

**Zuverlässigkeitsbetrachtungen
bei Verlust der Dauerhaftigkeit von
Bauteilen und Bauwerken**

T 2847

T 2847

Dieser Forschungsbericht wurde mit modernsten Hochleistungskopierern auf Einzelanfrage hergestellt.

Die Originalmanuskripte wurden reprotechnisch, jedoch nicht inhaltlich überarbeitet. Die Druckqualität hängt von der reprotechnischen Eignung des Originalmanuskriptes ab, das uns vom Autor bzw. von der Forschungsstelle zur Verfügung gestellt wurde.

Im Originalmanuskript enthaltene Farbvorlagen, wie z.B. Farbfotos, können nur in Grautönen wiedergegeben werden. Liegen dem Fraunhofer IRB Verlag die Originalabbildungen vor, können gegen Berechnung Farbkopien angefertigt werden. Richten Sie Ihre Anfrage bitte an die untenstehende Adresse.

© by Fraunhofer IRB Verlag

1999, ISBN 3-8167-5476-7

Vervielfältigung, auch auszugsweise,
nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Verlages.

Fraunhofer IRB Verlag

Fraunhofer-Informationszentrum Raum und Bau

Postfach 80 04 69
70504 Stuttgart

Nobelstraße 12
70569 Stuttgart

Telefon (07 11) 9 70 - 25 00
Telefax (07 11) 9 70 - 25 08

e-mail irb@irb.fhg.de

URL <http://www.irb.fhg.de>

Bericht zum Forschungsvorhaben

**Zuverlässigkeitsbetrachtungen bei Verlust der Dauerhaftigkeit von Bauteilen
und Bauwerken**

Rüdiger Rackwitz

Inhaltsverzeichnis

Vorwort und Aufgabenstellung

1. Einführung
2. Darstellung des gegenwärtigen Konzeptes für die Festlegung von Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanforderungen
3. Entwicklung eines neuen Konzeptes auf der Grundlage von Optimierungsansätzen
 - 3.1 Allgemeines
 - 3.2 Versagen bei Inbetriebnahme
 - 3.3 Zufallsversagen in der Zeit
 - 3.4 Verschiedene Verallgemeinerungen
 - 3.5 Berechnung von Austrittsraten
 - 3.6 Numerische Berechnungen
 - 3.7 Partielle Sicherheitsfaktoren
4. Allgemeine Schlußfolgerungen
 - 4.1 Extremwertversagen
 - 4.2 Ermüdungs- und Alterungsversagen

Literatur

- Appendix A: Ableitung des allgemeinen Falles
- Appendix B: Allgemeine Lösung der Optimierungsaufgabe
- Appendix C: Bestimmung der Lebensdauer mit Hilfe von Zeitrafferversuchen
- Appendix D: Ein Schädigungsmodell
- Appendix E: Näherungsweise Bestimmung von mehrdimensionalen Erwartungswerten
- Appendix F: Beispielrechnungen für eine Geotextilie (auf Englisch)

Vorwort und Aufgabenstellung

Die Frage der Festlegung von Sicherheitsanforderungen bei baulichen Anlagen wurde durch das Aufkommen von zunehmend häufiger werdenden Dauerhaftigkeitsschäden und durch den Einsatz neuer Baustoffe, für die nicht von vornherein Dauerhaftigkeit feststand, erneut aufgeworfen. Ziel dieses Forschungsvorhabens war es daher, über die "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen" aus dem Jahre 1981, die im wesentlichen nur Extremwertversagen im Hinblick auf den Zustand der Gebrauchsfähigkeit und der Tragfähigkeit im Auge hatten, hinaus, Konzepte zu entwickeln, die den Dauerhaftigkeitsaspekt verstärkt berücksichtigen und, wenn möglich, mit den älteren Richtlinien verträglich sind. Dabei sollte auch die neuere Entwicklung der Eurocodes Berücksichtigung finden. In diesen wird verschiedentlich versucht, auf den Dauerhaftigkeitsaspekt in stärkerem Maße als bisher zuzugehen. Mit einem gegebenenfalls neuen Konzept sollte für die Bauaufsicht eine einheitliche Vorgehensweise entwickelt werden.

In den Eurocodes wird der Dauerhaftigkeitsaspekt vor allem dadurch berücksichtigt, daß man das Sicherheitsmaß, d.h. den Zuverlässigkeits- oder Sicherheitsindex, auf eine Referenznutzungsdauer bezog. Entsprechend mußten die Festlegungen für erforderliche Zuverlässigkeitsindizes modifiziert werden. Zur einfachen Handhabung wurden 4 Referenznutzungsdauern definiert. Durch Vergleichsrechnungen wurde gesichert, daß die früheren Festlegungen in den "Grundlagen zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen" den neueren Festlegungen nicht widersprachen. Die Umsetzung der Festlegungen in den Eurocodes im Hinblick auf die praktische Anwendung, d.h. die konsistente Ermittlung von Teilsicherheitsfaktoren bei echten Dauerhaftigkeitsproblemen, ist jedoch erst kürzlich durch Rackwitz (1997) und Rackwitz/El-Meligy (1997) gelungen. Es war jedoch zu fragen, ob der von den Eurocodes eingeschlagene Weg überhaupt zweckmäßig war, da last- oder anders bedingte Dauerhaftigkeitsprobleme eine sehr große Streuung aufweisen. Desweiteren war die Festlegung von Referenznutzungsdauern fraglich. Die tatsächliche Nutzungsdauer von Bauwerken ist ihrerseits eine stark streuende Größe. Außerdem erscheint die Berechnung von Teilsicherheitsfaktoren in der praktischen Anwendung zu kompliziert.

Der nachfolgende Bericht stellt daher in Abschnitt 2 den gegenwärtigen Stand des Wissens auf dem Gebiet der Festlegung von Sicherheitsanforderungen bei baulichen Anlagen zusammen. Appendix F enthält umfangreiche zuverlässigkeitstheoretische Berechnungen für einen Spezialfall, an dem die generelle Vorgehensweise überprüft werden sollte. Gewisse Details der Überlegungen enthalten die Anhänge C über die Statistik bei Zeitrafferversuchen und D über Schädigungsmodelle. Bei diesen Berechnungen zeigte es sich, daß das den Eurocodes zugrundeliegende Konzept noch viele Fragen offen läßt und zum Teil zu schwer interpretierbaren Ergebnissen führt. Auch wenn die Bemessung von chemisch alternden Geotextilien auf der Grundlage von wenigen Zeitrafferversuchen einen Sonderfall darstellt, ist mit ähnlich inkonsistenten Ergebnissen auch in anderen Fällen zu rechnen.

In Abschnitt 3 wird daher auf ein über 25 Jahre altes Konzept zurückgegriffen, nämlich auf einen Optimierungsansatz für nach Versagen systematisch wieder errichtete Bauwerke nach Rosenblueth/Mendoza (1971). Dieses Konzept wird mit Rückgriff auf die Literatur ausführlich beschrieben und diskutiert und an einigen Stellen auf die vorliegende Fragestellung erweitert. Mathematische Details sind im Anhang A enthalten. Die ebenfalls erst kürzlich entwickelte Technik der Optimierung enthält Anhang B. Appendix E enthält

einen Vorschlag für die Berechnung von mehrdimensionalen Erwartungswerten, wie sie bei gewissen Dauerhaftigkeitsproblemen notwendig wird.

In diesen Untersuchungen stellte sich heraus, daß die für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen maßgebende Größe nicht eine zeitbezogene Versagenswahrscheinlichkeit ist, sondern die Versagensrate, auch bei Dauerhaftigkeitsproblemen. Es läßt sich desweiteren zeigen, daß Teilsicherheitsfaktoren aus diesem Konzept heraus fast wie im zeitinvarianten Fall gewonnen werden können. Das neue Konzept bedeutet nicht, daß das alleinige Kriterium zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen eine Optimierungsrechnung ist. Das neue Konzept bedeutet insbesondere nicht, daß man auf bereits durchgeführte oder zukünftige Kalibrationsrechnungen an bewährten Bauweisen verzichten kann, denn nur so kann die Erfahrung eingebracht werden. Es wird daher vorgeschlagen, alle Sicherheitsfestlegungen, auch jene bei Dauerhaftigkeitsproblemen, nach dem neuen Konzept vorzunehmen.

1. Einführung

Die Anforderungen an Sicherheit, Zuverlässigkeit und Dauerhaftigkeit von baulichen Anlagen haben in den letzten zwei Jahrzehnten eine geradezu revolutionäre, definatorische und begriffliche Verschärfung erfahren. Die neuen Vorgaben ersetzen wenigstens z.T. den Komplex der rein aus der Erfahrung gewachsenen Lastannahmen, Regeln für die Berechnung und Bemessung, konstruktiven Regeln und Regeln für die Ausführung einschließlich der dazugehörigen Qualitätskontrolle. Hinzu kommen in gewissen Bereichen noch Regeln für die Unterhaltung der Bauwerke. Durch die neue Begriffswelt können die Anforderungen an die Sicherheit, Zuverlässigkeit und Dauerhaftigkeit transparent gemacht werden und der jeweiligen Bauaufgabe angepaßt werden. Es ist weiter möglich, die jeweiligen Anforderungen aus der Sicht der Nutzung der Bauwerke zu vergleichmäßigen, wodurch nicht nur ausreichende Sicherheit vor Verlust von Leib und Leben sondern unter Berücksichtigung der Wirtschaftlichkeit der Bauwerke auch ausreichende Zuverlässigkeit im Hinblick auf extreme Einwirkungen und den normalen Gebrauch für die beabsichtigte Nutzungsdauer gewährleistet werden kann. Dies soll durch ein Bündel von Maßnahmen erreicht werden. Hierzu gehören:

- Bemessung
- Konstruktive Regeln
- Qualitätskontrolle und -sicherung
- Unterhaltung

Gegebenenfalls soll ausreichende Zuverlässigkeit auch unter Einbezug von die Gefährdung vermeidenden, die Gefährdung eliminierenden oder vor der Gefährdung schützenden protektiven Maßnahmen erreicht werden. Zur Beschreibung dieser Sachverhalte haben sich die Begriffswelt und die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie als besonders zweckmäßig erwiesen.

Die folgende Studie hat soll den Begriff Dauerhaftigkeit und die an den Verlust von Dauerhaftigkeit zu knüpfenden Zuverlässigkeitsanforderungen genauer definieren, noch offene Fragen in diesem Zusammenhang identifizieren und gegebenenfalls Lösungsansätze vorschlagen. Daraus soll dann eine Handlungsanweisung für bauaufsichtliche Belange entwickelt werden.

2. Darstellung des gegenwärtigen Konzeptes für die Festlegung von Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanforderungen

2.1 Allgemeines

Die Festlegung von Sicherheits- und Zuverlässigkeitsanforderungen in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein schwieriges Thema, welches nur durch das Zusammenwirken verschiedener methodischer Ansätze befriedigend zu lösen ist. Diese sind:

- -entscheidungstheoretisches Vorgehen, d.h. eine Nutzen-Kostenanalyse
- Kalibration an bewährten Bauarten und Bauweisen
- Risikoakzeptanz der Öffentlichkeit
- Eintrittshäufigkeit von extremen und außergewöhnlichen, die Bauwerke bedrohenden (Natur-)Ereignissen

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich durch viele Untersuchungen, die hier im einzelnen nicht aufgeführt werden können, ein gewisser Konsensus herausgebildet, dessen wesentliche Elemente nachstehend aufgeführt werden sollen.

1. Es wird zwischen Bauwerkssicherheit und Bauwerkszuverlässigkeit unterschieden. Bauwerkssicherheit bedeutet dabei, daß vom tragenden Bauwerk nur eine sehr geringe Gefahr für Leib und Leben ausgeht. Diese Gefahr wird als Eintrittsrate von Todesfällen pro Jahr ausgedrückt. Bauwerkszuverlässigkeit ist die Eigenschaft eines tragenden Bauwerks, mit hoher Wahrscheinlichkeit die vorgesehene Nutzung zu gewährleisten. Dabei werden die möglichen Zustände eines Tragwerks durch im wesentlichen zwei Zustände, die Grenzzustände der Tragfähigkeit und die Grenzzustände der Gebrauchsfähigkeit unterteilt. Gelegentlich wird ein dritter Grenzzustand dazwischen, der Grenzzustand ganz oder teilweiser Reversibilität, d.h. im wesentlichen elastischen Tragverhaltens, zusätzlich eingeführt. Zuverlässigkeitsvorgaben sind im Prinzip auf das gesamte Tragwerk und auf die vorgesehene Nutzungsdauer bezogen. Die Zuverlässigkeitsanforderungen bei Verlust der Tragfähigkeit sind z.T. wesentlich höher als bei Verlust der Gebrauchsfähigkeit.
2. Die Zuverlässigkeitsanforderungen berücksichtigen nicht nur die Größe der möglichen Schadensfolgen, sondern auch den Aufwand für Bauwerkszuverlässigkeit.
3. Belastungen und Tragwerkswiderstände sind für den rechnerischen Nachweis aus praktischen Gründen so festgelegt, daß mit den Nennwerten (charakteristischen Werten) und Sicherheitsbeiwerten von EINS die Anforderungen an die Gebrauchsfähigkeit eines Großteils der Bauwerke abgedeckt werden. Für die Grenzzustände der Tragfähigkeit gelten im wesentlichen die gleichen Annahmen für Belastungen und Tragwerkswiderstände, aber mit Sicherheitsbeiwerten GRÖßER EINS.

Die Sicherheitsanforderungen gelten als erfüllt, wenn das Lebensrisiko der folgenden Bedingung genügt:

$$P_L \leq \frac{10^{-6}}{N^k}$$

wobei P_L die Wahrscheinlichkeit pro Jahr und N die Anzahl der bei einem teilweisen oder vollständigen Bauwerksversagen zu Tode kommenden Personen. k ist ein Exponent, mit dem sich Risikobereitschaft und Risikoaversion steuern lassen ($k < 1$ bedeutet Risikobereitschaft und $k > 1$ Risikoaversion). In der Regel wird dieser Exponent zu $k = 1$ genommen. P_L ist dabei häufig wesentlich kleiner als die jährliche Versagenswahrscheinlichkeit des Bauwerks, da auch die Wahrscheinlichkeit der Anwesenheit in oder in unmittelbarer Nähe des Bauwerks zu berücksichtigen ist. Im Vergleich mit anderen Lebensrisiken des täglichen Lebens ist die genannte Zahl um mindestens zwei Größenordnungen kleiner und wird in der Regel für Bauwerke nicht maßgebend.

Für die Zuverlässigkeitsanforderungen hat sich unter Berücksichtigung aller oben genannter methodischer Ansätze, aber insbesondere der Kalibration an bewährten Bauweisen, die folgende

Tabelle als zweckmäßig erwiesen. Sie wird in dieser Form mit geringfügigen Änderungen vielfach diskutiert:

Tabelle von anzuzielenden Zuverlässigkeitsindizes $\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$ (ECCS, 1996)

(je kritische Bauwerkskomponente und beabsichtigter Nutzungsdauer)

Größe des Aufwands für Zuverlässigkeit	Zustände der Gebrauchsfähigkeit	Größe	Zustände der Tragfähigkeit	Schadensfolgen
		Gering	Mittel	Groß
Groß	1.0	2.5	3.0	3.5
Mittel	1.5	3.0	3.5	4.0
Klein	2.0	3.5	4.0	4.5

Der Einfluß der beabsichtigten Nutzungsdauer ist in dieser Tabelle vernachlässigt. Die Zahlen sind als nominelle Werte zu verstehen. Sie gelten, wie erwähnt, für die wesentliche Komponente des tragenden Gesamtbauwerk. Bei Anwendung auf wesentliche Bauteile, die in Serie geschaltet gedacht werden, sollten die Zuverlässigkeitsindizes um jeweils etwa 0.5 erhöht werden. Das entspricht auf der sicheren Seite liegend etwa 10 wesentlichen Komponenten im System (bei 100 wesentlichen Komponenten im System wäre die Erhöhung rund 1.0). Die Werte der Tabelle sind mit Begriffen wie Sicherheitserdbeben (vergl. KTA 1990) kompatibel und ebenso mit den obengenannten Sicherheitsanforderungen. Die allgemeine Zuordnung spiegelt den entscheidungstheoretischen Ansatz wieder nach dem es für ein optimales Zuverlässigkeitsniveau im wesentlichen auf die marginalen Kosten zur Erhöhung der Zuverlässigkeit und die Schadensfolgen ankommt. Demnach ist es sinnvoll bei geringen (relativen) Kosten für die Zuverlässigkeit eine hohe Zuverlässigkeit anzustreben, aber bei hohen Kosten ein, relativ gesehen, niedrigeres Zuverlässigkeitsniveau in Kauf zu nehmen. Die Zustände der Gebrauchsfähigkeit schließen grundsätzlich keine Gefährdung von Leib und Leben ein während das bei den Grenzzuständen der Tragfähigkeit generell unterstellt wird. Die Abstufung ($\beta = 0.5$) entspricht ungefähr einer Zehnerpotenz in der nominellen Versagenswahrscheinlichkeit. Eine feinere Abstufung macht bei den auch bei sorgfältiger Rechnung verbleibenden Unsicherheiten kaum Sinn. Es scheint, daß die Gesellschaft dann ein höheres Risiko zu tragen bereits ist, wenn es sich bei den Versagensursachen um von der umgebenden Natur verursachte Einwirkungen handelt (Stürme, Erdbeben, Überschwemmungen) und daß gegenüber einem vom Menschen verursachten Versagen stärkere Aversionen zum Tragen kommen. Diese Sachverhalte kommen in der Tabelle nicht zum Ausdruck.

Anforderungen an die Dauerhaftigkeit

Die Anforderungen an die Dauerhaftigkeit können nicht unabhängig von den Anforderungen an Sicherheit und Zuverlässigkeit definiert werden. Hierbei ist es entscheidend, ob der Verlust der Dauerhaftigkeit die Sicherheit bzw. die Zuverlässigkeit im Grenzzustand der Tragfähigkeit oder nur die Zuverlässigkeit im Grenzzustand der Gebrauchsfähigkeit gefährdet. Als dauerhaft kann ein Zustand angesehen werden, bei dem die beabsichtigte Nutzungsdauer ohne Einschränkung der Nutzung und ohne nicht vorgesehene speziell dem Erhalt der Dauerhaftigkeit gewidmete Reparaturen aber mit den vorgesehenen Unterhaltungsmaßnahmen mit bestimmter Zuverlässigkeit gegeben ist. Das ist eine auf die Zeit bezogenen Wahrscheinlichkeit. Verlust der Dauerhaftigkeit ist immer ein irreversibler Zustand, d.h. ist nicht möglich ohne Reparatur vom

Versagenszustand zurück in den dauerhaften Zustand zu wechseln. ENV 1991-1 (1994) definiert folgende normative Bemessungslebensdauern in Jahren:

Tabelle empfohlener Nutzungsdauern

Klasse	Geforderte Nutzungsdauer	Bemerkung
0	0.001 – 1	Bauzustände u.ä.
1	[1 - 5]	Temporäre Bauwerke
2	[25]	Ersetzbare Bauteile
3	[50]	Normale Bauten
4	[125]	Monumentale Bauten, Brücken

Ein Dauerhaftigkeitsproblem tritt im allgemeinen nicht in den Klassen 0 oder 1 auf. Die für normale Bauwerke angesetzte beabsichtigte Nutzungsdauer von 50 Jahren orientiert sich an der normalen Amortisation von öffentlichen baulichen Anlagen und an der Lebensdauer üblicher Gebrauchsbauwerke. In die Klasse 2 fallen viele Industriebauwerke. In Übereinstimmung mit den Gepflogenheiten in der BRD soll für Klasse 4 nicht der in ENV 1991-1 (1994) empfohlene Klammerwert sondern ein etwas höherer Wert angesetzt werden. Die Festlegung der beabsichtigten Nutzungsdauer bedeutet in der Regel jedoch nicht auch eine Aussage über die tatsächliche Lebensdauer. Diese ist eine statistisch stark streuende Größe. Die tatsächliche Lebensdauer wird beschränkt durch Extremwertversagen, Verlust der Dauerhaftigkeit und durch Veraltung. Unter Veraltung soll hier verstanden werden, daß die Nutzungsanforderungen des Bauwerks nicht mehr denen entsprechen für die das Bauwerk entworfen wurde, obwohl es jene noch erfüllen würde. Beispiele hierfür sind nicht mehr ausreichende Wärmedämmung oder Schallschutz sowie nicht mehr adäquate architektonische Gestaltung bei Wohn- und Geschäftshäusern, nicht mehr funktionsgerechter Bauplan bei Industriegebäuden oder nicht mehr verkehrsgerechte Abmessungen oder Tragfähigkeiten bei Brücken. Veraltung bestimmt in überwiegendem Maße die Lebensdauer von baulichen Anlagen. Bild 1 zeigt das Ergebnis einer statistischen Untersuchung für japanische Brücken. Ähnliche Unterlagen können für deutsche Brücken und andere Verkehrsbauten sowie gewöhnliche Bauwerke erstellt werden. Auch den Verlust der Gebrauchsfähigkeit, sofern er nicht durch Verlust der Dauerhaftigkeit ausgelöst wurde, kann man unter dem Begriff Veraltung subsummieren, wenn er den Ersatz des Bauwerks erfordert.

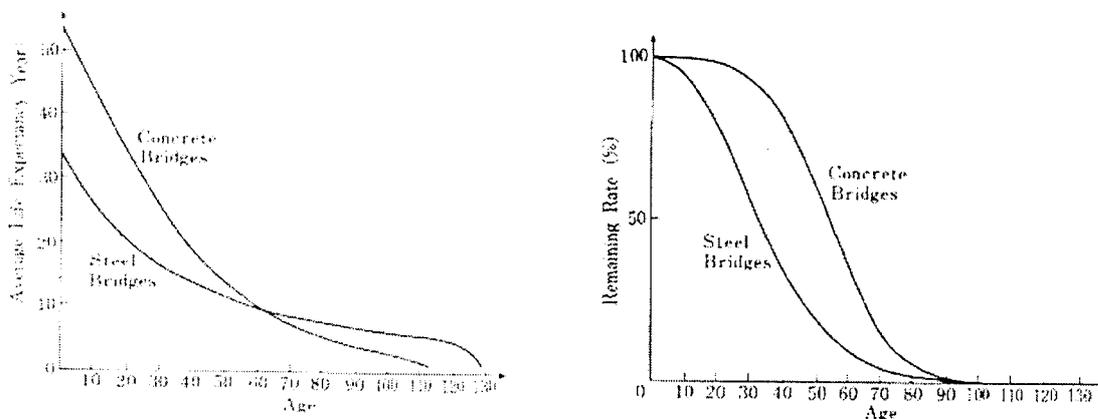


Bild 1: Lebensdauern von japanischen Brücken (Iizuka, 1988)
(links: Erwartete verbleibende Lebenszeit über dem Alter, rechts: Überlebensrate über dem Alter)

Für die Festlegung von beabsichtigten Nutzungsdauern sind folgende Aspekte zu berücksichtigen:

- Amortisation
- Dauerhaftigkeit
- Entwicklung technischer Innovationen (Erneuerung wegen Veralterung)

Die Ausfallsrate definiert als die auf das Überleben bis zum betrachteten Zeitpunkt bedingte Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit hat für die verschiedenen Ursachen für das Beenden der Lebensdauer von Bauwerken grundsätzlich verschiedenes Aussehen. Extremwertversagen, Verlust der Dauerhaftigkeit und Veralterung können in erster Näherung als voneinander unabhängige Versagensursachen betrachtet werden.

Für Extremwertversagen hängt der Verlauf im wesentlichen von dem beim Versagen wirksamen dauernd wirkenden Einwirkungen, allen voran natürlich dem Eigengewicht oder Erddruck, ab. Existieren nur dauernd wirkende Einwirkungen, so versagt das Bauwerk bei nicht zeitabhängigen Festigkeitseigenschaften bei seiner Errichtung oder nie. Die Versagensrate hat zum Zeitpunkt Null einen vergleichsweise hohen Wert und fällt dann auf Null zurück. Wird das Versagen nur durch extreme veränderliche stationäre Einwirkungen (einschließlich außergewöhnlichen Einwirkungen) ohne dauernd wirkende Anteile ausgelöst, so ist bei nicht zeitabhängigen Festigkeitseigenschaften die Versagensrate eine Konstante in der Größenordnung von 10^{-4} bis weniger als 10^{-6} /Jahr (entspricht einer mittleren Wiederkehrdauer von Versagensereignissen von 10000 bis 1000000 Jahren pro Einheit). In dieser Größenordnung liegen auch die Sicherheitsanforderungen für Bauwerke. Daraus folgt unter der Annahme eines stationären Poissonprozesses der Versagensereignisse für die Versagenswahrscheinlichkeit

$$p_f(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] = 1 - \exp[-\lambda t] \quad (1)$$

mit t der beabsichtigten Lebensdauer. Die Wahrscheinlichkeit für Versagen in irgendeinem Jahr ist bei Stationarität konstant und gleich λ . Um ein Versagen bei Inbetriebnahme zu berücksichtigen, kann man Gl. (1) modifizieren.

$$p_f(t) = 1 - R(0) \exp\left[-\frac{\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}{R(0)}\right] \quad (1a)$$

$R(0) = 1 - F(0)$ bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit, die Inbetriebnahme zu überstehen. Entsprechend ist $F(0)$ die Versagenswahrscheinlichkeit bei Inbetriebnahme. Bei gleichzeitiger Einwirkung von ständigen und veränderlichen Einwirkungen nimmt die Versagensrate, ebenfalls unter stationären Bedingungen, mehr oder weniger stark ab (Krzakacs/Kersken-Bradley, 1976). Es gilt die Formel

$$p_f(t) = 1 - \int_R \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau|r) d\tau\right] dF_R \quad (2)$$

Man kann zeigen, daß im stationären Fall der Ausdruck (2) stets kleiner wird als (1). Um dauernde und veränderliche Einwirkungen gleich zu bewerten, ist also notwendig, daß auf dauernde Einwirkungen für die Versagenswahrscheinlichkeit bei Inbetriebnahme bemessen wird.

Bei Verlust der Dauerhaftigkeit nimmt die unbedingte Ausfallsrate ständig zu, da es sich bei den dazugehörigen physikalischen oder chemischen Prozessen in der Regel um kumulative, irreversible Prozesse handelt. Hierbei kann der Schädigungsprozess progressiv verlaufen, z.B. bei Materialermüdung, oder aber sich im Laufe der Zeit stabilisieren. Seine Geschwindigkeit hängt vor allem von der Belastung durch die Umgebung ab. Aus theoretischen und praktischen Gründen nimmt man daher oft eine Weibullverteilung für die Zeiten bis zum Versagen an, wobei der Gestaltungsparameter deutlich über $k = 1$ liegt. Hierbei wird der sehr seltene Fall ausgeschlossen, daß eine extreme Last auf eine schon geschwächte Festigkeit trifft und somit kein reines Schädigungsproblem sondern ein Erstüberschreitungsproblem vorliegt. Wenn jedoch Verlust der Dauerhaftigkeit zum Ausfall des Systems führt, und zwar mit den gleichen Versagensfolgen, so ist nur zwingend, daß auch der Verlust der Dauerhaftigkeit wie der Verlust der Tragfähigkeit sicherheitstechnisch behandelt wird. Im Fall der Ermüdung bzw. in allen Fällen in denen eine Vorwarnung nicht gegeben ist, ist dies sicher generell gerechtfertigt.

Für das Verhalten der Ausfälle infolge Veraltung gibt es nur wenig empirische Anhaltspunkte. Man kann aber mit einigen plausiblen Annahmen etwas über das generelle Verhalten der entsprechenden Ausfallraten sagen. Am Beginn des Lebens eines Bauwerks gleich welcher Bestimmung ist die Rate vernünftigerweise sehr klein. Andernfalls hätte man es nicht errichtet. Die Ausfallrate wächst dann bis zu einem für den Bauwerkstyp charakteristischen Alter. Danach dürfte sie wieder abnehmen, da zunehmend weniger Notwendigkeit für eine Erneuerung besteht. Manche Bauwerke schließlich veralten im Sinne der oben angegebenen Definition kaum oder nie. Im Industriebau beträgt die mittlere Erneuerungszeit von Produktionsanlagen ungefähr 25 Jahre, bei Wohn- und Geschäftshäusern vielleicht 50 bis 70 Jahre und ebenso nach vorliegenden Beobachtungen oder etwas größer für Brücken. Die tatsächlichen Nutzungsdauern streuen stark. Sie hängen von vielen im Einzelnen kaum vorhersagbaren Einflüssen ab. Wenn also eine Verteilungsfunktion für das Veralten angesetzt wird, ist es sinnvoll eine Verteilung zu wählen, die eine relativ große Streuung besitzt. Die Streuung ist im Industriebau eher kleiner und ist sicher am größten bei Wohnhäusern und Monumentalbauten. Daher erscheint eine Weibullverteilung ebenfalls flexibel genug um diese Erscheinungen adäquat zu erfassen.

$$\text{Verteilungsfunktion bei Veraltung: } F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{w}\right)^k\right] \quad (3)$$

Diese Verteilung hat eine unimodale Dichte und den Mittelwert $E[T] = w \Gamma(1+1/k)$. Der Parameter k steuert die Streuung und die dazugehörige Ausfallsrate. Die damit zusammenhängende Risikofunktion ist definiert durch

$$h(t) = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} \quad (4)$$

und gibt, multipliziert mit einem (kleinen) Zeitintervall, die Wahrscheinlichkeit für Versagen an unter Bedingung, daß bis zum betreffenden Zeitpunkt kein Versagen erfolgte. Für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten kann die Bedingung ohne großen Fehler weggelassen werden. Für eine Weibullverteilung findet man

$$h(t) = k \frac{t^{k-1}}{w^k} \quad (5)$$

$k = 1$ entspricht der Exponentialverteilung und $k = 2$ der Rayleighverteilung. Für erstere ist die Ausfallsrate konstant (siehe oben) und der Variationskoeffizient gleich Eins. Für letztere nimmt die Ausfallsrate linear zu und der Variationskoeffizient ist gleich 0.52. Die Rayleighverteilung erscheint damit geeignet, Veraltungsausfälle zu modellieren.

Damit berechnet sich die Verteilungsdichte der tatsächlichen Lebensdauer wie folgt: Für die Dichte der verschiedenen Versagensursachen gilt:

$$\text{Extremwertversagen: } f_{T_e}(t) = \lambda \exp[-\lambda t] \quad (6a)$$

$$\text{Dauerhaftigkeitsversagen: } f_{T_d}(t) = \left(\frac{t}{w}\right)^k \frac{t}{k} \exp\left[-\left(\frac{t}{w}\right)^k\right] \quad (6b)$$

$$\text{Veraltungversagen: } f_{T_a}(t) = \frac{2t}{v^2} \exp\left[-\left(\frac{t}{v}\right)^2\right] \quad (6c)$$

Abb. 2 veranschaulicht die durch die drei Versagensarten bedingten, unterschiedlichen Verteilungsfunktionen sowie die Verteilungsfunktion der Gesamtlebensdauer.

$$F(t) = 1 - (1 - F_e(t))(1 - F_d(t))(1 - F_a(t)) \quad (7)$$

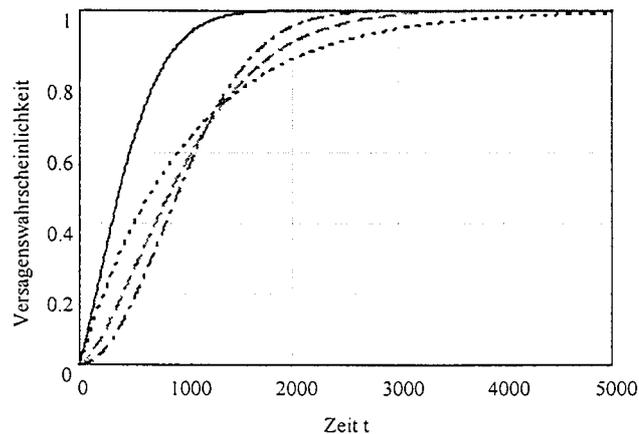


Bild 2: Extremwertversagen, Dauerhaftigkeitsversagen oder Veraltung (mittlere Zeit bis zum Versagen bei allen drei Versagensarten = 1000 Jahre)

Man erkennt in Abb. 2, daß die tatsächliche Lebensdauer merklich kleiner ist als die sich jeweils aus den einzelnen Versagensursachen ergebenden Lebensdauern. Man erkennt weiter, daß zunächst das Extremwertversagen dominiert und erst später Dauerhaftigkeitsversagen oder Veraltung.

Es erheben sich nun zwei grundsätzliche Fragen, ob nämlich im Hinblick auf die Zuverlässigkeitsforderungen bei Verlust der Dauerhaftigkeit Veraltung berücksichtigt werden darf oder nicht und ob Dauerhaftigkeitsversagen dem Extremwertversagen gleichzusetzen ist. Die erstgenannte Frage ist kaum allgemein zu beantworten. Der einzelne Bauherr mag zufällige Veraltung durchaus in seine Betrachtungen einbeziehen. Aus bauaufsichtlicher Sicht sollte Veralten außer Betracht gelassen werden. Es gelten die allgemeinen Regeln für die beabsichtigten Nutzungsdauern. Ob Dauerhaftigkeitsversagen dem Extremwertversagen gleichzusetzen ist, ist

im wesentlichen eine Frage der Schadensfolgen. In günstigen Fällen ist mit dem Verlust der Dauerhaftigkeit nur ein Verlust an Gebrauchsfähigkeit verbunden. In diesem Fall sind die Anforderungen bei Verlust der Gebrauchsfähigkeit angemessen. Dabei muß man berücksichtigen, daß Verlust der Dauerhaftigkeit in der Regel Reparaturen erfordert. Auch ist erforderlich, daß der Verlust der Dauerhaftigkeit deutlich sichtbar ist und sich damit ankündigt. Wenn dagegen sich der Verlust der Dauerhaftigkeit nicht sichtbar ankündigt und letztlich den Verlust der Tragfähigkeit einleiten kann, müssen die Anforderungen an den Verlust der Tragfähigkeit genommen werden.

3. Entwicklung eines neuen Konzeptes auf der Grundlage von Optimierungsansätzen

3.1 Allgemeines

Optimierungsansätze können nur in Verbindung mit anderen Kriterien zur Festlegung von Zuverlässigkeitsmaßen herangezogen werden, da der Ansatz der in sie eingehenden Größen diskutabel ist. Die bisher erbrachten Ergebnisse lassen jedoch grundsätzliche Einsichten zu, die bei keinem anderen Kriterium zur Festlegung von Sicherheitsanforderungen möglich wären.

Zunächst ist zu fragen, für wen denn optimiert werden soll. Das kann der Bauherr, der Nutzer oder die Öffentlichkeit sein. Als Grundlage der weiteren Betrachtungen wird in Anlehnung an Rosenblueth folgende Zielfunktion gewählt.

$$Z(p) = B(p) - C(p) - D(p) \quad (8)$$

Darin ist $B(p)$ der Nutzen der aus der Existenz der baulichen Anlage gezogen wird, $C(p)$ sind die Errichtungskosten, gegebenenfalls einschließlich aller vorgesehenen Unterhaltungsmaßnahmen, und $D(p)$ die erwarteten Schadenskosten. p ist ein Parametervektor, der den Entwurf bestimmt. Gegebenenfalls muß der rechten Seite von Gl. (8) noch eine (negativer) Term für die Beseitigung bei Veraltung hinzugefügt werden. Ohne Verlust an Allgemeinheit werden alle Größen in monetären Einheiten ausgedrückt. Inwieweit das möglich und realistisch ist, wird weiter unten noch diskutiert. $B(p)$ wird im allgemeinen etwas mit p abnehmen, da Teilvektoren von p , z.B. Bauteildimensionen, die Nutzung geringfügig einschränken können. Diese Abnahme ist aber nur in Sonderfällen merklich. Im folgenden wird sie vernachlässigt, so daß $B = B(p)$. $C(p)$ nimmt mit p unter gewöhnlichen Umständen zu. Näherungsweise kann man $C(p) \approx C_0 + \sum c_i p_i$ ansetzen. Hierbei sind C_0 diejenigen Errichtungskosten, die nicht von einem Bemessungsparameter oder Unterhaltungsparameter abhängen. Generell ist $C_0 \gg \sum c_i p_i$. $D(p)$ wird mit p abnehmen und zwar im allgemeinen nichtlinear. Für jeden der Beteiligten, also Bauherrn, Nutzer und Öffentlichkeit muß $Z(p)$ für den gewählten Bemessungsparameter größer oder mindestens gleich Null sein. Andernfalls sollte man auf die Realisierung der baulichen Anlage verzichten. Diesen Sachverhalt veranschaulicht Bild 1. Da die Ansätze für den Nutzen, die Kosten und die Schäden für die Beteiligten, also den Bauherrn, den Nutzer und die Öffentlichkeit, nicht identisch sein müssen, erhält man im allgemeinen unterschiedliche Kurven und sinnvolle Bereiche in p . Der Durchschnitt dieser Bereiche ist dann der insgesamt sinnvolle Bereich. Im Sinne der statistischen Entscheidungstheorie sind bei Unsicherheiten über die Größen B , $C(p)$ und $D(p)$ jeweils die erwarteten Größen einzusetzen.

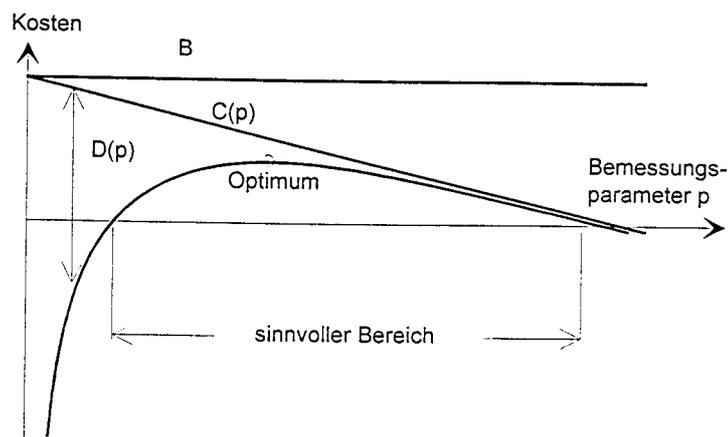


Abb. 3: Nutzen- und Kostenkurven über Bemessungsparameter p

Außerdem stehe die Entscheidung über p zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Das erfordert gegebenenfalls die Kapitalisierung der jeweiligen Kosten. Hierzu wird die folgende, stetige Kapitalisierungsfunktion angesetzt:

$$g(t) = \exp(-\gamma t) \quad (9)$$

Üblicherweise wird von einer jährlichen Kapitalisierungsfunktion $g(t) = (1 + \gamma')^{-t}$ ausgegangen mit γ' dem jährlichen Zinssatz. Beide Formen gehen ineinander über für $\gamma = \ln(1 + \gamma')$, wobei für $\gamma \ll 1$ näherungsweise $\gamma \approx \gamma'$. Der genommene Zinssatz muß natürlich von In/Deflationstendenzen bereinigt werden. Ein Wert von $\gamma' \approx 0.05$ erscheint realistisch. Darüberhinaus fluktuiert er in der Zeit. Um die Betrachtungen nicht unnötig zu verkomplizieren wird mit einem mittleren bereinigten Zinssatz gerechnet.

Weiter soll angenommen werden, daß die Errichtungszeit einer baulichen Anlage kurz ist im Vergleich zur Lebensdauer. Das ist nicht immer ganz richtig, hat jedoch auf die Ergebnisse nur für den Bauherrn ausnahmsweise merklichen Einfluß.

3.2 Versagen bei Inbetriebnahme

Es sei nun angenommen, daß sowohl die Beanspruchungen als auch die Widerstände nicht von der Zeit abhängen. Dieser Annahme trifft bei vorwiegend durch Eigengewicht und andere ständige Lasten beanspruchten Tragwerken mit zeitinvarianten Tragwerkswiderständen zu. Dann ist

$$Z(p) = B^* R(p) - C(p) - H(p)F(p) = B^* - C(p) - (B^* + H(p))F(p) \quad (10)$$

Mit B^* dem erwarteten Nutzen, $R(p)$ der Zuverlässigkeit und $F(p) = 1 - R(p)$ der Versagenswahrscheinlichkeit und $H(p)$ den Schadenskosten im Fall des Versagens. Dabei hängen die Schadenskosten nur unerheblich oder gar nicht von den Bemessungsparametern ab, so daß im allgemeinen $H = H(p)$. Über die Größe von H gibt es nur wenige Untersuchungen. Sie dürfte bei üblichen Bauwerken beim 2- bis 20-fachen der Erstellungskosten liegen. Bei außergewöhnliche Bauwerken wie großen Brücken, Staudämmen und Nuklearkraftwerken dürften die Schadenskosten jedoch z.T. wesentlich höher anzusetzen sein. Zur Frage der monetären Bewertung von Leib und Leben, also dem Teil von H der diese Folgen enthält, läßt sich heute kaum mehr sagen als früher. Insgesamt sind Personenschäden sehr selten. Sie kommen praktisch nur bei außergewöhnlichen Belastungsereignissen aus der künstlichen oder natürlichen Umwelt

vor (Erdbeben, Stürme, Explosionen, etc.). Insgesamt scheint es sich durchzusetzen, denjenigen Betrag einzusetzen, den die Gesellschaft zum Schutz von Personen einzusetzen bereit ist, das ist in Industrieländern weltweit ein Betrag von ungefähr 1 Million DM pro Todesfall.

Gl. (3) bedeutet, daß nach einem Versagen das Bauwerk aufgegeben wird. Das ist im allgemeinen nicht realistisch, da man dieses unverzüglich wiederaufbauen wird um seine Funktion aufrechtzuerhalten. Unter der etwas unrealistischen Annahme, daß auch das wiederaufgebaute Bauwerk die gleiche Versagenswahrscheinlichkeit hat, ergibt sich

$$Z(p) = B^* - C(p) - (C(p) + H(p)) \sum_{i=1}^{\infty} iF(p)^i R(p) = B^* - C(p) - (C(p) + H(p)) \frac{F(p)}{1 - F(p)} \quad (11)$$

wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty} iF(p)^i R(p) = \sum_{i=1}^{\infty} iF(p)^i (1 - F(p)) = \frac{F(p)}{1 - F(p)}$$

Da bei Bauwerken $F(p) \ll 1$, kann man den Korrekturterm für die Versagenswahrscheinlichkeit $1/(1 - F(p))$ fast immer vernachlässigen.

$$Z(p) = B^* - C(p) - H(p)F(p) \quad (12)$$

Das ist die in Anwendungen häufigste Form der Zielfunktion. Nicht ganz eindeutig ist hier, wie groß B^* anzusetzen ist. Für $T \rightarrow \infty$ wird aus

$$B(T) = \int_0^T b(t)g(t)dt = \frac{b}{\gamma} [1 - \exp[-\gamma T]] \quad (13)$$

$$B^* = b/\gamma \quad (14)$$

3.3 Zufallsversagen in der Zeit

Wenn Versagen zufällig in der Zeit erfolgt, müssen alle Kostenterme entsprechend kapitalisiert werden und die Zeitabhängigkeit der Beanspruchbarkeit und der Beanspruchung berücksichtigt werden. Dann ist für den Fall, daß das Bauwerk nach dem Versagen aufgegeben wird,

$$B(T) = \int_0^T b(t)g(t)R(t, p)dt \quad (15)$$

$$D(T) = \int_0^T f(t, p)g(t)Hdt \quad (16)$$

und somit

$$Z(p) = \int_0^T b(t)g(t)R(t, p)dt - C(p) - \int_0^T f(t, p)g(t)Hdt \quad (17)$$

Hierin ist $b(t)$ der Nutzen pro Zeiteinheit und $f(t,p)$ die Dichte der Versagenswahrscheinlichkeitsfunktion. In guter Näherung wird mit einem mittleren Wert $b = b(t)$ gerechnet. T ist eine Referenzzeit. Für exponential nach $F(t) = 1 - \exp[-\lambda t]$ verteilte Versagenszeiten, d.h. der Versagensprozeß ist ein Poissonprozeß, ist beispielsweise

$$B(T) = \frac{b}{\gamma + \lambda} (1 - \exp[-(\gamma + \lambda)T]) \quad (18)$$

$$D(T) = \frac{\lambda H}{\gamma + \lambda} (1 - \exp[-(\gamma + \lambda)T]) \quad (19)$$

Der Parameter λ bezeichnet hierbei die Intensität des Versagensprozesses. Demnach ist $B(\infty) = b/(\gamma + \lambda)$ und $D(\infty) = \lambda H/(\gamma + \lambda)$. Wenn die Beanspruchung bereits ein Poissonprozeß mit der Intensität κ (z.B. eine außergewöhnliche Einwirkung wie Erdbeben) ist und die Versagenswahrscheinlichkeit bei einem Ereignis gleich $P_f(p)$ ist, so ist die Intensität des Versagensprozesses $\lambda = \kappa P_f(p)$ und dieser Prozeß ist ebenfalls ein Poissonprozeß.

Systematischer Wiederaufbau ergibt jedoch

$$B = B^* = \int_0^{\infty} b(t)g(t)dt \quad (20)$$

$$D = (C(p) + H) \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(t, p)g(t)dt \quad (21)$$

und damit

$$Z(p) = B^* - C(p) - (C(p) + H) \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_i(t, p)g(t)dt \quad (22)$$

mit $f_i(t,p)$ der Dichte der Versagenswahrscheinlichkeitsfunktion für das i -te Versagen. Würden die Versagenskosten nicht kapitalisiert, so würden sie unendlich groß und jedes Bauvorhaben im Sinne der statistischen Entscheidungstheorie sinnlos. Man sieht in Gl. (22), daß gegebenenfalls auch Personenschäden zu kapitalisieren sind. Hierzu hat Ditlevsen (1996) kürzlich bemerkt, daß mit $\gamma = 0$ und kontinuierlicher Nutzung der baulichen Anlage, d.h. systematischer Wiederaufbau, keine Lösung des Optimierungsproblems existiert. Denkbar wäre allenfalls, daß Personenschäden mit einem kleineren Zinssatz $\gamma > 0$ zu kapitalisieren sind.

Nach Rosenblueth (1976) und Hasofer (1974) ist eine Lösung für beliebige, stationäre "Versagensprozesse", d.h. mit beliebiger Verteilungsfunktion der Zeiten bis zum Versagen, im Prinzip möglich (siehe Appendix A). Weitaus am wichtigsten ist jedoch der Fall relativ seltenen Versagens, der bei Rosenblueth/Mendoza (1971) und früher schon bei Barr (1970) ausführlich behandelt ist. Dann wird der Versagensprozeß zu einem Poissonprozeß mit der Versagensrate (Austrittsrate) $\nu(V_U(R, Q, S), p)$, die mit den Mitteln moderner Zuverlässigkeitsmethoden unschwer berechnet werden kann. Hierin ist $V_U(R, Q, S)$ der entsprechende Versagensbereich für den Grenzzustand der Tragfähigkeit, R der Vektor der nichtergodischen Variablen, Q der Vektor ergodischer Zufallsfolgen und S der Vektor der zufälligen Beanspruchungsprozesse. Einzige Annahme bei diesem Vorgehen ist, daß es sich bei dem Beanspruchungsprozeß $S(t)$ um einen stark mischenden Prozeß handelt. Das kann durch Einteilung der Variablen in die drei Typen aber fast immer erreicht werden (siehe unten). Die für Poissonsche Sprungprozesse geltenden

Ergebnisse von Rosenblueth/Mendoza werden im folgenden auf allgemeine Versagensprozesse übertragen und z.T. erweitert. Dann ist bei Aufgabe des Bauwerks nach dem Versagen

$$Z(p) = E_{R,Q} \left[\frac{b - H\nu^+(V_U(R, Q, S, p))}{\gamma + \nu^+(V_U(R, Q, S, p))} \right] - C(p) \quad (23)$$

und bei systematischem Wiederaufbau

$$Z(p) = \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H) \frac{E_{R,Q}[\nu^+(V_U(R, Q, S, p))]}{\gamma} \quad (24)$$

b/γ kann als B^* interpretiert werden. B^* liegt damit in der Größenordnung von 1. Man sieht, daß die erwarteten Schadenskosten endlich bleiben. Die Erwartungswerte sind jeweils über die nichtergodischen und ergodischen Variablen zu nehmen. Ein Optimum für $Z(p)$ existiert, da voraussetzungsgemäß $C(p)$ in p wachsend und $\nu(V_U(R, Q, S), p)$ in p fallend. Wenn $\nu(V_U(R, Q, S), p) \ll \gamma$, ist auch der Unterschied zwischen den den Gleichungen (23) und (24) zugrundeliegenden Strategien kaum merkbar, da Gl. (23) wie folgt genähert werden kann

$$\begin{aligned} Z(p) &= E_R \left[\frac{b - H\nu(V_U(R, Q, S, p))}{\gamma + \nu(V_U(R, Q, S, p))} \right] - C(p) \\ &\approx \frac{b}{\gamma} - C(p) - H \frac{E_{R,Q}[\nu(V_U(R, Q, S, p))]}{\gamma} \end{aligned} \quad (25)$$

Dieses Ergebnis ist insofern wichtig, als hier keine auf die Lebensdauer bezogenen Versagenswahrscheinlichkeiten mehr auftauchen sondern nurmehr eine Versagensrate. Auch die jeweilige beabsichtigte Nutzungsdauer taucht nicht mehr auf. Von großem praktischen Wert ist weiter die Tatsache, daß nur die erwartete Austrittsrate berechnet werden muß und das ist mit den modernen Methoden der Zuverlässigkeitstheorie wie FORM oder SORM leicht möglich (vergl. Rackwitz, 1998). Zeitabhängige Versagenswahrscheinlichkeiten sind im allgemeinen schwieriger zu berechnen und mit zusätzlichen Näherungen behaftet. Auch das inverse Problem, d.h. die direkte Optimierung der Zielfunktion (24) ist möglich (vergl. Kuschel/Rackwitz, 1998 und Appendix B).

3.4 Verschiedene Verallgemeinerungen

Einige wichtige Verallgemeinerungen sind möglich. Das Bauwerk kann in der Regel nicht nur in einem einzigen Versagensmodus versagen. In diesem Fall ist das Versagensereignis die Vereinigung der Versagensereignisse. Sowohl für Versagenswahrscheinlichkeiten als auch für Versagensraten, multipliziert mit einem (kleinen) Zeitintervall, gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m V_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(V_i) \quad (26)$$

Diese obere Schranke ist für alle praktischen Anwendungen ausreichend und kann gegebenenfalls mit Überlegungen wie in Schrupp/Rackwitz (1985) und Ditlevsen (1992) noch etwas verbessert werden. Also wird Gl. (12) zu

$$Z(p) \approx \frac{b}{\gamma} - C(p) - (C(p) + H) \frac{\sum_{i=1}^m E_{R,Q} [v(V_{U,i}(R, Q, S, p))]}{\gamma} \quad (27)$$

Dabei ist Unabhängigkeit der Kosten H und $C(p)$ vom jeweiligen Versagensmodus angenommen.

Oft sind die durch Verlust der Gebrauchsfähigkeit entstehenden Schäden erheblich. Es werde angenommen, daß auch diese noch einem Poissonprozeß folgen - wenigstens näherungsweise.. Tritt der Schaden ein, wird unverzüglich sein Ausmaß durch Inspektion festgestellt und dann repariert. Dann hat man

$$Z(p) \approx \frac{b}{\gamma} - C(p) - U \frac{\sum_{i=1}^{m_S} E_{R,Q} [v(V_{S,i}(R, Q, S, p))]}{\gamma} - (C(p) + H) \frac{\sum_{i=1}^{m_U} E_{R,Q} [v(V_{U,i}(R, Q, S, p))]}{\gamma} \quad (28)$$

Hierin sind nun U die (zeitunabhängigen) Reparaturkosten und $v(V_S(R, Q, S), p)$ die Eintrittsrates in den Zustand der Nichtgebrauchsfähigkeit. Den bei Reparatur entstehenden (mittleren) Nutzungsausfall berücksichtigt man am besten durch entsprechende Erhöhung der Reparaturkosten. Es gibt andere unterschiedliche oder in Verbindung mit der Häufigkeit von Überschreitungen verwendete Gebrauchsfähigkeitskriterien wie die individuelle oder gesamte Dauer einer Überschreitung eines gewissen Niveaus, die Höhe einer solchen Überschreitung über einem Niveau, etc.. Hier soll nur die Häufigkeit solcher Überschreitungen in Betracht gezogen werden, da diese die erwarteten Reparaturkosten am besten zu erfassen vermögen.

Inspektionskosten können auf ähnliche Weise berücksichtigt werden. Am einfachsten werden sie bei regelmäßigen Inspektionsintervallen durch entsprechende Verminderung von b berücksichtigt, also in der Form $b := b - i$.

Und man kann zusätzlich die Möglichkeit berücksichtigen, daß das Versagen jeweils bei Inbetriebnahme erfolgt. Dabei sei daran erinnert, daß bei zeitvarianten Aufgaben oft von der folgenden oberen Schranke für die Versagenswahrscheinlichkeit ausgegangen wird

$$P_f(t, p) \leq P_f(0, p) + E_{R,Q} [v(V(R, Q, S, p))t] \quad (29)$$

Hierin ist t die beabsichtigte Nutzungsdauer und $P_f(0, p)$ die Versagenswahrscheinlichkeit bei jeweiliger Inbetriebnahme. Dann ist vollständig mit den oben erläuterten Näherungen

$$\begin{aligned}
Z(p) &\approx \frac{b}{\gamma} \\
&- C(p) \\
&- U \frac{\sum_{i=1}^{m_S} E_{R,Q} [v(V_{S,i}(R, Q, S, p))]}{\gamma} \\
&- (C(p) + H) \frac{\sum_{i=1}^{m_U} P_{f,i}(0, p) + E_{R,Q} [v(V_{U,i}(R, Q, S, p))]}{\gamma}
\end{aligned} \tag{30}$$

Hierin ist m_S die Anzahl der Versagensmodi im Gebrauchsfähigkeitszustand. Im allgemeinen ist $P_{f,i}(0, p)$ klein und kann vernachlässigt werden. Formel (30) gewährleistet aber auch den Übergang zu dem oben diskutierten Fall des alleinigen Versagens bei Inbetriebnahme.

Ermüdungsversagen kann näherungsweise mit den gleichen Ansätzen behandelt werden. Meist handelt es sich um Schäden die sich durch Risse ankündigen und dann repariert werden können. Es sei nach Wöhler die mittlere, gegebenenfalls äquivalente Lastspielzahl $N = v_0 t = C \Delta S^{-m}$. v_0 ist die Zyklenrate und C und m Materialkonstanten. In guter Übereinstimmung mit dem Experiment sind dann die Lebensdauern exponentialverteilt mit dem Mittelwert

$$E[T_{erm}] = \frac{C}{v_0 \Delta S^m} \text{ und der Versagensprozeß ist ein Poissonprozeß mit dem Parameter}$$

$v_0 \Delta S^m / C$. Anstelle des Ausdrucks $E[v(\cdot)]$ in Gl. (30) ist also $E[v_0 (\Delta S / p)^m / C]$ zu setzen. ΔS^m ist bei Zufallsbelastung als schädigungsgleiche Einstufenbelastung zu nehmen. Der Parameter p wird hier beispielhaft bei der Größe der äquivalenten Einstufenbelastung angesetzt. Er könnte genau so gut als Divisor für C berücksichtigt werden. Ähnlich geht man bei anderen Alterungserscheinungen vor. Z.B. setzt man die mittlere Lebensdauer nach Arrhenius bei chemischen Alterungsvorgängen in die Exponentialverteilung ein. Andere Modelle für den Versagensprozeß, d.h. andere Lebensdauerverteilungen, behandelt man gegebenenfalls nach Rosenblueth (1976). Damit besteht also kein prinzipieller Unterschied zwischen Extremwertproblemen bei Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchsfähigkeit, für die die Poissonannahme gut zutreffen dürfte, und Alterungsversagen, für welches gegebenenfalls andere Modelle für die Versagenszeiten angemessen sind.

Schließlich kann auch noch unter bestimmten Umständen der Fall der Veraltung mit in die Betrachtungen einbezogen werden. Hierzu ist es notwendig auch für den Veraltungsprozeß einen vom Versagensprozeß unabhängigen Poissonprozeß anzunehmen. Für den Versagensprozeß als Poissonprozeß ist nämlich das Alter des Bauwerks irrelevant. Also dürfen Versagensprozeß und Veraltungsprozeß überlagert werden. Dann wird Gl. (30) der Vollständigkeit halber einschließlich des Anteils aus lastbedingter Ermüdung oder anderen Alterungserscheinungen mit den dazugehörigen Reparaturkosten M zu

$$\begin{aligned}
Z(p) \approx & \frac{b}{\gamma} \\
& - C(p) \\
& - U \frac{\sum_{i=1}^{m_S} E_{R,Q} [v(V_{S,i}(R, Q, S, p))] }{\gamma} \\
& - M \frac{\sum_{i=1}^{m_E} E_{R,Q} [v_0(p\Delta S)^m / C]}{\gamma} \\
& - (C(p) + A) \frac{\varpi}{\gamma} \\
& - (C(p) + H) \frac{\sum_{i=1}^{m_U} P_{f,i}(0, p) + E_{R,Q} [v(V_{U,i}(R, Q, S, p))] }{\gamma}
\end{aligned} \tag{31}$$

mit A den von p unabhängigen Abtragungs-(Demolierungs-)kosten und $1/\varpi$ dem mittleren Veraltungsalter. Der zusätzliche Term hängt nur unwesentlich von p ab. Unter den genannten Umständen vermindert Veralten praktisch nur den Nutzen und hat kaum Einfluß auf die optimale Lösung. Diese Aussage ist sicherlich etwas idealisierend. Sie wird von der Erfahrung aber auch nicht widerlegt. Zweckmäßigerweise bezieht man all Kostenanteile noch auf den konstanten Anteil C_0 , so daß Gl. (19) in Kurzform auch wie folgt geschrieben werden kann.

$$Z(p) = B^* - C(p) - U(p) - M(p) - A(p) - D(p) \tag{31a}$$

Ohne die Erweiterungen lautet die Zielfunktion

$$Z(p) = B^* - C(p) - D(p) \tag{31b}$$

Für die durch Ermüdungsschäden verursachten erwarteten Kosten ist der Ansatz in G. (31) nicht sehr realistisch, obwohl er den generellen Trend wiedergeben dürfte. Man kann jedoch nach Hasofer (1974) mithilfe der Laplacetransformationen vorgehen. Für eine rayleighverteilte Dauer bis zum Ermüdungsschaden hat man nach Gl. (A.17) beispielsweise

$$f^*(\gamma, w) = 1 - \gamma w \sqrt{\pi} \frac{\exp(\frac{1}{4} \gamma^2 w^2)}{2} \operatorname{erffc}\left(\frac{1}{2} \gamma w\right)$$

und damit für den Ermüdungsanteil

$$E(p) \approx E_r [E f^*(\gamma, w)]$$

$$\text{mit } w = E[T_{erm}] / \Gamma(3/2) = \frac{C}{0.886 v_0 (\Delta S / p)^m}.$$

Die Betrachtungen gehen durchwegs von Stationarität des Versagensprozesses bzw. des Erneuerungsprozesses für Bauwerke aus. Das bedeutet nicht, daß Stationarität des

Zustandsprozesses, also von $g(R, Q, S(t), p)$, auch innerhalb der Lebensdauer eines Bauwerks gegeben sein muß.

3.5 Berechnung von Austrittsraten

Nachstehend sollen einige Ergebnisse mitgeteilt werden um zu verdeutlichen, daß diese Aufgabe mit den entsprechenden rechnerischen Hilfsmitteln gut bewältigt werden kann. Die praktische Berechnung von Austrittsraten beruht auf einigen wenigen Annahmen, die im allgemeinen erfüllt sind. Nach Schall et al. (1991) werden drei Typen von Variablen, R , Q , S , unterschieden.

- R ist ein Vektor von Zufallsvariablen. Er wird zur Modellierung von Widerstandsvariablen sowie zur Modellierung von unsicheren Parametern der Q - oder S -Variablen verwendet.
- Q ist ein Vektor von stationären und ergodischen Zufallsfolgen. Er dient der Modellierung von längerdauernden Beanspruchungszuständen (Verkehrszuständen, Windzustände, etc.).
- S ist ein Vektor von ausreichend mischenden, nicht notwendigerweise stationären Prozeßvariablen, deren Parameter von Q und/oder R abhängen können.
- Der sichere Zustand ist durch $g(r, q, s(t), t) > 0$ definiert, der Grenzzustand durch $g(r, q, s(t), t) = 0$ und der Versagenszustand durch $g(r, q, s(t), t) < 0$.

Die bedingte Austrittsrate ist dann

$$\nu^+(V, \tau | r, q) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(\{g(S(\tau), \tau) > 0 | r, q\} \cap \{g(S(\tau + \Delta), \tau + \Delta) \leq 0 | r, q\}) \quad (32)$$

mit $V = \{g(r, q, s(t), t) \leq 0\}$. Der Austrittsprozeß muß ein regulärer Prozeß sein (siehe z.B., Cramer/Leadbetter, 1967, oder Cox, 1961). Die mittlere Anzahl der Austritte ist dann

$$E[N^+(t_1, t_2) | q, r] = \int_{t_1}^{t_2} \nu^+(V, \tau | q, r) d\tau \quad (33)$$

Asymptotisch, d.h. für kleine bis sehr kleine Versagenswahrscheinlichkeiten und wenn die Beanspruchungsprozesse ausreichend mischend (= asymptotisch unabhängig) sind, ist dann (Cramer/Leadbetter, 1967; Schall et al., 1991)

$$P_f(t_1, t_2) \approx 1 - E_R \left[\exp \left[-E_Q E[N^+(t_1, t_2) | q, r] \right] \right] \quad (34)$$

und eine obere Schranke ist (Bolotin, 1981; Schall et al., 1991)

$$P_f(t_1, t_2) \leq P(g(R, Q, S, t_1) \leq 0) + E_{R, Q} \left[E[N^+(t_1, t_2) | r, q] \right] \quad (35)$$

Gl. (22) und (23) sind Grundlage aller Berechnungen für zeitvariante Versagenswahrscheinlichkeiten. Gl. (22) belegt insbesondere die wenigstens asymptotisch gültige Annahme eines Poissonschen Versagensprozesses.

Rechteckwellenerneuerungsprozesse

Breitung/Rackwitz (1982) haben gezeigt, daß unter stationären Bedingungen:

$$\begin{aligned}
v^+(V, \tau) &= \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i \left[P(\{S_i^- \in \bar{V}\} \cap \{S_i^+ \in V\}) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i \left[P(S_i^+ \in V) - P(\{S_i^+ \in V\} \cap \{S_i^- \in V\}) \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

worin S_i der Vektor der mit Rate λ_i springenden Komponenten vor einem Sprung und S_i^+ der Vektor nach einem Sprung ist. Die Wahrscheinlichkeiten in Gl. (36) können mit FORM/SORM berechnet werden. Breitung (1993) zeigte, daß asymptotisch sogar

$$v^+(V, \tau) \approx \sum_{i=1}^{n_s} \lambda_i \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n_s-1} (1 - \beta \kappa_j)^{-1/2} \tag{37}$$

Hierin ist β der bekannte Zuverlässigkeitsindex und die κ_j 's sind die Hauptkrümmungen im β -Punkt und β ist, wie üblich, definiert durch

$$\beta = \min\{\|u\|\} \quad \text{für} \quad g(u) \leq 0$$

In erster Näherung kann der Krümmungsterm gleich Eins gesetzt werden. Für kleine β -Werte kann eine Verbesserung vorgenommen werden (siehe Rackwitz, 1997a)

Gaußsche Prozesse

Die Austrittsrate für einen stationären, standardisierten, skalaren Gaußschen Prozeß ist

$$v(V, r, q) = \frac{\varphi(\beta)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{|\det(G)|} \right)^{1/2} \omega_0 \tag{38}$$

mit

$$\omega_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \rho_S(\tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_1 = \tau_2}$$

und G der Hessematrix der Grenzzustandsfunktion im Standardraum. β ist wie oben definiert. Auch für gewisse nichtnormale Prozesse liegen kompakte Resultate vor. Für das Ergebnis erster Ordnung entfällt G . Dann ist auch das Ergebnis für stationäre, standardisierte Gaußschen Vektorprozesse einfach. Es gilt Formel (39) mit

$$\omega_0^2 = -\alpha^T \ddot{R} \alpha$$

mit

$$\ddot{R} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \rho_{S,ij}(\tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_1 = \tau_2}, i, j = 1, \dots, n_S \right\}$$

der Matrix der zweiten Ableitungen der Korrelationsfunktionsmatrix R . β ist wieder wie oben definiert.

Kombinierte Rechteckwellen – und differenzierbare Prozesse

Rechteckwellenprozesse und differenzierbare Prozesse lassen sich einfach kombinieren, da die Regularität des Austrittsprozesses eine einfache Addition erlaubt. Man hat

$$v(V, r, q) = v_J(V, r, q) + v_D(V, r, q) \quad (40)$$

d.h. entweder hat der Sprungprozeß einen Austritt oder der differenzierbare Prozeß. Bei der Berechnung von $v_J(V, r, q)$ bzw. $v_D(V, r, q)$ wird der jeweils andere Prozeßtyp wie R -Variable behandelt.

Die Berechnung von Austrittsraten kann schließlich noch auf intermittierende Lastprozesse erweitert werden. (vergl. Shinozuka, 1981).

3.6 Numerische Berechnungen

Einige numerische Berechnungen können die allgemeinen Zusammenhänge und Einflüsse aufzeigen. Hierzu soll als Belastung der in Gl. (37) angegebene hier eindimensionale Rechteckwellenprozeß mit Austrittsrate $v^+(V, \tau) \approx \lambda \Phi(-\beta)$ als stellvertretend für andere Belastungen genommen werden. Die Zustandsfunktion ist $g_U(x) = R - S$ für den Grenzzustand

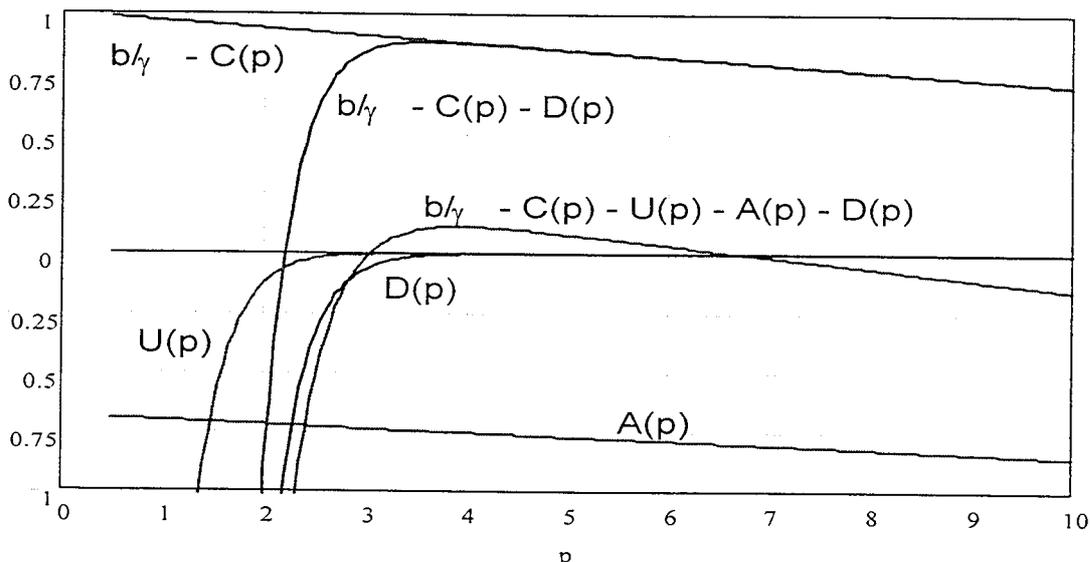


Abb. 5: Kostenanteile über Parameter p (R und S lognormalverteilt, $\lambda=1$, $b=2\gamma=0.07$, $U/C_0 = A/C_0 = 0.2$, $C_I/C_0 = 0.03$, $H/C_0 = 3$, $\varpi = 0.02$, $a = R_U/R_S = 1.5$)

der Tragfähigkeit und $g_U(x) = R/a - S$ für den Grenzzustand der Gebrauchsfähigkeit. Als Parameter wird der zentrale Sicherheitsbeiwert $p = \gamma = m_R/m_S$ gewählt. Somit lautet Gl. (31) etwas vereinfacht (Materialermüdungsversagen und Versagen bei Inbetriebnahme vernachlässigt)

$$\begin{aligned}
Z(p) \approx & \frac{b}{\gamma} \\
& - (C_0 + C_1 p) \\
& - U \frac{\lambda \Phi \left(\frac{\ln \left\{ \frac{p}{a} \sqrt{\frac{1+V_R^2}{1+V_S^2}} \right\}}{\sqrt{\ln((1+V_R^2)(1+V_S^2))}} \right)}{\gamma} \\
& - (C_0 + C_1 p + A) \frac{\varpi}{\gamma} \\
& - H \frac{\lambda \Phi \left(\frac{\ln \left\{ p \sqrt{\frac{1+V_R^2}{1+V_S^2}} \right\}}{\sqrt{\ln((1+V_R^2)(1+V_S^2))}} \right)}{\gamma}
\end{aligned} \tag{41}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen entspricht das Argument in $\Phi(\cdot)$ dem Zuverlässigkeitsindex. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten sind in diesem Fall exakt. Die optimale Versagensrate erhält man durch numerisches Differenzieren von Gl. (41) und numerische Lösung von

$$\frac{\partial Z(p)}{\partial p} = 0 \tag{42}$$

Abb. 5 veranschaulicht zunächst folgendes: Größe und Lage des Optimums hängen ganz wesentlich vom Kostenansatz, d.h. nach Gl. (31a) oder Gl. (31b) ab. Insbesondere vermindern Reparaturen nach Gebrauchsfähigkeitsschäden und Erneuerungen nach Veraltung den sinnvollen Bereich. Im einzelnen untersucht wird:

- Einfluß der Streuungen von R und S auf die Lage des Optimums
- Einfluß der Verteilungsfunktionen von R und S auf die Lage des Optimums
- Einfluß der relativen Größe von b und γ auf die Lage des Optimums
- Einfluß des Verhältnisses H/C_0 auf die Lage des Optimums
- Einfluß des Verhältnisses C_1/C_0 auf die Lage des Optimums
- Einfluß von Reparaturkosten auf Größe und Lage des Optimums sowie der relativen Größe der Versagensraten in den Grenzzuständen der Tragfähigkeit und der Gebrauchsfähigkeit
- Einfluß der Veraltung auf Größe und Lage des Optimums

Gl. (31) besagt, daß die Zielfunktion niemals positiv werden kann, wenn b nur wenig größer ist als γ . Im Hinblick auf die normalerweise anfallenden Reparaturen und die Veraltung muß man davon ausgehen, daß b etwa das Doppelte von γ betragen muß um wirtschaftlich sinnvolle Bauwerke zu errichten.

Die Veraltung beeinflusst die Lage des Optimums praktisch nicht, sie beeinflusst dagegen den sinnvollen Bereich. Je höher die Abbruchkosten und/oder die Veraltungsrate ϖ werden, umso enger wird der sinnvolle Bereich.

Wie schon angedeutet, sind für die Annahmen in Abb. 5 die optimalen Versagensraten bei Berücksichtigung aller Kosten (Gl. (31a)) um rund eine halbe Zehnerpotenz kleiner als bei ausschließlicher Berücksichtigung der Schadenskosten (Gl. (31b)). Das liegt, wie gezeigt werden kann, vor allem an den Unterhaltungskosten. Die entsprechende Versagensrate im Hinblick auf den Gebrauchsfähigkeitszustand liegt bei rund 0.01. Sie verschiebt sich nach oben oder unten wie die zugehörige Versagensrate für den Grenzzustand der Tragfähigkeit. Das liegt natürlich daran, das sich die Grenzzustände der Gebrauchsfähigkeit und der Tragfähigkeit für den Ansatz (41) nur durch einen Faktor unterscheiden.

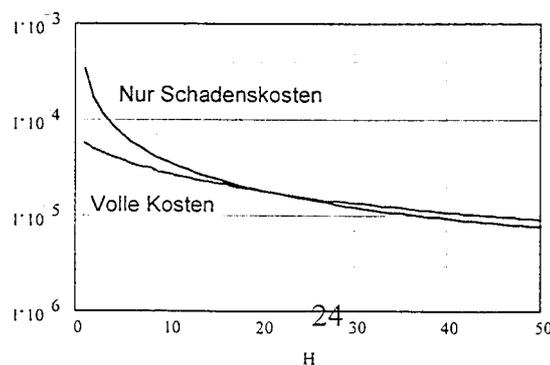
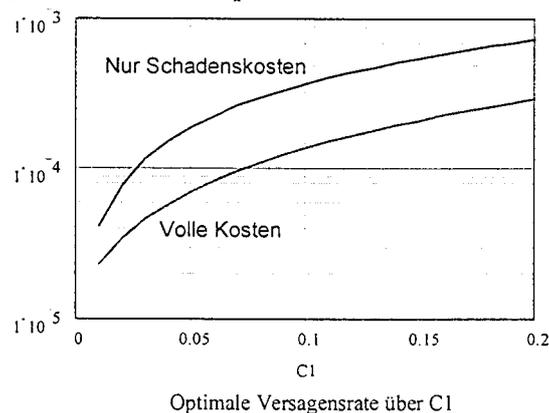
Bei Erhöhung von C_1 um eine Größenordnung erhöht sich auch die optimale Versagensrate um rund eine Größenordnung. Alle Ergebnisse hängen natürlich von den Annahmen für die nicht variierten Parameter ab. Diese dürften für normale Bauwerke nicht unrealistisch sein. Bei Brücken und Sonderbauwerken muß man sie modifizieren.

Bei Verringerung der Schadenskosten H um eine Größenordnung verringert sich die optimale Versagensrate ebenfalls um etwa eine Größenordnung.

Der Variationskoeffizient von Einwirkung und Widerstand haben sehr großen Einfluß auf die Höhe der optimalen Versagensrate. Hierzu ist aber zu bemerken, daß die Lognormalverteilung kein gutes Lastmodell ist. Die Lognormalverteilung hat im oberen Bereich zu viel Wahrscheinlichkeitsmasse. Insgesamt kommt der richtigen Wahl des stochastischen Modells große Bedeutung auf Lage und Größe des Optimums zu.

Schließlich wurde der Parameter ϖ variiert. Mit zunehmenden ϖ wird die optimale Versagensrate größer, d.h. schnelle Erneuerungen nach Veraltung können dazu führen weniger sicher zu bauen.

Bemerkenswert ist, daß die Größe der optimalen Versagensraten den Erfahrungen aus Kalibrationsrechnungen durchaus entspricht.



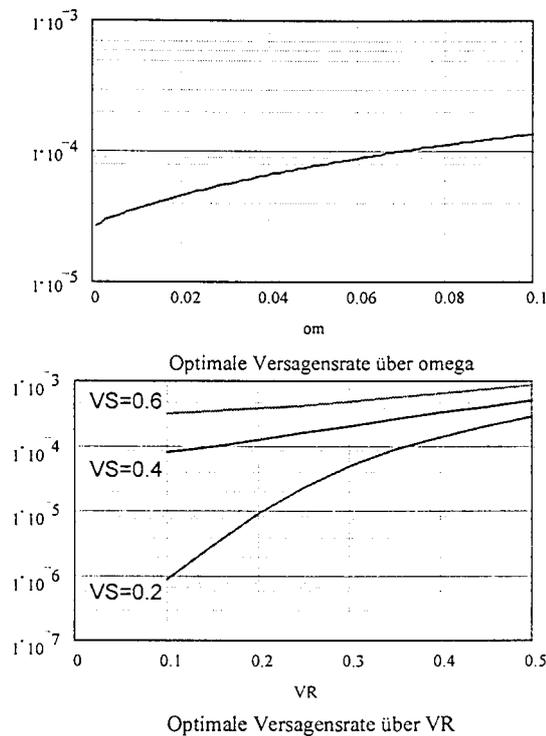


Abb. 6: Optimale Versagensraten über verschiedenen Parametern

3.7 Partielle Sicherheitsfaktoren

Die Berechnung von auf eine Referenzzeit bezogenen Teilsicherheitsfaktoren für zeitvariante Probleme, d.h. für auf die Referenzzeit bezogene Versagenswahrscheinlichkeiten, ist in Rackwitz (1997a) und Rackwitz/El Meligy (1997) diskutiert. Eine Berechnung von auf die Versagensrate bezogenen Teilsicherheitsbeiwerten ist ebenfalls möglich. Hierzu wird zunächst davon ausgegangen, daß die erwartete Versagensrate eine Zahl $\ll 1$ ist. Weiter muß der Zeitbezug immer einheitlich sein, z.B. 1 Jahr. Dann gilt eine Definition wie im zeitinvarianten Fall, allerdings mit modifizierten Zuverlässigkeitsindex, der die Lastwechselfrequenzen richtig berücksichtigt. Es ist also

$$\gamma_i = \frac{x_i^*}{x_{c,i}} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_i = \frac{x_{c,i}}{x_i^*} \quad (43)$$

je nachdem ob es sich um eine "Lastvariable" oder um eine "Festigkeitsvariable" handelt. Dabei ist

$$x_i^* = F_i^{-1}(\Phi(-\alpha_i \beta_{equ})) \quad (44)$$

und

$$x_{c,i} = F_i^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (45)$$

$F_i(\cdot)$ ist die Verteilungsfunktion der Basisvariablen. Bei Lastvariablen ist dies die Verteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt, also keine Extremwertverteilung. u_i hängt von der Definition des jeweiligen charakteristischen Wertes ab. β_{equ} ist der äquivalente Sicherheitsindex. Nun ist nach Gl. (37)

$$v_J = \sum \lambda_i \Phi(-\beta_{equ}) C_{SORM} \quad (46)$$

und nach Gl. (38)

$$v_D = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\beta_{equ}) C_{SORM} \quad (47)$$

und somit

$$\beta_{equ} = -\Phi^{-1}\left(\frac{v_J}{\sum \lambda_i C_{SORM}}\right) \quad (48)$$

bzw.

$$\beta_{equ} = \sqrt{-2 \ln\left(\frac{2\pi v_D}{\omega_0 C_{SORM}}\right)} \quad (49)$$

Bei Beanspruchungen aus beiden Typen von Belastungsprozessen muß β_{equ} aus

$$v_J + v_D = \sum \lambda_i \Phi(-\beta_{equ}) C_{SORM} + \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\beta_{equ}) C_{SORM} \quad (50)$$

iterativ ermittelt werden. C_{SORM} ist in beiden Fällen gleich groß. Für v_J , v_D bzw. $v_J + v_D$ müssen also die jeweiligen zulässigen Werte v_{zul} eingesetzt werden damit der entsprechende, äquivalente Sicherheitsbeiwert in Formel (43) berechnet werden kann. C_{SORM} wird in der Regel zu Eins gesetzt.

Damit kann bei allen stationären Poissonschen Versagensprozessen formal die gleiche Definition für Teilsicherheitsbeiwerte wie im zeitinvarianten Fall beibehalten werden.

4. Allgemeine Schlußfolgerungen

4.1 Extremwertversagen

Die vorstehende ausführliche Darstellung der über 25 Jahre alten Ansätze von Rosenblueth und anderen sind unglücklicherweise in Vergessenheit geraten und haben in der Normung zu Entwicklungen geführt, die im Lichte dieser Ansätze revidiert und verbessert werden müssen.

Wenn davon ausgegangen wird, daß bei jedem Bauwerksversagen, zumindest gedanklich, systematischer Wiederaufbau erfolgt, so ist über die Versagensrate zu optimieren – und nicht über eine auf eine willkürlich gewählte Referenzzeit bezogene Versagenswahrscheinlichkeit. Bei zeitabhängigen Zuverlässigkeitsproblemen ist ein Kapitalisierungsansatz zwingend notwendig. Andernfalls ist eine optimale Lösung theoretisch nicht möglich (unendlich viele “Erneuerungen”

und daher unendlich große Versagenskosten). Als Sicherheitsmaß ist daher eine Versagensrate (Wahrscheinlichkeit des Versagens pro Zeiteinheit) zu nehmen. Als Zeiteinheit sollte 1 Jahr gewählt werden. Hierfür können Teilsicherheitsbeiwerte bestimmt werden. Man muß jedoch einen äquivalenten Zuverlässigkeitsindex berechnen, der die zulässige Versagensrate sowie die Änderungsfrequenz der Belastungen berücksichtigt.

Die Definition von Zuverlässigkeitsanforderungen muß sich vor allem an der gegenwärtigen Praxis orientieren. Als Arbeitshypothese für eine wahrscheinlichkeitstheoretische Formulierung solcher Anforderungen muß gelten, daß die derzeitige Praxis auf bestimmten Gebieten bereits von der Wirtschaftlichkeit her optimal ist und das Sicherheitsbedürfnis der Gesellschaft befriedigt (Lind 1977). Hieraus wurde in DIN *Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen*, 1981, für bauaufsichtliche Zwecke eine Tabelle von anzuzielenden Zuverlässigkeitsindizes entwickelt. Diese kann einstweilen noch beibehalten werden, da Kalibrationsrechnungen nach dem neuen Konzept fehlen. Auf der Grundlage der vorstehenden Optimierungsrechnungen kann man eine neue Tabelle aufstellen. Die Rechnungen wurden auch für andere Verteilungsannahmen durchgeführt. Die Ergebnisse von Abschnitt 3.9 konnten damit im wesentlichen bestätigt werden. Zur Unterscheidung wird dem neuen auf ein Jahr bezogenen Zuverlässigkeitsindex der Index "v" beigegeben.

Tabelle von anzuzielenden Zuverlässigkeitsindizes $\beta_v = -\Phi^{-1}(v_{zulässig})$

(je kritische Bauwerkskomponente und 1 Jahr)

Größe des Aufwands für Zuverlässigkeit	Zustände der Gebrauchsfähigkeit	Größe	Zustände der Tragfähigkeit der	Schadensfolgen
		Gering	Normal	Groß
Groß	1.3	2.3	3.1	3.7
Normal	1.7	3.1	3.7	4.3
Unbedeutend	2.3	3.7	4.3	4.7

Wie schon in den Tabellen in Abschnitt 2.1 bedeutet die Stufung "Gering-Normal-Groß" bzw. "Unbedeutend-Normal-Groß" jeweils eine Größenordnung in Übereinstimmung mit Abschnitt 3.6. Die Tabellen sind verträglich mit den bisherigen Überlegungen für außergewöhnliche Beanspruchungen (z.B. Sicherheitserdbeben (SSE) bei baulichen Industrieanlagen mit hohem Schadensrisiko, Fahrzeug- und Schiffsanprall, Staubauwerke), bei denen man annehmen muß daß die Schadensfolgen hoch sind bei gleichzeitig hohem Aufwand zur Erzielung des optimalen Niveaus. Solche extremen Ereignisse sind als Ereignisse mit einer mittleren Wiederkehrdauer von 10000 Jahren definiert. Bekanntlich verlangt man aber nach einem solchen Ereignis noch eine sichere Abwendung der größten denkbaren Schadensfolgen. Bei tatsächlichem Kollaps und damit noch höheren Schadensfolgen müßte eine noch kleinere Versagensrate als in vorstehender Tabelle gewählt werden. Andererseits sind die relativen Aufwendungen für Sicherheit für viele Anwendungen im Hoch- und normalen Industriebau eher als gering einzustufen (Rohbaukosten nur ein Bruchteil der Gesamtkosten). Daher ist dort ein Sicherheitsindex von $\beta_v = 4.3$ eher angemessen. Im Hinblick auf Abb. 6 kann auch erwogen werden, für Bauteile, die mit relativ gering streuenden Einwirkungen beaufschlagt werden, also im wesentlichen durch Eigengewicht, jeweils um eine Stufe höhere Sicherheitsindizes anzusetzen. Die Zuverlässigkeitsanforderungen an die Gebrauchsfähigkeit müssen als relativ konservativ aufgefaßt werden. Auf Dauer gerechnet entspricht ein Gebrauchsfähigkeitsschaden von 20 % der Erstellungskosten bei einer Auftrittsrate von $5 \cdot 10^{-2}$ gerade einmal 1 % der Erstellungskosten. Das erscheint wenig wirklichkeitsnah.

Gebrauchsfähigkeitsschäden sind nicht unbedingt größer aber viel häufiger. Alle Angaben können jedoch nur in der Größenordnung als richtig verstanden werden. Insgesamt ist die vorgeschlagene neue Tabelle der entsprechenden Tabelle nach ECCS (1992) in Abschnitt 2.1 in den Zahlenwerten sehr ähnlich. Als Zeitbezug hat sie jedoch 1 Jahr und nicht die Nutzungsdauer. Beachtliche Unterschiede ergeben sich jedoch mit der Tabelle nach DIN: *Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen*, 1981.

4.2 Ermüdungs- und Alterungsversagen

Bei Ermüdungs- und Alterungsproblemen sind die Zeiten zwischen dem Versagen im allgemeinen nicht exponential verteilt. Verlust der Dauerhaftigkeit entsteht oft durch chemische Prozesse, deren Natur und aktueller Verlauf weitgehend unbekannt ist. In beiden Fällen müssen Zeitrafferversuche unter möglichst realistischen Bedingungen durchgeführt werden und diese unter Zugrundelegung geeigneter Modelle ausgewertet werden. Bei Materialermüdung ist die experimentelle Vorgehensweise gut bekannt. Bei chemisch bedingter Alterung gibt es noch keine einheitlichen Vorgehensweisen. Im Prinzip unterscheiden sich die Vorgehensweisen bei Materialermüdung und chemisch bedingter Alterung aber nicht. Wenn die Versagenszeiten nicht exponentiell verteilt sind, ist die vorstehend beschriebene Theorie nicht mehr anwendbar. Im Grenzfall kann es sich bei den Versagenszeiten sogar um eine deterministische Größe handeln. Trotzdem kann die Folge von Versagen und Wiederherstellung als stationärer Erneuerungsprozeß aufgefaßt werden. Eine der Versagensrate ähnliche Größe ist die Erneuerungsichte $h(t)$ für die in der Erneuerungstheorie die folgende asymptotische Beziehung abgeleitet wird (siehe z.B. Gnedenko et al. 1968)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{m} \quad \text{für} \quad f(t) \rightarrow 0 \quad \text{wenn} \quad t \rightarrow \infty$$

mit $f(t)$ der Dichte der Versagenszeiten und m dem Mittelwert der Zeiten zwischen den Erneuerungen. Die Bedingung für die Dichte der Versagenszeiten ist unter praktischen Gegebenheiten immer erfüllt. Dieses Ergebnis ist anschaulich so zu deuten, daß in einem kleinen Zeitintervall (z.B. 1 Jahr) gerade $1/m$ Erneuerungen stattfinden. Der Grenzübergang bedeutet, daß der Erneuerungsprozeß schon vor langer Zeit begonnen hatte. Die asymptotische Erneuerungsichte hängt nur von m und nicht von Details der Verteilungsfunktion der Zeiten zwischen dem Versagen ab. Im Experiment muß nur der Mittelwert der Lebensdauern bestimmt werden. Demnach muß also die asymptotische Erneuerungsichte $h(\infty) = 1/m$ einer zulässigen Versagensrate wie in vorstehender Tabelle gegenübergestellt werden. Das bedeutet, daß bei Ermüdungs- und Alterungsversagen beim Zuverlässigkeitsnachweis in der Tat anders vorgegangen werden muß als bei Extremwertversagen. Bemessungsregeln müssen, ausgehend von der jeweils zulässigen Versagensrate, die mittlere Lebensdauer

$$m \geq \frac{1}{V_{\text{zulässig}}}$$

nachweisen. Gewisse Techniken, den auf der linken Seite stehenden Erwartungswert zu berechnen, sind in Appendix E angegeben. In diesem Fall können keine Teilsicherheitsbeiwerte wie bei Extremwertversagen angegeben werden. Dieses Ergebnis wird als bedeutend angesehen, da bisher kein konsistentes Konzept für den Nachweis bei Ermüdungs- und Alterungsversagen vorlag und die *Grundlagen für die Festlegung von Sicherheitsanforderungen für bauliche Anlagen*, 1981, diesbezüglich ergänzt.

Literatur

- Barr, D.R., A Class of General Reliability Growth Prediction Models, *Operations Research*, 18, 1, 1970, pp. 52-65
- Bolotin, V.V., *Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1981
- Breitung, K., Asymptotic Approximations for the Outcrossing Rates of Stationary Vector Processes, *Stochastic Processes and their Applications*, 29, 1988, 195-207
- Breitung, K., Asymptotic Approximations for the Crossing Rates of Poisson Square Waves, *Proc. Extreme Value Theory and Applications*, NIST Spec. Publ. 866, 3, 1993, pp. 75-80
- Breitung, K., Rackwitz, R., Nonlinear Combination of Load Processes, *Journ. Struct. Mech.*, 10, 2, 1982, pp. 145-166
- Cramer, H., Leadbetter, M.R., *Stationary and Related Processes*, Wiley&Sons, New-York, 1967
- Cox, D.R., Miller, H.D., *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman&Hall, London, 1965
- Ditlevsen, O., Risk Acceptance Criteria and/or Decision Optimization, Memorandum JCSS, 1995
- Ditlevsen, O., Series System Second Order Bounds on Vector Process Outcrossing Rates, *Proceedings of the 5th IFIP WG 7.5 Working Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, Takamatsu, Japan, 24.-26.3.1993, pp. 47-53
- ECCS-JCSS, Background Documentation Eurocode 1 (ENV 1991), Part 1: Basis of Design, 1996, Report No 94, ECCS, Brussels
- Gnedenko, B.W., Belyayew, Y.K., Solowjew, A.D., *Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I+II*, Akademie-Verlag, Berlin, 1968
- Hasofer, A.M., Design for Infrequent Overloads, *Earthquake Eng. and Struct. Dynamics*, 2, 4, 1974, pp. 387-388
- Iizuka, H., A Statistical Study on Life Time of Bridges, *Proc. JCSE, Struct. & Earthquake Eng.*, 5, 1, 1988, pp. 51s-60s
- Kuschel, N., Rackwitz, R., Two Basic Problems in Reliability-Based Structural Optimization, *Mathematical Methods of Operations Research*, 46, 1997, 309-333 Kuschel/Rackwitz???
- Kuschel, N. Rackwitz, R., Structural Optimization under Time-variant Reliability Constraints, 8th IFIP WG 7.5 Conf. Krakow, 1998, wird veröffentlicht
- Krzykacs, B., Kersken-Bradley, M., *Wahrscheinlichkeitstheoretische Analyse der Lebensdauervertelung nach Freudenthal et al.*, *Berichte zur Sicherheitstheorie der Bauwerke*, Technische Universität München, Heft 12, 1976
- KTA 2201 - Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen, Teil 1 - 3, 1990

Mann, N.R., Schaefer, R.E., Singpurwalla, N.D., Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, Wiley, New York, 1974

Rackwitz, R., A Concept for Deriving Partial Safety Factors for Time-variant Reliability, in: Proc. ESREL' 97, Advances in Safety and Reliability (Ed. C. Guedes Soares), Pergamon, 1997, pp. 1295-1305

Rackwitz, R., Approximate Combination of Differentiable Vector Processes- A Review -RCP-GmbH, München, Technical Note, 1997a

Rackwitz, R., M. El Meligy, Reliability for Load and Non-load Induced Strength Deterioration – Derivation of Partial Safety Factors, ICOSSAR'97, Kobe, 1997, wird veröffentlicht

Rackwitz, R.: Computational techniques in stationary and non-stationary load combination – A review and some extensions, Journal of Structural Engineering, Vol. 25, No.1, 1998, pp.1-20

Rosenblueth, E., Mendoza, E., Reliability Optimization in Isostatic Structures, Journ. Eng. Mech. Div., ASCE, 97, EM6, 1971, pp. 1625-1642

Rosenblueth, E., Optimum Design for Infrequent Disturbances, Journ, Struct. Div., ASCE, 102, ST9,1976, pp. 1807-1825

Schall, G., Faber, M., Rackwitz, R., The Ergodicity Assumption for Sea States in the Reliability Assessment of Offshore Structures, Journ. Offshore Mech. and Arctic Eng., ASME, 113 , 3, 1991, pp. 241-246

Schittkowski, K., User's Guide for Nonlinear Programming, Handbook to optimization program package NLPQL, Universität Stuttgart, Institut für Informatik, 1985

Schrupp, K., Rackwitz, R., Outcrossing Rates of Gaussian Vector Processes for Cutsets of Componential Failure Domains, in: Proc. ICOSSAR'85, Kobe, (Ed. I. Konishi et al.), 1985, pp. 601-609

Shinozuka, M., Stochastic Characterization of Loads and Load Combinations, Proc. 3rd ICOSSAR, Trondheim 32-25 June, 1981, Structural Safety and Reliability, (Eds. T. Moan and M. Shinozuka), Elsevier, Amsterdam, 1981

Appendix A: Ableitung des allgemeinen Falls

Die Bedeutung der allgemeinen Einsichten aus dem dargestellten Konzept rechtfertigt eine detaillierte, nachvollziehbare Ableitung der Ergebnisse. Hasofer (1974) und Rosenblueth (1976) gehen für den allgemeinen Fall wie folgt vor. Sie nehmen an, daß die Struktur durch einen (seltenes) Belastungsereignis beansprucht wird. Bei diesem Ereignis ist die Versagenswahrscheinlichkeit $P_f(p)$. Der Auftrittsprozeß ist ein Erneuerungsprozeß mit der Verteilungsfunktion $F_I(t)$ für die Zeit bis zum ersten Ereignis und $F(t)$ der Verteilungsfunktion zwischen den Ereignissen. Die Zeiten bis zum ersten Ereignis und die Zeiten zwischen den Ereignissen seien unabhängig. Die Dichtefunktion für das erste Ereignis ist

$$g_1(t, p) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t) P_f(p) R(t, p)^{i-1} \quad (\text{A.1})$$

$f_i(t)$ ist die Dichtefunktion der Zeit bis zum i -ten Ereignis. Sie hängt nicht vom Bemessungsparameter p ab. Diese ist rekursiv definiert.

$$f_{n+1}(t) = \int_0^t f_n(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (\text{A.2})$$

Das ist ein sogenanntes Faltungsintegral. Mit einem Stern werde eine Laplacetransformierte bezeichnet.

$$f^*(\theta) = \int_0^{\infty} \exp[-\theta t] f(t) dt \quad (\text{A.3})$$

Für Faltungsoperationen gilt im transformierten Raum

$$f_{n-1}^*(\theta) = f_n^*(\theta) f^*(\theta) \quad (\text{A.4})$$

und somit

$$h_1^*(t, p) = \sum_{i=1}^{\infty} f_1^*(\theta) f_{n-1}^*(\theta) P_f(p) R(t, p)^{i-1} = \frac{P_f(p) f_1^*(\theta)}{1 - R(t, p) f^*(\theta)} \quad (\text{A.5})$$

und

$$h^*(t, p) = \sum_{i=1}^{\infty} f^*(\theta) f_{n-1}^*(\theta) P_f(p) R(t, p)^{i-1} = \frac{P_f(p) f^*(\theta)}{1 - R(t, p) f^*(\theta)} \quad (\text{A.6})$$

Der gegenwärtige erwartete Schaden ist gleich

$$\begin{aligned}
D(p) &= (C(p) + H) \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} g(t) h_i(t) dt \\
&= (C(p) + H) \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-\gamma t] h_i(t) dt \\
&= (C(p) + H) \sum_{i=1}^{\infty} h_i^*(\gamma) h^*(\gamma)^{i-1} \\
&= (C(p) + H) \frac{h_1^*(\gamma)}{1 - h^*(\gamma)}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

wobei in der zweiten Zeile genau die Laplacetransformation steht und für $h_i(t)$ eine rekursive Beziehung wie in Gl. (A.2) gilt:

$$h_{n+1}(t) = \int_0^t h_n(t - \tau) h(\tau) d\tau \tag{A.8}$$

Einsetzen von Gl. (A.5) und (A.6) in (A.7) ergibt schließlich für die Schadenskosten

$$D = (C(p) + H) P_f(p) \frac{f_1^*(\gamma)}{1 - f^*(\gamma)} \tag{A.9}$$

Für den Poissonprozeß mit Intensität λ ist

$$f_1^*(\gamma) = f^*(\gamma) = \int_0^{\infty} \exp[-\gamma t] \lambda \exp[-\lambda t] dt = \frac{\lambda}{\gamma + \lambda} \tag{A.10}$$

und daher

$$D = (C(p) + H) P_f(p) \frac{\frac{\lambda}{\gamma + \lambda}}{1 - \frac{\lambda}{\gamma + \lambda}} = (C(p) + H) P_f(p) \frac{\lambda}{\gamma} \tag{A.11}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (). In $f_1^*(\gamma) = f^*(\gamma)$ kommt die "Erinnerungslosigkeit" des Poissonprozesses zum Ausdruck. Man beachte hier die formale Ähnlichkeit zu Gl. (24).

Hasofer (1974) leitet noch eine Näherung für $f^*(\gamma)$ für kleine γ ab, die manchmal nützlich sein kann. Wenn μ_1 und σ_1 Mittelwert und Standardabweichung der Zeit zwischen Inbetriebnahme und erstem Versagen und μ und σ Mittelwert und Standardabweichung der Zeiten zwischen den Versagensereignissen sind, so ist näherungsweise

$$\frac{f_1^*(\gamma)}{1 - f^*(\gamma)} \approx \frac{1}{\exp\left[\gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\gamma\sigma_1^2\right)\right] - \exp\left[\gamma\left(\mu - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 + \frac{1}{2}\gamma\sigma^2\right)\right]} \tag{A.12}$$

In diesem Fall muß man wenigstens diese Parameter der Versagenszeiten kennen. Oft wird man nicht zwischen den Versagenszeiten bis zum ersten Versagen und zwischen dem i-ten und i+1-ten Versagen unterscheiden. Dann vereinfacht sich Gl. (A.10) auf

$$\frac{f_1^*(\gamma)}{1 - f_1^*(\gamma)} \approx \frac{1}{\exp\left[\gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{2}\gamma\sigma_1^2\right)\right] - 1} \quad (\text{A.13})$$

Eine andere Näherung läßt sich für die asymptotische, für den nichtstationären Fall geltende Näherung

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right] \quad (\text{A.14})$$

mit der Dichte

$$f(t) = \nu(t) \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right] \quad (\text{A.15})$$

finden. Um die Versagenfälle bei Inbetriebnahme und durch extreme Beanspruchungen gegeneinander abzusetzen, kann man Gl. (A.14) noch wie folgt schreiben:

$$F(t) = F(0)\delta(t) + R(0)\left(1 - \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right]\right)$$

und Gl. (A.15) wird zu

$$f(t) = f(0)\delta(t) + R(0)\nu(t) \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right]$$

Mit einigen zusätzlichen Überlegungen kann auch dieser Fall weiterbehandelt werden.

Die Laplacetransformierte von Gl. (A.15) ist

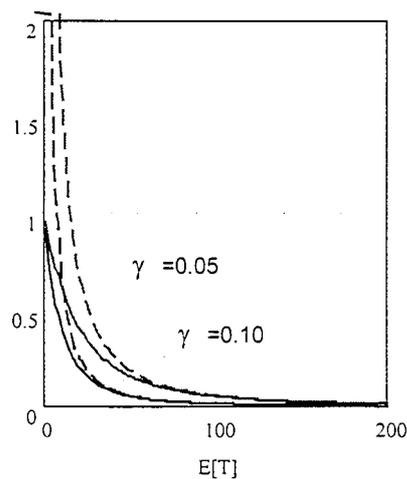
$$\begin{aligned} f^*(\gamma) &= \int_0^\infty \exp[-\gamma t] \nu(t) \exp\left[-\int_0^t \nu(\tau) d\tau\right] dt \\ &= \int_0^\infty \nu(t) \exp\left[-\int_0^t (\gamma + \nu(\tau)) d\tau\right] dt \\ &\approx \int_0^\infty \nu(t) \exp[-\gamma t] dt \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Um Formel (A.9) auf den allgemeinen Fall, d.h. in der Form mit Austrittsraten bzw. Dichten der Zeiten zwischen den Versagensereignissen, anzuwenden, ist dort formal nur $P_j(p) = 0$ zu setzen.

Laplacetransformierte sind leider nur in wenigen Fällen analytisch, so z.B. auch nicht für die Weibullverteilung. Diese Verteilung ist, wie ausgeführt, ein gutes Modell für Ermüdungsversagen und für Veraltung. Für den Sonderfall der Rayleighverteilung mit Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - \exp[-(t/w)^2]$ ist jedoch

$$f^*(\gamma) = 1 - \gamma w \sqrt{\pi} \frac{\exp(\frac{1}{4} \gamma^2 w^2)}{2} \operatorname{erffc}\left(\frac{1}{2} \gamma w\right) \quad (\text{A.17})$$

mit $\operatorname{erffc}(\cdot)$ der komplementären Fehlerfunktion und $w = E[T] / \Gamma(3/2)$, wobei $E[T]$ der Mittelwert der Rayleighverteilung ist. Die Rayleighverteilung hat eine unimodale Dichte, die bei $t = 0$ gleich Null ist und für $t = \infty$ ebenfalls gegen Null strebt. Es ist $\frac{f^*(\gamma)}{1 - f^*(\gamma)} \approx f^*(\gamma)$ für $1/w \ll \gamma$ (vergl Abb. A.1).



Näherung Gl. (A.11a)/Exakt Gl. (A.11)

Abb. A.1: Güte der Näherung Gl. A.11a für Rayleighverteilung

Einige andere analytische Modelle sind in nachfolgender Tabelle aufgenommen.

Table 1: Analytic Laplace transforms for some failure time models

Name	Dichtefunktion $f(t)$	Laplace transformierte $f^*(\gamma)$
Exponential	$\lambda \exp[-\lambda t]$	$\frac{\lambda}{\gamma + \lambda}$
Rechteck	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{\exp[-a\gamma] - \exp[-b\gamma]}{\gamma(b-a)}$
Rayleigh	$2 \frac{t}{w^2} \exp\left[-\left(\frac{t}{w}\right)^2\right]$	$1 - \gamma w \sqrt{\pi} \frac{\exp\left(\frac{1}{4} \gamma^2 w^2\right)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \gamma w\right)$
Gamma	$\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} \exp[-\lambda t]$	$\left(\frac{\lambda}{\gamma + \lambda}\right)^k$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\exp\left[\frac{1}{2} \gamma (\gamma \sigma^2 - 2\mu)\right]$

Appendix B: Allgemeine Lösung der Optimierungsaufgabe

Eine allgemeine Lösung des Optimierungsproblems in Gl. (12c) wurde von Kuschel/Rackwitz (1998) kürzlich erarbeitet. Diese Lösung beruht auf einem von Fris-Hansen/Madsen (1992) vorgeschlagenen Konzept, welches von Kuschel/Rackwitz (1997a, 1997b) zunächst auf zeitinvariante Probleme angewandt wurde. Voraussetzung ist, daß das Zuverlässigkeitsproblem im Standardraum formuliert wird, daß die Grenzzustandsfunktion mindestens einmal differenzierbar ist und daß ein eindeutiger β -Punkt existiert. Wenn sogar zweimalige Differenzierbarkeit gegeben ist, können besonders effiziente Lösungsalgorithmen eingesetzt werden. Im β -Punkt muß nicht nur die Zustandsfunktion zu Null werden. Darüberhinaus muß der Normalenvektor senkrecht zur Grenzzustandsfunktion stehen und ist parallel zum Richtungsvektor des β -Punktes. Das erlaubt, die Optimierungsaufgabe bei entsprechender Formulierung durch einen einzigen Algorithmus zu lösen. Die Aufgabe lautet:

$$\text{Minimiere: } -Z(p) \approx -\frac{b}{\gamma} + C(p) + H \frac{E_R \left[v^+(V_U(u_R, u_Q, u_S, p)) \right]}{\gamma} \quad (\text{B.1})$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} E_R \left[v^+(V_U(u_R, u_Q, u_S, p)) \right] &\leq v_{\text{zulässig}} \\ g(u_R, u_Q, u_S, p) &= 0 \\ (u_R, u_Q, u_S)^T \nabla_u g(u_R, u_Q, u_S, p) + \|(u_R, u_Q, u_S)\| \|\nabla_u g(u_R, u_Q, u_S, p)\| &= 0 \\ h_i(u_R, u_Q, u_S, p) &= 0; \quad i = 1, \dots, k \\ h_i(u_R, u_Q, u_S, p) &\leq 0; \quad i = k + 1, \dots, m \\ (u_R, u_Q, u_S, p)_u &\leq (u_R, u_Q, u_S, p) \leq (u_R, u_Q, u_S, p)_o \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Die erste der Bedingungen ist eine möglicherweise vorgegebene obere Schranke für die Austrittsrate. Die zweite und dritte Bedingung beschreibt den oben beschriebenen Sachverhalt für einen gültigen β -Punkt. Die vierten und fünften Bedingungen sind Bedingungen für die mathematische und physikalische Zulässigkeit des Bemessungsvektors. Die sechste Bedingung enthält schließlich untere und obere Grenzen für den Bemessungsvektor und gegebenenfalls für die (transformierten) Basisvariablen. Diese Optimierungsaufgabe kann gut mit einem Verfahren der sequentiellen, quadratischen Optimierung gelöst werden, z.B. mit einem von Schittkowski (1985) angegebenen Algorithmus. Das Verfahren ist ein Verfahren erster Ordnung, d.h. kann in der vorgestellten Formulierung nur Zuverlässigkeitsaussagen (Austrittsraten) erster Ordnung, also ohne den Korrekturterm zweiter Ordnung, verarbeiten. Sollten die Austrittsraten erster Ordnung nicht ausreichen, kann eine Verbesserung zweiter Ordnung durch Nachiteration erreicht werden.

Appendix C: Bestimmung der Lebensdauer mit Hilfe von Zeitrafferversuchen

Bei Dauerhaftigkeitsproblemen tritt ein von der experimentellen und statistischen Seite her sehr schwieriges Problem auf. Zunächst ist über theoretische Überlegungen oder Experimente bzw. Beobachtungen festzustellen, ob im Hinblick auf die Dauerhaftigkeit eine Grenze der Beanspruchung existiert, für die man sagen kann, daß unterhalb dieser Grenzbeanspruchung kein Dauerhaftigkeitsproblem auftritt (z.B. Dauerfestigkeit bei Materialermüdung). Man wird dann die Beanspruchung mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit unterhalb dieser Grenzbeanspruchung halten. In den meisten Fällen existiert eine solche Grenzbeanspruchung jedoch nicht oder genauer: sie ist experimentell nicht nachzuweisen. Dann kann man nur noch über Zeitrafferversuche Aufschluß über das Dauerhaftigkeitsverhalten bekommen. Hierzu sind jedoch theoretische Modelle notwendig. In der Literatur findet man im wesentlichen drei Modelle:

- Potenzmodell
- Arrheniusmodell
- Eyringmodell

Das Potenzmodell ist ein weitverbreitetes empirisches Modell bei dem die Lebensdauer nach einem Potenzgesetz mit der Beanspruchung abnimmt. Z.B. gehört die sogenannte Wöhlerkurve in diese Klasse von Modellen. Das Arrheniusmodell beschreibt das Verhalten von chemischen Reaktionen in Abhängigkeit von den jeweiligen Konzentrationen, der Temperatur, dem Druck etc. Das Eyringmodell geht auf quantenphysikalische Betrachtungen zurück und beschreibt ebenfalls die Geschwindigkeit von chemischen Reaktionen unter dem Einfluß verschiedener Parameter. Der theoretische Ursprung dieser Modelle ist in der Praxis jedoch nicht von Bedeutung, da man häufig annehmen muß, daß mehrere Mechanismen in bestimmten Parameterbereichen und z.T. nacheinander gültig sind. Entscheidend für die Auswahl eines bestimmten Modells ist die Güte der Anpassung an Daten die man mit diesen Modellen erreicht. Als weitere Kriterien für die Auswahl können das Verhalten ihrer Ableitungen oder das Verhalten für sehr große Lebensdauern gelten. Bei jedem dieser Modelle muß man mit großen Streuungen rechnen. Man benötigt zusätzlich noch ein stochastisches Modell, welches die Streuungen zu erklären vermag. Hierfür gelten folgende grundsätzliche Annahmen (Mann et al. 1974):

- Die Größe der angelegten Beanspruchung hat keine Einfluß auf das Verteilungsgesetz der Lebensdauern
- Die Beziehung zwischen Beanspruchung und Parametern der Lebensdauerverteilung ist bis auf gewisse Konstanten bekannt

Als stochastische Modelle kommen vor allem die Exponentialverteilung

$$F_T(t) = 1 - \exp[-\lambda t] \quad (C.1)$$

bzw ihre Verallgemeinerung, die Weibullverteilung

$$F_T(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{w}\right)^k\right] = 1 - \exp[-\lambda t^k] \quad (C.2)$$

mit $\lambda = 1/w^k$ in Betracht. Die Weibullverteilung ist dabei statistisch gesehen ungleich schwieriger zu behandeln, so daß im folgenden nur einige Ergebnisse für die Exponentialverteilung

lung mitgeteilt werden sollen. Beide Verteilungen können durch Einführung von Mindest- bzw. Höchstlebensdauern noch weiter verallgemeinert werden. Die entsprechenden statistischen Fragen werden dadurch jedoch ebenfalls merklich schwieriger. Damit hat man bei Beschränkung auf Zweiparametermodelle:

Potenzmodell: $\lambda(s) = As^B$ (C.3)

Arrheniusmodell: $\lambda(s) = \exp\left[A - \frac{B}{s}\right] = \exp[A] \exp\left[-\frac{B}{s}\right]$ (C.4)

Eyringmodell: $\lambda(s) = s \exp\left[A - \frac{B}{s}\right] = s \exp[A] \exp\left[-\frac{B}{s}\right]$ (C.5)

oder in invers-logarithmischer Form

Potenzmodell: $\ln q(s) = \ln a - b \ln s$ (C.6)

Arrheniusmodell: $\ln q(s) = -a + \frac{b}{s}$ (C.7)

Eyringmodell: $\ln q(s) = \ln s - a + \frac{b}{s}$ (C.8)

Die nunmehr zu bestimmenden Parameter in diesen Beispielen sind die (deterministischen) Parameter a und b. Die Variable s steht für die Beanspruchung, die im Versuch im allgemeinen frei wählbar ist. Der Parameter $1/\lambda(s)$ kann für die Exponentialverteilung als Mittelwert aufgefaßt werden. Die Verteilungsparameter können auch Funktionen ganzer Vektoren s sein und diese können mehrere Verteilungsparameter gleichzeitig bestimmen. Ein Beispiel sind die Parameter der Verteilung der Festigkeit eines Metalls in Abhängigkeit von der angelegten Spannung und der Temperatur im sogenannten Dauerstandsversuch. Bei gleicher Ableitung für $s = 1$ klingt mit wachsendem s das Potenzgesetz am schnellsten und das Arrheniusmodell am langsamsten ab (vergl. Bild 3, man beachte, daß hier die unabhängige Variable im Gegensatz zu den üblichen Gepflogenheiten auf der Abszisse angetragen ist).

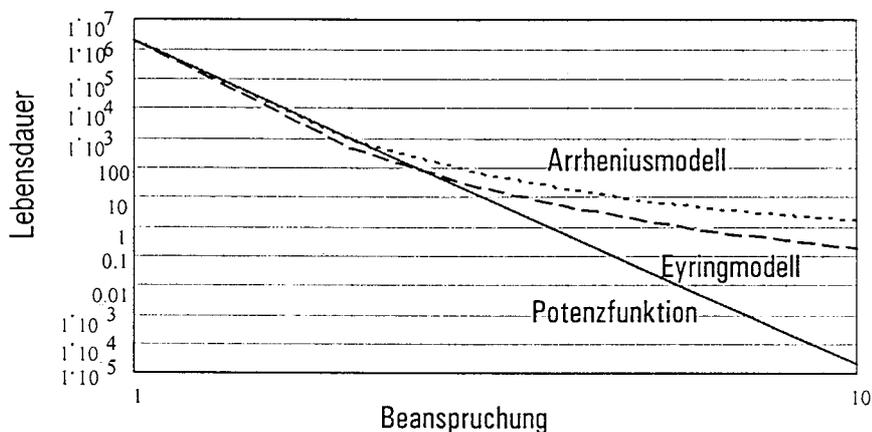


Bild 3: Verhalten von Lebensdauermodellen über der Beanspruchung

Zur ersten Schätzung der Parameter bietet sich für das Potenz- und das Arrheniusmodell die lineare Regressionsrechnung an, da sich im ersten Fall bei doppelt-logarithmischer Auftragung und im zweiten Fall bei Auftragung von $\ln q(s)$ über $1/s$ eine Gerade ergibt. Im dritten Fall kann man mit dem Verfahren vom Minimum der Abweichungsquadrate relativ einfach eine Lösung erhalten. Das Verfahren vom Minimum der Abweichungsquadrate ist aber auch in den beiden ersten Fällen vorzuziehen, da die starken Maßstabsverzerrungen entfallen. Es ist jedoch kaum möglich Genauigkeitsaussagen zu machen. Außerdem sollten sogenannte Durchläufer behandelbar sein. In all diesen Fällen kann das Maximum-Likelihood-Verfahren angewandt werden, da dieses u.a. die folgenden günstigen Eigenschaften besitzt.

- Wenn es einen effizientesten Schätzer gibt, so ist dies der Maximum-Likelihood-Schätzer.
- Maximum-Likelihood-Schätzer sind wenigstens asymptotisch erwartungstreu.
- Maximum-Likelihood-Schätzer sind asymptotisch normalverteilt.

Insbesondere die letztgenannte Eigenschaft läßt die statistischen Unsicherheiten einer Schätzung bei einer Zuverlässigkeitsanalyse zumindest näherungsweise behandeln.

Potenzgesetz

Der Mittelwert der exponentialverteilten Lebensdauer hänge nach einem bestimmten Gesetz von der Beanspruchung s ab. Man führe n Versuche auf k verschiedenen Beanspruchungsniveaus s_i durch. Die Versuche werden abgebrochen, wenn auf dem Niveau s_i genau $r_i \leq n_i$ mal Versagen zu den Zeiten $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iri}$ auftritt. Auf jedem Niveau sind zunächst die Parameter \hat{q}_i zu schätzen. Hierfür ist der Maximum-Likelihood-Schätzer

$$\hat{q}_i = \frac{\sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{iri}}{r_i} \quad (C.9)$$

Die (exakte) Wahrscheinlichkeitsdichte des Parameters q_i ist eine Gammadichte

$$f(\hat{q}_i) = \frac{\exp[-r_i \hat{q}_i / q_i]}{\Gamma(r_i)} \left(\frac{r_i}{q_i}\right)^{r_i} \hat{q}_i^{r_i-1} \quad (C.10)$$

Dafür gilt $E[\hat{q}_i] = q_i$ und $Var[\hat{q}_i] = q_i^2 / r_i$. Damit wird ein neuer Datensatz mit den Werten $(s_i, n_i, r_i, \hat{q}_i), i = 1, 2, \dots, k$ erzeugt. Dieser ist Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen.

Der Wöhleransatz wird erweitert auf

$$q_i = \frac{a}{(s_i / \bar{s})^b} \quad (C.11)$$

mit

$$\bar{s} = \prod_{i=1}^k (s_i)^{r_i / \sum_{i=1}^k r_i} \quad (C.12)$$

dem gewichteten geometrischen Mittel der angelegten Beanspruchungen. Die Likelihoodfunktion lautet dann

$$L(a, b | \hat{q}) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\Gamma(r_i)} \left[\frac{r_i}{a} \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right)^b \right]^{r_i} \bar{s}^{-r_i} \exp \left[- \frac{r_i \hat{q}_i}{a} \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right)^b \right] \quad (\text{C.13})$$

Daraus bestimmt man durch Iteration die Lösung aus den Gleichungen

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^k r_i \hat{q}_i \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right)^b}{\sum_{i=1}^k r_i} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k r_i \hat{q}_i \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right)^b \ln \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right) = 0 \quad (\text{C.14a,b})$$

Die asymptotischen Varianzen dieser Schätzer sind

$$\text{Var}[\hat{b}] = \left[\sum_{i=1}^n r_i \ln \left(\frac{s_i}{\bar{s}} \right)^2 \right]^{-1} \quad \text{und} \quad \text{Var}[\hat{a}] = \hat{a} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{-1} \quad (\text{C.15a,b})$$

Die Kovarianz ist Null. Das wurde durch die Modifikation (15) erreicht. Da Maximum-Likelihood-Schätzer asymptotisch normalverteilt sind, kann man auch Konfidenzintervalle schätzen.

Für die Abschätzung der Lebensdauer bei gegebenem Beanspruchungsniveau y_s kann man unter Zugrundelegung der Normalität der beiden Schätzer noch zeigen, daß diese asymptotisch einer Lognormalverteilung folgt mit dem Mittelwert

$$E[\bar{q}_s] \approx \hat{a} \left(\frac{s_s}{\bar{s}} \right) \exp \left[- \frac{1}{2} \text{Var}[\hat{b}] \left(\ln \frac{s_s}{\bar{s}} \right)^2 \right] \quad (\text{C.16})$$

und der Varianz

$$\text{Var}[\bar{q}_s] \approx \left(\frac{s_s}{\bar{s}} \right)^{-2\hat{b}} \left\{ \left(\text{Var}[\hat{a}] + \hat{b}^2 \right) \exp \left[\text{Var}[\hat{b}] \left(\ln \frac{s_s}{\bar{s}} \right)^2 \right] - \hat{a}^2 \right\} \quad (\text{C.17})$$

Arrheniusmodell

Auch das Arrheniusmodell läßt einfache Schätzungen zu. Es wird ebenfalls modifiziert, so daß anstelle von $\lambda_i = \exp[a - b/s_i]$ (hier wird am besten direkt die Ausfallrate bestimmt)

$$\lambda_i = \exp \left[a - b \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \right] \quad (\text{C.18})$$

mit

$$\bar{s} = \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{s_i} \left(\sum_{i=1}^k r_i \right)^{-1} \quad (\text{C.19})$$

dem gewichteten Mittel der $1/s_i$ verwendet wird. Wie in Gl. (15) unterscheidet sich der modifizierte Ansatz nur durch einen konstanten Faktor vom ursprünglichen Modell. Die Maximum-Likelihoodfunktion ist

$$L(a, b | \underline{\lambda}) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\Gamma(r_i)} \left\{ r_i \exp \left[a - b \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \right] \right\}^{r_i} \lambda_i^{-r_i-1} \exp \left\{ -\frac{r_i}{\lambda_i} \exp \left[a - b \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \right] \right\} \quad (C.20)$$

Das führt auf das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^k r_i - \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{\lambda_i} \exp \left[a - b \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \right] = 0 \quad (C.21a)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{r_i}{\lambda_i} \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \exp \left[a - b \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right) \right] = 0 \quad (C.21b)$$

welches numerisch zu lösen ist. Wiederum sind die beiden Schätzer asymptotisch unkorreliert und die Varianzen ergeben sich zu

$$\text{Var}[\hat{a}] = \left(\sum_{i=1}^k r_i \right)^{-1} \quad \text{und} \quad \text{Var}[\hat{b}] = \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{1}{s_i} - \bar{s} \right)^2 \right]^{-1} \quad (C.22)$$

Für das Eyringmodell gibt es keine einfachen analytischen Ergebnisse.

Sie fehlen ebenfalls für zensierte Versuche, d.h. für Versuche die bei einer bestimmten Lebensdauer abgebrochen werden. Das ist bei Zeitrafferversuchen ein relativ häufig vorkommender Fall. Dann verschenkt man nämlich Information wenn man den Zeitpunkt des Abbruchs des Versuches als Versagen interpretiert. Andererseits ist die Information, daß zu dem gegebenen Abbruchzeitpunkt noch kein Versagen erfolgte, nicht ganz so viel wert. Das ist eine andere Versuchsstrategie als die oben angegebene. Sie wird vor allem bei kleinen Belastungsniveaus nützlich sein. Es seien m Versuche zu den Zeiten t (z.B. bei 2 10 Lastzyklen) abgebrochen worden. Die für diesen Fall gültige Likelihoodfunktion pro Belastungsniveau lautet in allgemeiner Form:

$$L(q|x) = \prod_{i=1}^{n-m} f(x_i|q) \cdot \prod_{i=n-m+1}^n \left(\int_{t_i}^{\infty} f(\tau|q) d\tau \right) \quad (C.23)$$

Diese Funktion ist dann anstelle der obenerwähnten Likelihoodfunktionen zu verwenden. Eine Lösung ist nur noch auf numerischem Wege möglich.

Die rein statistische Auswahl eines Modells erfolgt am besten anhand des Wertes der log-Likelihoodfunktion am Optimum, d.h. es wird dasjenige Modell gewählt, welches den größten Wert ergibt.

Die Versuchsplanung muß die speziellen Gegebenheiten des jeweils verwendeten Modells berücksichtigen. Als Faustregel kann gelten, daß man bei bekanntem Modell die Versuche jeweils bei hohem Belastungsniveau (zuverlässige Bestimmung des Parameters A) und bei niedrigem Belastungsniveau (zuverlässige Bestimmung des Parameters B) konzentriert. Wenn das Modell nicht feststeht, sollte man ein oder mehrere Zwischenniveaus einschalten. Andererseits sollte man die Versuche randomisieren um die gewünschte Unabhängigkeit der beiden geschätzten Parameter zu gewährleisten. Randomisierung heißt hier, daß die Ordnungszahl i der Niveaus s_i zufällig ausgewählt wird.

Leider können bei nichtanalytischen Ansätzen die numerischen Probleme beachtlich sein. Es ist notwendig den entsprechenden Optimierungsalgorithmus sorgfältig auf das vorliegende Problem abzustimmen. Es kann vorkommen, daß die Likelihoodfunktion aufgrund sehr inhomogener Daten mehr als ein Maximum besitzt. Dann sollte man versuchen, alle lokalen Maxima aufzufinden. Das Größte sollte der weiteren Analyse zugrundegelegt werden - aber nicht ohne Vorsicht!

Behandlung der statistischen Unsicherheiten

In der Literatur wurden verschiedenen Möglichkeiten diskutiert wie statische Unsicherheiten bei Zuverlässigkeitsuntersuchungen zu berücksichtigen seien. Im Hinblick auf die mindestens zwei unsicheren Parameter kann ein vernünftiges Konzept nur auf einer Bayessianischen Auffassung beruhen, d.h. die Versagenswahrscheinlichkeit ist nach

$$p_f = \int_I f(x|q)f(q)dq \quad (C.24)$$

zu berechnen, d.h. als Mittel aller aufgrund des Stichprobenergebnisses möglichen Realisationen des nur statistisch bekannten Parametervektors $Q = (a,b)$. Dessen Verteilungsfunktion ist nur näherungsweise als zweidimensionale, asymptotische Normalverteilung bekannt. Daher können Versagenswahrscheinlichkeiten auch nur Näherungen sein, die jedoch nur mit sehr großem Aufwand verbessert werden könnten. Es ist aber noch zu untersuchen wie groß der Einfluß von unterschiedlichen Verteilungsannahmen auf das Resultat ist.

Appendix D: Ein Schädigungsmodell

Sowohl das Potenzmodell als auch die Modelle von Arrhenius und Eyring beschreiben zunächst nur den Zusammenhang zwischen angelegter Beanspruchung (bei letzteren die Temperatur). Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen chemischen Reaktionsvolumen und Restfestigkeit. Im einfachsten Fall kann man Proportionalität annehmen. Allgemein kann die Restfestigkeit durch folgenden Ansatz beschrieben werden

$$R_r(t) = R_o(0)[1 - D(t)] \quad (\text{D.1})$$

worin $D(t)$ der von der Zeit abhängige Schaden und $R_o(0)$ die Ursprungsfestigkeit. Kachanov (1986) hat folgenden Ansatz für die Schadensentwicklung gemacht

$$\frac{dD(t)}{dt} = \left[\frac{1}{1 - D(t)} \right]^n \frac{1}{\theta} \quad (\text{D.2})$$

n ist ein experimentell zu bestimmender Parameter. Integration für $D(0) = 0$ ergibt

$$D(t) = 1 - \left(1 - (n+1) \frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{D.3})$$

Für das Potenzmodell für θ wird Gl. (D.3) zu

$$D(t) = 1 - \left[1 - (n+1)as^b t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{D.4})$$

Daher ist

$$R_r(t) = R_o(0) \left[1 - (n+1)as^b t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{D.5})$$

Für das Arrheniusmodell kann

$$R_r(t) = R_o(0) \left[1 - (n+1) \exp\left(a - \frac{b}{s}\right)t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{D.6})$$

abgeleitet werden.

Diese Ausdrücke können insbesondere bei chemischer Alterung nützlich sein.

Appendix E: Näherungsweise Bestimmung von mehrdimensionalen Erwartungswerten

Ohne Verlust an Allgemeinheit werden allgemeine Erwartungswerte betrachtet, d.h. $E[g(R)]$ mit $g(R)$ einer monotonen, komplizierten Funktion des Vektors R . Im allgemeinen hat R viele Dimensionen und numerische Integration ist nicht geeignet. Eine erste Näherung besteht in dem erweiterten Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$E[g(R)] \approx g(E[R]) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_R} \sum_{j=1}^{n_R} \frac{\partial^2 g(E[R])}{\partial r_i \partial r_j} \sigma_{ij} \quad (\text{E.1})$$

worin σ_{ij} die Elemente der Kovarianzmatrix sind. Leider ist diese Näherung in vielen Fällen unbefriedigend.

Eine andere Näherung geht auf die Laplacesche Näherung für Integrale zurück (Bleistein/Handelsman, 1975). Es ist zweckmäßig eine Wahrscheinlichkeitstransformation $x = T(u)$ durchzuführen worin u ein standardnormaler Vektor mit unabhängigen Komponenten ist (Hohenbichler/Rackwitz, 1981). Wenn der Integrand in

$$E[g(T(u))] = \int_{R^{n_R}} g(T(u)) \varphi(u) du$$

ein eindeutiges Maximum hat, kann der Erwartungswert geschrieben werden als:

$$E[g(T(u))] = \int_{R^{n_R}} (2\pi)^{-n_R/2} \exp\left[-\frac{1}{2} f(u)\right] du \quad (\text{E.2})$$

$f(u)$ wird in eine Taylorreihe zweiter Ordnung entwickelt

$$f(u) = \|u\|^2 - 2 \ln(g(T(u))) \approx f(u^*) + \frac{1}{2} (u - u^*)^T S(u^*) (u - u^*) + \dots$$

mit der Hessematrix der zweiten Ableitungen von $f(u)$

$$S(u^*) = \left\{ \left(\delta_{ij} - \frac{1}{g(T(u^*))} \frac{\partial^2 g(T(u^*))}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{1}{g(T(u^*))^2} \frac{\partial g(T(u^*))}{\partial u_i} \frac{\partial g(T(u^*))}{\partial u_j} \right); i, j = 1, \dots, n_R \right\}$$

und u^* der Lösung von $\max\{g(T(u))\varphi(u)\}$ oder von $\min\{f(u)\}$. Mit

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \exp\left[-\frac{1}{2} x^T A x\right] dx = |\det(A)|^{-1/2}$$

worin A eine positiv definite Matrix hat man

$$E[g(T(u))] \approx g(T(u^*)) (2\pi)^{n_R/2} \varphi(\|u^*\|) |\det(S(u^*))|^{-1/2} \quad (\text{E.3})$$

mit hervorragender numerischer Genauigkeit. Häufig ist $|\det(S)|^{-1/2}$ nahe Eins. Dann macht es Sinn von einer Näherung erster Ordnung zu sprechen.

Appendix F: Reliability and Durability of Geotextiles For Earth-Retaining Structures

1. Accelerated life testing

The more reliable a device is, the more difficult is to measure its reliability. Clearly many years of testing under actual operating conditions may be required to obtain a measurable loss of strength. From economical and time consuming points of view, these kind of tests should be accelerated, hence the expression accelerated life tests in which parts are operated at higher stress levels than are required for normal use. The difficulty arises when predicting the performance of a part at normal stress level based on observations at high stress level. Hence some inference models should be used. Let $f(t; \theta)$ be the probability density function of the time-to-failure random variable of a component in an environment defined by a vector of generalized stresses S ; θ is a vector of parameters. Two assumptions are necessary [12]:

1. The severity of the stress levels does not change the type of lifetime distribution, but the stress levels have an influence on the values of the parameters.
2. The relationship between S and θ is known, except for a limited number of parameters. Also, one should assume that the relation is valid for a certain range of S .

The above mentioned relation between S and θ are called accelerated life models. Three models are widely used in the literature; they are

- *The power rule model*

This model can be derived *via* considerations of kinetic theory and activation energy, to be

$$\theta = \frac{1}{CV^P}, C > 0 \quad (1)$$

where θ mean time to failure, V is the applied stress, and C and P are unknown parameters to be estimated.

- *The Arrhenius model*

This model expresses the time rate of degradation of some device parameters as a function of the operating temperature as

$$\lambda = \exp\left(A - \frac{B}{V}\right) \quad (2)$$

where λ is the time rate of degradation of some device parameter as a function of the operating stress (temperature) V , and A and B are unknown parameters to be estimated.

- *The Eyring Model*

This model, derived from the principles of quantum mechanics, expresses the time rate of degradation of some device parameter as a function of the operating temperature as follows:

$$\lambda = V \exp\left(A - \frac{B}{V}\right) \quad (3)$$

Description of residual strength model

The rate of deterioration may be estimated on the basis of calculation, experimental investigations, experience from earlier structures or a combination of them.

More often the damage produced with either of the above mentioned models must be related to the residual strength. This is so because it is usually not possible to assess a critical reaction mass. What is measured is the residual strength. It makes sense to assume a certain relationship, not necessarily proportionality, between the reaction volume $M(t, S)$ and some damage indicator. Then, the residual strength could, for example, be expressed in the form

$$R_r(t) = R_o(0)[1 - D(t)] \quad (4)$$

where $D(t)$ is the damage function, and $R_o(0)$ is the initial strength

The question now is how $D(t)$ develops in time. It is proposed to use a relation originally proposed by Kachanov for the damage development in long duration tests

$$\frac{dD(t)}{dt} = \left[\frac{1}{1 - D(t)} \right]^n \frac{1}{\theta} \quad (5)$$

where n is a parameter to be determined experimentally. Integration for $D(0)$ yields

$$D(t) = 1 - \left(1 - (n+1) \frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (6)$$

If the Power Rule Model is used for θ , then

$$D(t) = 1 - \left[1 - (n+1)Cs^m t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (7)$$

Where C and m are coefficients to be determined, s is the applied stress (temperature), Hence

$$R_r(t) = R_o(o) \left[1 - (n+1)Cs^m t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (8)$$

Alternatively, if the Arrhenius Model is used, eq. 8 can be rewritten as

$$R_r(t) = R_o(o) \left[1 - (n+1) \exp\left(A - \frac{B}{s}\right)t \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (9)$$

where A and B are unknown parameters to be estimated.

Parameter estimation

Many methods are available for the estimation of unknown parameters based on observations; among them lie the Maximum Likelihood Method (MLM) and the Least Squares Method (LSM). It has been recognized that the two estimators coincide in case of normally distributed observations [13]. In the following, a brief description of the least square method in case of linear model of the unknown coefficients is presented based on [13].

Suppose that the linear model has the form

$$y = X\Psi + \varepsilon \quad (10)$$

where y is an $(n \times 1)$ vector of observations, X is an $(n \times k)$ matrix of known coefficients (with $n > k$), Ψ is an $(k \times 1)$ vector of parameters, and ε is an $(n \times 1)$ vector of “error” random variables with

$$E(\varepsilon) = 0 \quad E(\varepsilon) = 0 \quad (11)$$

and the dispersion matrix

$$V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon^T) = \sigma^2 I \quad (12)$$

where I is the $(n \times n)$ identity matrix.

Thus, eq.11 and eq.12 embody the assumptions that the ε_i is uncorrelated with zero means and the same variance σ^2 . The LSM requires that the scalar sum of squares

$$S = (y - X\Psi)^T (y - X\Psi) \quad (13)$$

be minimized for variations in the components of Ψ . A necessary condition that the above equation be minimized is that $\partial S / \partial \Psi = 0$. Differentiating, and solving for the unknown parameters, one gets

$$\tilde{\Psi} = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (14)$$

assuming that $X^T X$ is non-singular and can therefore be inverted, where $\tilde{\Psi}$ is the estimated parameters. The unbiasedness of the LS estimator $\tilde{\Psi}$ is assured as follows:

Using eq.10 $\tilde{\Psi}$ may be written as

$$\tilde{\Psi} = (X^T X)^{-1} X^T (X\Psi + \varepsilon) = \Psi + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon \quad (15)$$

Since X is constant and ε is with zero mean, then taking the expectation of both sides of the above equation

$$E(\tilde{\Psi}) = \Psi \quad (16)$$

as stated.

The dispersion matrix of $\tilde{\Psi}$ can be written as

$$V(\tilde{\Psi}) = E\{(\tilde{\Psi} - \Psi)(\tilde{\Psi} - \Psi)^T\} \quad (17)$$

Substituting from eq.15 into eq.17, it becomes

$$V(\tilde{\Psi}) = (X^T X)^{-1} X^T E(\varepsilon\varepsilon^T) X (X^T X)^{-1} \quad (18)$$

Using eq.12 the above equation becomes

$$V(\tilde{\Psi}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (19)$$

Data analysis and estimation of model parameters

Data has been analysed using *STATISTICA* and the following has been found: Table (1) below shows the statistics of the initial strength of the geotextiles.

Table 1: Statistics of the initial strength

Mean value	81.14
Standard deviation	0.61
Median	81
Mode	80.8
Minimum	79.9
Maximum	81.9

A log-normal distribution is assumed for R_0 and the frequency distribution curve is shown in Fig.1.

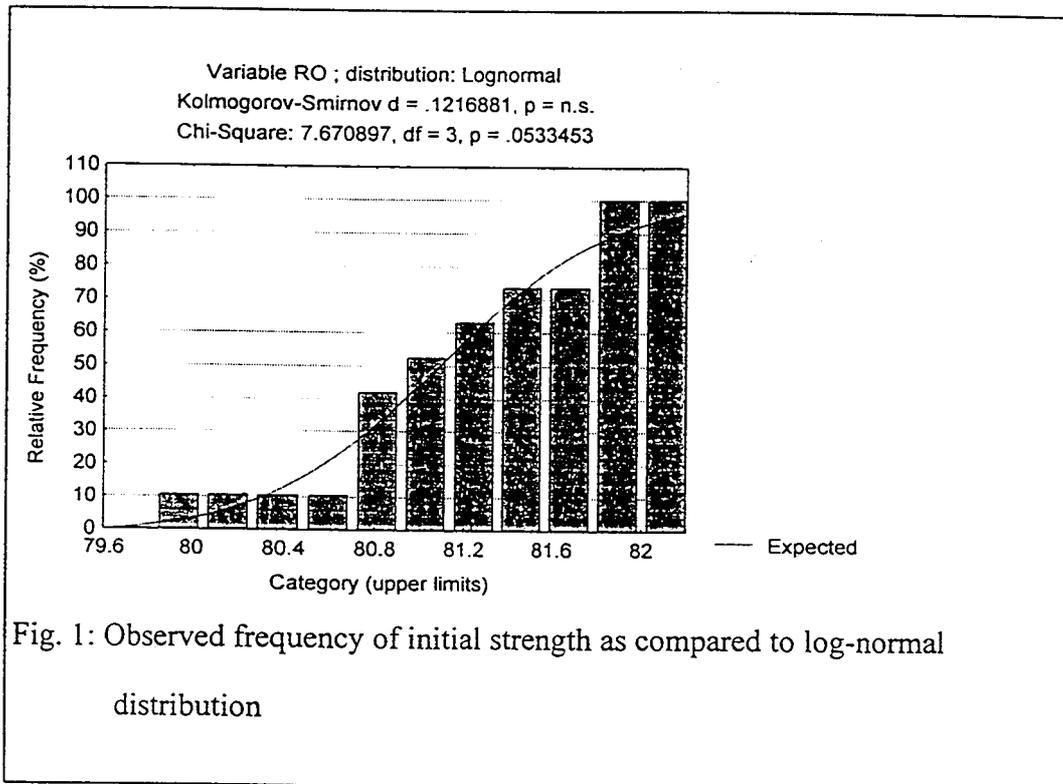


Fig. 1: Observed frequency of initial strength as compared to log-normal distribution

On analysing the available data, the following have been observed:

Time of observation t

For $t = 1$, the residual strength-initial strength ratio R_0 is equal to unity, for which no useful information can be used for the estimation of the parameters. So, we did not include them in the analysis.

PH value

Three different PH values are used in the experimental work; 7, 10, and 11. At First, we excluded the observations corresponding to PH=10,11 from the analysis in order to have consistent results since PH value is not included in the residual strength equation. Hopefully, we can include PH effect in the future.

Temperatures

A relatively wide range of temperatures is used in performing the accelerated testing, i. e., 90°C to 134°C. We separated the observations corresponding to high temperatures, i.e., above 100° C from those that correspond to lower temperatures. Then, a separate analysis is done for the two categories.

Data Analysis

The estimation of the unknown coefficients in eq. 8 requires the use of one of the estimation methods, i. e., the Maximum Likelihood method, the Minimum Least Square Method, or any other method. Apparently, one great difficulty arises on solving for these coefficient, that is, the nonlinearity of the unknown coefficients. Nevertheless, one may overcome this problem by rearranging eq. 8 as

$$1 - \left(\frac{R_r(t)}{R_o(o)} \right)^{n+1} = (n+1)Cs^m t \quad (20)$$

then taking the logarithm of both sides, gives

$$\ln \left(1 - \left(\frac{R_r(t)}{R_o(o)} \right)^{n+1} \right) = \ln(n+1) + K + m \ln(s) + \ln(t) \quad (21)$$

where $K = \ln(c)$.

Eq.21 is investigated for different values of n , and it is found, that n has a negligible effect on the values of the estimated parameters K and m in case of low applied temperature (below 90 °C) as shown in Table 2 and a relatively considerable effect in case of relatively high temperature (above 90 °C and below 135 °C) as shown in Table 3. However, this should not be a misleading conclusion, since it is due to the accelerated nature of the experiments. In other words, this effect of n on K and m is due to small values of t in eq.21. Referring to Fig. 2, Fig. 3 and Fig. 4 one can conclude that the effect of n on the residual strength ratio is negligible for the specified reference time. Referring to Fig. 5 and Fig. 6 one can realize that the decrease of the parameters K and m increases the residual strength ratio for a specified time. Naturally, the increase of the service life temperature decreases the residual strength ratio for a specified reference time. Moreover, as it is seen in Fig. 7, the deteriorating effect of temperature increases with the increase of temperature.

Table 2: Estimated K and m for low applied temperatures

n	K		m		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0	-31.542	0.856	5.641	0.196	0.212	-0.9987
1	-31.457	0.849	5.617	0.194	0.209	-0.9987
2	-31.373	0.847	5.593	0.194	0.209	-0.9987
3	-31.291	0.850	5.567	0.195	0.210	-0.9987

Table 3: Estimated K and m for high applied temperatures

n	K		m		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0*	-55.242	4.611	10.967	0.971	0.503	-0.9998
1	-52.44	2.828	10.334	0.596	0.309	-0.9998
2	-50.230	2.377	9.834	0.500	0.259	-0.9998
3	-48.455	2.9405	9.428	0.6195	0.320	-0.9998

* Rosebrock and Quasi-Newton Method is used

Table 4: Estimated K and m for all applied temperatures

n	K		m		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0	-43.152	2.925	8.369	0.639	1.931	-0.998
1	-41.841	2.571	8.057	0.562	1.694	-0.998
2	-40.841	2.311	7.787	0.505	1.523	-0.998
3	-39.735	2.122	7.554	0.464	1.399	-0.998

One important point which should be kept in mind, is the distribution of the estimated coefficients of eq.8. In other words, we solve eq.21 using LSM for the unknown parameters K and m. *STATISTICA* gives estimates for the unknown parameters with the associated standard errors and correlations. Also, *STATISTICA* gives the residual. And in order to keep the variability and distribution of the estimated parameters one can apply the exponent operator to both sides of eq.21 including the associated error err_p and rearranging, hence

$$R_w = \left[1 - (n+1)s^m t \exp(K + err_p) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (22)$$

where $R_w = \frac{R_r(t)}{R_o(0)}$ is the residual strength ratio.

Concerning eq.9 which uses the Arrhenius Model, we apply the logarithm operator to both sides in order to have linear unknown coefficients to be evaluated using LSM, hence one get (POWER1.mcd)

$$\ln \left(1 - \left(\frac{R_r(t)}{R_o(0)} \right)^{n+1} \right) = \frac{\ln(n+1)s + As - B + s \ln(t)}{s} \quad (23)$$

Again, in order to keep the original variability of the associated error err_a , we add err_a to R.H.S. of eq.23 and applying the exponentiation operator to both sides and rearranging, one may get

$$R_w = \left[1 - \exp \left[\ln(n+1) + A + \ln(t) + err_a - \frac{B}{s} \right] \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (24)$$

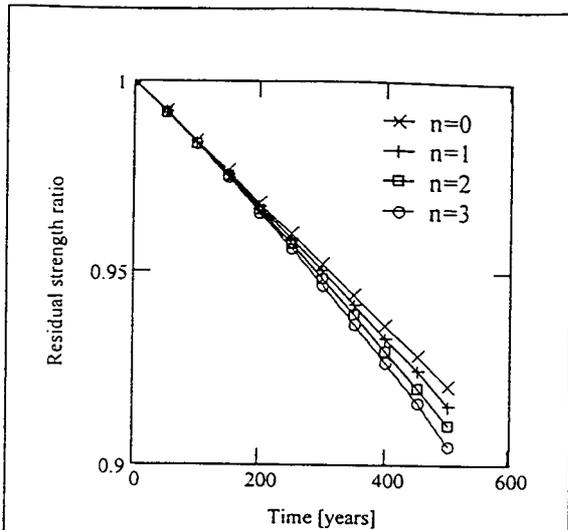


Fig. 2: Effect of n in case of low applied temperature

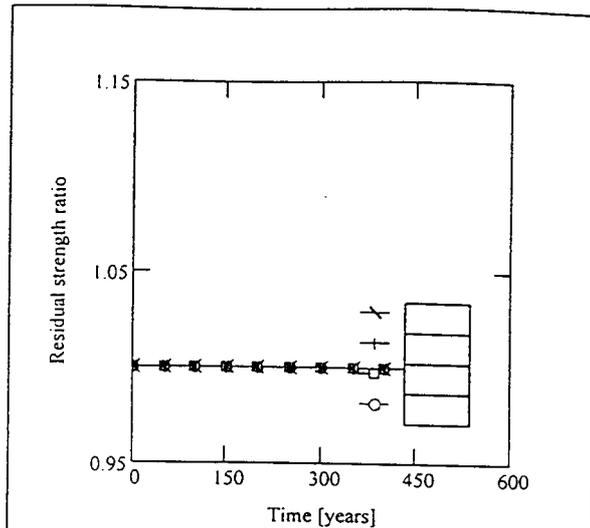


Fig. 3: Effect of n in case of high applied temperature

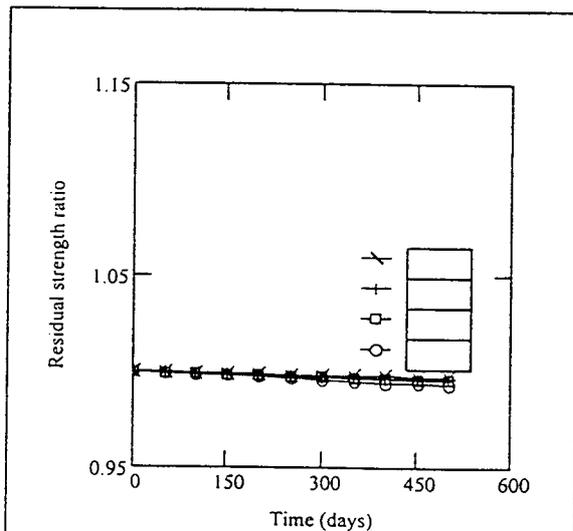


Fig. 4: Effect of n in case of all range of applied temperature

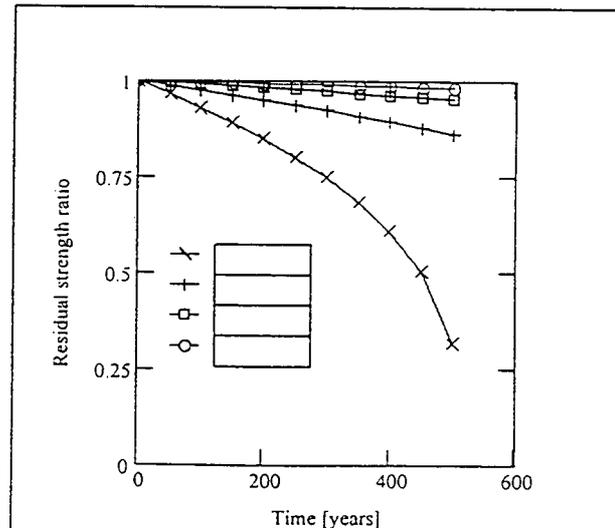


Fig. 5: Effect of K on residual strength

The parameters A and B are estimated for different values of n , for low temperature, high temperature values and again for all temperatures as it is shown in Table 5, Table 6 and Table 7; respectively. One can conclude by comparing these three tables, that the effect of n on the estimated parameters is negligible for low temperatures and relatively moderate for high and all temperatures. As in the case of eq.22, and from Fig.11, the increase of the service life temperature decreases the residual strength ratio and the rate of degradation increases with the increase of temperature. Concerning the estimated parameters of eq.24, it is seen, from Fig.12 and Fig.13, that the increase of A decreases the residual strength ratio while the increase of B increases the residual strength ratio for a specified reference time.

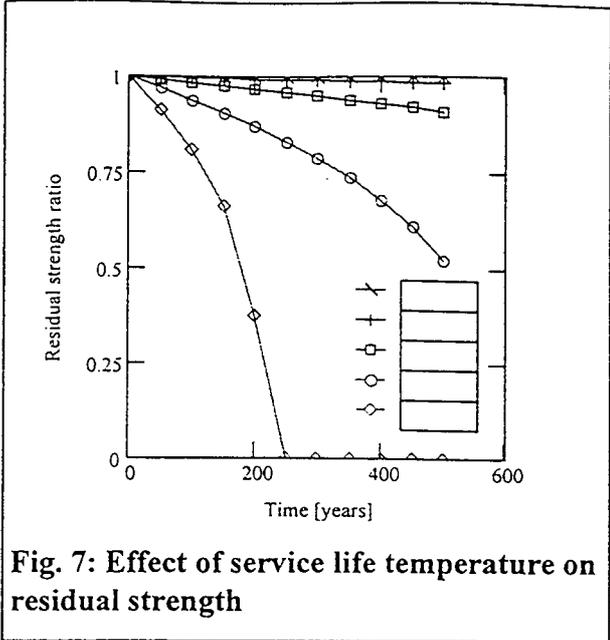
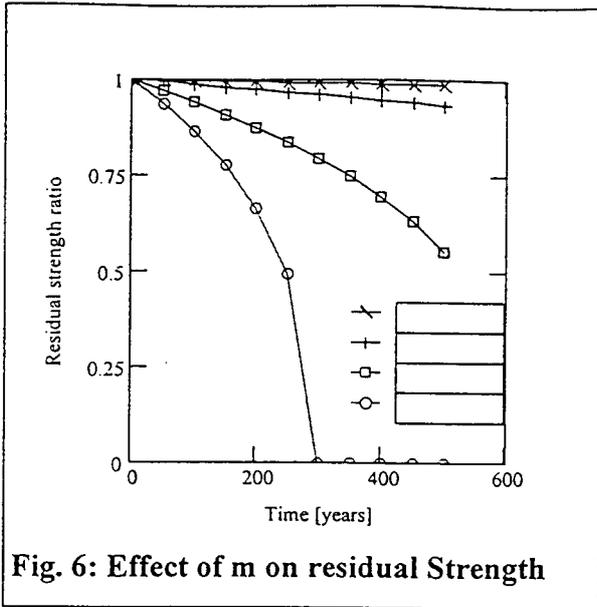


Table 5: Estimated A and B for low applied temperatures

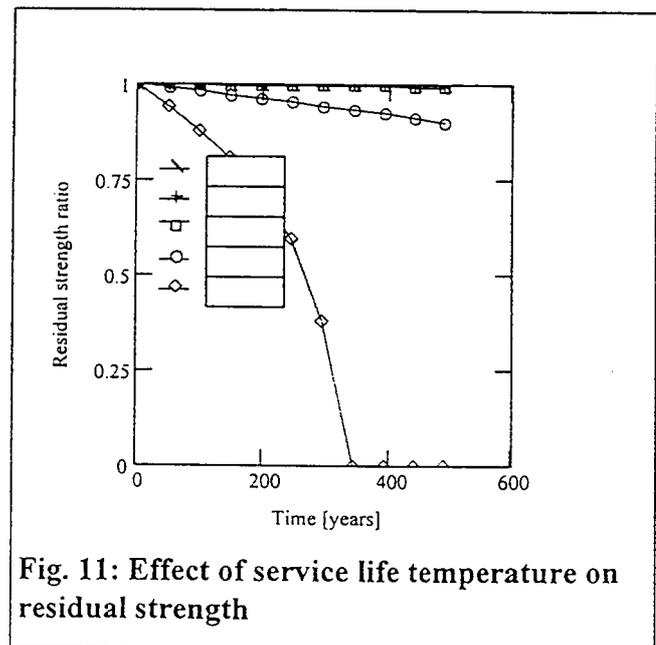
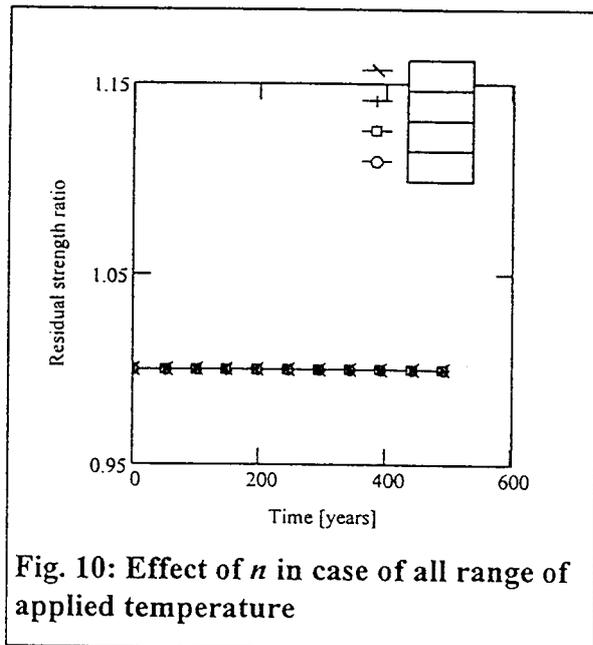
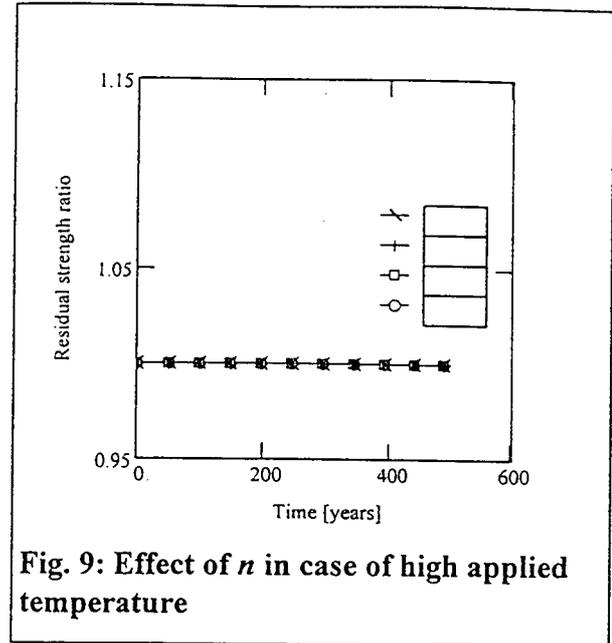
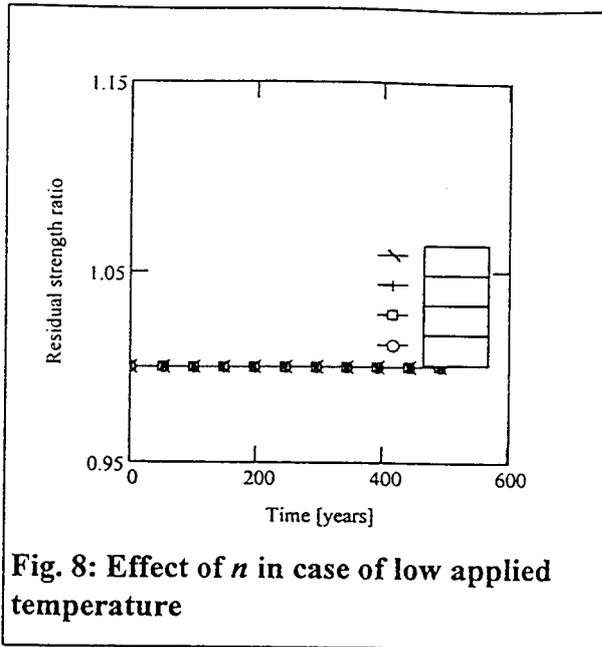
n	A		B		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0	-2.018	0.339	375.698	25.051	0.403	0.970
1	-2.059	0.338	374.076	24.987	0.402	0.970
2	-2.100	0.338	372.476	24.966	0.402	0.970
3	-2.140	0.338	370.896	24.986	0.402	0.970

Table 6: Estimated A and B for high applied temperatures

n	A		B		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0	7.898	1.019	1271.793	116.411	0.516	0.996
1	7.070	0.680	1199.136	77.658	0.346	0.996
2	6.385	0.609	1140.193	69.576	0.310	0.996
3	5.819	0.718	1092.646	82.045	0.366	0.996

Table 7: Estimated A and B for all applied temperatures (PH=7)

n	A		B		Standard Error	Correlation Coefficient
	Estimation	St. Error	Estimation	St. Error		
0	1.850	0.903	630.333	80.560	3.063	0.959
1	1.503	0.827	608.445	73.759	2.804	0.959
2	1.197	0.767	589.481	68.431	2.602	0.959
3	0.930	0.720	573.010	64.222	2.442	0.959



Reliability model

Time-invariant reliability

Let X be a vector of random variables with joint distribution function $F_X(x)$ and $g(x)$ a state function such that $g(x) > 0$ denotes the safe state, $g(x) = 0$ the limit state and $g(x) \leq 0$ the failure state. The failure probability then is

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (25)$$

Several alternative methods exist for the evaluation of the failure probability. However, only two methods will be introduced herein; Crude Monte Carlo Method and FORM/SORM

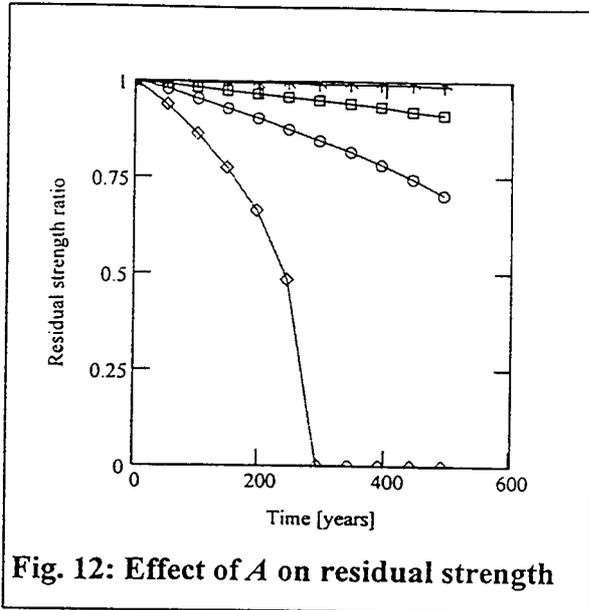


Fig. 12: Effect of A on residual strength

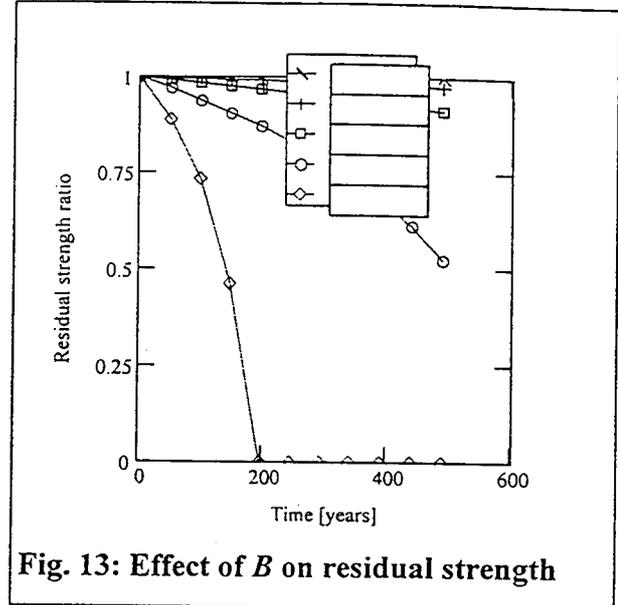


Fig. 13: Effect of B on residual strength

Crude Monte Carlo Method (CMCM)

A method which does impose any restriction on the vector X and on the formulation of $g(x)$, i.e. the state function and/or the distribution function of X can be discontinuous. CMCM can approximate the failure probability by:

$$P_f = \int_{g(x) \leq 0} dF(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{g(x_i) \leq 0} \quad (26)$$

Where $1_{g(x_i) \leq 0}$ is the indicator function for the failure domain, i.e. this function equals one if x is in the failure domain and zero otherwise. The random vector X is generated by Monte Carlo. The coefficient of variation of the estimate can be shown to be

$$V(\bar{P}_f) = \sqrt{\frac{\bar{P}_f(1 - \bar{P}_f)}{\bar{P}_f} \frac{1}{\bar{P}_f}} \approx \frac{1}{\sqrt{\bar{P}_f N}} \quad (27)$$

It can be seen that this estimate is rather inaccurate if N is not much larger than $1/\bar{P}_f$.

First- and Second-Order Reliability Method (FORM/SORM)

FORM has initially been proposed by Hasofer/Lind [3] for normal vectors X and then extended to arbitrary distributions by Rackwitz/Fiessler [4]. A probability transformation

$u = T^{-1}(x)$ is first performed where u is a vector of independent standard normal variables. A first order reliability estimate is obtained from

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (28)$$

where $\beta = \|u^*\|$ and u^* is found from

$$u^* = \min\|u\| \text{ for } \{u: g(u) \leq 0\} \quad (29)$$

The main computational task is the location of the most likely failure point u^* -point (or β -point) by a suitable search algorithm. The distribution function of X as well as the state function must be differentiable. Usually, the probability estimate is sufficiently accurate for many practical purposes.

For the second-order reliability method (SORM) a probability distribution transformation $u = T^{-1}(x)$ is first performed (Hohenbichler/Rackwitz [5]). Breitung [6] extended FORM and gave it a sound theoretical basis. He arrived at

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \beta k_i)^{1/2} \quad (30)$$

for $\beta \rightarrow \infty$. The k_i are the main curvatures in the solution point u^* for which as in FORM $\beta = \|u^*\|$ and u^* is found using eq.29. The main curvatures are found from the Hessian matrix of second derivatives of $g(u)=0$ in u^* after solving an eigenvalue problem. It corresponds to fitting an approximating parabola in the β -point to $g(u)$. Hohenbichler and Rackwitz [7] introduced slightly better formula as

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\varphi(-\beta)}{\Phi(-\beta)} k_i\right)^{1/2} \quad (31)$$

Both formulae break down for $|\beta| \leq 1$ and $\beta k_i > 1$. For small β 's an exact formula for the exact probability content of a parabola by Tvedt [8] is used although a fitting of the limit state function by a paraboloid has no theoretical justification. In the region of moderate β ($|\beta|=1$ to 3) a linear interpolation between the parabola and the asymptotic result is used.

Time-variant reliability

As in time-invariant component reliability the limit state function should be defined such that: $g(r, q, s(t), t) > 0$ denotes the safe state, $g(r, q, s(t), t) \leq 0$ denotes the failure state, and $g(r, q, s(t), t) = 0$ is the limit state, where R is a vector of random variables as in time -invariant reliability and its distribution parameters can be deterministic functions of time, Q is a vector of stationary and ergodic sequences usually used to model long term variations in time, and S is a vector of not necessarily stationary random process variables whose parameters can depend on Q and/or R . A rate of outcrossing into the failure domain conditional on q and r can be defined as

$$v^+(F, \tau) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} P(\{g(S(\tau), \tau) > 0 | r, q\} \cap \{g(S(\tau + \Delta), \tau + \Delta) \leq 0 | r, q\}) \quad (32)$$

where F denotes the failure domain. In order to exist it is necessary that the limiting operation can be performed. This excludes certain processes, which fluctuate too rapidly in time.

Further, in a small time interval there is at most one crossing. The probability of more than one crossing is negligible. Then the process of crossing is called a regular process.

The mean number of crossing in the time interval $[0, t]$ conditional on q and r can be determined from

$$E[N^+(t)|q, r] = \int_0^t v^+(F, \tau) d\tau \quad (33)$$

This leads to

$$P_f(t) \approx E_R \left[1 - \exp \left[-E_Q \left[E[N^+(t)|q, r] \right] \right] \right] \quad (34)$$

An upper bound is

$$P_f(t) \leq E_R \left[E_Q \left[E[N^+(t)|q, r] \right] \right] \quad (35)$$

For vectorial rectangular wave renewal process, Breitung and Rackwitz [9] have shown that under stationary conditions the outcrossing rate can be calculated as the product of the jump rate, and the probability that a component of the rectangular wave jumps from the safe domain into the failure domain summed up over components of the vector rectangular wave renewal process. Breitung [10] showed that in the stationary case the asymptotic outcrossing rate can be approximated by

$$v^+(F, \tau) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta k_j)^{-1/2} \quad (36)$$

This theoretical result shows that the β -point is the correct expansion point for the probability integration as in time-invariant reliability. Clearly, one can choose between FORM and SORM to determine the probability $P(g(R, Q, S(\tau)) \leq 0)$. The expected number of stationary outcrossings is $(t_2 > t_1)$

$$E[N^+(t_1, t_2)] = (t_2 - t_1) \sum_{i=1}^m \lambda_i \Phi(-\beta) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta k_j)^{-1/2} \quad (37)$$

The non-stationary case requires some additional considerations [11]. Non-stationarity can occur if the jump rates $\lambda(\tau)$ are time-dependent, the distribution parameters of the R-variables depend deterministically on time and/or the failure surface depends deterministically on time via time-dependent parameters. The mean number of outcrossings then must be determined from eq.33 where

$$v^+(F, \tau) \approx \sum_{i=1}^m \lambda_i(\tau) \Phi(-\beta(\tau)) \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \beta(\tau) k_j(\tau))^{-1/2} \quad (38)$$

Reliability analysis for geotextiles

As an example to investigate the reliability of geotextiles, the reliability of the fabrics in the geotextile wall shown in Fig.. The stochastic model is shown in Table 8 below. When estimating the parameters it is found that K and m are highly negatively correlated. Hence, the correlation coefficient between K and m is assumed to be (-0.998).

Table 8: Stochastic model of the geotextile wall

Parameter	Distribution	Mean	St. deviation
Initial strength $R_0(0)$	Log-Normal	10000 N/m	200
Temperature s	Normal	10	1
Surcharge q	Normal	9580 N/m ²	2395
Soil friction angle φ	Normal	36	3.6
Soil density γ_s	Normal	17270 N/m ³	863.5
K	Normal	-30	0.4
m	Normal	7	0.1
n	Constant	3	-
S_v	Constant	0.305 m	-
z	Constant	variable	-

The stress σ in a fabric at a depth z from the ground surface is [16]

$$\sigma = \sigma_h S_v \quad (39)$$

where S_v is the vertical spacing (lift thickness) between fabrics and σ_h is the total lateral pressure at depth considered which is expressed as

$$\sigma_h = \sigma_{hs} + \sigma_{hq} \quad (40)$$

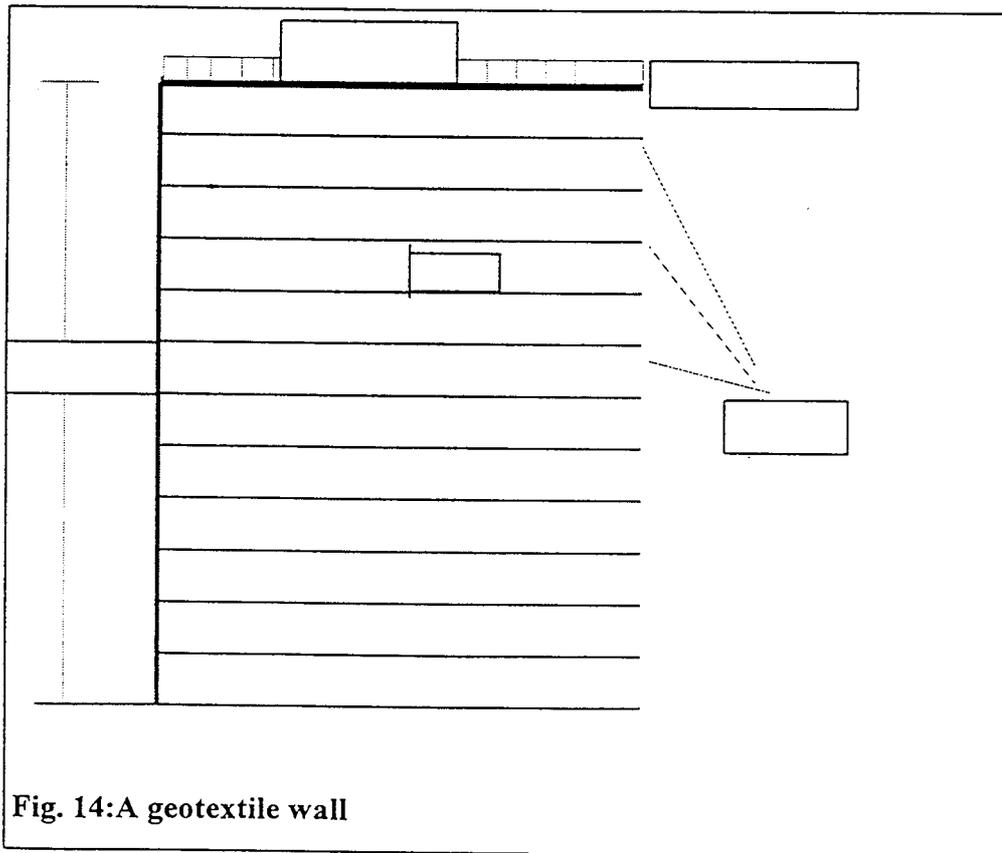


Fig. 14: A geotextile wall

where

$$\sigma_{hs} = K_a \gamma_s z \quad (41)$$

is the lateral pressure due to soil,

$$\sigma_{hq} = K_a q \quad (42)$$

is the lateral pressure due to surcharge,

$$K_a = \tan^2(45 - \varphi / 2) \quad (43)$$

is the coefficient of active earth pressure, γ_s is the soil unit weight, φ is the soil angle of internal friction, and z is the depth of fabric under consideration.

The limit state function is

$$R_t(t) - \sigma = 0 \quad (44)$$

where $R_t(t)$ is the residual strength which can be expressed using eq.22.

In time-variant analysis we keep the same stochastic model with only a change in the surcharge to be a jump process with a jump rate one per year. The mean value of the initial strength of the fabrics becomes 35000 N/m with the same coefficient of variation. The reference time is assumed 100 years.

Time-invariant analysis)

For a reference time 50 years (Table 10) $\beta_{FORM}=3.884$, $\beta_{SORM}=3.844$ and $P_f=6.048E-05$, while for a reference time 100 years (Table) $\beta_{FORM} = 2.997$, $\beta_{SORM} = 3.002$ and $P_f = 1.342E - 03$.

Table 9: Normalized sensitivity and design point after 100 years

Variable	Sensitivity	Design point	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.720E-2	9988	0.999
Temperature s	-9.555E-1	12.86	1.286
Surcharge q	-3.026E-2	9797	1.023
Soil friction angle φ	1.312E-1	34.58	0.961
Soil density γ_s	-3.660E-2	1.736E+4	1.005
K	-2.576E-1	-29.69	0.990
m	-2.867E-2	6.924	0.989

Table 10: Normalized sensitivity and design point after 50 years

Variable	Sensitivity	Design point	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.346E-1	9894	0.989
Temperature s	-1.186E-1	10.46	1.046
Surcharge q	-2.220E-1	1.164E+4	1.216
Soil friction angle φ	9.196E-1	23.14	0.643
Soil density γ_s	-2.685E-1	1.817E+4	1.052
K	-2.942E-2	-29.95	0.998
m	-2.635E-3	6.989	0.998

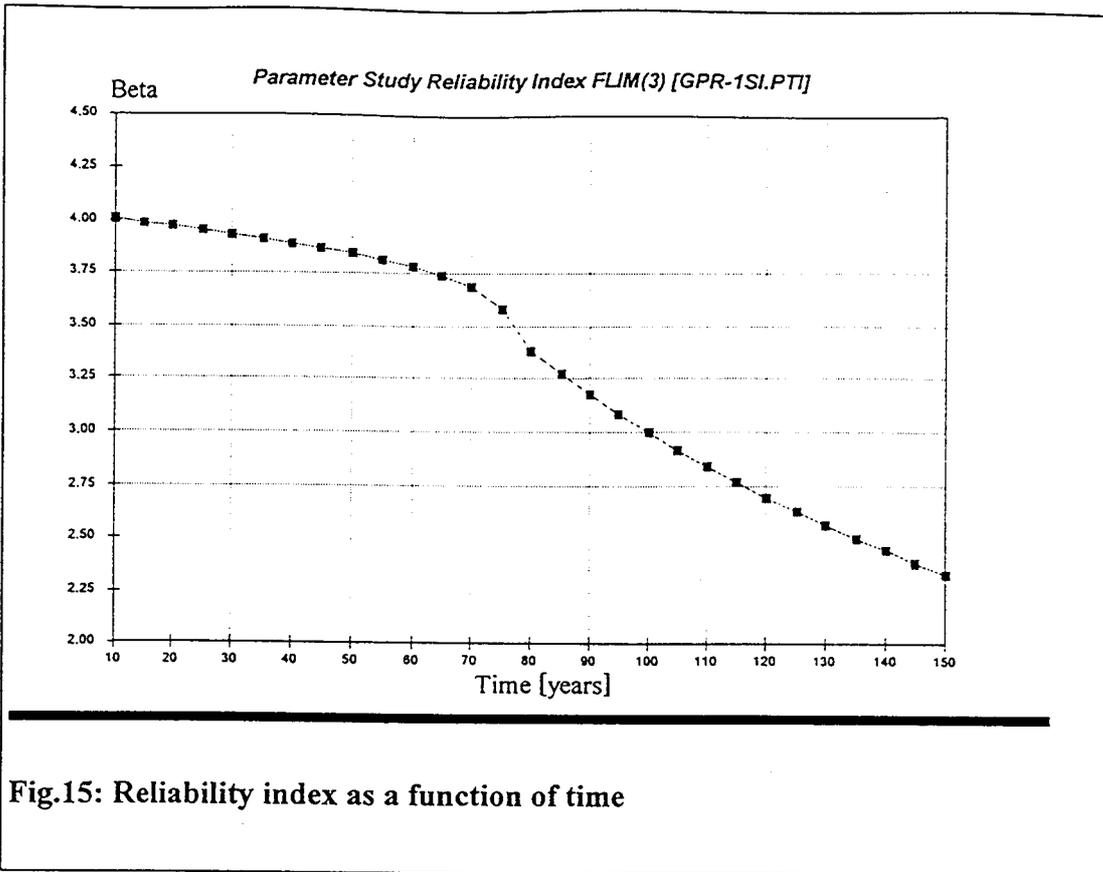


Fig.15: Reliability index as a function of time

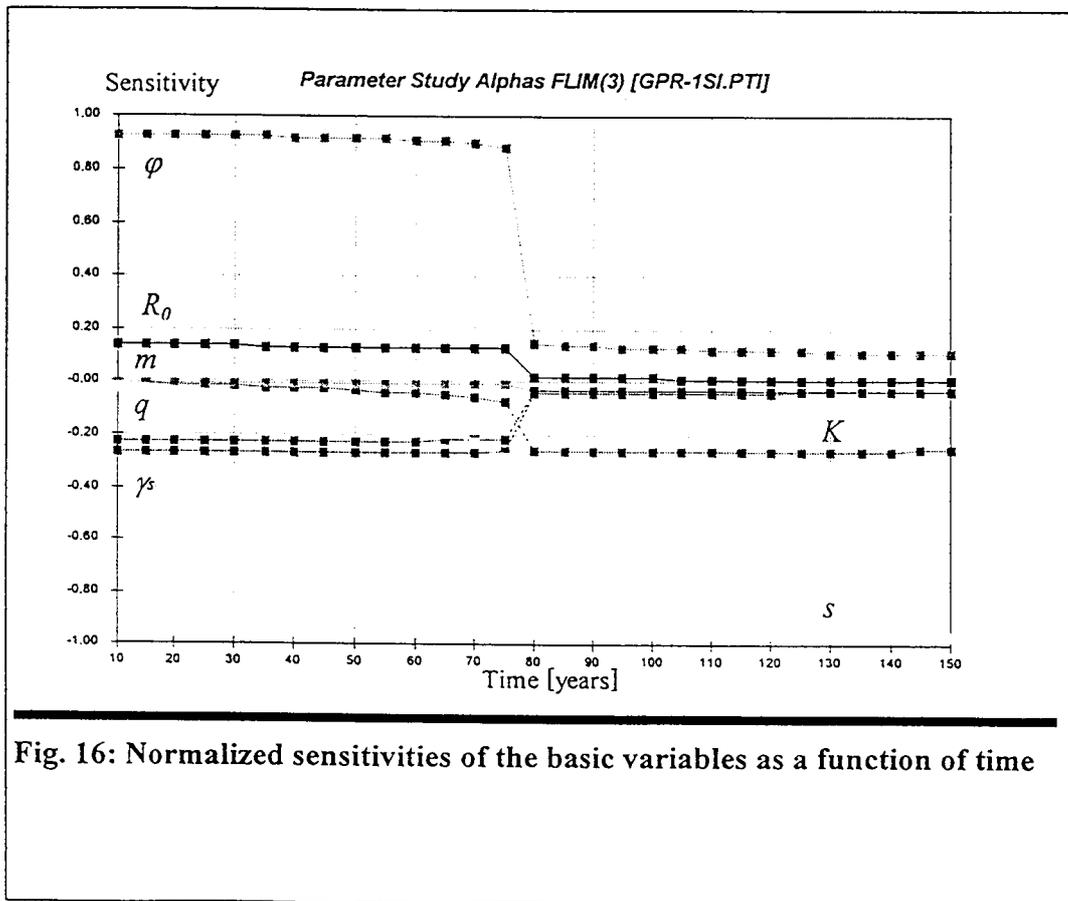


Fig. 16: Normalized sensitivities of the basic variables as a function of time

The normalized sensitivity and the design point of the basic variables after reference time 100 years and 50 years are shown in Table and Table 10 respectively. It is seen that the important variables change when moving from 50 years to 100 years reference time. This property is investigated by running parametric study for the reliability index as a function of the reference time as shown in Fig.15. It is noticed that the trend of the behavior of reliability index changes at 75 years-reference time. Moreover, as it is seen, the rate of reduction of β increased after this 75 years. In this regard, it is important to note as it is seen in Fig.16, that the normalized sensitivities of the basic variables change sharply between 75 and 80 years. Before 75 years the dominating variable is the soil angle of internal friction φ which is a strength variable, while after 80 years the dominating variable is the temperature s which is a demand variable. It is also seen that, with the exception of the abrupt change the sensitivities with respect to most of the basic variable keep constant. However, the sensitivities with respect to K and s increase till the abrupt change then keep constant afterwards. In order to investigate the possibility of existing of local β -points, the parametric study shown in Fig.15 is performed with different initial points. The results are exactly the same and this assures that the obtained reliability index is unique one. Obviously, this situation of abrupt change of the importance of the basic variables must be avoided. In other words, the reference time should be kept less than the time of sudden change or the time after which the aging effect of temperature become dominating..

Time-variant analysis

For a reference time 100 years the following results are obtained (Table):

$$\text{Instantaneous } \beta_{FORM}=3.173$$

$$\beta_{FORM}=2.298$$

$$\beta_{SORM}=2.823$$

$$P_f=2.382E-3$$

$$\text{SORM correction factor } C_{SORM}=0.2207$$

$$\text{Time correction factor } C_T=14.31$$

$$\beta^{red}=-\Phi^{-1}(\Phi(-3.137)*100/14.31)=2.514$$

$$x^*(\text{surcharge})=9580.76$$

Table 11: Normalized sensitivity and design after 100 years

Variable	Sensitivity	Design point	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	6.86E-5	3.499E4	Calculate
Temperature s	-9.65E-1	13.06	
Surcharge q	-1.26E-4	9581	1
Soil friction angle φ	5.53E-4	35.99	
Soil density γ_s	-1.53E-4	1.727E4	
K	-4.61E-2	-29.67	
m	2.59E-1??	6.918	

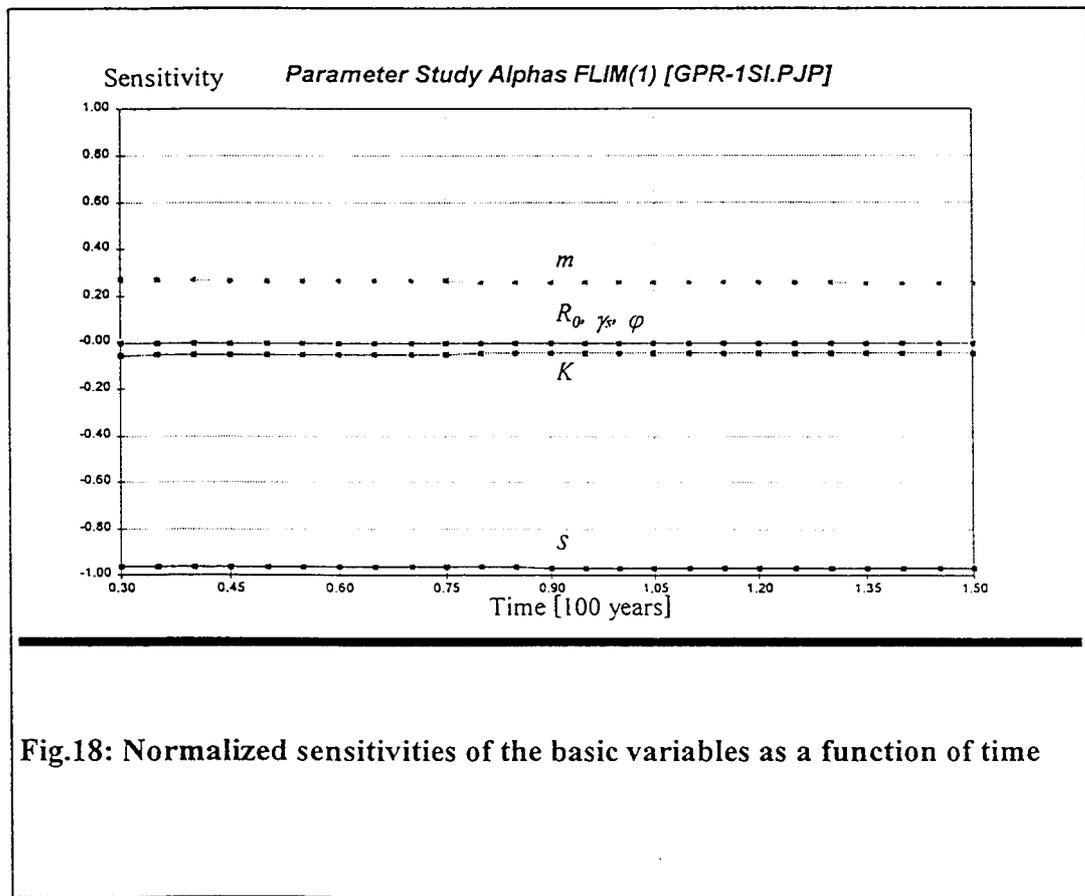
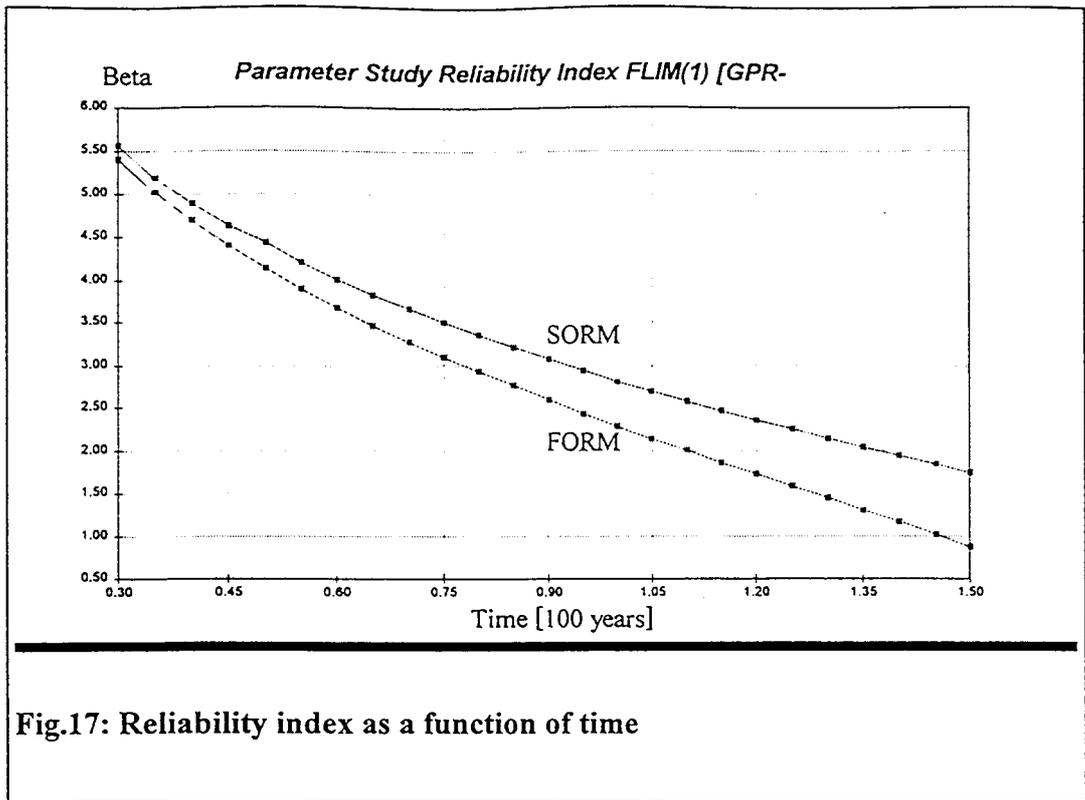


Table 11 shows the normalized sensitivity and the design after 100 years. On the contrary to the time-invariant case, and for the used data set it is noted that the behavior does not have the above-mentioned abrupt changes. It is also seen in Fig.17 that the difference between FORM and SORM with the increase of service time which reflects the increase of non-linearity of the state function with the service time. Referring to Fig.18, it is seen that the sensitivities with respect to the basic variables keep constant throughout the assigned time.

When using the same data set as in time-invariant case, the following results are obtained:

For a reference time 40 years (Table):

Instantaneous $\beta_{FORM}=3.917$

$\beta_{FORM}=2.990$

$\beta_{SORM}=2.960$

$P_f=1.537E-3$

SORM correction factor $C_{SORM}=1.102$

Time correction factor $C_T=31.14$

$\beta_{red}=-\Phi^{-1}(\Phi(-3.917)*40/31.14)=3.8562$

$x^*(surcharge)=11639.5$

And for a reference time 100 years the results are as follows (Table):

Instantaneous $\beta_{FORM}=2.997$

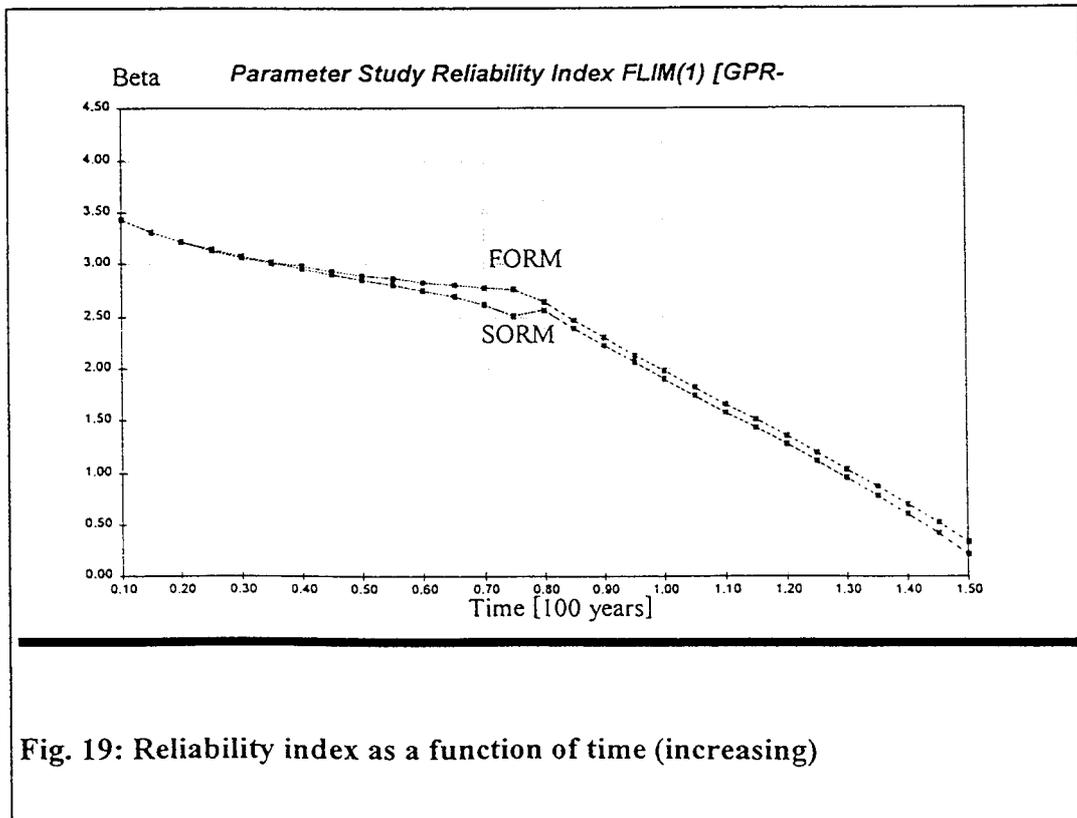
$\beta_{FORM}=1.983$

$\beta_{SORM}=1.904$

$P_f=2.84E-2$

SORM correction factor $C_{SORM}=1.201$

Time correction factor $C_T=17.39$



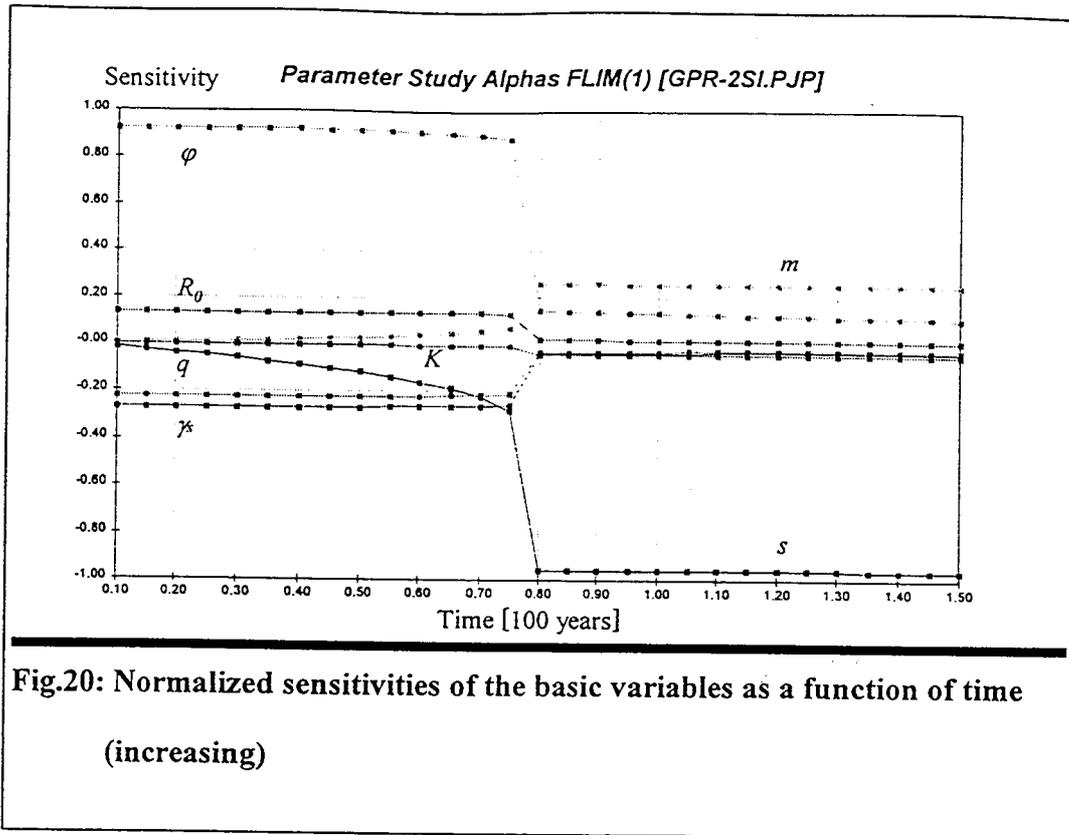


Fig.20: Normalized sensitivities of the basic variables as a function of time (increasing)

Table 12: Normalized sensitivities and design point at 40 years reference time

Variable	Sensitivity	Design point	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.35E-1	9893	
Temperature s	-8.59E-2	10.34	
Surcharge q	-2.23E-1	1.167E4	1.215
Soil friction angle φ	9.23E-1	22.99	
Soil density γ_s	-2.70E-1	1.818E4	
K	-3.21E-3	-29.97	
m	2.10E-2	6.992	

Table 13: Normalized sensitivities and design point at 100 years reference time

Variable	Sensitivity	Design point	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.72E-2	9988	
Temperature s	-9.56E-1	12.86	
Surcharge q	-3.03E-2	9797	
Soil friction angle φ	1.31E-1	34.58	
Soil density γ_s	-3.66E-2	1.736E4	
K	-4.49E-2	-29.69	
m	2.55E-1	6.924	

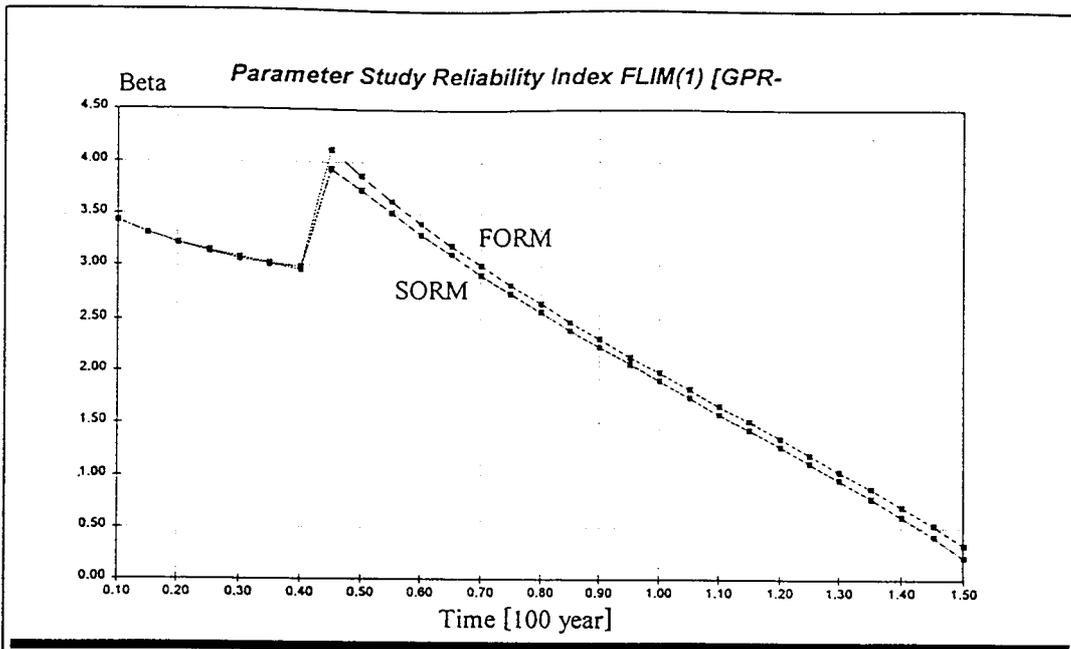


Fig.21: Reliability index as a function of time (decreasing)

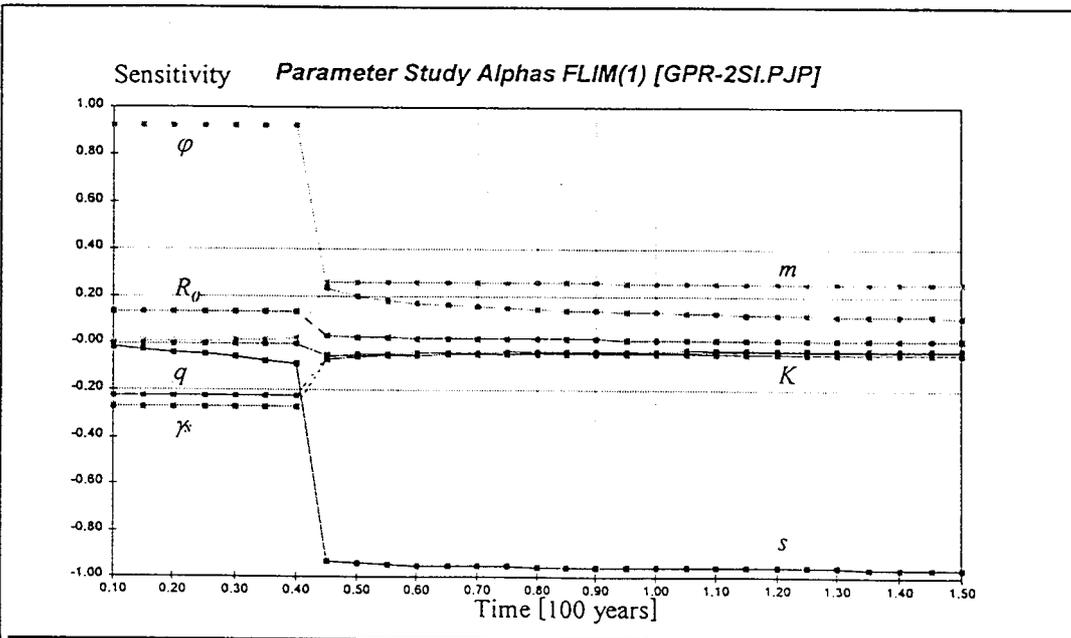


Fig.22: Normalized sensitivities of the basic variables as a function of time (decreasing)

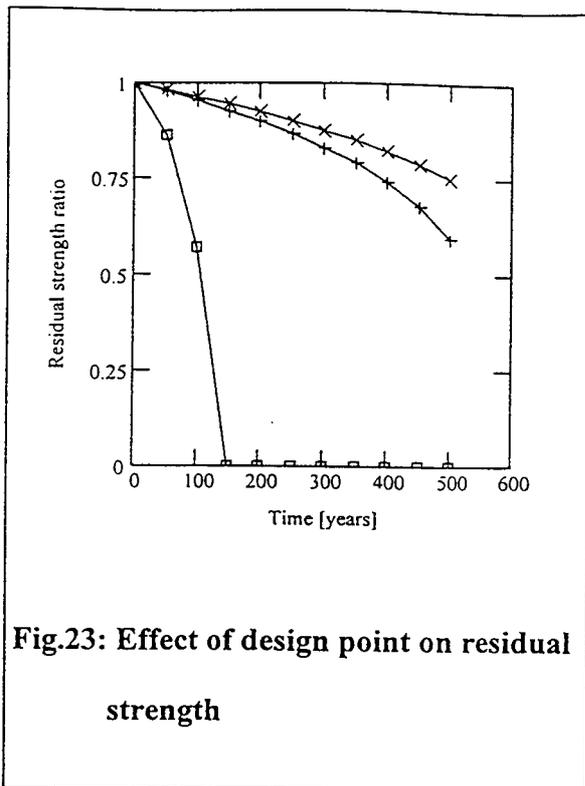


Fig.23: Effect of design point on residual strength

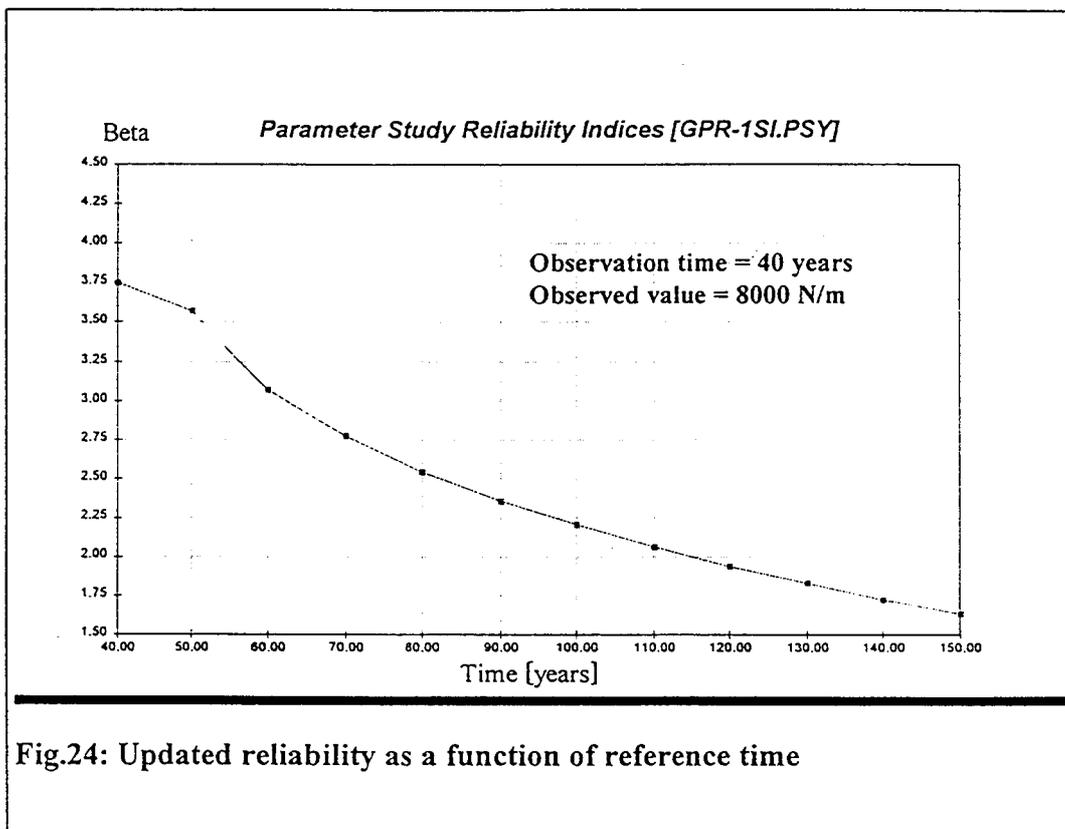
By comparing Fig.19 and Fig.21 which show a parametric study of the reliability index as a function of the reference time but with different initial points, one may realize the existence of more than one β -point. However, it can be seen that the former figure gives the minimum reliability index. Nevertheless, the situation is not as simple as it can be seen. Unfortunately, the minimum β curve does not reflect the critical situation. Referring to Fig.20 and Fig.22 for which we used the same initial points as for Fig.19 and Fig.21, respectively, one may realize that the critical situation lies in the latter figure. It is seen from the latter figure that the reference time should not exceed 40 years while for the former, the reference time can extend to 75 years, which may be unsafe. Referring to Fig.23 the above situation may be clarified a little. This figure shows how the residual strength decrease with time using the mean values of the basic variables and the design point at 40 years (before the abrupt change) as well as the design point at 100 years (after the abrupt change). It is seen that the use of the design point resulting after the abrupt change make the rate of deterioration very high compared with the deterioration rate using the mean values or the design point before the abrupt change. Moreover, the difference between the residual strength reduction in case of mean values and design point at 40 years is small. It is now worth repeating that the reference time should be kept less than the time at the abrupt change.

Reliability updating (as a time-invariant problem)

The same stochastic model as in time-invariant case is used. It is assumed that the residual strength of some of the fabrics in service can be measured after a specific time. Alternatively, some fabrics which are artificially exposed to atmosphere which simulates the field conditions can be tested. Practically, some uncertainties are associated with the measured residual strength R_{obs} . It is assumed that the measurement error M_{err} is a normally distributed random variable with coefficient of variation 10%. Also, it is assumed that after 40 years the residual

strength is evaluated. Two observed values are assumed. The first is 8000 N/m and the second is 9000 N/m.

In Fig.24 and Fig.26 the updated reliability with observed residual strength 8000 N/m and 9000 N/m, respectively after 40 years is drawn as a function of the reference time. In Fig. ? and Fig. the updated normalized sensitivities for the two observed values are shown as a function of the reference time. A comparison between the updated reliability indices and the original one is shown in Fig.13. Referring to Fig.13, it is seen how the observed residual strength affects the reliability. Naturally, if the observed residual strength is the same as that predicted by the equation, the updated and the original reliability will coincide. With the increase of the difference between the observed and predicted values, the difference between the updated and the original reliability increases. Nevertheless, as a function of time, all the curves seem to have the same trend.



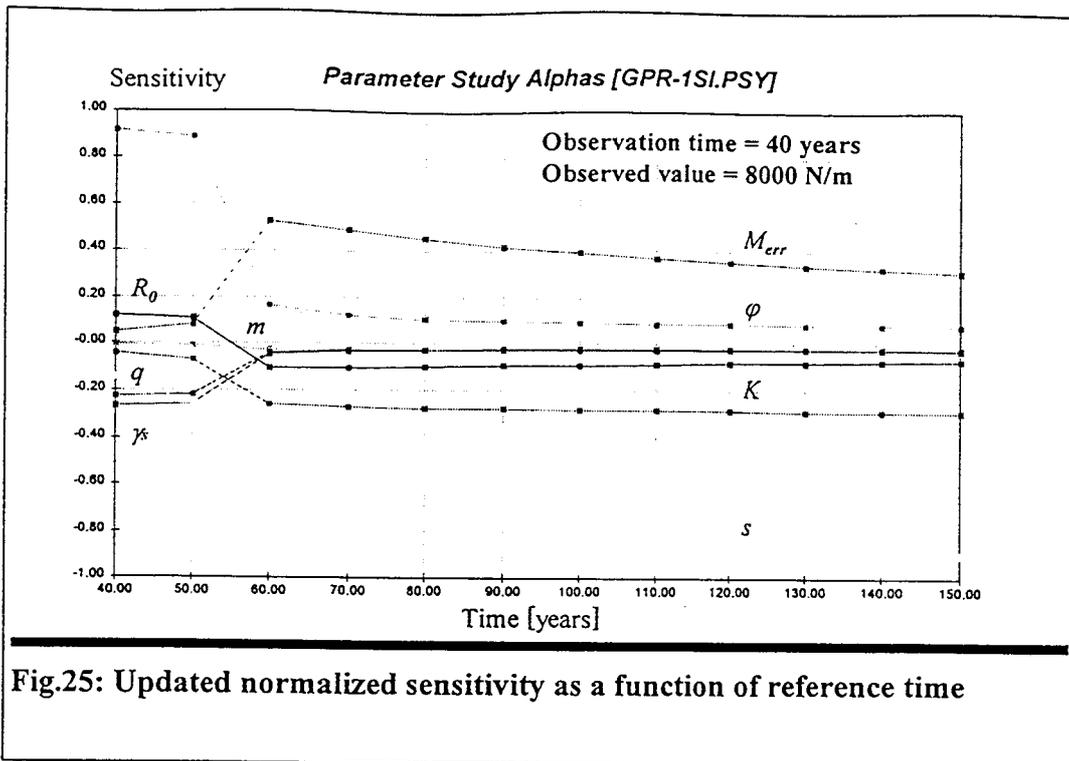


Fig.25: Updated normalized sensitivity as a function of reference time

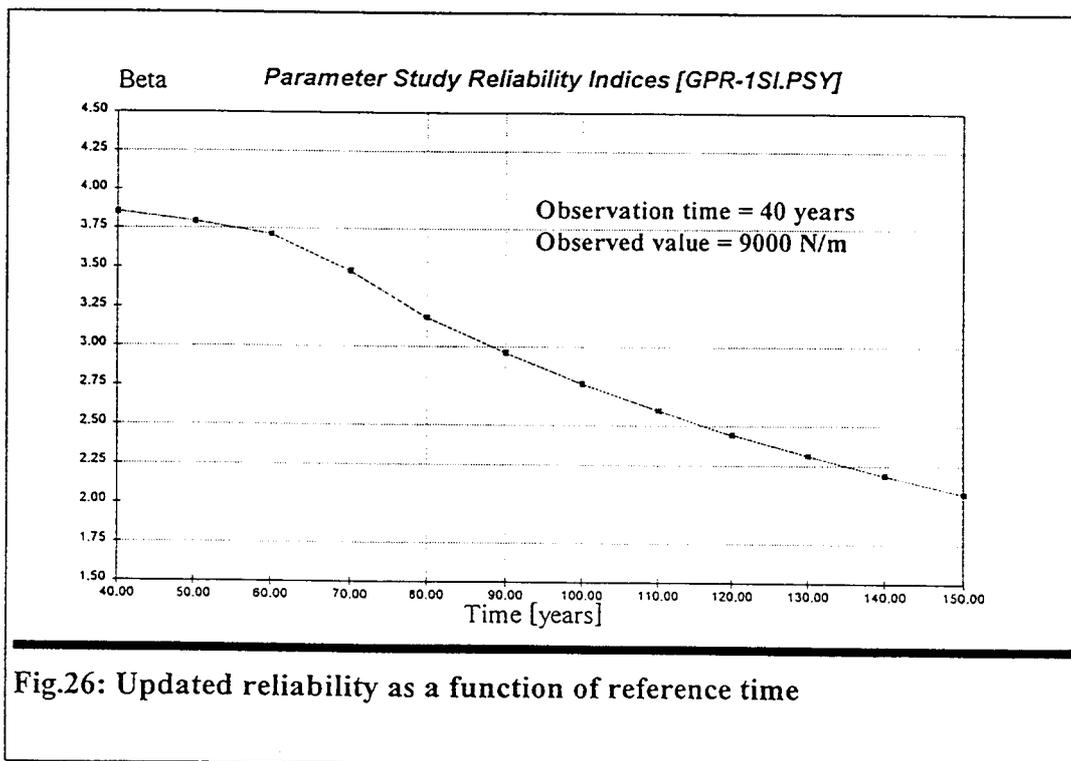


Fig.26: Updated reliability as a function of reference time

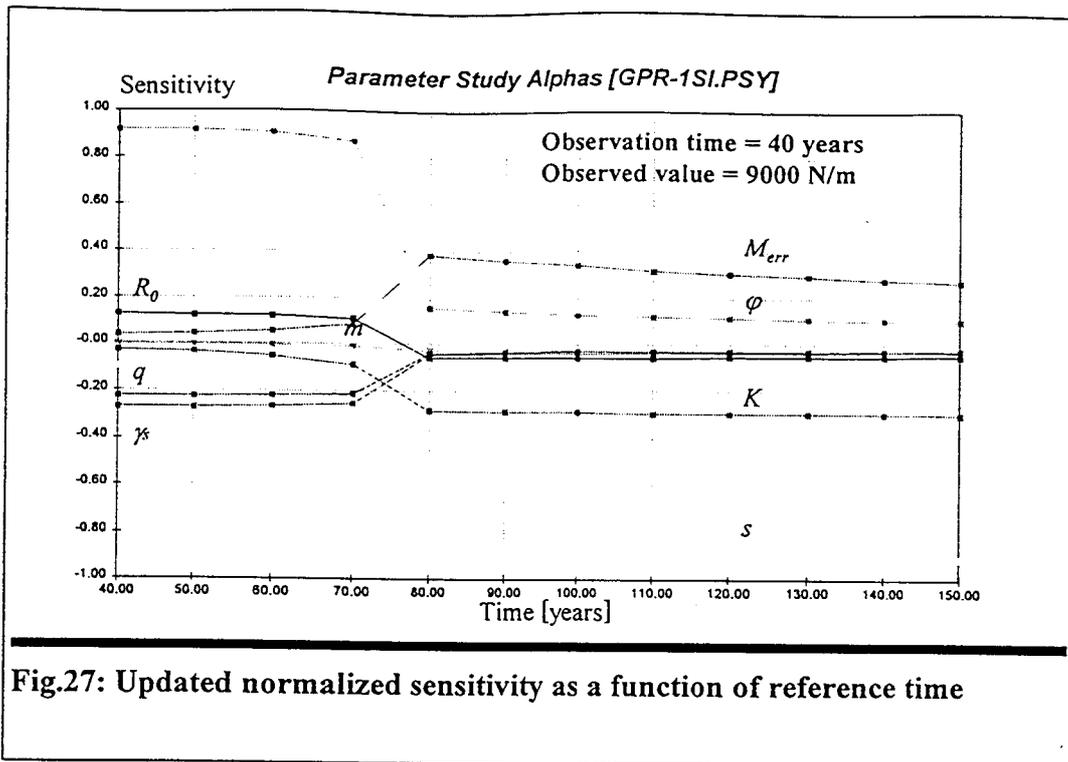


Fig.27: Updated normalized sensitivity as a function of reference time

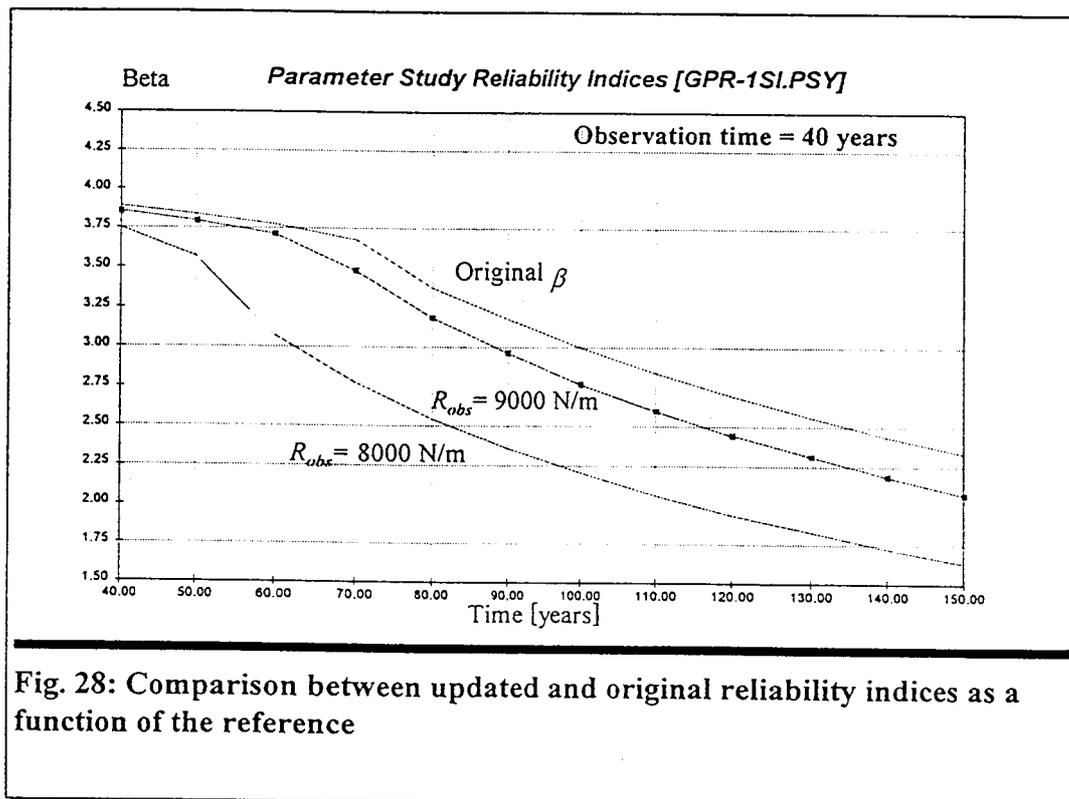


Fig. 28: Comparison between updated and original reliability indices as a function of the reference

Practically, the most important information that can be gained from observation is the critical time or the time after which the effect of temperature become dominant. It is seen, by comparing Fig.16, Fig.25 and Fig.27 that the critical time depend to a large extent on the observed values as compared to the predicted. Moreover, it is seen that the effect of the measurement error becomes large. Surprisingly, the sensitivity with respect to the initial strength changes its sign to be negative which means that the initial strength become demand variable; a situation that should be avoided at any case.

Partial safety factors

Safety factors were traditionally selected largely on the basis of intuition and experience. However, the availability of reliability methods has made it possible to relate probabilistic safety measures to such as the failure probability and β -index to the partial factors of the level 1 safety-checking formats, provided that some simplifications and approximations are accepted [15]. The partial safety factors can be defined as

$$\gamma_i = \frac{x_i^*}{x_{c,i}} \quad (45)$$

where x_i^* is the so-called design value of the random variable x_i and $x_{c,i}$ is the characteristic or nominal value of the random variable.

According to Eurocode No. 1 (Basis of Design and Actions) table (2.2.1), the following target reliability indices related to 50 years is employed:

Table 12: Target reliability indices related to 50 years

Relative cost of safety measures	Consequences of failure			
	serviceability	Ultimate Limit States		
		Some	Moderate	Large
High	1.0	2.8	3.3	3.8
Moderate	1.5	3.3	3.8	4.3
Low	2.0	3.8	4.3	4.8

Based on Table 12 the target reliability can be assumed 3.8 for the evaluation of partial safety factors.

Time-invariant P.S.F.

In time-invariant analysis the design point of any random variable is

$$x_i^* = F_i^{-1}(\Phi(-\alpha_i, \beta)) \quad (46)$$

Hence, the partial safety factor becomes

$$\gamma_i = \frac{F_i^{-1}(\Phi(-\alpha_i, \beta))}{x_{c,i}} \quad (47)$$

If X_i is a variable in the state function with negative derivative, the design value is usually larger than the characteristic value, then the partial safety factor will be larger than unity. If it is a variable with positive derivative in the state function the inverse relationship is usually used, i.e.

$$\gamma_i = \frac{x_{c,i}}{x_i^*} \quad (48)$$

Table 13: Partial safety factors before the initiation of the critical time ($\beta_t=3.8$)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.346E-1	10000/9896=1.011
Temperature s	-1.186E-1	10.451/10=1.045
Surcharge q	-2.220E-1	11600/9580=1.21
Soil friction angle ϕ	9.196E-1	36/23.42=1.537
Soil density γ_s	-2.685E-1	18150/17270=1.051
K	-2.942E-2	29.955/30=0.9985
m	-2.635E-3	7.001/7=1

Table 14: Partial safety factors after the initiation of the critical time ($\beta_t=3.8$)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.720E-2	10000/9985=1.002
Temperature s	-9.555E-1	13.631/10=1.363
Surcharge q	-3.026E-2	9855/9580=1.03
Soil friction angle ϕ	1.312E-1	36/34.205=1.052
Soil density γ_s	-3.660E-2	17390/17270=1.007
K	-2.576E-1	29.608/30=0.9869
m	-2.867E-2	7.011/7=1.002

Time-variant P.S.F.

Partial safety factors are defined as the ratio between design values and characteristic values. For normal design against extreme loads, i.e. under stationary conditions, the design values usually are defined in the extreme value distribution referred to the design life. This appears to be a natural definition if only one time-variant load is present. Already when several loads need to be combined corrections have to be made. However, it is not immediately straightforward how and on which basis these corrections are to be made. Whenever non-stationary conditions prevail a new concept is required [14]. In the following it is assumed, for simplicity of derivation, that loads are essentially stationary and all non-stationarity comes from deterioration or other phenomena affecting the resistance variables. One possible concept for the stationary case is as follows. Instead of using extreme value distributions one defines the safety factors in the point-in-time distribution. In accordance with the above considerations a local reliability index can be defined which, if the normal integral of its negative value is multiplied by the reference time, the coincidence probabilities, the SORM factor and the sum of the jump rates, gives the life time failure probability. Thus, there is

$$\Phi(-\beta_t) = \sum_{m=1}^s p_m \sum_{i=1}^{k_m} \lambda_i C_{SORM,m} \Phi(-\beta_m) t \quad (49)$$

If the target reliability index β_t related to reference time is specified the load case failure probability must be such that

$$\Phi(-\beta_m) = \frac{\Phi(-\beta_i) \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^s p_m \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i C_{SORM,j} \Phi(-\beta_j) t\right)}{p_m \sum_{i=1}^{k_m} \lambda_i C_{SORM,m} t} \quad (50)$$

The load case reliability index must be larger than the life time reliability index. Applying eq.50 separately for each load and load case, in which case we have

$$\Phi(-\beta_{m,n}) = \frac{\Phi(-\beta_m)}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{k_m} \lambda_i C_{SORM,m} t} \quad (51)$$

which includes the frequency of load changes and consequently

$$x_{m,n}^* = F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_{m,n} \beta_{m,n})) \quad (52)$$

where $F_n(\cdot)$ is the point-in-time distribution and $\alpha_{m,n}$ the mean value sensitivity in the standard space. Substantial simplification is achieved if there are no coincidence probabilities involved, i.e., all loads are always on. Then, the design values for the loads are simply derived from

$$x_n^* = F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_n \beta_n)) \quad (53)$$

with

$$\Phi(-\beta_n) = \frac{\Phi(-\beta_i)}{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^k \lambda_i C_{SORM} t} \quad (54)$$

For R- and Q-variables we have

$$x_n^* = F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_n \beta_n)) \quad (55)$$

Assume now that for a non-stationary problem the target reliability index β_t is given. Then, in analogy to eq.49 it holds

$$\Phi(-\beta_t) = \sum_{m=1}^s p_m \sum_{i=1}^{k_m} \lambda_i(\tau^*) C_{SORM,m} \Phi(-\beta_m(\tau^*)) C_{T,m} \quad (56)$$

In other words, in the non-stationary case the jump rates, the local geometrical reliability index and second order correction factor are replaced by the corresponding quantities in the critical point and t is replaced by the time correction factor $C_{T,m}$. Eq.56 makes only sense if the argument of the inverse normal integral is smaller than one. Since $C_{T,m}$ is equal to or smaller than t the partial load safety factors for the non-stationary case are equal or smaller than the corresponding factors for the stationary case. Therefore, if compared to the stationary case the “effective” local failure probability is increased by $t/C_{T,m}$ and the “effective” reliability index is

$$\beta_{m,n}^{red} = -\Phi^{-1}\left(\Phi(-\beta_{m,n}) \frac{t}{C_{T,m}}\right) \quad (57)$$

The partial safety factors, finally, are defined as

$$\gamma_{m,n} = \frac{x_{m,n}^*}{x_{c,n}} = \frac{F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_{m,n} \beta_{m,n}^{red}))}{x_{c,n}} \quad (58)$$

with $x_{m,n}$ the nominal or characteristic value defined as an upper/lower quantile in the respective point-in-time distribution functions. Similarly, one defines the safety factors for resistance variables as

$$\gamma_{m,n} = \frac{x_{c,n}}{x_{m,n}^*} = \frac{x_{c,n}}{F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_{m,n}\beta_{m,n}^{red}))} \quad (59)$$

The reduction factor for each variable then is

$$\varepsilon_{m,n} = \frac{F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_{m,n}\beta_{m,n}^{red}))}{F_n^{-1}(\Phi(-\alpha_{m,n}\beta_{l,m}))} \leq 1 \quad (60)$$

Table 15: Partial safety factors before the initiation the critical time ($\beta_i=3.8$) (non-stationary) (50 years)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.35E-1	10000/9872=1.013
Temperature s	-8.59E-2	10.404/10=1.04
Surcharge q	-2.23E-1	12040/9580=1.257
Soil friction angle φ	9.23E-1	36/20.389=1.76
Soil density γ_s	-2.70E-1	18370/17270=1.064
K	-3.21E-3	29.994/30=1
m	2.10E-2	7/6.99=1

Table 16: Partial safety factors after the initiation of the critical time ($\beta_i=3.8$) (non-stationary)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	1.72E-2	10000/9981=1.002
Temperature s	-9.56E-1	14.463/10=1.446
Surcharge q	-3.03E-2	9914/9580=1.035
Soil friction angle φ	1.31E-1	36/33.784=1.066
Soil density γ_s	-3.66E-2	17420/17270=1.009
K	-4.49E-2	29.916/30=1
m	2.55E-1	7/6.88=1.02

Table 17: Partial safety factors before the initiation the critical time ($\beta_i=3.8$) (stationary)

($C_{SORM}=1.102$)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(0)$	+0.135	
Temperature s	-0.0859	
Surcharge q	-0.223	12090/9580=1.262
Soil friction angle φ	+0.923	
Soil density γ_s	-0.270	
K	-0.00321	
m	+0.0210	

Table 18: Partial safety factors after the initiation of the critical time ($\beta_t=3.8$) (stationary) ($C_{SORM}=1.201$)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(\theta)$	+0.0172	
Temperature s	-0.956	
Surcharge q	-0.0303	9922/9580=1.036
Soil friction angle φ	+0.131	
Soil density γ_s	-0.0366	
K	-0.0449	
m	+0.255	

Table 19: Partial safety factors before the initiation the critical time ($\beta_t=3.8$) (Extreme & stationary) ($C_{SORM}=1.149$) (gpr-extr.ijp)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(\theta)$	+0.137	10000/9870=1.013
Temperature s	-0.0851	10.401/10=1.04
Surcharge q	-0.108	15320/14970=1.023
Soil friction angle φ	+0.945	36/19.987=1.801
Soil density γ_s	-0.263	18340/17270=1.062
K	-0.00317	29.994/30=1
m	+0.0208	7/6.99=1

Table 20: Partial safety factors after the initiation of the critical time ($\beta_t=3.8$) (Extreme & stationary) (50 years) ($C_{SORM}=1.422$)

Variable	Sensitivity	Partial safety factor
Initial strength $R_0(\theta)$	+0.0295	10000/9970=1.003
Temperature s	-0.939	14.46/10=1.446
Surcharge q	-0.0199	14940/14970=1
Soil friction angle φ	+0.223	36/32.187=1.118
Soil density γ_s	-0.0579	17510/17270=1.014
K	-0.0436	29.917/30=1
m	+0.250	7/6.881=1.017

References

- 1) Myers, R. H., Response Surface Methodology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1971.
- 2) Draper, N. R. and Smith, H., Applied Regression analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

- 3) Hasofer, A. M. And Lind, N. C., An Exact and Invariant First Order Reliability Format, Journal Eng. Mech., ASCE, 1974, 100, EM1,111-121.
- 4) Rackwitz, R. and Fiessler, B., Structural Reliability under Combined Random Load Sequence, Computers & Structures, 9, 1987, 484-494.
- 5) Hohenbichler, M. And Rackwitz, R., Non-Normal Dependent Vectors in Structural Safety, J. Eng. Mech., ASCE, 107, 6, 1981, 1227-1249.
- 6) Breitung, K., Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals, J. Eng. Mech., ASCE, 110, 3, 1984, 357-366.
- 7) Hohenbichler, M. And Rackwitz, R., Improvement of Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling, Journal of Eng. Mech., ASCE, 114,12, 1988, 2195-2199.
- 8) Tvedt, L., Two Second-Order Approximations to the Failure Probability, Det Norske Veritas, RDIV/20-oo4-83, 1983.
- 9) Breitung, K. And Rackwitz, R., Nonlinear Combination of Load Processes, J. Structural Mech., 10, 2, 1982, 145-166.
- 10) Breitung, K., Asymptotic Approximations for the Crossing Rates of Poisson Square Waves, Proc. Extreme Value Theory and Applications, NIST Spec. Publ. 866, 3, 1993, 75-80.
- 11) Rackwitz, R., On the Combination of Non-Stationary Rectangular Wave Renewal Processes, Structural Safety, 13, 1+2, 1993, 21-28.
- 12) Mann, N. R., Schafer, R. E., and Singpurwalla, N. D., Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- 13) Kendall, M. And Stuart, A., The Advanced Theory of Statistics: Volume 2 - Inference and Relationship, 4th Ed., Charles Griffin & Company Limited, London, 1960.
- 14) Rackwitz, R. and El-Meligy, M., Reliability for Load and Non-Load Induced Strength Deterioration- Derivation of Partial Safety Factors, ICOSSAR '97, 1997, to be published.
- 15) Melchers, R.E., Structural Reliability Analysis and Prediction, John Wiley & Sons, New York, 1987
- 16) Koerner, R. M., Designing with Geosynthetics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 3rd Edition, 1994.