnungen Vereinfachungen durchführen zu können, wurde ein Programm in der Programmiersprache C geschrieben.³⁹ Das Programm kann für beliebige symmetrisch momenten- und normalkraftbelastete Träger iterativ nach dem in Kap. 3.4.3 beschriebenen Prinzip die Grundseitenlasten und die jeweiligen Einflußfaktoren berechnen und mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Formeln vergleichen. Bei diesen Vergleichen ist die Richtigkeit der Herleitungen des vorigen Kapitels ausnahmslos bewiesen worden.

In einer Nachlaufrechnung des Programms können dann Näherungslösungen mit den „exakten“ Formeln verglichen werden. Hierzu werden einige Parameter definiert, die in der betreffenden Gleichung den Einfluß der jeweils anderen Beanspruchungsart beschreiben. Ziel dieses Vorgehens ist, jene Parameter zahlenmäßig abzuschätzen, so daß auch bei kombinierter Beanspruchung die Formeln aus einfacher Beanspruchung mit leichten, hauptsächlich numerischen Korrekturen verwendet werden können.

Definiert werden die dimensionslosen Steifigkeitsfaktoren

$$\Delta T_1 = \frac{T_1}{T}$$

³⁷ Diese Terme können bei Bedarf bei den Verfassern angefragt werden.

³⁸ Die Erläuterung der Betragszeichen und der Vorzeichenwahl ist in Kap. 3.2.1 nachzulesen.

³⁹ Das Programm kann bei den Verfassern eingesehen werden.

mit

$$T_1 = T - \alpha \gamma_1 N_0 i_p^2$$

für q_{s0}^M und k_s^M und

$$\Delta T_2 = \frac{T_2}{T}$$

mit

$$T_2 = T - \frac{\gamma_1}{\alpha} N_0 (\alpha^2 i_p^2 - \varphi^2 z_N^2) + \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2$$

für die Faktoren k_s^N , k_w^N und k_{t0}^N . Zur Abschätzung des Differenzmoments im Faktor k_s^M wird der dimensionslose Momentenfaktor

$$\Delta M_y = \frac{M_{y1}}{M_y}$$

mit

$$M_{y1} = M_y + \frac{N_0}{2} (\alpha z_v - 2\varphi z_N)$$

eingeführt. An dieser Stelle soll nochmals an die Definition des effektiv einwirkenden Biegemoments

$$efM_y = M_y - 2\varphi z_N N_0, \quad (3.85)$$

das ebenfalls in die Gleichungen eingesetzt wird, erinnert werden. Als weiterer, sehr hilfreicher Parameter läßt sich eine *Bezugsstrecke*

$$a = \frac{T}{efM_y} \quad (3.86)$$

festlegen, die in q_{s0}^M und k_{t0}^M eingearbeitet wird. Mit diesen Parametern lauten die Gleichungen:

$$q_{s0}^M(x) = \frac{m\pi^2 \gamma_1 M_y}{aL\Delta T_1} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.87)$$

$$q_{s0}^N(x) = \frac{m\pi^2 \alpha N_0}{L} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (3.88)$$

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{2\gamma_1 z_v M_y \Delta M_y - \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi} \right)^2}{T \Delta T_1}} \quad (3.89)$$

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 + 2\gamma_1 \alpha z_v M_y}{\alpha T \Delta T_2}} \quad (3.90)$$

$$k_w^M = 1 + \frac{M_w}{m\pi^2 efM_y \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \quad (3.91)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 \alpha efM_y \Delta T_2 \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \quad (3.92)$$

$$k_{t0}^M = 1 + \left| \frac{a/\gamma_1 - z_v}{k_w^M L \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \right| \vartheta_0 \quad (3.93)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \left| \frac{\alpha z_v (1 - \Delta T_2) - \varphi z_N}{k_w^N L \alpha \Delta T_2 \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta} \right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.94)$$

Die Steifigkeitsfaktoren $\Delta T_{1,2}$ und der Momentenfaktor ΔM_y lassen sich zu einer analytischen Abschätzung in die allgemeineren, dimensionszugeordneten Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= 1 - \frac{\alpha\gamma_1}{4} \kappa_N \frac{\text{zul}\sigma_{D\parallel}}{G_T} \left[1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \right] \frac{1}{\eta}, \\ \Delta T_2 &= 1 - \gamma_1 \kappa_N \frac{\text{zul}\sigma_{D\parallel}}{G_T} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{h}{b}\right)^2 \right] - 3 [\varphi\zeta_N \left(\frac{h}{b}\right)]^2}{\alpha\eta} \\ &\quad + \frac{4\gamma_1}{\pi^2} \kappa_M \zeta_q \frac{\text{zul}\sigma_B (1 - \nu_M)}{G_T} \frac{1}{\eta} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \\ \Delta M_y &= 1 + 6 \frac{\text{zul}\sigma_{D\parallel} \kappa_N}{\text{zul}\sigma_B \kappa_M} \frac{\alpha\zeta_V - 2\varphi\zeta_N}{1.74 - 0.26\nu_M}\end{aligned}$$

umformen.⁴⁰ Werden für die einzelnen Variablen Zahlenwerte eingesetzt, die den üblichen Ausführungen bei Brückenträgern (vgl.[30]) entsprechen, lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- $\Delta T_1 \approx 0,95$
- Der Faktor ΔT_2 variiert stark in Abhängigkeit von h/b . Deshalb wird eine Funktion $\Delta T_2 = f_T = 1 - y \left(\frac{h}{b}\right)^2$ mit $y \approx 1/150$ vorgeschlagen.
- $\Delta M_y \approx 1,00$.

Mit diesen Werten wurden ca. 200 Beispielträger berechnet, wobei der Fehler der Näherungen mit einem steigenden Verhältnis h/b zunimmt:

- $h/b = 4 \rightarrow$ Fehler $\leq 10\%$
- $h/b = 5 \rightarrow$ Fehler $\leq 15\%$
- $h/b = 6 \rightarrow$ Fehler $\leq 20\%$.

Aus dieser Analyse folgt, daß für Brückenträger die obigen Zahlenwerte in die Gln. (3.87) bis (3.94) eingesetzt werden können, ohne daß das Ergebnis zu ungenau wird:

$$q_{s0}^M(x) = \frac{m\pi^2\gamma_1 M_y}{0,95\alpha L} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.95)$$

$$q_{s0}^N(x) = \frac{m\pi^2\alpha N_0}{L} \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (3.96)$$

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{2\gamma_1 z_v M_y - \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{0,95T}} \quad (3.97)$$

⁴⁰Folgende dimensionslose Parameter wurden hier eingeführt:

- Normalkraftspannungsausnutzung $\kappa_N = \frac{\sigma_{D\parallel}}{\text{zul}\sigma_{D\parallel}}$
- Momentenspannungsausnutzung $\kappa_M = \frac{\sigma_B}{\text{zul}\sigma_B}$
- Höhenparameter $\zeta_i = \frac{z_i}{h}$
- Momentenverhältnis $\nu_M = \frac{M_L}{M_F} = \frac{8M_L}{qL^2}$

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 + 2\gamma_1 \alpha z_v M_y}{\alpha f_T T}} \quad (3.98)$$

$$k_w^M = 1 + \frac{M_w}{m\pi^2 e f M_y \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.99)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (\alpha z_v - \varphi z_N)}{m\pi^2 \alpha a f_T e f M_y \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (3.100)$$

$$k_{t0}^M = 1 + \left| \frac{a/\gamma_1 - z_v}{k_w^M L \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0 \quad (3.101)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \left| \frac{\alpha z_v (1 - f_T) - \varphi z_N}{k_w^N L \alpha f_T \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.102)$$

In einer zweiten Stufe kann mit der Begründung aus Kap. 3.4.3 der Parameter φ folgendermaßen genähert werden:

$$\varphi \approx \alpha.$$

Hierdurch vereinfachen sich die Gleichungen der Normalkrafteinflußfaktoren weiter in die Richtung einer praxisgerechten Formulierung:

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 \alpha N_0 (z_v - z_N)^2 + 2\gamma_1 z_v M_y}{f_T T}}, \quad (3.103)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{\gamma_1 M_w (z_v - z_N)}{m\pi^2 a f_T e f M_y \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad (3.104)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \left| \frac{z_v (1 - f_T) - z_N}{k_w^N L f_T \left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\beta}\right)} \right| \vartheta_0. \quad (3.105)$$

In Kap. 7 werden diese Gleichungen durch Einsetzen von weiteren Zahlenwerten in Anwenderformeln überführt.

3.5.4 Verfahren bei asymmetrischen Momentenlinien

Im Falle asymmetrischer Momentenlinien muß das vollständige lineare Gleichungssystem (3.74) aus Kap. 3.5.1 verwendet werden. Aufgrund der Komplexität des Systems läßt sich aber keine geschlossene Gleichung für die Seitenlast q_s wie in den vorigen Abschnitten herleiten. Deshalb wurde ein Rechnerprogramm geschrieben, das – auf dem Gleichungssystem (3.74) aufbauend – die Seitenlast iterativ ermitteln kann. Durch Vergleichsrechnungen sollte dann ein Faktor k_M gefunden werden, der die Ergebnisgleichungen des Kapitels 3.5.3 so ergänzt, daß auch asymmetrische Momentenverläufe berücksichtigt werden können. Dieser Faktor k_M sollte prinzipiell in ähnlicher Weise wie der gleichlautende Faktor (3.46) in Kap. 3.3.2 aufgebaut sein.

Programmtechnische Bestimmung von k_M

Das Rechnerprogramm, das in Kap. 3.3.2 zur Bestimmung von k_M erstellt worden war, wurde jetzt um die Normalkrafsterme erweitert. An dem prinzipiellen Algorithmus wurden keine Änderungen vorgenommen, so daß auch hier iterativ die größte

Verbandsquerkraft $\max Q_{vs}$ und das größte Verbandsbiegemoment $\max M_{vs}$, das aufgrund der Lastasymmetrie nicht mehr bei $x = L/2$ liegt, berechnet werden. Aus diesen beiden Schnittgrößen können dann durch Vergleich mit den entsprechenden Schnittgrößen im Fall einer symmetrischen Belastung⁴¹ die Faktoren k_M zur Berechnung der veränderten Seitenlast q_s gewonnen werden.

Ziel der Ableitungen war es außerdem, nur die *Momententerme* in der zusammengesetzten Seitenlastgleichung (3.76) mit dem Momentenfaktor zu gewichten. Dafür mußte bei der Bestimmung der größten Verbandsquerkraft aus asymmetrischer *Momenteneinwirkung* von der größten Querkraft aus kombinierter Einwirkung der Anteil aus der symmetrischen Normalkraft abgezogen werden:

$$\text{asym}Q_{vs}^M = \max Q_{vs} - Q_{vs}^N$$

mit

$$Q_{vs}^N = q_s^N \frac{L}{\pi}.$$

Der Momentenfaktor zur Berechnung der größten Querkraft des Verbands lautet dann:

$$k_M^{Q_v} = 1 + \frac{\text{symm}Q_{vs}^M - \text{asym}Q_{vs}^M}{\text{symm}Q_{vs}^M},$$

mit der größten Verbandsquerkraft aus symmetrischer Momenteneinwirkung

$$\text{symm}Q_{vs}^M = q_s^M \frac{L}{\pi}.$$

Die Seitenlasten q_s^N und q_s^M lassen sich aus den Gleichungen des Kap. 3.5.2 bestimmen. Für die Ermittlung des größten Verbandsbiegemoments kann analog ein Faktor $k_M^{M_v}$ berechnet werden.

Da der Faktor k_M wieder die Formulierung

$$k_M = 1 + vf\Delta = 1 + (1 - \kappa)^{2/3} \Delta \quad (3.106)$$

aufweisen soll, sind die numerischen Untersuchungen am besten auf das Fehlerglied Δ , das sich dann aus der umgestellten Formel

$$\Delta = \frac{k_M - 1}{(1 - \kappa)^{2/3}} \quad (3.107)$$

errechnen läßt, zu konzentrieren.

Die numerischen Vergleichsrechnungen an ca. 50 Trägern mit vielen Lastvariationen haben zu folgenden Ergebnissen geführt:

- Der Faktor k_M unter reiner Momentenbeanspruchung nach Kap. 3.3.2 kann *unverändert* für Träger unter kombinierter Beanspruchung verwendet werden. Beim einwirkenden Biegemoment M_y in den Teilgleichungen sind die ungleichen Randmomente zu berücksichtigen. Die Gl. (3.106) paßt sich auch der Seitenlastfunktion unter kombinierter Einwirkung sehr gut an.
- Die Verlaufsfunktion vf lag mit einem Exponenten $2/3$ bei allen getesteten Anwendungen auf der sicheren Seite.

⁴¹Der symmetrischen Belastungsfunktion wird das per definitionem betragsgrößere linke Stützmoment M_L zugrunde gelegt.

- Das Fehlerglied Δ nach Gl. (3.107) kann weiter aus den Diagrammen 3.6 bis 3.13 entnommen werden. Diese gelten zwar streng nur für $N = 0$, lagen aber für $N \neq 0$ bei allen gerechneten Beispielen auf der sicheren Seite.

Außerdem wurden durch die Vergleichsrechnungen die schon im Kap. 3.3.2 getroffenen Feststellungen bestätigt:

- Durch die Multiplikation des Momentenanteils der Seitenlastgleichung mit dem Faktor k_M wird diejenige Seitenlast ermittelt, die die größte Verbandsquerkraft erzeugt.
- Wird der Faktor k_M zu *Eins* gesetzt, erhält man diejenige Seitenlast, die das größte Verbandsbiegemoment erzeugt.

Näherungslösung für asymmetrische Momentenlinien

Zur Vereinfachung der Berechnung kann – wie durch Vergleichsrechnungen bewiesen wurde – *ohne* den Faktor k_M auf der sicheren Seite liegend mit einem *symmetrischen* Momentenverlauf gerechnet werden, wenn das *betragskleinere* Stützmoment M_R ⁴² der Berechnung zugrunde gelegt wird. Alle anderen Parameter sind unverändert zu belassen. Die Abweichungen lagen im Vergleich zur asymmetrischen Berechnung bis zu 25%, in der Regel aber unter 10% auf der sicheren Seite.

3.6 Kritische Parameter

Das hier eigentlich vorliegende Stabilitätsproblem wurde in den obigen Betrachtungen durch Einprägung von Vorverformungen und Aufbringung von Querlasten als Spannungsproblem behandelt, um die seitlichen Abtriebskräfte explizit berechnen zu können. Genauso wie beim Stabilitätsproblem ergeben sich aber auch beim Spannungsproblem unter bestimmten geometrischen und dynamischen Konstellationen Zustände, unter denen das gesamte System versagt.

Dieses Systemversagen ist von einer Vielzahl Parameter abhängig. Mechanisch läßt sich der Grenzzustand im Rahmen des hier entwickelten Formelkomplexes am besten aus dem Systemfaktor k_s unter der Bedingung

$$k_s \rightarrow \infty$$

herleiten. Geht der Systemfaktor gegen *Unendlich*, folgt daraus auch eine unendlich große Seitenlast, also ein Tragsystem im Versagenszustand.

Bei Beanspruchung durch Momente *und* Normalkräfte existieren zwei Systemfaktoren k_s für die jeweiligen Einwirkungen. Wird zuerst der vollständige Systemfaktor k_s^M nach Gl. (3.79) unter der Bedingung

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{2\gamma_1 z_v M_y - \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 + \gamma_1 z_v N_0 (\alpha z_v - 2\varphi z_N)}{T - \alpha \gamma_1 N_0 i_p^2}} = \infty$$

betrachtet, kann dieses nur durch die Erfüllung der Gleichung

$$T - \alpha \gamma_1 N_0 i_p^2 = 2z_v \gamma_1 M_y + \gamma_1 z_v N_0 (\alpha z_v - 2\varphi z_N) - \gamma_1 q z_q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

⁴² bei negativen Stützmomenten!

verifiziert werden. Aus der Vielzahl der Variablen dieser Gleichung ist *eine* Variable festzulegen, die das Eintreten des Versagenszustands charakterisieren soll. Die Verfasser haben sich für die Variable z_v entschieden, da über die Angriffshöhe des Aussteifungsverbands die Stabilität des Systems am effektivsten gesteuert werden kann. Die obige Gleichung ist quadratisch in z_v . Aufgelöst nach z_v ergeben sich dann die beiden kritischen Verbandshöhen

$$\begin{aligned} \text{krit}z_{v_{1,2}} &= -\frac{M_y - \varphi z_N N_0}{\alpha N_0} \mp \sqrt{\left(\frac{M_y - \varphi z_N N_0}{\alpha N_0}\right)^2 + \frac{\frac{T}{\gamma_1} + z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 - \alpha N_0 i_p^2}{\alpha N_0}} \\ &= -a \mp b. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Wird anschließend der vollständige Systemfaktor k_s^N nach Gl. (3.80) unter der Bedingung

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{\gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 + 2\gamma_1 \alpha z_v M_y}{\alpha T + \gamma_1 N_0 (\varphi^2 z_N^2 - \alpha^2 i_p^2) + \alpha \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}} = \infty$$

betrachtet, führt dieses zu der aus dem Nenner gewonnenen Erfüllungsleichung

$$\alpha T - \gamma_1 N_0 (\alpha^2 i_p^2 - \varphi^2 z_N^2) + \alpha \gamma_1 z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \gamma_1 N_0 (\alpha z_v - \varphi z_N)^2 + 2\gamma_1 \alpha z_v M_y.$$

Die Auflösung nach z_v ergibt die identische Gleichung (3.108) für die kritischen Verbandshöhen, was die Richtigkeit der Herleitungen bestätigt.

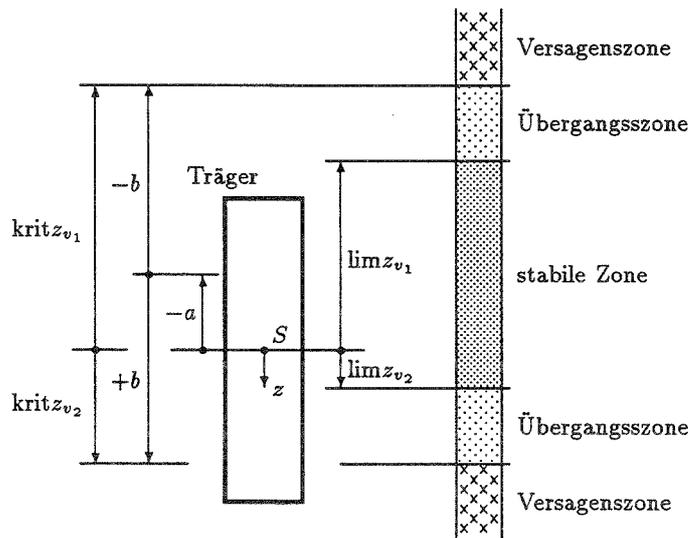


Abbildung 3.17: Verbandsangriffszonen

Die beiden Höhen $\text{krit}z_{v_{1,2}}$ geben die Versagensrandpunkte des Systems an (s. Abb. 3.17). Greift der Verband oberhalb *oder* unterhalb dieser Punkte an, ist das System instabil (Versagenszone). Innerhalb dieser Grenzen ist das System stabil (stabile Zone und Übergangsszone). Von den Verfassern wird allerdings vorgeschlagen, von den Versagensrandpunkten $\text{krit}z_{v_{1,2}}$ einen Sicherheitsabstand zu halten, da in einem gewissen Bereich (Übergangsszone) die Verformungen groß sind und kleine Änderungen des Lastzustands große Auswirkungen auf die Stabilität haben können.

Die obere Grenze $\text{krit}z_{v_1}$ ist relevanter bezüglich der Normalkrafteinwirkung und reagiert sehr empfindlich auf eine Vergrößerung der Normalkraft. Daher wird hier ein Sicherheitsabstand von $h/2$ empfohlen. Für die größte zulässige obere Verbandshöhe folgt dann:⁴³

$$\lim z_{v_1} = \text{krit}z_{v_1} + \frac{h}{2} \geq -\frac{h}{2} \quad (\text{OK Träger}). \quad (3.109)$$

Die untere Grenze $\text{krit}z_{v_2}$ ist gleichermaßen relevant für Momente und Normalkräfte, ändert sich aber bei kleinen Lastveränderungen nicht so stark. Daher wird ein Sicherheitsabstand von $h/4$ vorgeschlagen. Für die kleinste zulässige untere Verbandshöhe folgt dann:

$$\lim z_{v_2} = \text{krit}z_{v_2} - \frac{h}{4} \leq +\frac{h}{2} \quad (\text{UK Träger}). \quad (3.110)$$

Die einzuhaltende Bedingung lautet dann:

$$\lim z_{v_1} \leq z_v \leq \lim z_{v_2}. \quad (3.111)$$

Die kritischen Höhen sollten unbedingt berechnet und die Einhaltung der Grenzwerte überprüft werden, wenn man bei der Seitenlastberechnung Systemfaktoren k_s erhält, deren Zahlenwerte größer als 2,5 sind.

Wirkt nur eine Schnittgröße im System, vereinfacht sich die Formel erheblich:

- Bei ausschließlicher Wirkung von Momenten wird aus der quadratischen Gleichung in z_v eine lineare Gleichung mit nur einer kritischen Höhe:

$$\text{krit}z_v = \frac{\frac{T}{\gamma_1} + z_q q \left(\frac{L}{\pi}\right)^2}{2M_y}. \quad (3.112)$$

Es ist dann nachzuweisen, daß der Verband *oberhalb* der zulässigen Verbandshöhe

$$\lim z_v = \text{krit}z_v - \frac{h}{4} \leq +\frac{h}{2} \quad (\text{UK Träger}) \quad (3.113)$$

angreift.

- Bei ausschließlicher Wirkung von Normalkräften empfiehlt sich die Auflösung der Gleichung nach einer kritischen Normalkraft. Das Ergebnis entspricht der Gl. (3.72) in Kap. 3.4.1:

$$\text{krit}N = \frac{T}{\gamma_1 [\alpha (z_v^2 + i_p^2) - 2\varphi z_N z_v]}.$$

Die berechnete Normalkraft sollte dann kleiner als eine mit einem Sicherheitsbeiwert von 1,5 gewichtete Normalkraft sein (s. Gl. (3.73)):

$$\text{zul}N \leq \frac{\text{krit}N}{1,5}.$$

⁴³Die Vorzeichen des Koordinatensystems sind zu beachten!

Kapitel 4

Interaktionen

In diesem Kapitel sollen die Beanspruchungen der Teilquerschnitte, die sich aus den Seitenlasten ergeben, untersucht werden. Da der Träger verdrillt und verschoben wird, entstehen Torsions- und Querbiegemomente und aus diesen die zugeordneten Spannungen. Die zusätzlichen Spannungsausnutzungen der Träger können, wie Beispielrechnungen gezeigt haben, infolge Torsion um 60% und infolge Querbiegung um 15% liegen. Da sie den Querkraftschubspannungen bzw. den Hauptbiegespannungen zu superponieren sind, sollten sie nach Ansicht der Verfasser berücksichtigt werden.

4.1 Torsionsbeanspruchung

Das Torsionsmoment wird aus der Drillungsbeziehung¹

$$D(x) = \vartheta'(x) = \frac{M_T(x)}{T} \quad \rightsquigarrow \quad \max M_T = T \vartheta_m \left(\frac{\pi}{L} \right) \quad (4.1)$$

gewonnen.² Der Winkel ϑ_m steht für die größte Trägerverdrehung (bei symmetrischen Beanspruchungen in Feldmitte). ϑ_m kann durch Umformungen aus der Gleichung für die Seitenlast q_s berechnet werden. Dazu wird zuerst die allgemeine Seitenlastgleichung (3.29) aus Kap. 3.2.1 nach B_v aufgelöst:

$$B_v = \frac{\gamma_1 q_v \frac{\beta}{L}}{\left(\frac{\pi}{L} \right)^4}. \quad (4.2)$$

Diese Beziehung wird in die Gl. (3.27)

$$v_{vm} = \frac{L}{\beta} = \frac{m \gamma_1 M_y}{B_v \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \left(\vartheta_m + \vartheta_{0m} + \frac{q_w}{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \right)$$

eingesetzt:

$$1 = \frac{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2}{q_v} \left(\vartheta_m + \vartheta_{0m} + \frac{q_w}{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} \right).$$

¹Um bei mehrteiligen Trägern einer Verwechslung der Indizes vorzubeugen, erhalten alle Verformungsordinatenwerte in diesem Kapitel statt des Index „1“ den Index „m“.

²Es werden im folgenden nur die betragsgrößten Schnittgrößen und Spannungen betrachtet. Für den Torsionsmomentenverlauf ist festzuhalten, daß das größte Torsionsmoment infolge der Cosinus-Funktion ($\vartheta'(x)$) an den Lagern auftritt.

Aufgelöst nach ϑ_m folgt dann unter Beachtung von $q_v = q_s + q_w$:

$$\vartheta_m = \frac{q_s}{mM_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} - \vartheta_{0m}. \quad (4.3)$$

Damit ist die gesuchte Bestimmungsgleichung für den Drillwinkel gefunden und kann in Gl. (4.1) eingesetzt werden:

$$M_T = \frac{q_s T}{mM_y \left(\frac{\pi}{L}\right)} - \vartheta_{0m} T \left(\frac{\pi}{L}\right). \quad (4.4)$$

Mit dieser Formel ist das größte Torsionsmoment des Trägers am Auflager zu berechnen. Folgende Ergänzungen sind noch wichtig:

- bei asymmetrischen Momentenverläufen ist die rechte Seite der Gl. (4.4) durch den Einflußfaktor k_M zu dividieren, wie eine entsprechende, etwas längere Herleitung zeigt,
- bei mehrteiligen Trägern ist zur Berechnung der Torsionsmomente der Einzelquerschnitte in Gl. (4.4) an die Stelle der Gesamttorsionssteifigkeit T die jeweilige Teiltorsionssteifigkeit T_i zu setzen. So erhält man näherungsweise das Teiltorsionsmoment M_{T_i} . Die Begründung hierfür ist in Kap. 2.4.2 zu finden, wo festgestellt wurde, daß die Einzelverdrehungen ϑ_i in etwa gleich der Gesamtverdrehung ϑ_g des Querschnitts sind, die Torsionsmomente also proportional zu den Steifigkeiten verteilt werden können. Die Korrektorempfehlungen nach Tab. 2.1 sollten bei dreiteiligen Querschnitten und Stützweiten unter 600 cm beachtet werden.

Die Schubspannung infolge Torsion berechnet sich dann nach der Gleichung

$$\tau_T = \frac{M_T}{W_T}, \quad (4.5)$$

wobei Formeln für das Torsionswiderstandsmoment W_T z.B. [38, Seite 4.32] oder Kap. 1.3 zu entnehmen sind. Die Torsionsschubspannungen müssen mit den Querkraftschubspannungen nach den Regeln aus [1] überlagert werden. Das berechnete Torsionsmoment muß von dem Gabellager aufgenommen werden können.

4.2 Querbiegebeanspruchung

In ähnlicher Weise werden die Querbiegemomente für die Träger ermittelt. Die Momenten-Krümmungsbeziehung liefert die Bestimmungsgleichung für M_z :³

$$M_z(x) = -B_z v''(x) \rightsquigarrow \max M_z = v_m \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_z. \quad (4.6)$$

Die maximale Schwerpunktverschiebung des Trägers folgt aus Gl. (3.26) zu

$$v_m = \vartheta_m z_v + \frac{m\gamma_1 M_y}{B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} (\vartheta_m + \vartheta_{0m}) + \frac{\gamma_1 q_w}{B_v \left(\frac{\pi}{L}\right)^4}. \quad (4.7)$$

³Es werden im folgenden wiederum nur die betragsgrößten Schnittgrößen und Spannungen betrachtet. Für den Querbiegemomentenverlauf ist festzuhalten, daß das größte Moment infolge der Sinus-Funktion ($v''(x)$) in Feldmitte auftritt.

In diese wird wie oben die allgemeine Beziehung (4.2)

$$B_v = \frac{\gamma_1 q_v \frac{\beta}{L}}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^4}$$

eingesetzt. Nach einigen Umformungen erhält man dann die einfache Formel

$$v_m = \frac{L}{\beta} + z_v \vartheta_m = v_{v_m} + z_v \vartheta_m. \quad (4.8)$$

ϑ_m ist hierbei nach Gl. (4.3) zu berechnen. In Kenntnis beider Verformungswerte kann dann mit Gl. (4.6) das größte Querbiegemoment bestimmt werden.

Auch hierfür sind zwei Anmerkungen notwendig:

- bei asymmetrischen Momentenverläufen wird durch die Berücksichtigung des Faktors k_M bei ϑ_m (s. o.) auch der Verschiebungsfunktion Genüge getan,
- bei mehrteiligen Trägern muß die infolge des Höhenversatzes veränderte Schwerpunktverschiebung jedes Einzelquerschnitts bestimmt werden:

$$v_i = v_m - \vartheta_m z_{M_i} = \frac{L}{\beta} + \vartheta_m (z_v - z_{M_i}). \quad (4.9)$$

Dann beträgt das Querbiegemoment für den Einzelquerschnitt i entsprechend der Gl. (4.6)

$$\max M_{z_i} = v_i \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_{z_i}, \quad (4.10)$$

wobei wiederum auch die Einzelquerbiegesteifigkeit B_{z_i} zu berücksichtigen ist.

M_z ruft im Träger eine Biegespannung hervor, die nach der bekannten Gleichung

$$\sigma_{B_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad (4.11)$$

bestimmt wird und mit der Hauptbiegespannung σ_{B_y} zu superponieren ist.⁴

4.3 Torsionsstreckenlast

In Kap. 2.4.4 wird zur Berechnung des Schubflusses und der Stabdübelbeanspruchung eine Formel hergeleitet, die von der Torsionsstreckenlast q_{y_0} abhängt. Diese Last kann jetzt in Weiterführung der obigen Herleitungen bestimmt werden zu

$$q_{y_0} = \frac{m_T}{s_g} \quad (4.12)$$

mit $m_T(x) = M'_T(x)$, also mit dem maximalen Ordinatenwert (s. Gl. (4.4))

$$m_T = \frac{1}{k_M} \left(\frac{q_s T}{m M_y} - \vartheta_{0m} T \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right). \quad (4.13)$$

⁴Es ist zu beachten, daß zumeist beide Spannungen in Feldmitte maximal werden.

Kapitel 5

Verhalten zwischen den Festhaltepunkten

In Kapitel 3 wurde die Aussteifung des gesamten Trägersystems untersucht und durch die Herleitung der Seitenlastformeln der Berechnung zugänglich gemacht. Dabei wurde der Aussteifungsverband als kontinuierliche seitliche Stützung (elastische Bettung) betrachtet. Tatsächlich greift der Verband aber nur an $k+1$ diskreten Punkten im Abstand s am Träger an, so daß der Träger weiterhin in den dazwischenliegenden k Feldern jeweils auf der Länge

$$s = \frac{L}{k} \quad (5.1)$$

frei kippen kann. Unter „Kippen“ wird dabei das seitliche Ausweichen des Trägers (bzw. des betrachteten Teilfelds) bei gleichzeitiger Verdrehung infolge einer Momentenbeanspruchung um die Hauptachse verstanden.¹ Betroffen hiervon sind besonders schlanke Querschnitte (großes h/b -Verhältnis) und Träger mit einem großen Abstand der Festhaltepunkte. Da die Torsionssteifigkeit eine Hauptwiderstandsgröße für das Kippen ist,² sollten auch „drillweiche“ Träger wie die vorliegenden Träger aus nachgiebig zusammengesetzten Querschnitten überprüft werden.

Nach DIN 1052 Teil 1 [1] wird das Kippen zwischen den Festhaltepunkten durch einen Stabilitätsnachweis mechanisch erfaßt:

$$\frac{\sigma_B}{1,1k_B \text{zul}\sigma_B} \leq 1. \quad (5.2)$$

Der Kippbeiwert k_B bestimmt in dieser Relation die Kippgefährdung.³ Er wurde durch einen Ansatz nach Theorie II. Ordnung von *Brüninghoff* hergeleitet [39]. Allerdings ist diese Herleitung für monolithische Querschnitte durchgeführt und ausgewertet worden, so daß in die Ergebnisgleichungen die bei nachgiebigen Trägern kleinere und somit ungünstigere effektive Torsionssteifigkeit eT nicht direkt eingearbeitet werden kann. Weitere Betrachtungen des Kippversagens zwischen den

¹Nach Ansicht der Verfasser sind durch die folgenden Beschreibungen und zugehörigen Berechnungswege auch Träger erfaßt, die nicht nur durch Biegemomente beansprucht werden, sondern auch durch geringe Normalkräfte, wie sie z.B. aus Verbandslasten entstehen.

²Die Torsionssteifigkeit aktiviert die stabilisierende Wirkung der Biegezugzone auf die ausweichende Biegedruckzone.

³Je größer die Kippgefahr ist, desto kleiner wird k_B und damit der Nenner der Relation, der als zulässige Kippspannung aufgefaßt werden kann.

Abstützungen sind u.a. von *Lindner* [35] und *Reyer* [40, 41, 42] vorgenommen worden. *Reyer* berücksichtigt in den beiden erstgenannten Veröffentlichungen besonders die stabilisierende Wirkung der Nachbarfelder auf das untersuchte Feld. Auch von den Verfassern dieses Berichts wurde ein Vorschlag zur Berechnung von k_B unterbreitet, der durch eine andere Festlegung von Hilfswerten eine lastabhängige Betrachtung des Kippproblems und nach der Ermittlung von k_B auch eine genaue Aussage über die prozentuale Auslastung des Trägers aus Haupt- und Querbiegung gestattet [43]. Eine direkte Berücksichtigung der geringeren Torsionssteifigkeit ist in den Berechnungsformeln aller genannten Arbeiten aber auch nicht möglich.

Im folgenden werden zwei Berechnungsvorschläge für die Kippuntersuchung der Träger erläutert.⁴

5.1 Abschätzung mit Hilfe der vorliegenden Formeln

Die Verfasser erachten es auch für nachgiebig zusammengesetzte Biegeträger für praktikabel, den Kippnachweis für das am stärksten belastete Feld des Trägers mit den Nachweisgleichungen der oben zitierten Arbeiten zu führen, wenn die geringere Torsionssteifigkeit indirekt berücksichtigt wird. Hierzu sollte ein fiktiver monolithischer Träger betrachtet werden, der die gleiche Höhe wie der reale Träger, aber eine kleinere fiktive Breite aufweist. Die fiktive Breite soll über die Gleichheit der Torsionssteifigkeiten bestimmt werden:

$$b^* = \sqrt[3]{\frac{3e\Gamma}{\eta h}}. \quad (5.3)$$

Für diesen Träger mit dem Querschnitt (h/b^*) kann dann der Nachweis geführt werden, wobei das Vorgehen auf der sicheren Seite liegt.

5.2 Abschätzung nach Theorie II. Ordnung

Das hier vorliegende Kippproblem soll durch das Aufbringen von Vorverformungen als Spannungsproblem nach Theorie II. Ordnung behandelt werden. Aus dem Gesamtträger wird das am stärksten belastete Teilfeld herausgeschnitten (zumeist das mittlere Feld). Dieses Teilfeld kann bezüglich des Kippens in guter Näherung als ein gabelgelagerter Einfeldträger betrachtet werden (vgl. [42, 44], s. Abb. 5.1 und 5.2). Die Belastung des Teilfelds besteht eigentlich aus Randmomenten und einer Streckenlast mit beliebiger Lastangriffshöhe. Mechanisch auf der sicheren Seite kann diese Kraftgruppe durch gegengleiche Randmomente ersetzt werden, wobei die Größe dieser Randmomente dem tatsächlichen Größtmoment dieses Teilfelds entspricht (s. [42, 44]). Es gelten die gleichen mechanischen Voraussetzungen wie in Kap. 3.

Dem betrachteten Teilträger ist nach [1, Punkt 9.6.3] eine seitliche Vorverformung in Form einer Sinus-Halbwellen einzuprägen:

$$v_0(x) = v_{0m} \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right); \quad 0 \leq x \leq s. \quad (5.4)$$

⁴Der bisher oftmals angewendete Weg der Knickuntersuchung des Druckgurts stellt nach Ansicht der Verfasser nur eine sehr grobe Näherung dar und wird nicht weiter verfolgt.

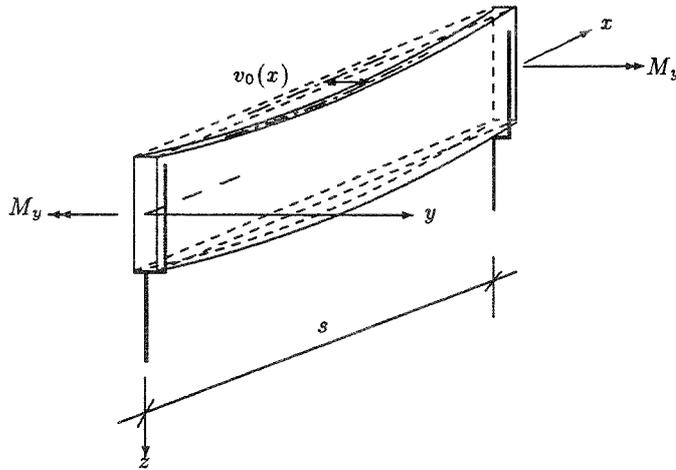


Abbildung 5.1: Vorverformter Teilträger unter M_y

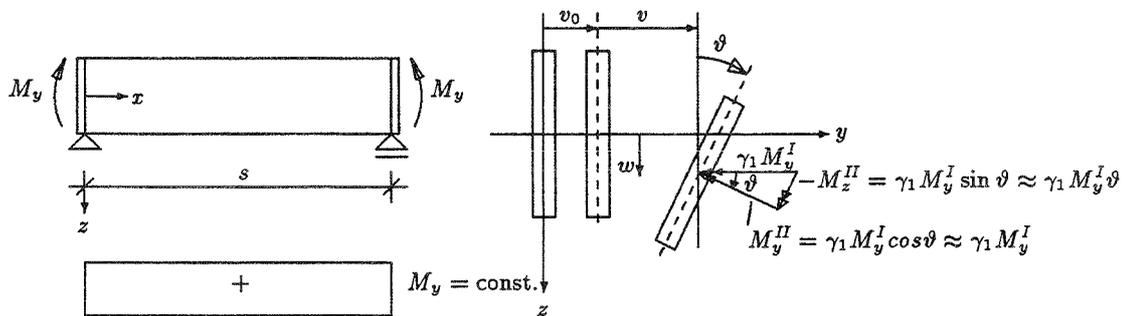


Abbildung 5.2: System, Verformungen und Schnittgrößen des Teilträgers

Die Vorverformungsordinate kann wieder über das Stichmaß ϵ definiert werden:

$$v_{0m} = \frac{s}{\epsilon}, \tag{5.5}$$

wobei für ϵ hier nach [1] für LH der Wert 289 zu setzen ist. Eine Vorverdrehung hätte hier nur einen geringen Einfluß, so daß sie nicht betrachtet wird (vgl. [39]).

Der in Abb. 5.2 dargestellte, planmäßig auf Biegung um die y -Achse beanspruchte Träger wird tatsächlich auf Doppelbiegung beansprucht, da durch die seitliche Vorverformung eine zusätzliche, nicht planmäßige Biegung um die z -Achse hervorgerufen wird. Nach [1, Punkt 8.6.2] ist dann folgender Spannungsnachweis nach Theorie II. Ordnung zu führen:

$$\frac{\sigma_{B_y}^{II}}{1,1\gamma_1\text{zul}\sigma_B} + \frac{\sigma_{B_z}^{II}}{1,1\gamma_1\text{zul}\sigma_B} \leq 1. \tag{5.6}$$

Die zulässigen Spannungen sind in Gl. (5.6) wegen der nichtplanmäßigen Doppelbiegung um 10% erhöht worden (Faktor 1,1); der Lasterhöhungsbeiwert γ_1 beträgt 2,0.

Für gabelgelagerte Träger unter konstanter Momentenbeanspruchung um die y -

Achse gelten nach Abb. 5.2 folgende Beziehungen:⁵

$$\sigma_{B_y}^{II} = \frac{M_y^{II}}{W_y}; \quad \text{mit } M_y^{II} = \gamma_1 M_y^I \quad (5.7)$$

und

$$\sigma_{B_z}^{II} = \frac{M_z^{II}}{W_z}; \quad \text{mit } M_z^{II} = \vartheta_m M_y^{II} = \vartheta_m \gamma_1 M_y^I. \quad (5.8)$$

Hierbei ist ϑ der infolge der Vorverformung nach Theorie II. Ordnung entstehende Torsionswinkel des Stabes, wobei mit dem größten Torsionswinkel ϑ_m in Feldmitte gerechnet werden soll. In Anlehnung an [45, S. 284 ff] läßt sich durch Lösen des entsprechenden Differentialgleichungssystems dieser Winkel berechnen zu:

$$\vartheta_m = \frac{\gamma_1 \frac{M_y^{II}}{I} v_{0m}}{1 - \left(\frac{\gamma_1 M_y^I}{M_{y_{krit}}} \right)^2}. \quad (5.9)$$

Im gleichen Rechengang ergibt sich das hierfür benötigte kritische Moment (ideales Kippmoment) $M_{y_{krit}}$ zu:

$$M_{y_{krit}} = \frac{\frac{\pi}{s} \sqrt{B_z e f T}}{\sqrt{\left(1 - \frac{B_z}{e f B_y}\right) \left(1 - \frac{e f T}{e f B_y}\right)}} \approx \frac{\pi}{s} \sqrt{\frac{B_z e f T}{\left(1 - \frac{B_z}{e f B_y}\right)}}. \quad (5.10)$$

Damit sind alle für den Spannungsnachweis nach Gl. (5.6) benötigten Variablen formelmäßig bestimmt.

Außerdem sind der rechnerische Versagensfall und unverträglich große Verformungen durch die Bedingung

$$\gamma_1 M_y^I < M_{y_{krit}}, \quad (5.11)$$

ausgeschlossen worden. Diese Bedingung folgt aus der Forderung, daß in Gl. (5.9) der Nenner nicht gleich oder kleiner Null werden darf.

Bei Brückenträgern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen ist i.d.R. zu erwarten, daß sich keine „kipp-kritischen“ Zustände einstellen, weil

- die Träger relativ kompakt sind,
- die Träger in recht engen Abständen durch die Aussteifungsverbände gestützt werden (relativ kleiner Trägerabstand!) und
- die *aufnehmbaren* Biegemomente wegen der Nachgiebigkeit der Träger zumeist deutlich unter den *kritischen* Momenten liegen.

Trotzdem sollte zumindest eine Gegenüberstellung nach Gl. 5.11 vorgenommen werden.

⁵Bei Trägern aus nachgiebig zusammengesetzten Querschnitten sind die Biegespannungen infolge M_y^{II} unter Berücksichtigung der Verbundfaktoren γ zu ermitteln.

Kapitel 6

Berechnung der Verbandssteifigkeit

In den Berechnungen des Kapitels 3 wurde die Steifigkeit B_v des Aussteifungsverbands implizit durch die Vorgabe einer maximalen Verformung des Verbands mit

$$\max v_v = \frac{L}{\beta} \quad (6.1)$$

vorgegeben. β stellt hierbei ein von der Ausbildung des Verbands abhängiges, dimensionsloses Stichmaß von ca. 600 bis 2000 dar. Der vereinfachten Seitenlastgleichung in Kapitel 7 wird ein β von 1000 zugrundegelegt. Die meisten Verbände mit Stahl-diagonalen weisen aber geringere Durchbiegungen von $L/1800$ bis $L/2000$ auf, wie in der Literatur häufig nachgewiesen wurde (s. z.B. [9]). In diesen Fällen ergäben sich dann kleinere Seitenlasten infolge der geringeren Schrägstellung der Träger.

In Einzelfällen, wenn Zweifel an einer ausreichenden Steifigkeit des Verbands bestehen oder wenn kleinere Seitenlasten in Ansatz gebracht werden sollen, ist eine explizite Berechnung von B_v erwünscht. Hierzu werden in der Literatur eine Vielzahl von Berechnungsvorschlägen unterbreitet (z.B. von *Möhler* [8, 9, 46], *Scheer* [47], *Petersen* [14], *Speich et.al.* [48], *Gerold* [49] und *Fontana* [50]).

Die Biegesteifigkeit B_v des Aussteifungsverbands wird im Holzbau wesentlich durch die Schubweichheit der Konstruktion und durch die Nachgiebigkeit der Anschlüsse bestimmt. Diese Einflüsse wurden am Fachgebiet Baukonstruktionen, Holz- und Mauerwerksbau der TU Berlin von *Tebarth* [51] im Rahmen einer Diplomarbeit untersucht und in anwendergerechten Formeln zusammengefaßt. Im folgenden werden diese Ergebnisse wiedergegeben.

Die Verformungen eines Aussteifungsverbands setzen sich aus

- den Biegeverformungen der Gurte,
- den Schubverformungen der Füllstäbe,
- den Verformungsanteilen der Anschlußkonstruktionen der Stäbe und
- den Verformungsanteilen infolge exzentrischer Anschlüsse zwischen Gurt- und Füllstäben (Nebenspannungen)

zusammen.¹ Besonders zu beachten sind dabei die Verformungsanteile der Diagonalstäbe und der Anschlüsse, welche die größten Durchbiegungsanteile liefern.² Diese Einflüsse sollen in die Formel für eine wirksame Biegesteifigkeit B_v des Verbands integriert werden, so daß die Verformung des Verbands wieder über eine reine Biegeberechnung, z.B. für einen Einfeldträger unter Gleichlast nach der Gleichung

$$f = \frac{5qL^4}{384B_v}$$

bestimmt werden kann.

Konstruktiv sollte die Feldanzahl k des Verbands nach der Regel

$$\text{opt } k = 1, 2 \dots 1, 3 \frac{L}{h}, \quad (6.2)$$

bestimmt werden. Dadurch wird ein wirkungstechnisch optimaler Diagonalenneigungswinkel von ca. 50° erreicht. Die Bezeichnungen sind Abb. 6.1 zu entnehmen.

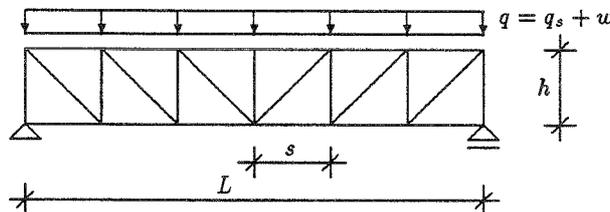


Abbildung 6.1: Fachwerkaussteifungsverband mit Zugdiagonalen aus Stahl

Die wirksame Verbandssteifigkeit ist dann über die Gleichung

$$B_v = EI_G \frac{1}{1 + \frac{\chi EI_G}{L^2 S_{id}}} \quad (6.3)$$

zu berechnen, wobei I_G für den *Steiner*-Anteil des Trägheitsmoments der Gurtstäbe

$$I_G = h^2 \frac{AG}{2} \quad (6.4)$$

und der Beiwert χ für einen Gewichtungswert für das Verhältnis Schub-/Biegeverformung stehen. Bei einem Einfeldträger unter Gleichlast beträgt $\chi = 9,6$. AG bezeichnet die Holzquerschnittsfläche der Gurtstäbe bzw. die hierfür anrechenbare Fläche der Hauptträger.

In dem Wert S_{id} der ideellen Schubweichheit werden die Verformungsanteile der Füllstäbe (Vertikale und Diagonale) und der Anschlüsse berücksichtigt:³

$$\frac{1}{S_{id}} = \frac{1}{S_{id_v}} + \frac{1}{S_{id_D}} + \frac{1}{S_{id_{c_v}}} + \frac{1}{S_{id_{c_\Delta}}}. \quad (6.5)$$

¹Die Durchbiegungsverringerung infolge durchlaufender Ober- und Untergurte ist gering (ca. 1...2%, s. auch [36]) und wurde daher vernachlässigt.

²Der prozentuale Anteil, den die Diagonalstäbe zur Gesamtverformung beitragen, liegt i.d.R. zwischen 40 und 50%. Ausgehend von dieser Erkenntnis können die Durchbiegungen von Verbänden durch die Vergrößerung des Diagonalenquerschnitts auf einfache Weise reduziert werden, zumal die Diagonalen einzig diesem Lastfall gehorchen müssen, also keinen Interaktionen unterliegen. Der Anteil der Verformungen infolge der Nachgiebigkeit der Anschlüsse beträgt ca. 25% der Gesamtverformung.

³Vorausgesetzt werden hier Diagonalstäbe aus Stahl und vertikal angeordnete Pfosten. Vertikale und Diagonale sind indirekt über Knotenbleche oder Laschen an die Gurte anzuschließen.

Die einzelnen Schubweichheitsanteile können über folgende Formeln berechnet werden:

- für die Vertikalstäbe:

$$\frac{1}{S_{id_V}} = \left(1 + 4\frac{s}{L} + 4\frac{s^2}{L^2}\right) \frac{h}{sE_V A_V}, \quad (6.6)$$

- für die Diagonalstäbe:⁴

$$\frac{1}{S_{id_D}} = \frac{d^3}{sh^2 E_D A_D}, \quad (6.7)$$

- für den Anschluß der Vertikalstäbe:

$$\frac{1}{S_{id_{C_V}}} = \left(1 + 4\frac{s}{L} + 4\frac{s^2}{L^2}\right) \frac{2}{sC_V}, \quad (6.8)$$

- und für den Anschluß der Gurtdifferenzkraft:⁵

$$\frac{1}{S_{id_{C_\Delta}}} = \frac{2s - 4\frac{s^3}{L^2}}{h^2 C_\Delta}. \quad (6.9)$$

Die Federsteifigkeiten C_V und C_Δ für die Anschlüsse können aus den n -fachen Einzelfedersteifigkeiten der Verbindungsmittel nach [27] gewonnen werden.⁶ Die weiteren Parameter erklären sich selbst.

Wie oben erwähnt, beträgt der Anteil der auf die Diagonalstäbe zurückzuführenden Verformung 40 bis 50% der Gesamtverformung. Unter Ausnutzung dieser Tatsache kann eine Näherungsformel für B_v gefunden werden, die sich aus der Extrapolation dieses Verformungsanteils ergibt:

$$B_v \approx \frac{L^2 sh^2 E_D A_D}{24d^3}. \quad (6.10)$$

⁴Mit d ist hier der Durchmesser der Stahldiagonalen bezeichnet.

⁵Die Anteile für den Anschluß der Diagonalen sind wegen der Ausführung in Stahl vernachlässigbar gering.

⁶ n bezeichnet hier die Anzahl der Verbindungsmittel im betrachteten Anschluß.

Kapitel 7

Formeln für die Anwendung

In diesem Kapitel werden die hergeleiteten Formeln zusammengestellt und für die Anwendung in der Praxis durch Einsetzen von Zahlenwerten für Parameter, die sich in der Regel nicht verändern, aufbereitet. Die verwendeten Bezeichnungen sind den Tabellen des Kap. 1.3 auf den Seiten 4 f zu entnehmen.

7.1 Torsionssteifigkeit

In Kap. 2.4 sind anwenderorientierte Formeln für die Berechnung der Torsionssteifigkeit von Trägern, die aus mehreren, übereinanderliegenden und mit Stabdübeln verbundenen Rechteckquerschnitten bestehen, hergeleitet worden. Die Abstände der Stabdübel erwiesen sich dort als Hauptparameter für die Quantität der elastischen Kopplung. In den numerischen Vergleichsrechnungen wurde hierzu festgestellt, daß die Torsionssteifigkeit des Gesamtquerschnitts der Summe der Einzeltorsionssteifigkeiten entsprach, sofern die Abstände, die sich aus der Hauptachsenberechnung ergaben, nicht überschritten wurden.¹

$$eIT = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n G_T I_{T_i}. \quad (7.1)$$

Ansonsten ist der Verbundfaktor γ_T aus Kap. 2.4 zu berücksichtigen.

Die zur Berechnung des Torsionsträgheitsmoments

$$I_{T_i} = \frac{b^3 h}{3} \eta$$

erforderlichen Beiwerte η können der Tabelle 7.1 entnommen werden.

Sollen die Wölbanteile (Anteile infolge drehender Biegung) des Querschnittsbündels in Rechnung gestellt werden,² steht dazu die Gleichung

$$T_w = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n B_{zi} z_{M_i}^2 \quad (7.2)$$

zur Verfügung.

¹Als Richtwert galt: $e_{St} \leq 5 \dots 7 d_{St}$.

²Sie werden auch zur Berechnung der Schubkräfte in den Stabdübeln benötigt (s.u.).

h/b	η
1	0,42
1,5	0,59
2	0,69
3	0,79
4	0,84
5	0,87
6	0,89

Tabelle 7.1: Beiwerte η

7.2 Seitenlast

In Kap. 3 sind die Gleichungen zur Berechnung der Seitenlast für Träger, die durch Biegemomente und Normalkräfte belastet sind, hergeleitet worden. Infolge der trigonometrischen Ansätze für die Verformungsfunktionen wurden sinusförmige Seitenlastfunktionen ermittelt. In der Praxis sind aber im Interesse einer einfacheren Berechnung konstante Seitenlastverläufe erwünscht. Werden die Sinuslasten unter der Bedingung gleicher mechanischer Wirkung in Gleichlasten umgerechnet, ergeben sich folgende Abminderungsfaktoren:

- für gleiche Querkräfte des Verbands:

$$q_{\text{Gleichlast}} = 0,64q_{\text{Sinuslast}},$$

- für gleiche Biegemomente des Verbands:

$$q_{\text{Gleichlast}} = 0,81q_{\text{Sinuslast}},$$

- für gleiche Durchbiegungen des Verbands:

$$q_{\text{Gleichlast}} = 0,79q_{\text{Sinuslast}}.$$

Maßgebend wäre hier die ungünstigste Umrechnung mit dem größten Abminderungsfaktor 0,81 für gleiche Biegemomente, also

$$q_{\text{Gleichlast}} = 0,81q_{\text{Sinuslast}}.$$

In [15] werden höhere Ansatzfunktionen (bis zum 64. Grad) für die Berechnung der Seitenlasten herangezogen. Dabei zeigt es sich, daß in den Verbänden größere Querkräfte und Biegemomente als bei Ansätzen 2. Grades entstehen. Die erforderlichen Erhöhungsfaktoren für die beiden betrachteten Schnittgrößen entsprechen aber recht genau den oben bestimmten Abminderungsfaktoren.³ Deshalb wird von den Verfassern vorgeschlagen, die maximalen Ordinaten der Sinusfunktionen unverändert als maximale Ordinaten der konstanten Seitenlastfunktionen zu übernehmen.

Die allgemeine Seitenlastgleichung lautet:

$$q_s = q_s^M + q_s^N \quad \text{mit} \quad (7.3)$$

³Die Erhöhungsfaktoren sind nicht konstant, sondern stark systemabhängig. Betrachtet werden hier ungünstige Konstellationen.

$$q_s^M = q_{s0}^M k_s^M k_w^M k_{t0}^M k_M \quad (7.4)$$

$$q_s^N = q_{s0}^N k_s^N k_w^N k_{t0}^N \quad (7.5)$$

In den anschließenden Unterkapiteln werden die Einzelterme für die Grundseitenlasten und die Einflußfaktoren in Abhängigkeit von der Beanspruchungsart angegeben. Für die Parameter ϵ , β und γ_1 wurden dabei in Anlehnung an [9], [12] und [17] folgende Zahlenwerte eingesetzt:⁴

- Stichmaß der Vorverformung $\epsilon = 500$,
- Stichmaß der maximalen elastischen Verbandsdurchbiegung $\beta = 1000$,
- Lasterhöhungsbeiwert $\gamma_1 = 2,0$.

Gleichzeitig werden, wie in Kap. 3.1.2 erläutert, die Windlasten mit dem Faktor $4/\pi$ multipliziert, um die sinusförmig angesetzte Windlast wieder in eine Gleichlast umzuformen.

7.2.1 Seitenlast für reine Momentenbeanspruchung

Für die ausschließliche Wirkung von Biegemomenten werden die Ergebnisgleichungen der Kap. 3.2.1 und 3.3 herangezogen:

$$q_{s0}^M = \frac{mM_y^2}{17TL} = \frac{mM_y}{17aL} \quad (7.6)$$

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{4z_v M_y - 0,2z_q L^2}{T}} \quad (7.7)$$

$$k_w^M = 1 + \frac{45M_w}{mM_y} \quad (7.8)$$

$$k_{t0}^M = 1 + \left| \frac{170(T - 2z_v M_y)}{k_w^M M_y L} \right| \vartheta_0 = 1 + \frac{170 |a - 2z_v|}{k_w^M L} \vartheta_0 \quad (7.9)$$

$$k_M = 1 + (1 - \kappa)^{2/3} \Delta \quad (7.10)$$

mit den Eingangswerten

$$M_y = \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2} = M_L \frac{1 + \kappa}{2} + \frac{qL^2}{9,2} \quad (7.11)$$

$$\kappa = \frac{M_R}{M_L}; \quad 0 \leq \kappa \leq 1 \quad (7.12)$$

$$a = \frac{T}{M_y} \quad (7.13)$$

$$M_w = q_w L(z_v - z_w) \quad (7.14)$$

Der Faktor Δ ist den Diagrammen des Kap. 3.3 zu entnehmen.

⁴Für den Lasterhöhungsbeiwert γ_1 im Holzbau finden sich in der Literatur Ansätze zwischen 1,7 und 2,5. Die Verfasser erachten den Wert 2,0, der auch in [1, Abschnitt 8.6 und 9.6] vorgegeben wird, für völlig ausreichend.

7.2.2 Seitenlast für reine Normalkraftbeanspruchung

Bei ausschließlicher Wirkung von Normalkräften gelten die Formeln des Kap. 3.4.3, die durch Einsetzen der o.g. Parameter weiter vereinfacht werden:

$$q_{s0}^N = \frac{m\alpha N_0}{34L} \quad (7.15)$$

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{2,2\alpha N_0 (z_v - z_N)^2}{T}} \quad (7.16)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{75M_w (z_v - z_N)}{mT} \quad (7.17)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \frac{370}{k_w^N} \frac{|0,1z_v - z_N|}{L} \vartheta_0 \quad (7.18)$$

Werte für α sind der Tab. 3.1 auf Seite 61 zu entnehmen.

7.2.3 Seitenlast für kombinierte Beanspruchung

Bei einer Beanspruchung des Trägers durch Momente und Normalkräfte beeinflussen sich die Einwirkungen gegenseitig. Deshalb sind in den Formeln interaktive Terme vorhanden, die aber in Kap. 3.5 numerisch abgeschätzt wurden. Mit den Zahlenwerten der o.g. Parameter ergeben sich dann folgende Anwendungsformeln (vgl. auch Kap. 3.5.3):

$$q_{s0}^M = \frac{mM_y}{16aL} \quad (7.19)$$

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{4z_v M_y - 0,2z_q q L^2}{0,95T}} \quad (7.20)$$

$$k_w^M = 1 + \frac{45M_w}{mefM_y} \quad (7.21)$$

$$k_{t0}^M = 1 + \frac{170}{k_w^M} \frac{|a - 2z_v|}{L} \vartheta_0 \quad (7.22)$$

$$k_M = 1 + (1 - \kappa)^{2/3} \Delta \quad (7.23)$$

$$q_{s0}^N = \frac{m\alpha N_0}{34L} \quad (7.24)$$

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{2\alpha N_0 (z_v - z_N)^2 + 4z_v M_y}{f_T T}} \quad (7.25)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{70}{mf_T} \frac{M_w}{efM_y} \frac{z_v - z_N}{a} \quad (7.26)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \frac{330}{k_w^N f_T} \frac{|z_v(1 - f_T) - z_N|}{L} \vartheta_0 \quad (7.27)$$

mit den zusätzlichen Eingangswerten

$$efM_y = M_y - 2\varphi z_N N_0 \quad \text{und} \quad (7.28)$$

$$f_T = 1 - \frac{1}{150} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \geq 0 \quad (7.29)$$

und der geänderten Notation

$$a = \frac{T}{efM_y}. \quad (7.30)$$

7.2.4 Vereinfachte, allgemeingültige Seitenlastformeln

Einige Gleichungen des vorigen Abschnitts können noch auf der sicheren Seite zahlenmäßig vereinfacht und so gestaltet werden, daß sie für alle Anwendungsfälle, also auch bei Beanspruchung der Träger durch nur eine Schnittgröße, anwendbar sind. Die Ergebnisformeln, die auch von den Verfassern zur allgemeinen Anwendung empfohlen werden, lauten dann:⁵

$$q_s^M = q_{s0}^M k_s^M k_w^M k_{t0}^M k_M \quad (7.31)$$

$$q_{s0}^M = \frac{mM_y}{15aL} \quad (7.32)$$

$$k_s^M = \frac{1}{1 - \frac{4z_v M_y - 0,2z_q q L^2}{T}} \quad (7.33)$$

$$k_w^M = 1 + \frac{45 M_w}{m efM_y} \quad (7.34)$$

$$k_{t0}^M = 1 + \frac{170 |a - 2z_v| \vartheta_0}{k_w^M L} \quad (7.35)$$

$$k_M = 1 + (1 - \kappa)^{2/3} \Delta \quad (7.36)$$

$$q_s^N = q_{s0}^N k_s^N k_w^N k_{t0}^N \quad (7.37)$$

$$q_{s0}^N = \frac{m\alpha N_0}{30L} \quad (7.38)$$

$$k_s^N = \frac{1}{1 - \frac{2\alpha N_0 (z_v - z_N)^2 + 4z_v M_y}{f_T T}} \quad (7.39)$$

$$k_w^N = 1 + \frac{70 M_w}{m f_T efM_y} \frac{z_v - z_N}{a} \quad (7.40)$$

$$k_{t0}^N = 1 + \frac{350 |z_v(1 - f_T) - z_N| \vartheta_0}{k_w^N f_T L} \quad (7.41)$$

mit

$$M_y = \frac{M_L + M_R}{2} + \frac{qL^2}{9,2} = M_L \frac{1 + \kappa}{2} + \frac{qL^2}{9,2} \quad (7.42)$$

$$\kappa = \frac{M_R}{M_L}; \quad 0 \leq \kappa \leq 1 \quad (7.43)$$

$$efM_y = M_y - 2\varphi z_N N_0 \quad (7.44)$$

$$a = \frac{T}{efM_y} \quad (7.45)$$

$$M_w = q_w L(z_v - z_w) \quad (7.46)$$

$$f_T = 1 - \frac{1}{150} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \geq 0. \quad (7.47)$$

⁵Die Zahlenwerte wurden hier ggf. zur sicheren Seite hin auf signifikante Werte gerundet. Es sei hier auch nochmals vermerkt, daß bei asymmetrischen Momentenverläufen auf der sicheren Seite liegend auf eine Berücksichtigung des Faktors k_M verzichtet werden kann, wenn stattdessen der Berechnung ein *symmetrischer* Ersatzmomentenverlauf mit einem beidseitig wirkenden betragskleineren Stützmoment M_R zugrundegelegt wird.

7.3 Schnittgrößen

7.3.1 Torsion

Die größten Randtorsionsmomente des betrachteten Trägers infolge der Seitenlast q_s können entsprechend der Herleitung in Kap. 4.1 mit der Gleichung

$$M_T = \frac{q_s T}{m M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)} - \vartheta_{0m} T \left(\frac{\pi}{L}\right) \quad (7.48)$$

berechnet werden.⁶ Bei mehrteiligen Trägern ergibt sich als Näherung für die Einzelquerschnitte

$$M_{T_i} \approx \frac{q_s T_i}{m M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)} - \vartheta_{0m} T_i \left(\frac{\pi}{L}\right), \quad (7.49)$$

wobei gegebenenfalls die Korrektorempfehlungen des o.g. Kapitels zu beachten sind.⁷ Die Torsionsschubspannungen folgen dann aus der bekannten Formel

$$\tau_T = \frac{M_T}{W_T}. \quad (7.50)$$

7.3.2 Querbiegung

Die größten Querbiegemomente im mittleren Feldbereich des Trägers sind nach Kap. 4.2 aus der Gleichung

$$M_z = v_m \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_z. \quad (7.51)$$

mit

$$v_m = \frac{L}{\beta} + z_v \vartheta_m \quad (7.52)$$

und

$$\vartheta_m = \frac{q_s}{m M_y \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} - \vartheta_{0m} \quad (7.53)$$

zu berechnen.⁸ Bei mehrteiligen Trägern sind für jeden Teilträger anstelle der Schwerpunktsverschiebung v_m die Teilschwerpunktsverschiebungen v_i zu setzen:

$$v_i = \frac{L}{\beta} + \vartheta_m (z_v - z_{M_i}). \quad (7.54)$$

Dann ergibt sich für die Querbiegemomente der Teilquerschnitte:

$$\max M_{z_i} = v_i \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_{z_i}. \quad (7.55)$$

Schließlich lassen sich die Biegespannungen infolge M_z aus der Formel

$$\sigma_{B_z} = \frac{M_z}{W_z} \quad (7.56)$$

bestimmen.

⁶ Bei gewöhnlichen Parallelträgern kann ohne Berücksichtigung von Vorverdrehungen und Windlasten das größte Torsionssmoment näherungsweise mit der Gleichung $M_T \approx \frac{M_y}{50} k_s$ bestimmt werden.

⁷ Bei asymmetrischen Momentenverläufen sind die rechten Seiten der Gleichungen durch den Faktor k_M zu dividieren.

⁸ Auch hier sind die Korrektorempfehlungen des Kap. 4.2 für asymmetrische Momentenverläufe zu beachten.

7.3.3 Stabdübelschubkräfte

Wie in Kap. 2.4.4 dargelegt, sind die Schubkräfte in den Stabdübeln aus Torsionswirkung sehr gering. Zur Überprüfung oder zum Nachweis sollte gegebenenfalls die dort hergeleitete Formel

$$Q_j = \frac{q_y e}{1 + \frac{T_w}{\sum_{i=1}^n T_i}} \quad (7.57)$$

verwendet werden. Als Last q_y ist nach Kap. 4.3 einzusetzen:

$$q_y = \frac{m_T}{s_g} \quad (7.58)$$

mit

$$m_T = \frac{1}{k_M} \left(\frac{q_s T}{m M_y} - \vartheta_{0m} T \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right). \quad (7.59)$$

7.4 Kippuntersuchung zwischen den Abstützungen

Die Träger sollten auf Kippen zwischen den Festhaltepunkten des Aussteifungsverbands untersucht werden, wenn ihre Querschnittsschlankheit $h/b > 4$ ist oder die Abstützungspunkte nicht nahe beieinander liegen. Drillweiche Träger erreichen, wie in Kap. 5.2 ausgeführt wurde, i.a. keine „kipp-kritischen“ Zustände. Trotzdem sollte eine Abschätzung des Kippverhaltens vorgenommen werden.

Formelmäßig kann das Kippen mit Hilfe der in Kap. 5 verzeichneten Literaturen, besonders auch mit dem k_B -Wert der DIN 1052 Teil 1 nachgewiesen werden. Wegen der Drillweichheit der Brückenträger aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen empfehlen die Verfasser allerdings eine Kippuntersuchung mit einem monolithischen, aber fiktiv verkleinerten Querschnitt (h/b^*), der die geringere Torsionssteifigkeit annähert. Für die reduzierte Breite sollte gesetzt werden:

$$b^* = \sqrt[3]{\frac{3e f T}{\eta h}}. \quad (7.60)$$

Alternativ kann eine Spannungsberechnung nach Theorie II. Ordnung vorgenommen werden, die das Kippen durch Einprägung einer Vorverformung simuliert. Die Berechnungsformeln hierfür sind Kap. 5.2 zu entnehmen. Zumeist genügt hier allerdings schon die Berechnung des kritischen Kippmoments und ein Vergleich mit dem rechnerischen Moment nach Theorie II. Ordnung.

7.5 Verbandssteifigkeit

Soll überprüft werden, ob die Durchbiegung des Aussteifungsverbands unter Seiten- und Windlast höchstens $L/1000$ beträgt, wie es bei der Formulierung der Seitenlastgleichungen vorausgesetzt wurde, muß die wirksame Biegesteifigkeit B_v des Verbands explizit bestimmt werden. Wichtig ist hierbei die Berücksichtigung der Schubverformungen und der Nachgiebigkeit der Anschlüsse. Näherungsweise kann dafür

die Formel

$$B_v \approx \frac{L^2 s h^2 E_D A_D}{24d^3} \quad (7.61)$$

herangezogen werden.⁹ Genauere Gleichungen sind in Kap. 6 angegeben. Konstruktiv sollte die Anzahl der Verbandsfelder nach der Regel

$$\text{opt}k = 1, 2 \dots 1, 3 \frac{L}{h}, \quad (7.62)$$

zur Erzielung eines optimierten Diagonalenneigungswinkels bestimmt werden. Es sei außerdem auf die vielfältige Literatur des Kapitels verwiesen.

⁹ d bezeichnet den Durchmesser der Stahldiagonalen, E_D und A_D die betr. Eigenschaftswerte der Diagonalen.

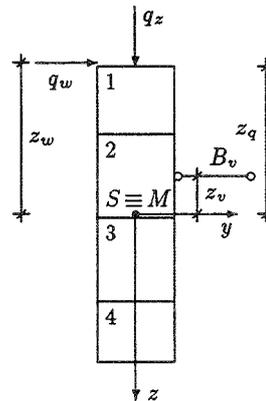
Kapitel 8

Berechnungsbeispiel

In diesem Kapitel wird zur Erläuterung der hergeleiteten Gleichungen ein Brückenträger aus 4 nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen aus LH C unter Verwendung der in Kap. 7 zusammengestellten Formeln berechnet. Hinter einigen Ergebniswerten sind in Klammern die entsprechenden Werte aus der Computerberechnung angegeben.

Gegeben sind:

$L = 1350 \text{ cm}$,
 $m = 2 \text{ Träger}$,
 $d_{St} = 2,4 \text{ cm}$,
 $e_{St} = 15 \text{ cm}$,
 $q_z = 11 \text{ kN/m} = 0,11 \text{ kN/cm}$,
 $M_L = M_R = 0$,
 $q_w = 2 \text{ kN/m} = 0,02 \text{ kN/cm}$,
 $z_v = -10 \text{ cm}$,
 $z_q = -39 \text{ cm}$,
 $z_w = -40 \text{ cm}$,
 $E_{||} = 1700 \text{ kN/cm}^2$ und
 $G_T = 67 \text{ kN/cm}^2$.



Die Größe der Einzelquerschnitte beträgt:¹

i	h	b	A_i	I_{y_i}	z_{s_i}
-	cm	cm	cm ²	cm ⁴	cm
1	18	20	360	9.720	-30
2	22	20	440	17.747	-10
3	22	20	440	17.747	12
4	16	20	320	6.827	31

¹Zusätzlich sind einige Querschnittswerte angegeben, wobei die Lage des Gesamtschwerpunkts in halber Trägerhöhe schon vorausgesetzt ist.

8.1 Hauptachsenberechnung²

Eine Berechnung nach Schelling [24] ergibt nach Aufbau und Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems folgende Nachgiebigkeitsfaktoren γ für die einzelnen Querschnitte (einschließlich der abgeminderten Steineranteile):

i	γ_i	$\gamma_i A_i z_{s_i}^2$ cm^4
1	0,7189	232.924
2	0,6737	29.643
3	0,6768	42.882
4	0,7213	221.814

Hieraus läßt sich dann das effektive Flächenträgheitsmoment efI_y berechnen:

$$\begin{aligned} efI_y &= \sum_{i=1}^n I_{y_i} + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_i z_{s_i}^2 \\ &= 52.041 + 527.263 = 579.304 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

Das größte Biegemoment in Trägermitte beträgt:

$$\max M = \frac{q_z L^2}{8} = 25.060 \text{ kNcm}.$$

Für die Randspannungen in Feldmitte folgt dann:³

$$\begin{aligned} \sigma_{R_1} &= -\frac{\max M}{efI_y} \left(\gamma_1 z_{s_1} + \frac{h_1}{2} \right) \\ &= -\frac{25.060}{579.304} \left(0,7189 \cdot 30 + \frac{18}{2} \right) = -1,32 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < 2,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{R_4} &= -\frac{\max M}{efI_y} \left(\gamma_4 z_{s_4} - \frac{h_4}{2} \right) \\ &= -\frac{25.060}{579.304} \left(-0,7213 \cdot 31 - \frac{16}{2} \right) = 1,31 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} < 2,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Schubflusses im Auflagerbereich wird das effektive statische Moment in der Fuge j benötigt:⁴

$$\begin{aligned} efS_{y_j} &= \sum_{k=1}^{j-1} \gamma_k A_k z_{s_k} \\ \leadsto efS_{y_2} &= 0,7189 \cdot 360 \cdot 30 + 0,6737 \cdot 440 \cdot 10 = 10.729 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Der Schubfluß in der Fuge ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} t_j &= \frac{Q}{efI_y} efS_{y_j} \\ \leadsto t_2 &= \frac{74,2}{579.304} 10.729 = 1,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}, \end{aligned}$$

² In diesem Abschnitt gilt eine andere Richtungsdefinition der z -Achse (positiv nach oben)!

³ Exemplarisch werden die Extremalspannungen angeschrieben.

⁴ Hier wird nur das maßgebende statische Moment in der Fuge 2 zwischen den Teilquerschnitten 2 und 3 berechnet. In der Summenformel sind alle oberhalb der betrachteten Fuge liegenden Querschnitte zu berücksichtigen.

mit der größten Querkraft am Lager:

$$\max Q = \frac{q_z L}{2} = 74,2 \text{ kN}.$$

Die Schubkraft pro Stabdübel beträgt dann:⁵

$$T_2 = t_2 e_{St} = 1,37 \cdot 15 = 20,6 \text{ kN} < 20,7 \text{ kN} = \text{zulN} \quad (\text{maßgebender Nachweis!}).$$

8.2 Berechnung der Torsionssteifigkeit

Zur Bestimmung der effektiven Torsionssteifigkeit und des Wölbanteils sind vielfältige Summen über die Einzelquerschnitte auszuwerten. Die Summenglieder werden in den folgenden Tabellen aufbereitet:⁶

i	h	b	η_i	T_i	B_{zi}	z_{M_i}
–	cm	cm	–	kN cm^2	kN cm^2	cm
1	18	20	0,464	$1,208 \cdot 10^6$	$20,4 \cdot 10^6$	-30
2	22	20	0,460	$1,806 \cdot 10^6$	$24,9 \cdot 10^6$	-10
3	22	20	0,460	$1,806 \cdot 10^6$	$24,9 \cdot 10^6$	12
4	16	20	0,513	$0,939 \cdot 10^6$	$18,1 \cdot 10^6$	31

In den Fugen ergeben sich folgende Federkennwerte (die Fuge j liegt zwischen den Querschnitten i und $i+1$):⁷

j	s_j	c_{y_j}	c_{ϑ_j}
–	cm	kN/cm^2	kN
1	20	10,4	114
2	22	10,4	104
3	19	10,4	120

Die Summe der Einzeltorsionssteifigkeiten ergibt:

$$\sum_{i=1}^n T_i = 5,759 \cdot 10^6 \text{ kN cm}^2.$$

Der Wölbanteil berechnet sich zu:

$$T_w = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n B_{zi} z_{M_i}^2 = 0,227 \cdot 10^6 \text{ kN cm}^2 \quad (0,227 \cdot 10^6).$$

Der Torsionsverbundfaktor wird sowohl für den Fall unendlicher als auch für den Fall endlicher Dehnsteifigkeit berechnet. Für $c_{\vartheta} = \infty$ ergibt sich:

$$k_T = \frac{\pi^2 \sum_{i=1}^n T_i}{L^2 \sum_{i=1}^{n-1} (c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2)} = 0,0024,$$

⁵Die zulässigen Stabdübelkräfte wurden nach DIN 1052 Teil 2 in der üblichen Weise berechnet.

⁶Eingearbeitet sind hier schon die Elastizitätswerte $E_{||}$ und G_T .

⁷Bei der Berechnung der Drehfedersteifigkeiten wurde ein Korrekturfaktor = 3 angesetzt, um eine möglichst weiche Verbindung auf der sicheren Seite zu simulieren.

und somit

$$\gamma_T = \frac{1}{1 + k_T} = 0,998 \quad (0,9976).$$

Für $c_\vartheta \neq \infty$ folgt dann:

$$k_T = \frac{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i + 4 \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} c_{\vartheta_{i,i+1}} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} c_{y_{i,i+1}} s_{i,i+1}^2}{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^n T_i}} = 0,0037.$$

und somit

$$\gamma_T = \frac{1}{1 + k_T} = 0,996 \quad (0,9963).$$

Offenkundig ist, daß zum einen die Unterschiede zwischen den Torsionsverbundfaktoren vernachlässigbar klein sind, wie es ja auch in Kap. 2.4 beschrieben wurde. Zum anderen sind die Torsionsverbundfaktoren ≈ 1 , so daß sich eine Berechnung kaum lohnt.

Die effektive Torsionssteifigkeit wird hier für den Fall unendlicher Drehfedersteifigkeit unter Berücksichtigung des Wölbanteils berechnet.⁸

$$efT = T_w + \gamma_T \sum_{i=1}^n T_i = 0,227 \cdot 10^6 + 0,998 \cdot 5,759 \cdot 10^6 = 5,97 \cdot 10^6 \text{ kNcm}^2 \quad (5,972 \cdot 10^6).$$

Dieser Wert wird für die Seitenlastberechnung herangezogen.

8.3 Seitenlastberechnung

Die Berechnung von q_s erfolgt hier für reine Momentenbeanspruchung. Im Anschluß wird dieses Vorgehen dann bewertet.

Zuerst werden die für die Grundseitenlast und die Einflußfaktoren benötigten Vorwerte zusammengestellt:

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{qL^2}{9,2} = \frac{0,11 \cdot 1350^2}{9,2} = 21.790 \text{ kNcm}, \\ a &= \frac{efT}{M_y} = \frac{5.970.000}{21.790} = 274 \text{ cm}, \\ M_w &= q_w L(z_v - z_w) = 0,02 \cdot 1350 (-10 - (-40)) = 810 \text{ kNcm}. \end{aligned}$$

Die Seitenlasteinzelfaktoren lauten dann:⁹

$$q_{s0}^M = \frac{mM_y}{15aL} = \frac{2 \cdot 21.790}{15 \cdot 274 \cdot 1350} = 0,0079 \text{ kN/cm} = 0,79 \text{ kN/m} \quad (0,70),$$

⁸ Ebenso hätte mit $efT = \sum_{i=1}^n T_i$ weitergerechnet werden können, wie in Kapitel 7 angemerkt.

Hier wurde der Vollständigkeit halber die komplette Formel gewählt.

⁹ Es wurden die vereinfachten Formeln nach Kap. 7.2.4 verwendet, die von den Verfassern zur allgemeinen Benutzung empfohlen werden. Berücksichtigt ist hier auch der erhöhte Seitenlastverlauf nach [15].

$$\begin{aligned}
 k_s^M &= \frac{1}{1 - \frac{4z_v M_y - 0,2z_q q L^2}{e f I}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{4(-10) 21.790 - 0,2(-39) 0,11 \cdot 1350^2}{5.970.000}} = 1,13 \quad (1,13), \\
 k_w^M &= 1 + \frac{45M_w}{mM_y} = 1 + \frac{45 \cdot 810}{2 \cdot 21.790} = 1,84 \quad (1,80).
 \end{aligned}$$

Als resultierende Seitenlast ergibt sich dann:¹⁰

$$q_s^M = q_{s0}^M k_s^M k_w^M = 0,79 \cdot 1,13 \cdot 1,84 = 1,64 \text{ kN/m} \quad (1,44). \quad (8.1)$$

Nach DIN 1052 Teil 1 ergäbe sich nach der dortigen Formel eine Seitenlast von¹¹

$$q_s = \frac{m \max M}{350 L b} = \frac{2 \cdot 250,6}{350 \cdot 13,5 \cdot 0,2} = 0,53 \text{ kN/m}, \quad (8.2)$$

wobei der Einfluß der Windlastexzentrizität nicht berücksichtigt ist und auch nicht berücksichtigt werden kann!¹² Zieht man bei Gl. (8.1) den Windeinfluß ab, verbleibt eine Seitenlast der Größe

$$q_s = 0,79 \cdot 1,13 = 0,89 \text{ kN/m} \quad (0,80), \quad (8.3)$$

die um 68% (51%) größer ist als die Seitenlast nach DIN 1052 (s. Gl. (8.2)). Der Unterschied ist, wie in diesem Bericht hergeleitet, zum einen aus der kleineren Torsionssteifigkeit des zusammengesetzten Trägers und zum anderen aus der „ungünstig“ oberhalb des Verbands angreifenden Gleichlast q_z zu erklären. Unter Berücksichtigung des Windlasteinflusses ist die Seitenlast nach Gl. (8.1) sogar 209% (172%) größer als die DIN-Seitenlast.

Alternativ könnte die Seitenlast nach DIN 1052 so berechnet werden, daß der oberste Teilquerschnitt als normalkraftbeanspruchter Druckgurt eines Fachwerkträgers betrachtet wird. Die Schwerpunktspannung in Querschnitt 1 beträgt:

$$\sigma_{s1} = -\frac{\max M}{e f I_y} (\gamma_1 z_{s1}) = -\frac{25.060}{579.304} (0,7189 \cdot 30) = -0,93 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

Daraus folgt dann die größte Normalkraft in Feldmitte:

$$\max N = \sigma_{s1} A_1 = 0,93 \cdot 18 \cdot 20 = 336 \text{ kN}.$$

Die für die Seitenlastberechnung benötigte mittlere Normalkraft beträgt bei dem hier vorliegenden parabelförmigen Verlauf:

$$N_{\text{Gurt}} = \frac{2}{3} \max N = \frac{2}{3} 336 = 224 \text{ kN}.$$

Die Größe der Seitenlast berechnet sich dann schließlich zu:

$$q_s = \frac{m N_{\text{Gurt}}}{30 L} = \frac{2 \cdot 224}{30 \cdot 13,50} = 1,11 \text{ kN/m}.$$

¹⁰Der Unterschied zu den Programmwerten ist primär auf die erhöhte Grundseitenlast q_{s0}^M zurückzuführen. Für diese wurde in Kap. 7.2.4 der Divisor von 17 auf 15 (signifikanter Wert!) vermindert, was die hier vorliegende Zahlenwertdifferenz begründet ($17/15 = 1,13 = 0,79/0,70$).

¹¹Das hierfür benötigte max. Biegemoment des Trägers beträgt $\max M = \frac{qL^2}{8} = 250,6 \text{ kNm}$.

¹²Es zeigt sich aber hier, wie wesentlich die Möglichkeit zur Berücksichtigung der Windlastexzentrizität ist. Der Ansatz von z_w ist in diesem Beispiel noch konservativ gewählt. Infolge eines Brückenaufbaus kann die resultierende Windlast durchaus auch höher angreifen.

Im Vergleich mit der Seitenlast nach Gl. (8.3) ist die DIN-Seitenlast jetzt zwar 24% größer; ein Windlasteinfluß kann aber auch hier nicht berücksichtigt werden, so daß die vollständige q_s -Last nach Gl. (8.1) immer noch 48% größer ist.¹³

Abschließend zu diesem Thema soll die Frage des Normalkrafteinflusses diskutiert werden. Die Normalkräfte in den Brückenträgern entstehen aus der Wirkung der Träger als Gurte des Aussteifungsverbands. Bei einem Abstand der Hauptträger von $3m$ würde sich eine Untergliederung des Fachwerkaussteifungsträgers in

$$\text{opt}k = 1,3 \frac{L}{h} = 1,3 \frac{13,5}{3} = 5,9 \quad \leadsto \quad 6 \text{ Felder}$$

anbieten. Unter der Seitenlast $q_s = 1,64 \text{ kN/m}$ beträgt dann die größte Normalkraft im Obergurt¹⁴

$$N_0 = 12,5 \text{ kN.}$$

Als zusätzliche Seitenlast nach Kap. 7.2.4 ergäbe sich daraus

$$q_s^N = 0,05 \text{ kNm,}$$

also eine gegenüber der Momentenseitenlast *kleine* Zusatzlast (3%).¹⁵

8.4 Zusatzschnittgrößen

In diesem Abschnitt sollen die infolge der Seitenlast entstehenden Torsions- und Querbiegemomente in den Teilquerschnitten und die Schubkräfte in den Stabdübeln verfolgt werden. Im Interesse eines besseren Überblicks werden die Ergebnisdarstellungen tabellarisch vorgenommen.

Die Torsionsmomente in den Teilquerschnitten lassen sich durch die Formel

$$M_{T_i} \approx \frac{q_s T_i}{m M_y \left(\frac{x}{L} \right)},$$

die daraus folgenden Spannungen nach der Gleichung

$$\tau_{T_i} = \frac{M_{T_i}}{W_{T_i}}$$

berechnen.¹⁶

Zu beachten sind hier die hohen Auslastungen der Einzelquerschnitte infolge der Torsionsmomente, die mit den Schubauslastungen aus Querkraft zu superponieren sind.

¹³Die Verfasser raten von diesem Berechnungsverfahren i.d.R. ab, weil bei der Herleitung der DIN-Seitenlastgleichung für Fachwerkträger von einer Stabilisierung des gedrückten Querschnitts in der Schwerachse ausgegangen wird. Dieses ist aber oftmals, wie auch im vorliegenden Beispiel, nicht der Fall. Auf der anderen Seite wird der versteifende Einfluß der Torsionssteifigkeit nicht berücksichtigt. Wie weit sich diese gegenläufigen Tendenzen aufheben, kann für den Einzelfall nicht vorausgesagt werden.

¹⁴Fachwerk mit Zugdiagonalen, Stabkraftberechnung nach [36].

¹⁵Hier erscheint es gerechtfertigt, auf den Normalkraftanteil zu verzichten. Vermindernd wirkt sich hier aus, daß die Normalkraft in Verbandsebene wirkt und der Verband nahe der Schwerachse angreift, das Zusatzbiegemoment also klein ist (1%). Hiervon kann bei Brückenträgern allerdings *nicht* generell ausgegangen werden.

¹⁶Die zulässige Torsionsschubspannung beträgt $0,2 \text{ kN/cm}^2$.

i	M_{T_i}	W_{T_i}	τ_{T_i}	$\frac{\tau_{T_i}}{\text{zul } \tau_{T_i}}$
–	kN cm	cm^3	kN/cm^2	–
1	195	1.364	0,143	0,71
2	292	1.849	0,158	0,79
3	292	1.849	0,158	0,79
4	152	1.113	0,137	0,68

Die Querbiegemomente werden nach der Gleichung

$$M_{z_i} = v_i \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 B_{z_i} \quad \text{mit}$$

$$v_i = \frac{L}{\beta} + \vartheta_m (z_v - z_{M_i}) \quad \text{und}$$

$$\vartheta_m = \frac{q_s}{m M_y \left(\frac{\pi}{L} \right)^2} = 0,0695 \text{ rad} \quad (0,0696),$$

die Biegespannungen aus der bekannten Gleichung

$$\sigma_{B_{z_i}} = \frac{M_{z_i}}{W_{z_i}}$$

ermittelt.¹⁷

i	v_i	M_{z_i}	W_{z_i}	$\sigma_{B_{z_i}}$	$\frac{\sigma_{B_{z_i}}}{\text{zul } \sigma_{B_{z_i}}}$
–	cm	kN cm	cm^3	kN/cm^2	–
1	2,74	303	1.200	0,25	0,10
2	1,35	182	1.467	0,12	0,05
3	-0,18	24	1.467	0,02	0,01
4	-1,50	147	1.067	0,14	0,06

Die Superposition mit den Biegespannungen aus der Hauptachsenberechnung für den am stärksten ausgelasteten Querschnitt 1 ergibt eine ausreichende Sicherheit:

$$\sigma_{B_1} = \sigma_{R_1} + \sigma_{B_{z_1}} = 1,32 + 0,25 = 1,57 \text{ kN/cm}^2 < 2,5 \text{ kN/cm}^2.$$

Zur Berechnung der Stabdübelkräfte infolge der Torsionslasten werden die Streckenlasten q_y , die sich aus dem Torsionsmoment ergeben, benötigt. Die Herleitungen hierzu sind in Kap. 4.3 zu finden:

$$m_T = \frac{q_s e f T}{m M_y} = \frac{0,0164 \cdot 5.970.000}{2 \cdot 21.790} = 2,25 \text{ kNm/m},$$

$$q_y = \frac{m_T}{s_g} = \frac{2,25}{61} = 0,037 \text{ kN/cm}.$$

Mit diesen Vorwerten können jetzt die angenäherten Schubkräfte pro Stabdübel mit der Wirkungsrichtung senkrecht zur Holzfaser bestimmt werden:

$$Q_j = \frac{q_y e s_i}{1 + \frac{T_w}{\sum_{i=1}^n T_i}} = \frac{0,037 \cdot 15}{1 + \frac{227.000}{5.759.000}} = 0,53 \text{ kN} \quad (0,53 \dots 0,54).$$

¹⁷Die zulässige Biegespannung beträgt $2,5 \text{ kN/cm}^2$.

Bei einer zulässigen Stabdübelkraft von 15,5 kN ergibt sich eine Auslastung von:

$$\frac{Q_j}{zulN} = \frac{0,53}{15,5} = 0,03 \equiv 3\%.$$

Die Zusatzbelastungen der Stabdübel aufgrund der Torsionslasten sind also vernachlässigbar gering.¹⁸

8.5 Kippverhalten zwischen den Verbandsknoten

Bei einer Unterteilung des Aussteifungsverbands in sechs Felder beträgt die Einzel­feldlänge

$$s = \frac{13,5}{6} = 2,25 \text{ m}.$$

Das kritische Moment für die Teilfelder berechnet sich dann zu:¹⁹

$$M_{y_{krit}} = \frac{\pi}{s} \sqrt{\frac{B_z e f \Gamma}{\left(1 - \frac{B_z}{e f B_y}\right)}} = \frac{\pi}{225} \sqrt{\frac{88,3 \cdot 10^6 \cdot 5,97 \cdot 10^6}{\left(1 - \frac{88,3 \cdot 10^6}{1.700 \cdot 579.304}\right)}} = 336.000 \text{ kNcm}.$$

Das maximale Biegemoment nach Theorie I. Ordnung beträgt, wie oben berechnet, 25.060 kNcm und erreicht somit bei weitem nicht das kritische Moment:²⁰

$$\gamma_1 m_y^I = 2 \cdot 25.060 = 50.120 \text{ kNcm} < 336.000 \text{ kNcm} = M_{y_{krit}}. \quad \text{q.e.d.}$$

Eine Weiterrechnung erübrigt sich aus diesem Grund.

¹⁸ Dieses ist, wie schon oben erwähnt, primär auf die „Weichheit“ des Stabbündels zurückzuführen.

¹⁹ Die hier benötigte Querbiegesteifigkeit ergibt sich aus der Summe der oben ermittelten Einzelquerbiegesteifigkeiten: $B_z = \sum_{i=1}^n B_{zi} = 88,3 \cdot 10^6 \text{ kNcm}^2$.

²⁰ Zu begründen ist dieses durch den recht kompakten und in engen Abständen gestützten Hauptträger. Außerdem können sich bei den Trägern aus nachgiebig zusammengesetzten Querschnitten bei üblichen Ausführungen kaum „kipp-kritische“ Zustände einstellen, da infolge der Nachgiebigkeit die aufnehmbaren Biegemomente hierfür zu klein sind (vgl. Kap. 5.2).

Literaturverzeichnis

- [1] *DIN 1052 Teil 1, Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung*, April 1988.
- [2] Ludwig Prandtl. *Kipperscheinungen, Ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht*, 1899. Dissertation, Universität München.
- [3] Karl Federhofer. *Neue Beiträge zur Berechnung der Kippplasten gerader Stäbe*, Wien 1931. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften.
- [4] Ernst Chwalla. *Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppelt-symmetrischem I-Querschnitt. Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues*, 1939. Heft 2.
- [5] Ernst Chwalla. *Die Kippung von Trägern mit einfach-symmetrischem, dünnwandigen und offenen Querschnitten*, Wien 1944. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften.
- [6] Ernst Chwalla. *Über die Kippstabilität querbelasteter Druckstäbe mit einfach-symmetrischem Querschnitt*, Wien 1950. Beiträge zur angewandten Mechanik (Federhofer-Girkmann-Festschrift).
- [7] Karlheinz Roik, Jürgen Carl und Joachim Lindner. *Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1972.
- [8] Karl Möhler und Wolfgang Schelling. *Zur Bemessung von Knickverbänden und Knickaussteifungen im Holzbau. DER BAUINGENIEUR*, 1968, Heft 2. Band 43.
- [9] Karl Möhler. *Praxisgerechte Angaben zur Seitensteifigkeit verleimter Brettschichtträger*. Institutsbericht, Universität Karlsruhe (TH), 1977.
- [10] Karl Möhler und Rudolf Müller. *Knickaussteifung von Brettschichtträgern mit veränderlichem Querschnitt*, 1981. Untersuchungsbericht, Universität Karlsruhe (TH).
- [11] Heinz Brüninghoff. *Spannung und Stabilität bei quergestützten Brettschichtträgern*, 1973. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).
- [12] Heinz Brüninghoff. *Bemessung von Aussteifungsverbänden für Druckstäbe und für Biegeträger*. In *Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis*. Bruderverlag Karlsruhe, 1982.
- [13] Bodo Heimeshoff und R. Seuß. *Knick- und Kippaussteifung von Rahmen (Rahmenecken)*, 1982. Untersuchungsbericht, Technische Universität München.
- [14] Christian Petersen. *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig; Wiesbaden, 2. Auflage 1982.

- [15] Christian Laschinski. Seitenlasten von Brücken- und Hallenträgern im Holzbau unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung. Dissertation in Vorbereitung.
- [16] Bodo Heimeshoff. Zur Berechnung von Holz-Kastenträgern aus nachgiebig verbundenen Einzelteilen bei Torsionsbeanspruchung. *DER BAUINGENIEUR*, 1981, Seiten 285-291. Band 56.
- [17] Heinz Brüninghoff. INFORMATIONSDIENST HOLZ: Verbände und Abstützungen, Teil 2; komplette Fassung, 1989. Bericht der Entwicklungsgemeinschaft Holzbau.
- [18] Bodo Heimeshoff. Über den Einfluß der Anisotropie auf den Spannungs- und Verformungszustand von Stäben mit Rechteckquerschnitt bei Torsionsbeanspruchung. In *Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis*. Bruderverlag Karlsruhe, 1982.
- [19] Rudolf Keylwerth. Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Lagenhölzer, Düsseldorf 1951. VDI-Forschungsheft 430.
- [20] F.-W. Bröker und E. Schwab. Torsionsprüfung von Holz. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 1988, Seiten 47-52. Band 46.
- [21] Wolfgang Schelling. Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau, 1968. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).
- [22] Ilja Bronstein und Konstantin Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 24. Auflage 1989.
- [23] Christian Petersen. *Stahlbau*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig; Wiesbaden, 2. Auflage 1990.
- [24] Wolfgang Schelling. Zur Berechnung nachgiebig zusammengesetzter Biegeträger aus beliebig vielen Einzelquerschnitten. In *Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis*. Bruderverlag Karlsruhe, 1982.
- [25] Bodo Heimeshoff. Zur Berechnung von Biegeträgern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen im Ingenieurholzbau. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 1987, Seiten 237-241 und 465-475. Band 45.
- [26] Bodo Heimeshoff. Näherungsverfahren zur Berechnung von Einfeldträgern mit Kragarm und von Zweifeldträgern, die aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen bestehen, im Ingenieurholzbau. *Holz als Roh- und Werkstoff*, 1991, Seiten 277-285. Band 49.
- [27] *DIN 1052 Teil 2, Mechanische Verbindungen*, April 1988.
- [28] István Szabó. *Einführung in die Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 8. Auflage 1975.
- [29] István Szabó. *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 5. Auflage 1972.
- [30] Ludwig Strathmann. *Ingenieurholzbau - Neufassung der DIN 1052, Theorie II. Ordnung im Holzbau, Brücken aus tropischen Laubhölzern*. Fachhochschule Münster, Münster, 1988.
- [31] Stephen P. Timoshenko, J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 3rd Edition 1970.

- [32] A. Föppl. Die Widerstandsfähigkeit von genieteten Trägern gegen Verdrehen. *DER BAUINGENIEUR*, 1922, Heft 14.
- [33] R. Babré. Torsion zusammengesetzter Träger. *DER BAUINGENIEUR*, 1953, Heft 3. Band 28.
- [34] Karl Möhler und W. Herröder. Seitenlast zur Bemessung der Aussteifungskonstruktionen parallelgurtiger Brettschichtträger. *HOLZBAU-STATIK-AKTUELL*, November 1977. Folge 2.
- [35] Joachim Lindner. Zum Biegedrillknicken ("Kippen") im Holzbau. In *Beiträge zur Bautechnik*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1980.
- [36] Claus Scheer, Christian Laschinski und Thorsten Knauf. *Holzfachwerkträger: Statik - Bemessung - Brandschutz (F 30-B)*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1989.
- [37] Claus Scheer, Christian Laschinski und Shen-Fang Szu. Beitrag zum Aussteifungsnachweis von Fachwerkträgern im Holzbau: Vorschlag einer erweiterten Seitenlast q_s bei Normalkraftbeanspruchung. *bauen mit holz*, Dezember 1992. Heft 12.
- [38] Schneider. *Bautabellen*. Werner-Verlag, Düsseldorf, 10. Auflage 1992.
- [39] Heinz Brüninghoff. Vorschläge zur Neufassung von DIN 1052, Abschnitt 8.6, 1986. Wuppertal.
- [40] Eckhard Reyer und Dragoslav Stojić. Zum genaueren Nachweis der Kippstabilität biegebeanspruchter parallelgurtiger Brettschichtholzträger mit seitlichen Zwischenabstützungen des Obergurts nach Theorie II. Ordnung, Teil 1: Ermittlung der Kippbeiwerte. *bauen mit holz*, 1991. Heft 2.
- [41] Eckhard Reyer und Dragoslav Stojić. Zum genaueren Nachweis der Kippstabilität biegebeanspruchter parallelgurtiger Brettschichtholzträger mit seitlichen Zwischenabstützungen des Obergurts nach Theorie II. Ordnung, Teil 2: Vergleich mit DIN 1052 Teil 1 und Anwendungsbeispiel. *bauen mit holz*, 1991. Heft 4.
- [42] Eckhard Reyer und H. P. Kramer. Zum genaueren Kippnachweis für Einfeldträger mit seitlichen Abstützungen am Obergurt. *bauen mit holz*, 1986. Heft 5.
- [43] Claus Scheer, Christian Laschinski und Shen-Fang Szu. Beitrag zum Kippstabilitätsnachweis im Holzbau: Vorschlag eines lastabhängigen k_B -Werts. *bauen mit holz*, Januar 1992. Heft 1.
- [44] Heinz Brüninghoff und T. Mitzenheim. Kippaussteifung von Brettschichtträgern, Teil 1, München 1987. EGH Forschungsbericht.
- [45] Alf Pflüger. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 3. Auflage 1975.
- [46] Karl Möhler. Spannungen und Durchbiegungen parallelgurtiger Fachwerkträger aus Holz. *bauen mit holz*, 1968. Heft 4.
- [47] Claus Scheer, Burkhard Golze und Jeffrey Purnomo. Berechnung von Fachwerkstrukturen unter Berücksichtigung des durchlaufenden Ober- und Untergurts. Forschungsbericht, Technische Universität Berlin, 1980.

- [48] Martin Speich, Gunnar Möller und Wolfgang Schelling. Zur Berechnung der Verformung von Wind- und Aussteifungsverbänden im Holzbau. *Bautechnik*, Juni 1991, Heft 6. 68. Jahrgang.
- [49] Werner Gerold. Durchbiegungsnachweis und Konstruktion von Aussteifungsverbänden. *bauen mit holz*, Juni 1986. Heft 6.
- [50] M. Fontana. Festigkeits- und Verformungsverhalten von hölzernen Fachwerkträgern unter besonderer Berücksichtigung der Knotenausbildung. Publikation Nr. 84-1 der ETH Zürich, 1984.
- [51] Andreas Tebarth. Ansetzbare Steifigkeit von Aussteifungsverbänden im Holzbau. Unveröffentlichte Diplomarbeit, TU Berlin 1991.